HAL open science

Sur les remplissages holomorphes équivariants

Benoit Kloeckner

▶ To cite this version:

Benoit Kloeckner. Sur les remplissages holomorphes équivariants. Annales de l'Institut Fourier, 2007, 57 (6), pp.2041-2061. hal-00109661

HAL Id: hal-00109661

https://hal.science/hal-00109661v1

Submitted on 25 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00109661, version 1 - 25 Oct 2006

Sur les remplissages holomorphes équivariants

Benoît Kloeckner

25 octobre 2006

1 Introduction

1.1 Remplissages équivariants

La notion de remplissage d'une structure géométrique est très largement étudiée. Nous nous proposons d'en étudier une version dynamique dans un cadre CR. Introduisons pour cela une définition.

Définition 1 (remplissage équivariant) — *Soit M une variété CR de dimension $2n-1$ et F un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}(M)$. *On appelle* remplissage holomorphe *(ou simplement* remplissage*) de M toute variété complexe à bord R de dimension n telle qu'il existe un isomorphisme CR*

$$d : M \to \partial R$$

En conjuguant par d, l'action de F sur M donne une action de F sur ∂R. Si elle se prolonge en une action sur R par biholomorphismes, on dit que R est un remplissage de M équivariant relativement à F.

Comme on ne précise pas l'isomorphisme d dans un remplissage, ce n'est en fait que la classe de conjugaison de F dans $\mathrm{Aut}(M)$ qui nous importe. Une définition précise d'une variété complexe à bord est donnée à la section 1.4.

Étant donnée une variété CR sur laquelle agit un groupe, on peut chercher à classer les remplissages de la variété qui sont équivariants relativement à l'action. Dans cet article, on se restreint au cas des variétés strictement pseudoconvexes. Parmi celles-ci, seule la sphère standard admet une dynamique riche comme le montre le théorème suivant. On appelle sphère standard et on note $\mathcal{S}^{2n-1}$ la variété CR abstraite isomorphe à la sphère unité $\{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = |z_0|\}$ de P^n, muni de coordonnées homogènes $[z_0 : \ldots : z_n]$.

Théorème 2 (Webster–Schoen [9]) — *Soit M une variété CR compacte et strictement pseudoconvexe de dimension $2n-1$. Si $\mathrm{Aut}(M)$ est non compact, alors M est CR-équivalente à la sphère standard $\mathcal{S}^{2n-1}$.*

On se concentre par conséquent sur la sphère standard et les sous-groupes fermés non compacts de son groupe d'automorphismes $\mathrm{SU}(1,n)$. De plus on se restreint au cas $n=2$.

Comme la sphère standard est strictement pseudoconvexe, ses deux côtés ne jouent pas des rôles symétriques. Un remplissage R est dit *convexe* ou *concave* selon le côté du bord occupé par l'intérieur de R.

Plongée comme sphère unité dans P^2, $\mathcal{S}^{2n-1}$ y découpe deux composantes connexes non isomorphes. On note $\mathcal{B}$ la boule standard définie par l'équation $\{\sum_{i=1}^n |z_i|^2 < |z_0|\}$ et $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$ son complémentaire. Ces deux remplissages sont respectivement convexe et concave. Ils sont tous deux équivariants relativement à $\mathrm{SU}(1,2)$ car l'action de celui-ci sur la sphère se prolonge à tout P^2.

Le cas des remplissages convexes équivariant est assez simple.

Proposition 3 — *Soit R un remplissage convexe de $\mathcal{S}^3$ équivariant relativement à un sous-groupe fermé non compact de $\mathrm{SU}(1,2)$. Alors R est isomorphe à la boule standard $\overline{\mathcal{B}}$.*

Notons que sans l'hypothèse d'équivariance, on dispose de résultats importants (et beaucoup plus profonds). Citons en particulier une conséquence des remplissages par disques holomorphes.

Théorème 4 (Eliashberg [2]) — *Soit M une variété CR de dimension 3 difféomorphe à la sphère et strictement pseudoconvexe. Un remplissage convexe de M est difféomorphe à la boule fermée éventuellement éclatée en quelques points.*

Sous l'hypothèse d'équivariance, le cas concave est un peu plus subtil que le cas convexe. On ne peut plus espérer l'unicité car on construit facilement différents exemples à partir de $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$. Choisissons un élément hyperbolique ou parabolique ϕ de $\mathrm{SU}(1,2)$ (c'est-à-dire un élément qui engendre un sous-groupe fermé non compact). Alors ϕ agit sur $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$ et s'il admet un point fixe p en dehors du bord, on peut éclater $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$ en p pour obtenir un nouvel exemple. En effet ϕ agit encore sur l'éclaté et engendre un groupe fermé non compact. On peut continuer à éclater des points fixes de l'action de ϕ pour obtenir de nombreux exemples. Ces remplissages concaves de $\mathcal{S}^3$ sont appelés *éclatements standards* de $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$.

Notre but est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 5 — *Considérons la sphère standard $\mathcal{S}^3$ et un sous-groupe F de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}^3) = \mathrm{SU}(1,2)$. Si F est non compact et fermé dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}^3)$, alors tout*

remplissage concave de $\mathcal{S}^3$ équivariant relativement à F est un éclatement standard de $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$.

Notons qu'il est vain d'espérer classifier précisément les variétés complexes à bord strictement pseudoconcave sans l'hypothèse d'équivariance. En effet priver n'importe quelle variété d'un domaine strictement pseudoconvexe inclu dans l'une de ses cartes fournit une grande diversité d'exemples.

Pour se convaincre que demander seulement la non-compacité du groupe d'automorphismes holomorphes du remplissage ne rend pas le problème accessible, considérons un exemple édifiant dû à McMullen.

1.2 L'exemple de McMullen

Dans [6], McMullen décrit une surface K3 (et plus récemment dans [7], des surfaces rationnelles) possédant un automorphisme ϕ cumulant les deux propriétés suivantes :

1. il est d'entropie positive ;
2. il admet un domaine de Siegel.

Comme ϕ est d'entropie positive, il engendre un groupe non compact. Mais le domaine de Siegel est par définition un ouvert de la surface dans lequel ϕ est conjugué à une rotation, donc il contient un ouvert stable biholomorphe à la boule standard. Si on prive la surface de cet ouvert, on obtient une surface à bord strictement pseudoconcave possédant un automorphisme d'entropie positive. L'image du groupe engendré par ϕ dans le groupe d'automorphismes du bord est relativement compacte et l'inclusion ne peut pas être propre.

En un sens, on peut dire que la dynamique de la surface ainsi construite reste à l'écart du bord.

1.3 Reformulations

Dans cette section, nous proposons une seconde interprétation du théorème 5.

Remarquons tout d'abord que le groupe des automorphismes d'une variété complexe à bord s'injecte naturellement dans le groupe des automorphismes CR du bord. Toutefois cette injection, comme on le verra plus bas, n'est pas nécessairement propre.

Corollaire 6 — *Soit X une surface complexe à bord strictement pseudoconcave. Si*

1. *le groupe d'automorphisme de X est non compact et*
2. *l'inclusion de* $\mathrm{Aut}(X)$ *dans* $\mathrm{Aut}(\partial X)$ *est propre*

alors X est un éclaté de $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$, obtenu comme dans le théorème 5.

Cet énoncé découle du théorème 5 grâce au théorème de Webster–Schoen : nos hypothèses assurent que le groupe d'automorphismes du bord est non compact, donc que le bord est bien la sphère standard.

On peut encore reformuler le résultat en terme de sphère invariante.

Corollaire 7 — *Soit X une surface complexe sans bord. Si*

1. *X possède une hypersurface réelle plongée H qui la déconnecte et*
2. *le groupe des automorphismes de X qui préservent H y induit un groupe fermé non compact d'automorphismes CR*

alors X est nécessairement un éclaté de P^2, obtenu comme dans le théorème 5.

Pour se ramener à cette forme, il suffit de constater que le remplissage concave peut être complété par un remplissage convexe par la boule pour donner une variété complexe sans bord (voir la démonstration plus loin).

1.4 Variétés complexes à bord

On peut généraliser de la façon suivante la notion de variété complexe.

Définition 8 (variété complexe à bord) — *Soient X un espace topologique paracompact séparé et n un entier positif. On appelle* carte complexe *(de dimension n) de X tout quadruplet $\mathscr{U} = (U, \varphi, H, A)$ où*

1. *U est un ouvert de X, appelé* domaine *de la carte ;*
2. *A est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et :*
   - *soit H est une hypersurface analytique réelle de A et $A \setminus H$ a deux composantes connexes D_+ et D_-,*
   - *soit H est vide et on note $D_+ = A$;*
3. *φ est un homéomorphisme de U vers $D_+ \cup H$.*

Deux cartes complexes (U, φ, H, D) et (V, ψ, K, E) sont dites compatibles *si le changement de coordonnées*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

se prolonge en un biholomorphisme dans un voisinage de son domaine de définition vers un voisinage de son image. On considère cette condition satisfaite si $U \cap V = \varnothing$. Un atlas complexe *est un ensemble de cartes compatibles dont les domaines recouvrent X.*

On appelle variété complexe à bord *de dimension n un espace topologique paracompact X muni d'un atlas complexe.*

Enrichir un atlas d'une carte compatible à toutes les précédentes est une opération anodine ; on dit que deux atlas sont équivalents si leur union est encore un atlas et on identifie en fait la structure de variété complexe à bord à la classe d'équivalence de l'atlas choisi.

Une variété complexe à bord est naturellement munie d'une structure de variété différentielle à bord.

L'intérieur d'une variété complexe à bord est muni d'une structure complexe tandis que son bord porte une structure CR, définie localement par les cartes.

D'après le théorème de Newlander–Nirenberg, une variété réelle X munie d'un opérateur complexe ($J : TX \to TX$, $J^2 = -\mathrm{Id}$) défini et intégrable jusqu'à un voisinage du bord est une variété complexe à bord.

Définition 9 (isomorphisme) — *Soient X et Y deux variétés complexes à bord. Un homéomorphisme $F : X \to Y$ est un* isomorphisme complexe *si pour toute carte $\mathscr{V}$ de Y, $F^*\mathscr{V}$ est compatible à toute carte de X. Si $X = Y$, on parle d'*automorphisme.

Un isomorphisme n'est donc rien d'autre qu'un biholomorphisme qui se prolonge à un voisinage du bord.

2 Dynamique de $\mathrm{SU}(1,2)$

Nous aurons besoin de bien comprendre les éléments hyperboliques et paraboliques de $\mathrm{SU}(1,2)$ pour mener à bien la démonstration du théorème 5. En particulier, nous sommes intéressés par leurs bassins d'attraction et de répulsion.

Dans la suite on utilise sur P^2 des coordonnées homogènes $[x : y : z]$ et on note Q la forme hermitienne $|x|^2 + |y|^2 - |z|^2$. La boule unité $\mathcal{B}$ s'écrit ainsi $\{Q < 0\}$.

Le théorème du point fixe de Brouwer implique que chaque élément de $\mathrm{SU}(1,2)$ admet un point fixe dans la boule fermée $\overline{\mathcal{B}}$. On peut les classer en trois catégories : un élément de $\mathrm{SU}(1,2)$ est

- *elliptique* s'il fixe un point de $\mathcal{B}$;
- *parabolique* s'il ne fixe aucun point de $\mathcal{B}$ mais exactement un point de $\partial\mathcal{B}$;
- *hyperbolique* s'il ne fixe aucun point de $\mathcal{B}$ mais exactement deux points de $\partial\mathcal{B}$,

et tout élément est d'un de ces trois types.

Remarquons qu'un point de P^2 fixé par $A \in \mathrm{SU}(1,2)$ correspond à un vecteur propre de la matrice A.

2.1 Description de l'algèbre de Lie

L'algèbre de Lie contient beaucoup d'information sur le groupe, et se prête souvent mieux aux calculs. Les éléments de $\mathfrak{su}(1,2)$ sont les matrices 3×3 de la forme

$$A = \begin{pmatrix} -i(b_1+b_2) & l_1 & l_2 \\ \overline{l_1} & ib_1 & c \\ \overline{l_2} & -\overline{c} & ib_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où b_1 et b_2 sont des nombres réels tandis que l_1, l_2 et c sont des nombres complexes.

Un élément de $\mathfrak{su}(1,2)$ est dit elliptique, parabolique ou respectivement hyperbolique si l'adjectif s'applique à son exponentielle.

Nous nous intéressons maintenant aux transformations paraboliques et hyperboliques, qui nous seront utiles par la suite.

2.2 Éléments hyperboliques

Par définition, un élément hyperbolique $A \in \mathrm{SU}(1,2)$ a deux points fixes p_1 et p_2 dans $\partial\mathcal{B}$. Par chacun de ses points, il passe exactement une droite projective tangente à la sphère $\partial\mathcal{B}$, dont la direction est la droite complexe $\xi_{p_i} \subset T_{p_i}\partial\mathcal{B}$ de la distribution de contact sous-jacente à la structure CR. Ces deux droites L_1, L_2 se coupent en un point q de P^2 et comme elles sont globalement préservées, q est un point fixe pour l'action projective de A. Ces trois points non alignés correspondent à trois vecteurs propres linéairement indépendants, il n'y en a donc pas d'autre.

L'action de $\mathrm{SU}(1,2)$ est deux fois transitive sur $\partial\mathcal{B}$; quitte à conjuguer A on peut donc supposer que les p_i sont les points $[1:1:0]$ et $[1:-1:0]$. Alors q doit être le point $[0:0:1]$, intersection des droites $\{x=y\}$ et $\{x=-y\}$. En utilisant (1) on peut écrire A sous la forme

$$A = \exp \begin{pmatrix} ib & l & 0 \\ l & ib & 0 \\ 0 & 0 & -2ib \end{pmatrix} \tag{2}$$

où $l \neq 0$ et b sont des nombres réels. Quitte à considérer $-A$ qui a la même action sur P^2, on peut supposer $l > 0$. Les valeurs propres de A sont $\exp(l+ib)$, $\exp(-l+ib)$, $\exp(-2ib)$ et A est diagonalisable. Un calcul en coordonnées projectives permet de déterminer la nature des trois points fixes. L'un des points fixes du bord, disons p_1, est attractif avec valeurs propres $\exp(-2l)$ et $\exp(-l-3ib)$. L'autre est répulsif avec valeurs propres $\exp(2l)$ et $\exp(l-3ib)$. Enfin, q est hyperbolique avec valeurs propres $\exp(-l+3ib)$ et $\exp(l+3ib)$.

Sur la figure 1, la sphère $\partial\mathcal{B}$ est représentée en dimension 2 au lieu de 3 et les droites complexes sont représentées par des lignes.

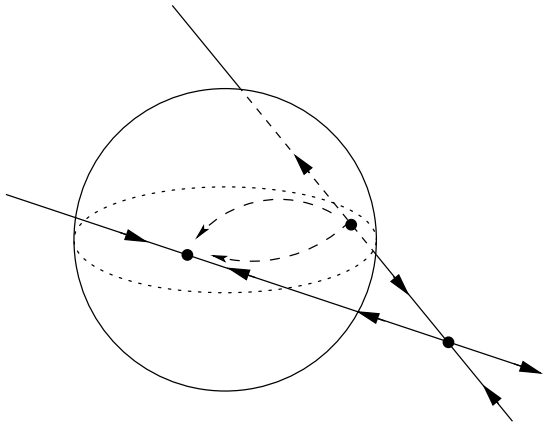

FIG. 1 – Dynamique d'une transformation hyperbolique

Le bassin d'attraction de p_1 est $\mathrm{P}^2 \setminus L_2$, le bassin de répulsion de p_2 est $\mathrm{P}^2 \setminus L_1$. L'union des deux bassins est donc $\mathrm{P}^2 \setminus \{q\}$.

2.3 Éléments paraboliques

Considérons maintenant un élément parabolique $a \in \mathfrak{su}(1,2)$ et A son exponentielle. Quitte à conjuguer, on peut supposer que son unique point fixe au bord est $p = [1:1:0]$.

L'action de A sur la droite projective L passant par p et tangente à $\partial\mathcal{B}$ ne peut être hyperbolique, donc la valeur propre de a associée au vecteur propre $(1,1,0)$ est imaginaire pure et on peut écrire

$$a = \begin{pmatrix} -i(d_1+d_2) & i\left(d_1+\frac{1}{2}d_2\right) & c \\ -i\left(d_1+\frac{1}{2}d_2\right) & id_1 & c \\ \overline{c} & -\overline{c} & id_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

où d_1 et d_2 sont réels et c est complexe. Les valeurs propres de a sont id_2 et $-id_2/2$ avec multiplicité 2. On peut maintenant distinguer trois cas, selon la forme de Jordan de A.

Si $d_2 \neq 0$, p définit l'unique direction propre associée à la valeur propre $-id_2/2$ donc a n'est pas diagonalisable et la forme de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} e^{-i\frac{d_2}{2}} & 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{d_2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{id_2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

L'action de A sur L est alors conjuguée à une rotation de P^1 et A admet un deuxième point fixe $q \in L$. Sur la figure 2, on a cette fois représenté L par une section plane pour y montrer la rotation.

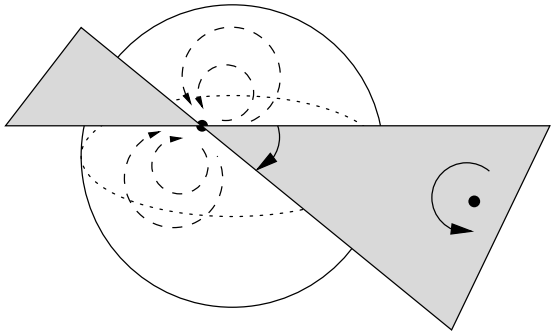

FIG. 2 – Dynamique d'une transformation parabolique à deux points fixes

Dans ce cas le bassin d'attraction de p est $\mathrm{P}^2 \setminus L$.

Si $d_2 = 0$ et $c = 0$, a est nilpotente d'ordre 2, la forme de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

et A fixe chaque point de L (voir la figure 3).

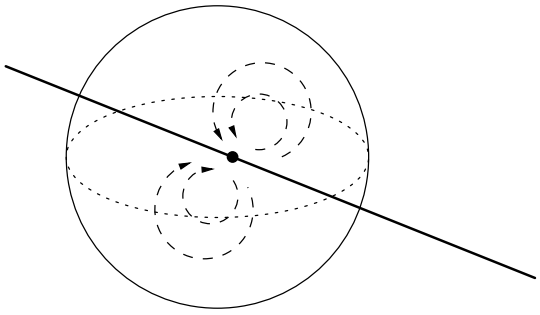

FIG. 3 – Dynamique d'une transformation parabolique fixant chaque point d'une droite

Dans ce cas le bassin d'attraction de p est encore $\mathrm{P}^2 \setminus L$.

Enfin si $d_2 = 0$ et $c \neq 0$, a est nilpotente d'ordre 3, la forme de Jordan de A est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

et p est son seul point fixe, à la fois attractif et répulsif (voir la figure 4).

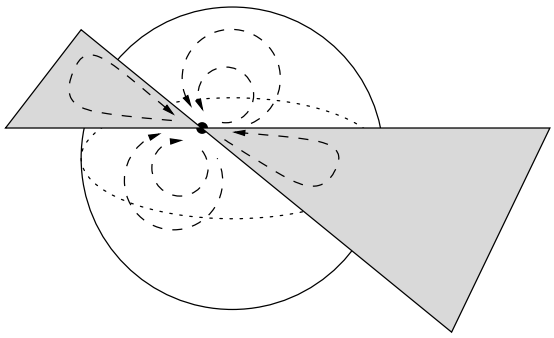

FIG. 4 – Dynamique d'une transformation parabolique fixant un seul point

Dans ce cas le bassin d'attraction est tout P^2.

On obtient donc le résultat suivant qui est une des clés du théorème 5.

LEMME 10 — *Soit g un élément parabolique ou hyperbolique de* $\mathrm{SU}(1,2)$. *Notons p_+ le point fixe attractif de g, p_- son point fixe répulsif s'il est différent et L_+ la droite projective tangente à la sphère unité en p_+.*

Tout ouvert de P^2 contenant l'union du bassin d'attraction de p_+ et du bassin de répulsion de p_- contient :

1. *un voisinage de la boule unité fermée et*
2. *la famille des droites projectives passant par p_+, sauf éventuellement L_+.*

3 Remplissages de la sphère

Dans cette dernière section nous donnons une démonstration du théorème 5. Commençons par en présenter le déroulement.

On considère un remplissage R de la sphère standard, équivariant relativement à un sous-groupe $F \subset \mathrm{SU}(1,2)$ fermé et non compact. On note d un isomorphisme $\mathcal{S} \to \partial R$.

Notre premier outil est le théorème 19 démontré en annexe, qui implique que F n'est pas purement elliptique. Il contient donc au moins une transformation hyperbolique ou parabolique, qui agit sur R et sur P^2 après conjugaison par $d^{-1} : \partial R \to \mathcal{S} \subset \mathrm{P}^2$. On note ϕ l'automorphisme de R et $\widetilde{\phi}$ celui de P^2.

On se base alors sur l'étude des bassins d'attraction et de répulsion de $\widetilde{\phi}$. Elle permet de montrer de façon très élémentaire que R se complète par

l'ajout d'une boule en une surface sans bord X sur laquelle ϕ agit encore. Mieux, elle permet d'exhiber dans X une famille de courbes rationnelles d'auto-intersection 1, homologues entre elles et dont la classe est invariante sous l'action de ϕ. Il découle alors du lemme de Noether que X est une surface rationnelle.

On utilise ensuite le théorème d'indice de Hodge pour montrer que quitte à élever ϕ à une certaine puissance ϕ^k, on peut supposer que ϕ préserve globalement chaque courbe exceptionnelle, ce qui permet de les contracter.

Il suffit alors d'étudier le cas des surfaces rationnelles minimales.

3.1 Prolongement convexe

3.1.1 Prolongement des conjugaisons

On dit de deux automorphismes ψ et $\widetilde{\psi}$ de variétés complexes (éventuellement à bord) X et Y qu'ils sont *localement conjugués* s'il existe des ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$ et un biholomorphisme $F : U \to V$ tel que $F \circ \psi = \widetilde{\psi} \circ F$ là où cette expression est définie. On dit que U et V sont les *ouverts de conjugaison*.

On va utiliser notre étude des bassins d'attraction grâce au lemme élémentaire qui suit.

Lemme 11 (de prolongement) — *Soient ψ et $\widetilde{\psi}$ des automorphismes de variétés complexes (éventuellement à bord) X et Y, localement conjugués dans des ouverts $U \subset X$ et $V \subset Y$. On peut alors prolonger la conjugaison à des ouverts stables $U' \supset U$ et $V' \supset V$ où V' contient tous les bassins d'attraction et de répulsion des points fixes de $\widetilde{\psi}$ dans V.*

Démonstration : notons $U_0 = U$, $V_0 = V$ et $F_0 = F$. On définit récursivement

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= \psi^{-1}(U_k) \\ V_{k+1} &= \widetilde{\psi}^{-1}(V_k) \\ F_{k+1} &= \widetilde{\psi}^{-1} \circ F_k \circ \psi \end{aligned}$$

Ainsi F_k est une conjugaison locale entre les ouverts U_k et V_k. De plus là où deux F_k sont définis simultanément, ils coïncident par équivariance. En passant à l'union, on peut donc construire une conjugaison F_∞ entre les ouverts $\bigcup_k U_k$ et $\bigcup_k V_k$. Ce dernier contient tous les bassins d'attractions des point fixes de $\widetilde{\psi}$ contenus dans V. Comme F est également une conjugaison de ψ^{-1} et $\widetilde{\psi}^{-1}$ on peut à nouveau la prolonger jusqu'à englober les bassins de répulsion. Par construction les ouverts de conjugaison sont stables sous l'action de ψ et $\widetilde{\psi}$ respectivement. ■

3.1.2 Conséquences

Le plongement de $\mathcal{S}^3$ (avec sa structure CR standard) dans une surface est localement unique d'après le résultat suivant.

Théorème 12 (Pinchuk [4]) — *Une application CR, $\mathscr{C}^1$ et non constante entre deux hypersurfaces analytiques réelles et strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ se prolonge localement biholomorphiquement.*

Ainsi d se prolonge en un biholomorphisme au voisinage des points fixes de ϕ et $\widetilde{\phi}$.

On applique le principe de prolongement des conjugaisons pour compléter le remplissage R en une variété complexe sans bord : grâce au lemme 10 on peut prolonger la conjugaison autour des points fixes à une conjugaison sur la boule fermée en complétant R par $\mathcal{B}$.

Proposition 13 — *Il existe une surface complexe sans bord X et une application $i : R \to X$ biholomorphe sur son image, telles que :*

1. *$X \setminus i(R)$ est isomorphe à la boule standard ;*
2. *l'automorphisme $i_*\phi$ de $i(R)$ se prolonge en un automorphisme de X, qu'on note encore ϕ ;*
3. *l'action de ϕ sur X est conjuguée, au voisinage de $X \setminus \overset{\circ}{R}$, à l'action de $\widetilde{\phi}$ sur un voisinage de la boule unité fermée de P^2.*

Remarquons que de la même façon on obtient le résultat complètement élémentaire suivant.

Proposition 14 — *À isomorphisme près, le seul remplissage convexe de la sphère standard équivariant relativement à un groupe fermé non compact est la boule standard fermée.*

Le seul remplissage concave fortement équivariant de la sphère standard est $\mathrm{P}^2 \setminus \mathcal{B}$.

Le lemme 10 livre une information cruciale sur X.

Lemme 15 — *La surface X contient une courbe lisse, irréductible, rationnelle d'auto-intersection 1 qui appartient à un pinceau préservé par ϕ dont au plus un élément est réductible et dont l'unique point-base est le point fixe attractif de ϕ dans ∂R.*

D'après le lemme de Noether, comme X contient en particulier une courbe rationnelle d'auto-intersection 1, c'est une surface rationnelle.

On note $|C|$ le pinceau obtenu dans le lemme 15 et C une de ses courbes génériques.

3.2 Contraction des courbes exceptionnelles

On cherche maintenant à contracter les courbes exceptionnelles de X pour se ramener au cas des surfaces rationnelles minimales, qu'on comprend bien.

Lemme 16 — *Il existe un entier k tel que ϕ^k fixe globalement chacune des courbes exceptionnelles.*

Démonstration : les diviseurs de X se plongent naturellement dans l'espace de cohomologie $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ sur lequel la forme d'intersection se prolonge en une forme quadratique symétrique non dégénérée. Le théorème d'indice de Hodge (voir par exemple [1] page 143) dit que cette forme est de signature lorentzienne. En particulier, puisqu'elle vaut 1 sur la classe de C, elle préserve son orthogonal $C^{\perp}$ et sur celui-ci elle est définie négative.

Un vecteur de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ se décompose sous la forme $\lambda C + D$ où $D \in C^{\perp}$, et la forme définie positive donnée par

$$\lambda^2 - D \cdot D$$

est alors préservée par ϕ.

Considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des courbes exceptionnelles de X. C'est une partie discrète de $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ et comme ϕ agit par isométrie pour une forme définie positive, il existe un exposant k tel que l'action de ϕ^k sur $\mathscr{E}$ est triviale. Mais une courbe d'auto-itersection n'egative est la seule représentante complexe de sa classe d'homologie, donc chaque courbe exceptionnelle est globalement fixée par ϕ^k. ■

On veut maintenant contracter les courbes rationnelles d'auto-intersection -1 : comme chacune de ces courbes est préservée, ϕ sera rationnellement conjuguée par cette contraction à un automorphisme d'une surface minimale.

Toutefois, il ne faut pas contracter de courbe qui rencontre ∂R sous peine de singulariser le bord. Le lemme suivant nous permet de contourner cette difficulté.

Lemme 17 — *Si E est une courbe rationnelle d'auto-intersection -1 qui rencontre ∂R, alors il existe une autre courbe rationnelle d'auto-intersection -1, qui de plus évite ∂R.*

Démonstration : on reprend les détails de la démonstration du lemme de Noether pour déceler cette nouvelle courbe (voir [3] page 513).

La courbe E, puisqu'elle est préservée par ϕ, est nécessairement tangente à ∂R en un point fixe de ϕ. De plus la conjugaison à P^2 doit l'envoyer, au moins au voisinage de ce point, sur la droite tangente à $\mathcal{S}^3$ en p_+ ou p_-.

Il s'ensuit que le pinceau $|C|$ contient bien une courbe réductible C_0, dont E est l'une des composantes. Éclatons le point-base de $|C|$ et notons $C^\wedge$, $C_0^\wedge$ et $E^\wedge$ les transformées propres.

Notons

$$C_0^\wedge = \sum_\nu a_\nu C_\nu$$

où les C_ν sont irréductibles, l'une d'elles est $E^\wedge$ et $a_\nu > 0$. Maintenant l'auto-intersection de $C^\wedge$ est 0 et les C_ν tout comme $E^\wedge$ sont disjointes de $C^\wedge$. On en déduit que

$$C_0^\wedge \cdot C_\nu = C^\wedge \cdot C_\nu = 0$$

puis que toutes les composantes C_ν sont d'auto-intersection négative. La formule d'adjonction donne, en notant K le fibré canonique de X,

$$\frac{C_0^\wedge \cdot C_0^\wedge + C_0^\wedge \cdot K}{2} + 1 = 0 \tag{7}$$

et, comme $C_0^\wedge \cdot C_0^\wedge = 0$, $C_{\nu_0} \cdot K < 0$ pour un certain ν_0. Il découle du critère fort de contractibilité de Castelnuovo–Enriques que C_{ν_0} peut être contractée. Or l'auto-intersection de $E^\wedge$ vaut -2, donc $C_{\nu_0} \neq E$ et C_{ν_0} doit éviter $(\partial R)^\wedge$, en particulier n'est pas affectée par l'éclatement. Avant celui-ci il existait donc bien une courbe contractable évitant ∂R. ■

Si X n'est pas minimale, on peut donc trouver une courbe à contracter. On note avec un $\vee$ en exposant l'image d'un objet par la contraction. Comme la courbe exceptionnelle contractée est globalement préservée par ϕ, on obtient un biholomorphisme $\phi^\vee$ de $X^\vee$ qui fixe le point image de la courbe contractée. On peut alors continuer car $\phi^\vee$ préserve encore une sphère standard, $\partial R^\vee$. Après un nombre fini d'étapes, on arrive à une surface rationnelle minimale.

Il suffit maintenant de montrer un dernier lemme pour obtenir le théorème 5.

Lemme 18 — *Si X est minimale, $X = \mathrm{P}^2$.*

Démonstration : les surfaces rationnelles minimales sont P^2 et les surfaces de Hirzebruch (c'est-à-dire les fibrés en P^1 sur P^1) Σ_n pour $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. Supposons que la surface X est une surface de Hirzebruch. La classe fondamentale de la courbe C d'auto-intersection 1 doit alors se décomposer en

$$[C] = a[F] + b[B]$$

où a, b sont des entiers, F est une fibre et B est la base. Or si $X = \Sigma_n$ on a :

$$F \cdot F = 0 \qquad F \cdot B = 1 \qquad B \cdot B = -n$$

d'où

$$1 = C \cdot C = 2ab - nb^2 = b(2a - nb)$$

On en déduit $b = 1$ et $a = (n+1)/2$, d'où

$$C \cdot B = a - nb = \frac{1-n}{2}$$

et donc $n = 1$, mais Σ_1 est justement la seule surface de Hirzebruch à ne pas être minimale. ■

4 Exemples singuliers

Dans cette dernière section nous proposons de montrer comment, en acceptant les sphères à une singularité, on peut construire des presque-exemples sur Σ_n.

Considérons une transformation parabolique ϕ de P^2 préservant la boule unité, choisie de façon à fixer chaque point d'une droite projective L. Celle-ci est donc tangente à la sphère unité. Éclatons deux points de L, loin du bord et notons E_1, E_2 les courbes exceptionnelles obtenues. La transformée propre $L^\wedge$ est alors d'auto-intersection -1, et on peut la contracter. À travers cette transformation, ϕ passe en un automorphisme de $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1$ qui préserve un domaine biholomorphe à la boule, dont le bord est topologiquement une sphère mais possède un point singulier au point image de la courbe contractée. Ce point est en effet le seul point d'intersection de la sphère avec les transformées propre $E_i^\vee$, et si elle était différentiable en ce point elle devrait leur être tangente à toutes les deux. Mais ces deux courbes sont chacune une fibre d'un des deux réglages de $\mathrm{P}^1 \times \mathrm{P}^1$ et sont donc transverses.

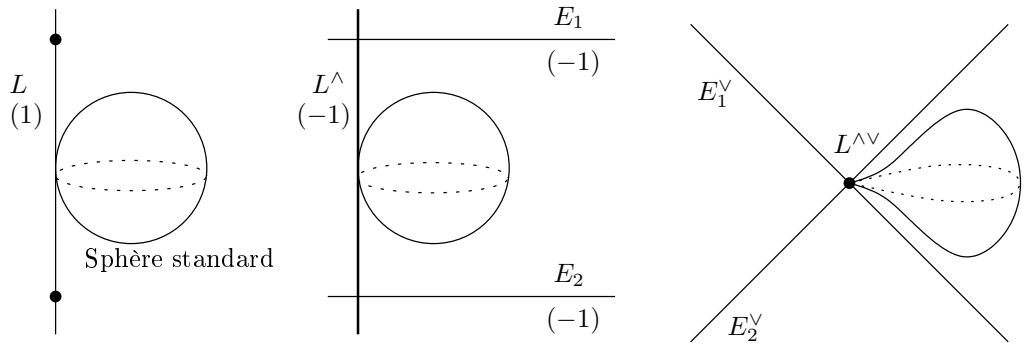

FIG. 5 – Construction d'un exemple singulier dans Σ_0

Considérons maintenant une transformation ϕ qui possède un point fixe hors de la boule unité fermée et éclatons ce point fixe. Dans la surface Σ_1 obtenue la transformée propre $L^\wedge$ de la droite joignant le point éclaté à l'un quelconque des points fixes de ϕ sur la sphère est d'auto-intersection 0. Le point d'intersection entre $L^\wedge$ et la courbe exceptionnelle créée par l'éclatement est alors fixé par $\phi^\wedge$, conjugué de ϕ par l'éclatement. On peut donc éclater Σ_1 en ce point puis contracter la transformée propre de $L^\wedge$ pour obtenir un automorphisme de Σ_2 qui préserve un domaine biholomorphe à la boule, dont le bord est topologiquement une sphère mais possède un point singulier.

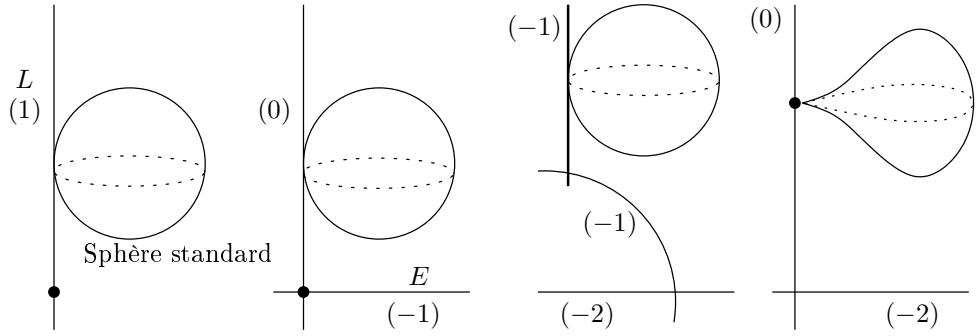

FIG. 6 – Construction d'un exemple singulier dans Σ_2

Ensuite on peut passer à Σ_n en répétant autant de fois que nécessaire l'éclatement du point d'intersection entre la fibre portant le point singulier et la base et la contraction de la transformée propre de cette fibre.

L'existence de ces exemples, singuliers mais dociles, amène à se poser la question suivante. Peut-on trouver une surface X possédant automorphisme qui :

1. est d'entropie topologique positive et
2. préserve une hypersurface réelle H et
3. induit sur H un groupe non relativement compact

en supposant par exemple que

1. H est singulière en un ou plusieurs points et strictement pseudoconvex là où elle est lisse ou
2. H est lisse partout et strictement pseudoconvexe sauf le long d'une sous-variété ?

Annexe : sous-groupes purement elliptiques

Dans cette annexe nous nous intéressons à certains sous-groupes de transformations d'espaces symétriques à courbure négative. L'objectif principal est de démontrer le théorème 19, utilisé dans la démonstration de 5.

Soit M un espace symétrique à courbure négative et G son groupe d'isométries. Un élément de G est dit *elliptique* s'il admet un point fixe dans M. Un sous-groupe F de G est dit *purement elliptique* si tous ses éléments sont elliptiques. On dit que F admet un point fixe s'il est purement elliptique et s'il existe un point de M fixé simultanément par tous les éléments de F.

Théorème 19 — *Un sous-groupe fermé purement elliptique d'isométries d'un espace symétrique à courbure négative est compact.*

Dans ce résultat l'hypothèse de fermeture est capitale, comme le montre le résultat surprenant qui suit.

Théorème 20 (Waterman [10]) — *Il existe des sous-groupes d'isométries de $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ et de $\mathbb{R}^{n-1}$ qui sont purement elliptiques et sans point fixe, dès que $n \geqslant 5$.*

Dans le théorème 19, on peut remplacer « fermé » par d'autres hypothèses (voir par exemple [5]). Par exemple, si tous les éléments de F sont d'ordre fini, alors F est relativement compact. En effet un théorème de Schur assure qu'un groupe de matrices de torsion est virtuellement abélien. Alors F contient un sous-groupe distingué H, abélien donc diagonalisable. Comme H est de torsion, il est inclu dans un tore donc est relativement compact. Mais F est la réunion finie de classes à gauches toutes homéomorphes à H, donc est lui-même relativement compact.

On va relier la compacité de F et l'existance de point fixe en commençant par énoncer un résultat naturel dû à Cartan.

Théorème 21 — *Un sous-groupe compact de G admet toujours un point fixe.*

On peut facilement exhiber des groupes purement elliptiques et non compacts : il suffit par exemple de considérer le groupe engendré par une rotation irrationnelle. Toutefois ces groupes sont relativement compacts, c'est-à-dire que leur adhérence est compacte. Comme les groupes compacts maximaux de G sont les fixateurs des points de M, on a l'équivalence suivante.

Proposition 22 — *Un sous-groupe de G est relativement compact si et seulement s'il admet un point fixe.*

On démontre maintenant le théorème 19, en procédant par étapes. Le principe est simple : si F est discret ou connexe, le résultat découle respec-

tivement du lemme de Selberg ou d'un théorème de Montgomery et Zippin. Le cas général se déduit de ses deux cas extrêmes.

Théorème 23 (Lemme de Selberg) — *Un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *de type fini est virtuellement sans torsion.*

Par « virtuellement sans torsion », on entend qu'il contient un sous-groupe normal d'indice fini et sans torsion.

Corollaire 24 — *Si F est purement elliptique et discret, il admet un point fixe dans M.*

Démonstration : c'est une généralisation d'une démonstration de [10].

Tout élément a de F est d'ordre fini : a est elliptique donc agit comme une rotation sur l'espace tangent de l'un quelconque de ses points fixes, et comme F est discret les angles de cette rotation sont commensurables à π.

De plus F est dénombrable donc il est l'union dénombrable de sous-groupes de type fini $F_n = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Comme M est un espace symétrique, G est un groupe de matrices et il en est de même pour F et F_n. On peut ainsi appliquer le lemme de Selberg à F_n qui est donc virtuellement sans torsion. Mais on a montré que c'est un groupe de torsion donc il est fini.

D'après le théorème 21, il s'ensuit que l'ensemble V_n des points fixes de F_n est non vide. Or V_n est une sous-variété totalement géodésique et complète de M. Une suite décroissante de telles sous-variétés est stationnaire, donc $\bigcap V_n \neq \varnothing$ et F admet un point fixe. ■

Théorème 25 (Montgomery-Zippin [8]) — *Un groupe de Lie connexe et non compact contient un sous-groupe à un paramètre fermé et non compact.*

Corollaire 26 — *Si F est purement elliptique, fermé et connexe, il admet un point fixe dans M.*

Démonstration : comme F est purement elliptique, ses sous-groupes fermés à un paramètre sont tous des cercles. D'après le théorème 25, F est donc compact. On conclut par le théorème 21. ■

On peut maintenant démontrer le théorème 19. On suppose donc que F est un groupe purement elliptique et fermé de G et on va montrer qu'il admet un point fixe.

Pour $f \in F$, on note $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

D'après le corollaire 26, la composante neutre F_0 de F est compacte. Alors l'ensemble

$$P_0 = \bigcap_{f \in F_0} \mathrm{Fix}(f)$$

des points fixés par tout F_0 est non vide et c'est une sous-variété complète et totalement géodésique de M. À ce titre, c'est un espace symétrique.

Considérons $g \in F \setminus F_0$. Alors on a

$$\begin{aligned} gP_0 &= \bigcap_{f \in F_0} g\mathrm{Fix}(f) \\ &= \bigcap_{f \in F_0} \mathrm{Fix}(gfg^{-1}) \\ &= P_0 \end{aligned}$$

donc g agit sur P_0. De plus, n'importe quel autre élément de la composante connexe de g dans F s'écrit gf où $f \in F_0$ donc cette action passe au quotient en une action du groupe discret F/F_0 sur l'espace symétrique P_0. D'après le corollaire 24, F/F_0 admet un point fixe dans P_0, qui est alors un point fixe de F.

Remerciements

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans mon directeur de thèse Abdelghani Zeghib, qui m'a proposé cette question et a su m'encourager à y répondre. Il ne serait pas ce qu'il est sans les explications de Serge Cantat, Jean-Claude Sikorav et Jean-Yves Welschinger. Merci à tous.

Références

[1] Wolf P. Barth, Klaus Hulek, Chris A. M. Peters, and Antonius Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[2] Yakov Eliashberg. Filling by holomorphic discs and its applications. In *Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989)*, volume 151 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 45–67. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[3] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[4] G. M. Khenkin, editor. *Several complex variables. III*, volume 9 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 1989. Geometric function theory, A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 9, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986 [MR0860607 (87m :32011)], Translation by J. Peetre, Translation edited by G. M. Khenkin.

[5] Ravi S. Kulkarni. Conjugacy classes in $M(n)$. In *Conformal geometry (Bonn, 1985/1986)*, Aspects Math., E12, pages 41–64. Vieweg, Braunschweig, 1988.

[6] Curtis T. McMullen. Dynamics on $K3$ surfaces : Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545 :201–233, 2002.

[7] Curtis T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane, 2006. prépublication.

[8] Deane Montgomery and Leo Zippin. Existence of subgroups isomorphic to the real numbers. *Ann. of Math. (2)*, 53 :298–326, 1951.

[9] R. Schoen. On the conformal and CR automorphism groups. *Geom. Funct. Anal.*, 5(2) :464–481, 1995.

[10] P. L. Waterman. Purely elliptic Möbius groups. In *Holomorphic functions and moduli, Vol. II (Berkeley, CA, 1986)*, volume 11 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 173–178. Springer, New York, 1988.