



HAL
open science

Catégories de foncteurs en grassmanniennes

Aurélien Djament

► **To cite this version:**

| Aurélien Djament. Catégories de foncteurs en grassmanniennes. 2006. hal-00108139v2

HAL Id: hal-00108139

<https://hal.science/hal-00108139v2>

Preprint submitted on 7 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Catégories de foncteurs en grassmanniennes

Aurélien DJAMENT^{*†‡}

Octobre 2006 ; révisions mineures en novembre 2006

Résumé : Soit \mathcal{F} la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini. Les *catégories de foncteurs en grassmanniennes* sont obtenues en remplaçant la source de cette catégorie par la catégorie des couples formés d'un espace vectoriel et d'un sous-espace. Ces catégories possèdent une très riche structure algébrique; nous étudions notamment leurs objets finis et leurs propriétés homologiques. Nous donnons des applications à la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F} et à la K -théorie stable des corps finis.

Abstract (Grassmannian functor categories) : Let \mathcal{F} be the category of functors between vector spaces over a finite field. The *grassmannian functor categories* are obtained by replacing the source of this category by the category of pairs formed by a vector space and a subspace. These categories have a very rich algebraic structure; we study in particular their finite objects and their homological properties. We give applications to the Krull filtration of the category \mathcal{F} and to the stable K -theory of finite fields.

Classification mathématique par sujets : 18A25, 18G15. Secondaire : 16P60, 18A40, 18C15, 18D15, 19D99, 20C33, 55S10.

Mots clefs : Catégories de foncteurs, algèbre homologique, groupes linéaires sur les corps finis, grassmanniennes, filtration de Krull, K -théorie stable, représentations modulaires, (co)monades.

^{*}djament@math.univ-paris13.fr

[†]<http://www.math.univ-paris13.fr/djament/>

[‡]LAGA, Institut Galilée, université Paris 13, 99 avenue J.-B. Clément, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE

Table des matières

I	Préliminaires	10
1	Rappels sur la catégorie \mathcal{F}	10
2	La catégorie \mathcal{F}_{surj}	14
2.1	Généralités	14
2.2	Foncteur de décalage et objets finis	17
2.3	Le foncteur $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$	20
2.4	Liens avec les systèmes de coefficients	26
3	Catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole	29
3.1	La catégorie de comodules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$	30
3.2	Recollements de catégories de comodules	32
3.3	La catégorie de modules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{/X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$	34
4	Les catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$	35
4.1	Définition des catégories et foncteurs utilisés	36
4.2	Propriétés des foncteurs fondamentaux	40
4.3	Propriétés de structure des catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$	41
II	Les catégories de foncteurs en grassmanniennes	43
5	Les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$	44
5.1	Généralités	44
5.2	Structures tensorielles	50
5.3	Le foncteur différence	53
5.4	Foncteurs polynomiaux	55
5.5	Foncteurs finis	58
6	La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$	62
6.1	Généralités	63
6.2	Propriété de dualité du foncteur $\tilde{\omega}$	64
6.3	Structure de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$	66
7	La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ comme catégorie de modules	71
7.1	Le foncteur η_I	74
7.2	Résolution canonique et algèbre homologique monadique	75
8	Les catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$	79
8.1	Généralités	79
8.2	L'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n} \simeq \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$	82
9	Foncteurs hom internes et foncteurs de division dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$	89
9.1	Comparaison entre les différentes catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$	89
9.2	Propriétés formelles	91

III Propriétés du foncteur ω. Applications	94
10 Théorème d’annulation cohomologique	95
10.1 Préliminaires	95
10.2 Résultats fondamentaux	98
11 Foncteur ω et foncteurs hom internes	99
11.1 Scindement de $\Delta_V \circ \omega$	100
11.2 Le morphisme $h_{X,F}^* : \omega(\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(X))$. . .	100
12 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}	103
12.1 Foncteurs oméga-adaptés	103
12.2 La conjecture artinienne extrêmement forte	104
12.3 Conséquences de la conjecture artinienne extrêmement forte . . .	107
13 Résultats d’annulation cohomologique dans \mathcal{F}_{inj}	108
13.1 Une propriété élémentaire	109
13.2 Propriétés utilisant le foncteur ω	110
13.3 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}_{inj}	112
A Adjonctions	112
A.1 Algèbre homologique	112
A.2 Monades et comonades	113
B Propriétés de finitude dans les catégories abéliennes	114
B.1 Définitions	114
B.2 Effet de foncteurs exacts	116
B.3 Groupes de Grothendieck	116
B.4 Filtration de Krull	117
C Catégories de foncteurs	118
C.1 Généralités	118
C.2 Générateurs projectifs	119
C.3 Foncteurs hom internes et foncteurs de division	120
C.4 Décomposition scalaire	121
C.5 Produit tensoriel extérieur	121
C.6 Recollements	122

Introduction

Depuis une vingtaine d’années, de nombreux travaux ont mis en évidence les liens féconds entre les catégories de foncteurs, la topologie algébrique, les représentations modulaires des groupes finis et plusieurs théories cohomologiques (cf. [FFPS03] et le chapitre 13 de [Lod98]). Nous montrons comment progresser dans cette voie à l’aide de nouvelles catégories de foncteurs. Nous obtenons ainsi des résultats nouveaux sur des catégories de foncteurs désormais classiques, notamment la catégorie des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini. Nous démontrons en particulier un théorème d’annulation cohomologique très général, que l’on applique à la K -théorie stable des corps finis. Les deux principes

intuitifs suivants guident notre travail : d’une part, la démonstration de propriétés d’annulation cohomologique dans une catégorie de foncteurs est souvent plus facile en transitant par une autre catégorie de foncteurs « plus grosse » ; d’autre part, la structure des objets d’une catégorie de foncteurs peut souvent se ramener à celle d’objets « plus petits » (donc mieux compris) d’une autre catégorie de foncteurs.

Dans tout cet article, \mathbb{k} désigne un corps *fini* ; on note $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur \mathbb{k} , $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ la sous-catégorie pleine des espaces de dimension finie et $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ vers $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}$ (la mention du corps \mathbb{k} sera souvent omise dans les notations, par la suite). La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est abélienne ; elle possède suffisamment d’objets projectifs et injectifs. Des calculs cohomologiques puissants ont été réalisés dans cette catégorie, notamment avec les travaux de Franjou, Lannes et Schwartz ([FLS94]) et de Franjou, Friedlander, Scorichenko et Suslin ([FFSS99]).

L’identification de la cohomologie de Mac Lane (définie dans [ML57]) comme un cas particulier de cohomologie fonctorielle par Jibladze et Pirashvili ([JP91]) illustre l’intérêt des calculs cohomologiques dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$. L’isomorphisme entre la K -théorie stable de \mathbb{k} et l’homologie dans $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ pour des systèmes de coefficients polynomiaux, établi indépendamment par Betley (cf. [Bet99]) et Suslin (cf. appendice de [FFSS99]), a fourni une autre motivation majeure à l’étude des propriétés homologiques de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$. Les articles [Pir03], [PR02] et [PW92] montrent comment aborder d’autres théories homologiques à l’aide de certaines catégories de foncteurs.

L’étude systématique de la catégorie \mathcal{F} est menée depuis le début des années 1990 (voir les articles de Kuhn [Kuh94a], [Kuh94b] et [Kuh95]), à la suite des liens établis par Henn, Lannes et Schwartz dans [HLS93] (voir aussi l’ouvrage [Sch94] de Schwartz) entre les modules instables sur l’algèbre de Steenrod et cette catégorie ; néanmoins, sa structure *globale* demeure fort mystérieuse. En effet, si la compréhension de ses objets de longueur finie peut se réduire à celle de \mathbb{k} -algèbres de dimension finie, il en va bien différemment de ses objets de longueur infinie, dont l’étude se heurte à des problèmes profonds de compréhension *générique* des représentations modulaires (i.e. de compréhension des liens, notamment cohomologiques, entre les représentations de plusieurs groupes) — la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ a d’ailleurs été nommée catégorie des représentations génériques des groupes linéaires sur \mathbb{k} par Kuhn, qui a justifié cette terminologie dans les trois articles susmentionnés.

Ainsi, la conjecture suivante, proposée par Lannes et Schwartz, s’est révélée l’un des problèmes les plus difficiles à résoudre dans cette catégorie.

Conjecture 1 (Conjecture artinienne). *La catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est localement noethérienne.*

Les raisons de la dénomination paradoxale de cette conjecture et une brève discussion de celle-ci sont données à la fin de la section 1.

Explicitons les catégories de foncteurs qui permettent de progresser dans l’étude de la conjecture artinienne. On note $\mathcal{G}r(V)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de V . Nous regarderons $\mathcal{G}r$ comme un foncteur de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ vers la catégorie des ensembles.

Définition 2. Soit $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f(\mathbb{k})$ la catégorie des couples (V, W) , où V est un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie et W un élément de $\mathcal{G}r(V)$, et dont les morphismes

$(V, W) \rightarrow (V', W')$ sont les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ telles que $f(W) = W'$. La *catégorie de foncteurs en grassmanniennes* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k})$ vers $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}$.

Il est également naturel de s'intéresser à la catégorie, notée $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k})$, qui a les mêmes objets que $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k})$, et dont les morphismes $(V, W) \rightarrow (V', W')$ sont les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ telles que $f(W) \subset W'$. La catégorie des foncteurs de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k})$ vers \mathcal{E} , notée $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$, est également considérée dans cet article ; elle constitue un adjuvant pour l'étude de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$.

Pour tout entier positif n , on note $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ (rappelons que la mention du corps \mathbb{k} est désormais sous-entendue) des foncteurs X tels que $X(V, W) \neq 0$ si $\dim W \neq n$. Cette catégorie peut également se décrire comme une catégorie de foncteurs. L'étude des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ constitue le principal sujet de cet article ; le lien entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et les $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ provient de ce qu'il existe une stratification de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ par des sous-catégories épaisses $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$, stratification dont les sous-quotients sont équivalents aux catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$.

On peut également ramener l'étude des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ à celle de catégories plus simples : le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{k})$ intervient naturellement dans la structure de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, qui constitue une sorte de produit semi-direct tordu entre la catégorie des $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -modules et la catégorie de foncteurs $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$ définie comme suit. On note $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ la catégorie des objets V de \mathcal{E}^f munis d'un monomorphisme $\mathbb{k}^n \hookrightarrow V$. La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1, n}$ est la catégorie des foncteurs de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ vers \mathcal{E} . Outre ses liens avec $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, cette catégorie possède un intérêt intrinsèque, car elle est équivalente à la catégorie des comodules de la catégorie \mathcal{F} sur le foncteur injectif standard associé à l'espace vectoriel \mathbb{k}^n .

Mentionnons une autre catégorie de foncteurs considérée dans cet article. Soit \mathcal{E}_{surj}^f la sous-catégorie de \mathcal{E}^f ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont les épimorphismes de \mathcal{E}^f . La catégorie, notée \mathcal{F}_{surj} , des foncteurs de \mathcal{E}_{surj}^f vers \mathcal{E} joue un rôle important dans l'étude de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. En effet, si $f : (V, W) \rightarrow (V', W')$ est un morphisme de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, alors f induit un épimorphisme de W sur W' : on obtient ainsi un foncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f$, donné sur les objets par $(V, W) \mapsto W$, puis par précomposition un foncteur fondamental $\mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Une catégorie analogue à \mathcal{F}_{surj} s'obtient à partir des monomorphismes de \mathcal{E}^f ; on la note \mathcal{F}_{inj} . Elle possède des liens étroits avec les systèmes de coefficients introduits par Dwyer dans [Dwy80] et joue un rôle essentiel dans la comparaison entre la K -théorie stable de \mathbb{k} et les groupes d'extension dans $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ (théorème de Betley-Suslin susmentionné).

Revenons à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Le foncteur d'oubli $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ donné par $(V, W) \mapsto V$ induit par précomposition un foncteur $\iota : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Il est ad-joint à droite au foncteur d'*intégrale en grassmanniennes* $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ donné par

$$\omega(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} X(V, W).$$

Ce foncteur constitue l'outil le plus puissant pour relier les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et \mathcal{F} . Son importance est d'abord illustrée par le résultat formel suivant, dans lequel le foncteur $\omega(\mathbb{k}) = \mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ de \mathcal{F} est muni de la structure comultiplicative déduite du fait que ce foncteur est la linéarisation d'un foncteur ensembliste.

Proposition 3. *Le foncteur $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ induit une équivalence entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et la catégorie des $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ -comodules de \mathcal{F} .*

On peut donner une description similaire des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ en termes de comodules ; celle-ci montre, par dualité, que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ est étroitement liée à la catégorie des $\bar{D}(n)$ -modules de \mathcal{F} , où $\bar{D}(n)$ est un foncteur qui a rapport à l'algèbre de Dickson — cf. l'article [Pow98c] de Powell, qui a annoncé l'importance de cette catégorie de modules.

L'étude de la structure élémentaire de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ repose principalement sur le *foncteur différence*, analogue à l'endofoncteur du même nom dans \mathcal{F} . Ce foncteur, noté $\Delta^{\mathcal{G}_r}$, est donné par le scindement canonique

$$X(V \oplus \mathbb{k}, W) \simeq X(V, W) \oplus \Delta^{\mathcal{G}_r}(X)(V, W).$$

Rappelons que le foncteur différence Δ de \mathcal{F} est quant à lui caractérisé par le scindement canonique $F(V \oplus \mathbb{k}) \simeq F(V) \oplus \Delta(F)(V)$. Comme dans la catégorie \mathcal{F} , on introduit la définition suivante :

Définition 4. Un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ est dit *polynomial* s'il existe un entier n tel que $(\Delta^{\mathcal{G}_r})^n(X) = 0$.

Dans ce qui suit, nous nommons *fini* un objet de longueur finie d'une catégorie abélienne. Un objet *localement fini* est un objet colimite d'objets finis.

Proposition 5. *Les foncteurs finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ sont polynomiaux.*

Ce résultat permet de décrire explicitement les objets simples de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ à partir des objets simples de \mathcal{F} et des représentations simples des groupes linéaires.

Nombre des foncteurs entre la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et la catégorie \mathcal{F} , ou d'autres qui lui sont étroitement reliées, possèdent de bonnes propriétés de commutation au foncteur différence. Par exemple, il existe un isomorphisme canonique $\iota \circ \Delta \simeq \Delta^{\mathcal{G}_r} \circ \iota$ de foncteurs $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. En revanche, le foncteur composé $\Delta \circ \omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ diffère du foncteur $\omega \circ \Delta^{\mathcal{G}_r}$, qu'il contient comme facteur direct. Ainsi, l'image par le foncteur d'intégrale en grassmanniennes d'un objet fini de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ n'est généralement pas un objet analytique (i.e. colimite d'objets polynomiaux) de la catégorie \mathcal{F} . D'ailleurs, tous les objets projectifs de type fini de \mathcal{F} sont l'image par le foncteur ω de foncteurs finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Le principe général d'étude de la catégorie \mathcal{F} à partir de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ consiste à ramener l'étude des objets de type fini de \mathcal{F} à celle des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ grâce au foncteur ω . La mise en œuvre de ce principe s'avère ardue ; en effet, les objets de type fini de la catégorie \mathcal{F} ne sont pas tous isomorphes à l'image par ω d'un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Un énoncé précis que tous les foncteurs de type fini connus dans la catégorie \mathcal{F} vérifient sera discuté dans cet article ; la conjecture 8 présentée ci-dessous en constitue une variante.

Venons-en maintenant à des propriétés profondes des catégories de foncteurs en grassmanniennes. Notre résultat d'annulation cohomologique principal est le suivant, dans lequel \mathcal{I} désigne l'endofoncteur de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ donné par $\mathcal{I}(X)(V, W) =$

$$\bigoplus_{B \in \mathcal{G}_r(W)} X(V, B). \text{ Ce foncteur conserve les objets localement finis.}$$

Théorème 6. *Soient X et Y des objets de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, X étant supposé localement fini. Il existe un isomorphisme gradué naturel $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \omega(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}^*(X, \mathcal{I}(Y))$.*

Dans le corollaire suivant, le foncteur ω_n désigne la restriction du foncteur ω à la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Corollaire 7. *Soient k et n deux entiers naturels, X un objet localement fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$ et Y un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$.*

1. *Si $k < n$, alors $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_k(X), \omega_n(Y)) = 0$.*
2. *Si $k = n$, alors le morphisme naturel $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}}^*(X, Y) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_n(X), \omega_n(Y))$ induit par ω_n est un isomorphisme.*

Le théorème 6 et le corollaire 7 permettent d'une part de généraliser le théorème de Betley-Suslin sur la K -théorie stable de \mathbb{k} , d'autre part de mener de nombreux calculs cohomologiques dans la catégorie \mathcal{F} utiles pour comprendre sa structure, comme le théorème de l'appendice de [Pow98a].

Un moyen efficace d'appréhender la structure globale d'une catégorie abélienne \mathcal{A} consiste à étudier sa filtration de Krull, notée $(\mathcal{K}_n(\mathcal{A}))$ (cf. paragraphe B.4). Le corollaire 7, qui indique une hiérarchie dans la « taille » des objets du type $\omega_n(X)$ selon la valeur de n , où X est un objet localement fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, suggère la description conjecturale suivante de la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F} . Celle-ci précise considérablement la conjecture 1 et constitue une motivation essentielle à l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

Conjecture 8 (Conjecture artinienne extrêmement forte). *Pour tout entier positif n , le foncteur ω_n induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^{\mathrm{lf}}$ des objets localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ et la catégorie quotient $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$.*

Non seulement cet énoncé entraîne toutes les formes renforcées de la conjecture artinienne émises jusqu'à présent, mais il implique aussi un grand nombre d'autres résultats profonds sur la catégorie \mathcal{F} . Dans l'article [Djaa], nous poursuivrons l'étude du foncteur ω et montrerons notamment une forme affaiblie de la conjecture 8, avec des applications à de nouveaux cas de la conjecture artinienne. La plupart des résultats du présent article et de [Djaa] sont déjà exposés dans la thèse de doctorat de l'auteur ([Djab]) lorsque \mathbb{k} est le corps \mathbb{F}_2 à deux éléments.

Pour établir la conjecture artinienne extrêmement forte, nous pensons qu'il sera nécessaire de combiner les catégories de foncteurs en grassmanniennes avec de nouveaux outils liés à la théorie des représentations.

Les méthodes de cet article peuvent se généraliser : la définition, les constructions et propriétés de base de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ se transposent sans changement si l'on remplace la catégorie source $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ par une catégorie abélienne essentiellement petite \mathcal{A} dans laquelle les ensembles de morphismes et de sous-objets sont finis. En effet, dans cette situation, l'adjonction entre les foncteurs $\iota : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et ω s'étend aussitôt, et l'on dispose de foncteurs différences. Des généralisations dans un cadre non abélien sont également envisageables.

Organisation de l'article La première section rappelle les rudiments nécessaires sur la catégorie \mathcal{F} et la conjecture artinienne. La deuxième traite des catégories $\mathcal{F}_{\mathrm{surj}}$ et $\mathcal{F}_{\mathrm{inj}}$, à la fois d'un point de vue intrinsèque et d'un point de vue préliminaire à l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes et de la K -théorie stable de \mathbb{k} .

Les sections 3 et 4 s'attachent à des constructions catégoriques nécessaires à la deuxième partie. Celle-ci introduit les catégories de foncteurs en grassmanniennes $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, $\mathcal{F}_{\mathbf{P}^1, n}$ et $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ et donne leurs propriétés de base : outre leur description fonctorielle, les trois premières d'entre elles sont identifiées comme

catégories de comodules, et traitées de manière monadique, à l'aide du théorème de Beck. Les objets finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r(\mathbb{k})}$, notamment, sont étudiés en détails. On établit ainsi la proposition 5, dont on tire les conséquences, ainsi que les propriétés d'adjonction élémentaires entre les très nombreux foncteurs définis, qui font la richesse de la structure de ces catégories.

La dernière partie expose des applications des constructions des parties précédentes, à l'aide du foncteur d'intégrale en grassmanniennes $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r(\mathbb{k})} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{k})$, dont on démontre, dans la section 10, la propriété d'annulation cohomologique fondamentale, le théorème 6, ainsi que le corollaire 7. Les applications à la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$, données dans la section 12, seront approfondies dans [Djaa]; la section 11, qui tire des résultats de la section 10 des conséquences apparemment internes aux catégories de foncteurs en grassmanniennes, se révèle également utile dans $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ puisqu'elle sous-tend la démarche de [Dja06]. Enfin, la section 13 est consacrée à une propriété d'annulation cohomologique des systèmes de coefficients, déduite de celle du foncteur ω , et qu'on applique à la K -théorie stable.

Les appendices fixent nos notations et rappellent quelques résultats connus sur trois leitmotifs de cet article : les adjonctions (à la base de plusieurs descriptions des catégories de foncteurs en grassmanniennes comme du théorème d'annulation cohomologique principal), les propriétés de finitude des catégories abéliennes (dans l'optique de la conjecture artinienne) et les catégories de foncteurs.

Remerciements L'auteur témoigne sa chaleureuse reconnaissance à Geoffrey Powell pour l'attention qu'il a portée à ce travail durant toutes les étapes de sa réalisation. Il remercie également Lionel Schwartz et Christine Vespa pour leurs conseils.

Notations et conventions

1. fondamentales :

- (a) Nous noterons $\mathcal{G}r(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V . Si I est une partie de \mathbb{N} , nous noterons $\mathcal{G}r_I(V)$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}r(V)$ constitué des sous-espaces dont la dimension appartient à I .
- (b) Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux catégories, \mathcal{C} étant *essentiellement petite*, nous noterons $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la catégorie des foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} .

2. couramment utilisées :

- (a) La caractéristique du corps fini \mathbb{k} sera notée p ; $q = p^d$ désignera son cardinal. Lorsqu'aucune confusion ne pourra en résulter, nous omettrons toute mention du corps \mathbb{k} dans les notations.
- (b) Nous noterons \mathbf{Ens} la catégorie des ensembles, et \mathbf{Ens}^f la sous-catégorie pleine des ensembles finis.
- (c) Soit E un ensemble. Nous noterons $\mathbb{k}[E]$ le \mathbb{k} -espace vectoriel somme directe de copies de \mathbb{k} indexées par E . On peut voir l'association $E \mapsto \mathbb{k}[E]$ comme un foncteur de \mathbf{Ens} vers $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}$. Nous noterons $[e]$ l'élément de la base canonique de $\mathbb{k}[E]$ associé à un élément e de E .

- (d) Nous désignerons par \mathbf{Mod}_A la catégorie des modules à droite sur un anneau A et ${}_A\mathbf{Mod}$ la catégorie des A -modules à gauche. Nous adopterons plus généralement ces notations lorsque A est un objet d'une catégorie monoïdale symétrique muni d'une structure d'algèbre. Dans le cas d'un objet C muni d'une structure de coalgèbre, nous noterons \mathbf{Comod}_C la catégorie des C -comodules à droite. Dans le cas d'une (co)algèbre (co)unitaire, les morphismes seront toujours censés préserver la (co)unité.
- (e) Nous noterons $\text{Ob } \mathcal{C}$ la classe des objets d'une catégorie \mathcal{C} . Si X et Y sont deux objets de \mathcal{C} , on note :
- $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble¹ des morphismes de X dans Y ;
 - $\text{End}_{\mathcal{C}}(X)$ le monoïde $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ des endomorphismes de X ;
 - $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ le groupe des automorphismes de X ;
 - $\text{Pl}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble des monomorphismes de X dans Y ;
 - $\text{Epi}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble des épimorphismes de X vers Y ;
 - $\text{Iso}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble des isomorphismes de X vers Y .
- L'indice \mathcal{C} sera omis quand aucune confusion ne peut en résulter. Enfin, \mathcal{C}^{op} désignera la catégorie opposée de \mathcal{C} .
- (f) On désigne par \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et par \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs.
- On adoptera également les abréviations suivantes :
- $n = \{n\}$,
 - $\leq n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$,
 - $\geq n = \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq n\}$.

3. plus secondaires :

- (a) Nous noterons V^* le dual d'un espace vectoriel V , et W^\perp l'orthogonal dans V^* d'un sous-espace W de V .
- (b) Soit M un monoïde.
- i. Nous noterons $\mathbb{k}[M]$ l'algèbre de M sur \mathbb{k} .
 - ii. Nous désignerons par \underline{M} la catégorie à un seul objet de monoïde d'endomorphismes M .
 - iii. Pour toute catégorie \mathcal{C} , nous noterons \mathcal{C}_M la catégorie $\mathbf{Fct}(\underline{M}, \mathcal{C})$. C'est la catégorie des *objets de \mathcal{C} munis d'une action de M* . En effet, les objets de \mathcal{C}_M sont les objets X de \mathcal{C} munis d'un morphisme de monoïdes $M \rightarrow \text{End}_{\mathcal{C}}(X)$. Nous noterons $O_M^{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}$ le foncteur d'oubli.
- La catégorie $(\mathcal{E}_{\mathbb{k}})_M$ est ainsi équivalente à $_{\mathbb{k}[M]}\mathbf{Mod}$.
- (c) Une catégorie \mathbb{k} -linéaire est une catégorie \mathcal{I} telle que, pour tous objets A et B de \mathcal{I} , les ensembles $\text{hom}_{\mathcal{I}}(A, B)$ sont munis d'une structure de \mathbb{k} -espace vectoriel, de sorte que la composition des morphismes soit \mathbb{k} -bilinéaire. On ne suppose pas \mathcal{I} additive.

D'autres notations utilisées dans tout l'article sont introduites dans les appendices.

¹Dans toutes les catégories que nous considérerons, la classe des morphismes entre deux objets sera un ensemble.

Première partie

Préliminaires

Après avoir rappelé les propriétés de base de la catégorie \mathcal{F} , dont l'étude constitue l'une des principales motivations de cet article, nous traitons d'une catégorie analogue, notée \mathcal{F}_{surj} , avec plus de détail. Cette catégorie s'avère essentielle autant pour la considération de la catégorie \mathcal{F} que pour celle de la catégorie de foncteurs en grassmanniennes \mathcal{F}_{Gr} que nous introduirons dans la partie II ; elle possède en outre un intérêt intrinsèque.

Les sections 3 et 4 constituent le soubassement des catégories de foncteurs en grassmanniennes, notamment \mathcal{F}_{Gr} : la première sous-tend sa description comme catégorie de comodules, la seconde sa description fonctorielle.

1 Rappels sur la catégorie \mathcal{F}

Les résultats rappelés dans l'appendice C s'appliquent à la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$; l'hypothèse C.14 est vérifiée car le corps \mathbb{k} est *fini*. Le foncteur projectif standard $P_V^{\mathcal{E}_k^f}$, où V est un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie, sera simplement noté P_V ; de même, l'injectif standard $I_V^{\mathcal{E}_k^f}$ sera noté I_V .

La plupart des résultats de cette section sont contenus dans [HLS93], [Kuh94a] ou [Sch94], par exemple.

Comme le foncteur de dualité $(\mathcal{E}_k^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}_k^f$ est une équivalence de catégories, la proposition/définition C.12 procure un foncteur $D : \mathcal{F}(\mathbb{k})^{op} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{k})$, donné sur les objets par $(DF)(V) = F(V^*)^*$. Il induit une équivalence de catégories entre $(\mathcal{F}^{df}(\mathbb{k}))^{op}$ et $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{k})$, où l'on note $\mathcal{F}^{df}(\mathbb{k})$ la sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ constituée des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie.

Définition 1.1. Un objet F de \mathcal{F} est dit *auto-dual* s'il existe un isomorphisme $u : F \xrightarrow{\cong} DF$ invariant par l'isomorphisme d'adjonction $\text{hom}_{\mathcal{F}}(F, DF) \xrightarrow{\cong} \text{hom}_{\mathcal{F}}(F, DF)$.

Exemple 1.2. Les objets simples de \mathcal{F} sont auto-duaux (cf. [Kuh94b]).

Décomposition scalaire et tors de Frobenius Suivant la notation C.19, nous poserons $\mathcal{F}_i(\mathbb{k}) = \{F \in \text{Ob } \mathcal{F} \mid \forall \lambda \in \mathbb{k} \quad F(\lambda.id) = \lambda^i.id\}$. La catégorie $\mathcal{F}_0(\mathbb{k})$ est la sous-catégorie des foncteurs constants de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$, elle est canoniquement équivalente à \mathcal{E}_k ; nous *identifierons* par la suite ces deux catégories. La décomposition scalaire d'un foncteur F de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ (proposition/définition C.20) s'écrit donc $F \simeq F(0) \oplus F_1 \oplus \cdots \oplus F_{q-1}$. On notera $\bar{F} = F_1 \oplus \cdots \oplus F_{q-1}$.

Si V est un objet de \mathcal{E}_k^f , nous noterons $P_{V,i}$ pour $(P_V)_i$. Pour $V = \mathbb{k}$, on obtient la décomposition de P_k en somme directe de projectifs indécomposables. Explicitement, $P_{k,0}$ est le foncteur constant \mathbb{k} , et pour $1 \leq i \leq q-1$, on peut voir $P_{k,i}(V)$ comme le quotient de $P_k(V)$ par l'espace vectoriel engendré par les $[\lambda v] - \lambda^i[v]$, pour $\lambda \in \mathbb{k}$ et $v \in V$.

Soit ϕ l'automorphisme de la catégorie \mathcal{E}_k^f obtenu en tordant l'action des scalaires par l'automorphisme de Frobenius de \mathbb{k} . Le foncteur de précomposition $\phi^* : \mathcal{F}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{k})$ est appelé *tors de Frobenius*. Il induit, pour tout entier naturel i , une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_i(\mathbb{k})$ et $\mathcal{F}_{pi}(\mathbb{k})$.

Changement de corps Soit K une extension finie de \mathbb{k} . Les foncteurs d'extension des scalaires $t : \mathcal{E}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{E}_K$ et de restriction des scalaires $\tau : \mathcal{E}_K \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{k}}$ sont mutuellement adjoints (i.e. t est adjoint à droite et à gauche à τ), de même que leurs variantes entre $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ et \mathcal{E}_K^f , que nous noterons encore t et τ par abus. On en déduit que les foncteurs $\tau^*t_* : \mathcal{F}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ et $\tau_*t^* : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{k})$ sont mutuellement adjoints. On rappelle que l'indice (resp. exposant) étoilé indique la postcomposition (resp. précomposition) — cf. appendice C. Pour plus de détails à ce sujet, voir [FFSS99], § 3.

Le foncteur $\tau_*t^* : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{k})$ est appelé encore *restriction des scalaires*, et $\tau^*t_* : \mathcal{F}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ *induction*.

Le foncteur différence et les objets polynomiaux de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ Ces notions dépendent exclusivement du caractère additif de la catégorie source $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$. Si V est un objet de cette catégorie, le *foncteur de décalage* par V est l'endofoncteur de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$, noté Δ_V , de précomposition par $\cdot \oplus V : \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$. Cette construction est fonctorielle en V ; ainsi, du fait que la composition $0 \rightarrow \mathbb{k} \rightarrow 0$ est l'identité, et que $\Delta_0 \simeq id_{\mathcal{F}}$, on obtient un scindement $\Delta_{\mathbb{k}} \simeq id \oplus \Delta$, où Δ est appelé *foncteur différence* de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$.

Le résultat classique suivant (cf. [Pow98b], appendice) est une application des propositions C.17 et C.18.

Proposition 1.3. 1. (a) *Le foncteur de décalage Δ_V est adjoint à droite à $\cdot \otimes P_V$; cette adjonction est naturelle en V .*

(b) *Le foncteur différence Δ est adjoint à droite à $\cdot \otimes \bar{P}_{\mathbb{k}}$.*

2. (a) *Le foncteur de décalage Δ_V est adjoint à gauche à $\cdot \otimes I_V$; cette adjonction est naturelle en V .*

(b) *Le foncteur différence Δ est adjoint à gauche à $\cdot \otimes \bar{I}_{\mathbb{k}}$.*

Notation 1.4. Nous désignerons par $\mathcal{F}^n(\mathbb{k})$ la sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ noyau du foncteur exact Δ^{n+1} , où $n \in \mathbb{N}$. Pour n entier strictement négatif ou $-\infty$, on convient que $\mathcal{F}^n(\mathbb{k})$ est la sous-catégorie réduite à 0.

Définition 1.5. Soit F un foncteur de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$.

1. On dit que F est *polynomial* s'il existe n tel que $F \in \text{Ob } \mathcal{F}^n(\mathbb{k})$. Le plus petit n ayant cette propriété s'appelle alors le *degré* de F , et se note $\text{deg } F$.
2. On dit que F est *analytique* s'il est colimite de ses sous-foncteurs polynomiaux. On note $\mathcal{F}_{\omega}(\mathbb{k})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ des foncteurs analytiques.
3. On dit que F est *coanalytique* s'il est limite de ses quotients polynomiaux.

La proposition suivante se trouve démontrée dans [Kuh94a] (§ 4), par exemple. Nous détaillons la démonstration du corollaire qui s'en déduit afin d'illustrer des raisonnements utiles dans d'autres catégories de foncteurs.

Proposition 1.6. 1. *Les foncteurs projectifs standard de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ sont coanalytiques.*

2. *Les foncteurs injectifs standard de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ sont analytiques.*

On rappelle (cf. § B.1) qu'un objet pf_{∞} (resp. co-pf_{∞}) est un objet qui admet une résolution projective (resp. injective) de type fini.

Corollaire 1.7. 1. *Un foncteur de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est fini si et seulement s'il est polynomial et à valeurs de dimension finie.*

2. La sous-catégorie pleine $\mathcal{F}^f(\mathbb{k})$ des objets finis de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est préservée par le produit tensoriel et par le foncteur différence.
3. Les objets finis de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ sont pf_∞ et co-pf_∞ .
4. La sous-catégorie $\mathcal{F}_\omega(\mathbb{k})$ de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est épaisse.
5. Un objet de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est de co-type fini si et seulement s'il est analytique et de socle fini.

Démonstration. Le foncteur $(\Delta, ev_0) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times \mathcal{E}$ (on rappelle que ev_0 désigne le foncteur d'évaluation en 0 — cf. notation C.2) est exact et fidèle, car le noyau de Δ est constitué des foncteurs constants. La proposition B.17 montre alors qu'un foncteur F tel que ΔF est fini et que $F(0)$ est un espace vectoriel de dimension finie est lui-même fini. Par récurrence, on en déduit qu'un foncteur polynomial à valeurs de dimension finie est fini. La réciproque résulte de la proposition 1.6, puisqu'un objet simple se plonge dans un injectif standard.

La deuxième assertion découle de la première, en raison de l'isomorphisme naturel $\Delta(F \otimes G) \simeq (\Delta F \otimes G) \oplus (F \otimes \Delta G) \oplus (\Delta F \otimes \Delta G)$.

Comme le foncteur exact et fidèle (Δ, ev_0) commute aux colimites, la proposition B.16 montre qu'un foncteur F tel que $F(0)$ est de dimension finie et que ΔF est pf_∞ est lui-même pf_∞ . On en déduit le caractère pf_∞ des objets finis ; le cas co-pf_∞ est dual.

La quatrième assertion se déduit de la précédente via la proposition B.11.

Un objet de co-type fini est toujours de socle fini ; il est aussi analytique, dans \mathcal{F} , parce que les injectifs standard le sont. La réciproque est donnée par la proposition B.14. \square

L'assertion 3 de ce corollaire, particulièrement importante, est due à L. Schwartz (cf. [Sch94]).

Les objets simples de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ La propriété suivante est une conséquence classique du caractère polynomial des foncteurs finis de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$. Dans [Kuh02], on trouvera une démonstration de cet énoncé, sous une forme plus générale (qui ne suppose plus \mathbb{k} premier).

Proposition 1.8. *On suppose $d = 1$, i.e. le corps \mathbb{k} premier. Soit n un entier naturel.*

Il existe un diagramme de recollement

$$\mathcal{F}^{n-1}(\mathbb{k}) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathcal{F}^n(\mathbb{k}) \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \rightleftarrows \\ \longrightarrow \end{array} \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}[\Sigma_n]} .$$

Par la proposition B.22, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 1.9. *Supposons $d = 1$. La décomposition par le degré polynomial induit un isomorphisme de groupes de Grothendieck*

$$G_0^f(\mathcal{F}(\mathbb{k})) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_0^f(\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_p[\Sigma_n]}).$$

Proposition 1.10. *Les automorphismes des objets simples de $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ sont réduits à $\mathbb{k} : \mathbb{k}$ est un corps de décomposition de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$.*

Comme le produit tensoriel est un bifoncteur exact en chaque variable, que son unité \mathbb{k} est finie et qu'il préserve les objets finis, il induit une structure d'anneau sur $G_0^f(\mathcal{F}(\mathbb{k}))$.

La proposition suivante est établie dans [Kuh94b].

Proposition 1.11 (Kuhn). *Si S est un objet simple de \mathcal{F} , alors $S(\mathbb{k}^{\oplus n})$ est un $GL_n(\mathbb{k})$ -module nul ou simple pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

La conjecture artinienne La terminologie employée dans ce qui suit est rappelée dans l’appendice B.

Nous donnons différentes formulations équivalentes de la conjecture artinienne (conjecture 1). Pour la démonstration et plus de détails, voir [Pow00a] ou [Djab].

Proposition 1.12. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La catégorie \mathcal{F} est localement noethérienne.*
2. *Les projectifs standard P_V sont des objets noethériens de \mathcal{F} .*
3. *La catégorie \mathcal{F} est co-localement artinienne.*
4. *Les injectifs standard I_V sont des objets artiniens de \mathcal{F} .*
5. *Le produit tensoriel de deux objets artiniens de \mathcal{F} est artinien.*
6. *Le produit tensoriel de deux objets noethériens de \mathcal{F} est noethérien.*
7. *Le socle d’un objet de type fini de \mathcal{F} est fini.*
8. *Les objets injectifs de \mathcal{F}_ω restent injectifs dans \mathcal{F} .*
9. *Pour tout foncteur de type fini F de \mathcal{F} , l’ensemble des classes d’isomorphisme de foncteurs simples S de \mathcal{F} tels que $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(F, S) \neq 0$ est fini.*

L’assertion 4 constitue la forme originelle de la conjecture (l’intérêt particulier pour les injectifs provenant des liens avec les modules instables sur l’algèbre de Steenrod — cf. [HLS93]), c’est pourquoi elle est appelée *conjecture artinienne*.

Les premières avancées significatives sur la conjecture artinienne remontent à Piriou ([Pir97]). Powell a accompli plusieurs progrès importants (cf. [Pow00b], [Pow98c] et [Pow98a]). Dans [Dja06], nous démontrons de nouveaux cas de cette conjecture ; les résultats de [Djaa] (ou [Djab]) déduits de l’étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes surpassent ces résultats.

Il est naturel de poser la question du caractère localement noethérien ou co-localement artinien d’autres catégories de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$, où \mathcal{I} est une catégorie essentiellement petite vérifiant l’hypothèse C.14. On ne saurait obtenir une réponse affirmative en général, comme le montre l’exemple élémentaire suivant. Cependant, toutes les catégories de foncteurs que nous rencontrerons par la suite semblent « très probablement » localement noethériennes et co-localement artiniennes.

Exemple 1.13. Soit \mathcal{I} la petite catégorie telle que $\text{Ob } \mathcal{I} = \mathbb{N}$ et $\text{hom}_{\mathcal{I}}(n, m) = *$ (ensemble à un élément) si $n = 0$ ou $n = m$, \emptyset sinon. Le projectif standard de type fini $P_0^{\mathcal{I}}$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E})$ est le foncteur constant \mathbb{k} , puisque 0 est objet initial de \mathcal{I} . Ce n’est pas un objet noethérien. En effet, pour tout entier $n > 0$, l’image A_i du monomorphisme $\bigoplus_{0 < i \leq n} P_i^{\mathcal{I}} \rightarrow P_0^{\mathcal{I}}$ dont chaque composante $P_i^{\mathcal{I}} \rightarrow P_0^{\mathcal{I}}$ est induite par le morphisme $0 \rightarrow i$ associée à l’objet i l’espace vectoriel \mathbb{k} si $0 < i \leq n$, 0 sinon. Aussi $(A_i)_{i > 0}$ est-elle une suite strictement croissante de sous-objets de $P_0^{\mathcal{I}}$.

Powell a émis la version renforcée suivante de la conjecture artinienne.

Conjecture 1.14 (Conjecture artinienne forte). *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $P_{\mathbb{k}^{\oplus n}}$ est noethérien de type n .*

2 La catégorie \mathcal{F}_{surj}

Notation 2.1. Nous noterons $\mathcal{E}_{surj}^f(\mathbb{k})$ et $\mathcal{E}_{inj}^f(\mathbb{k})$ les sous-catégories de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont respectivement les épimorphismes et les monomorphismes de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$.

Si I est une partie de \mathbb{N} , nous noterons $\mathcal{E}_{surj}^I(\mathbb{k})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{surj}^f(\mathbb{k})$ dont les objets sont les espaces vectoriels dont la dimension appartient à I .

On introduit enfin les catégories de foncteurs

$$\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^f(\mathbb{k}), \mathcal{E}_{\mathbb{k}}),$$

$$\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{inj}^f(\mathbb{k}), \mathcal{E}_{\mathbb{k}}),$$

$$\mathcal{F}_{surj}^I(\mathbb{k}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I(\mathbb{k}), \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

On rappelle que, conformément aux conventions générales, on omettra souvent la mention au corps \mathbb{k} dans la notation de ces catégories.

L'idée d'étudier une catégorie de foncteurs en utilisant la catégorie de foncteurs auxiliaire obtenue en ne conservant comme morphismes à la source que les épimorphismes, implicite dans les travaux de Suslin, apparaît chez Scorichenko. Elle est exposée dans l'article « *Stable K-theory is bifunctor homology* » (§ 4) de Franjou et Pirashvili du volume [FFPS03].

Nombre des résultats présentés dans cette section sont connus, mais ils ne semblent pas avoir fait l'objet d'une exposition systématique dans la littérature.

2.1 Généralités

Le foncteur de dualité $(\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$ induit une équivalence de catégories entre $(\mathcal{E}_{surj}^f)^{op}$ et \mathcal{E}_{inj}^f . On en déduit une dualité entre les catégories \mathcal{F}_{surj} et \mathcal{F}_{inj} (cf. proposition/définition C.12). Par conséquent, nous nous bornerons souvent à énoncer les résultats relatifs à l'une des deux catégories, privilégiant, dans cette section, la catégorie \mathcal{F}_{surj} .

La considération d'une seule de ces catégories n'aurait néanmoins pas suffi à nos investigations ultérieures : la catégorie \mathcal{F}_{surj} intervient dans l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes ; en retour, celles-ci fournissent des renseignements non triviaux sur la catégorie \mathcal{F}_{inj} — cf. section 13.

Notation 2.2. 1. Si V est un espace vectoriel de dimension finie, nous noterons

simplement P_V^{surj} le projectif standard $P_V^{\mathcal{E}_{surj}^f}$, et I_V^{surj} l'injectif standard $I_V^{\mathcal{E}_{surj}^f}$. Nous noterons de même P_V^{inj} et I_V^{inj} pour $P_V^{\mathcal{E}_{inj}^f}$ et $I_V^{\mathcal{E}_{inj}^f}$ respectivement.

2. L'espace vectoriel $\mathbb{k}^{\oplus n}$ de dimension n sera noté E_n .

3. Nous noterons $ev_n = ev_{E_n} : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{E}$ et $ev_n = ev_{E_n} : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathbf{Mod}_{[GL_n(\mathbb{k})]}$ les foncteurs d'évaluation sur l'espace vectoriel E_n (cf. notation C.2). Nous noterons aussi ev_n et ev_n les foncteurs analogues de source \mathcal{F}_{inj} .

Les considérations du paragraphe C.6 fournissent le résultat suivant. La notation $\leq i$ en exposant désigne, selon nos conventions générales, la partie de \mathbb{N} évidente.

Proposition 2.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-catégorie $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n-1}$ est une sous-catégorie complète à droite de $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$ (cf. définition C.24). Par conséquent (cf. corollaire C.26), on a un diagramme de recollement*

$$\mathcal{F}_{surj}^{\leq n-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathcal{F}_{surj}^{\leq n} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{ev}_n} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$$

où \mathcal{R} est le foncteur de restriction et \mathcal{P} le prolongement par zéro.

Remarque 2.4. Vespa a étudié (cf. [Ves05], chapitre 3 et [Ves06], § 4) une catégorie de foncteurs \mathcal{F}_{iso} dont la source s'obtient à partir d'une catégorie d'espaces quadratiques dont toutes les flèches sont des monomorphismes, et de ce fait très analogue à \mathcal{E}_{inj}^f . Elle utilise une construction de foncteurs de Mackey qui permet d'éviter une partie des difficultés des catégories \mathcal{F}_{inj} ou \mathcal{F}_{surj} : le diagramme de recollement analogue à celui de la proposition 2.3 est trivial dans \mathcal{F}_{iso} (i.e. la catégorie qui apparaît au centre du diagramme se scinde en le produit des deux autres catégories — cf. [Ves06], théorème 4.2), contrairement à ce qui advient dans \mathcal{F}_{surj} ou \mathcal{F}_{inj} . Ce phénomène est à rapprocher de ce que \mathcal{F}_{iso} possède un foncteur de dualité, alors que \mathcal{F}_{inj} a un comportement « fortement non auto-dual ».

Notation 2.5. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $i_n^! : \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$ le foncteur de prolongement par zéro obtenu en considérant la sous-catégorie relativement connexe $\mathcal{E}_{surj}^n(\mathbb{k}) \simeq \underline{GL_n(\mathbb{k})}$ de $\mathcal{E}_{surj}^f(\mathbb{k})$. On a ainsi un isomorphisme

$$i_n^!(M)(V) \simeq \mathbb{k}[\text{Iso}(E_n, V)] \otimes_{\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]} M$$

naturel en $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ et $M \in \text{Ob } \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$.

Par abus, nous désignerons de la même façon les foncteurs analogues dans $\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k})$.

Nous noterons enfin Is_n l'objet $i_n^!(\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})])$ de $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$, et $S_n^{surj} = i_n^!(\mathbb{k})$.

Ainsi, $\text{Is}_0 \simeq S_0^{surj}$ est le foncteur de \mathcal{F}_{surj} égal à \mathbb{k} évalué sur l'espace vectoriel 0 et nul sur les espaces non nuls.

Remarque 2.6. Les endofoncteurs $i_n^! \circ \text{ev}_n$ et $\cdot \otimes S_n^{surj}$ de \mathcal{F}_{surj} sont isomorphes.

Décomposition scalaire et tors de Frobenius La catégorie \mathcal{E}_{surj}^f n'est pas \mathbb{k} -linéaire, mais elle possède une action naturelle du groupe multiplicatif \mathbb{k}^\times . On en déduit, de façon analogue à la proposition C.20, l'énoncé suivant.

Proposition et définition 2.7. *Étant donné un entier i , notons $\mathcal{F}_{surj,i}(\mathbb{k})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$ formée des foncteurs X tels que $X(\lambda \cdot \text{id}_V) = \lambda^i \cdot \text{id}_{X(V)}$ pour tous $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ et $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^f$. Les inclusions induisent une équivalence de catégories*

$$\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k}) \simeq \prod_{i=1}^{q-1} \mathcal{F}_{surj,i}(\mathbb{k}).$$

On notera $X \simeq \bigoplus_{i=1}^{q-1} X_i$ la décomposition naturelle d'un foncteur X de $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$ qu'on en déduit, où $X_i \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj,i}(\mathbb{k})$. On l'appelle décomposition scalaire de X .

Contrairement au cas d'une catégorie de foncteurs de source \mathbb{k} -linéaire, il n'y a pas de facteur correspondant à $i = 0$ dans cette décomposition. Cela est à rapprocher de ce que la sous-catégorie pleine des foncteurs constants de \mathcal{F}_{surj} n'est pas épaisse, contrairement à ce qui se produit dans \mathcal{F} (rappelons que la sous-catégorie \mathcal{F}_0 obtenue par la décomposition scalaire est celle des foncteurs constants de \mathcal{F}) — cf. aussi proposition 2.39.

L'automorphisme ϕ de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ déduit du morphisme de Frobenius induit un automorphisme de la catégorie $\mathcal{E}_{surj}^f(\mathbb{k})$. La précomposition par ce foncteur procure un automorphisme de $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$ que l'on appellera encore *tors de Frobenius*. Il induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{F}_{surj,i}(\mathbb{k})$ et $\mathcal{F}_{surj,pi}(\mathbb{k})$.

On a des résultats analogues dans $\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k})$ et \mathcal{F}_{surj}^I , pour $I \subset \mathbb{N}$. On obtient par exemple une variante de la proposition 2.3 en remplaçant $\mathcal{F}_{surj}^{\leq i}$ (pour $i = n, n-1$) par $\mathcal{F}_{surj,q-1}^{\leq i}$ et $GL_n(\mathbb{k})$ par $PGL_n(\mathbb{k})$.

Changement de corps Si K est une extension finie de \mathbb{k} , on dispose de foncteurs de restriction $\mathcal{F}_{surj}(K) \rightarrow \mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$ et d'induction $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{F}_{surj}(K)$, définis comme dans \mathcal{F} . Cependant, ces foncteurs ne sont plus adjoints : les foncteurs de restriction $\mathcal{E}_K^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ et d'induction $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f \rightarrow \mathcal{E}_K^f$ se restreignent en des foncteurs $\mathcal{E}_{surj}^f(K) \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f(\mathbb{k})$, mais ces restrictions perdent les propriétés d'adjonction des foncteurs initiaux.

Produit tensoriel total Outre sa structure tensorielle usuelle, la catégorie \mathcal{F}_{surj} possède une structure tensorielle qui possède l'avantage sur la structure usuelle de préserver les objets projectifs, et de bien se comporter à l'égard du foncteur fondamental $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$ que nous introduirons au paragraphe 2.3.

On rappelle que la notation $\mathcal{G}r$ désigne l'ensemble des sous-espaces d'un espace vectoriel.

Définition 2.8. Étant donnés deux objets F et G de \mathcal{F}_{surj} , on appelle *produit tensoriel total* de F et G le foncteur noté $F \tilde{\otimes} G$ et défini comme suit.

– Si A est un objet de \mathcal{E}_{surj}^f , on pose

$$(F \tilde{\otimes} G)(A) = \bigoplus_{\substack{V, W \in \mathcal{G}r(A) \\ V+W=A}} F(V) \otimes G(W).$$

– Si $u : A \rightarrow A'$ est un morphisme de \mathcal{E}_{surj}^f , le morphisme

$$(F \tilde{\otimes} G)(u) : (F \tilde{\otimes} G)(A) \rightarrow (F \tilde{\otimes} G)(A')$$

est défini comme la somme directe sur les sous-espaces V et W de A tels que $V + W = A$ des morphismes

$$F(V) \otimes G(W) \xrightarrow{F(u) \otimes G(u)} F(u(V)) \otimes G(u(W)) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{V', W' \in \mathcal{G}r(A') \\ V'+W'=A'}} F(V') \otimes G(W')$$

(où l'on note encore, par abus, u pour les morphismes $V \rightarrow u(V)$ et $W \rightarrow u(W)$ induits par u) — cette définition fait sens puisque $u(V) + u(W) = u(V + W) = u(A) = A'$.

Proposition 2.9. 1. Le produit tensoriel total définit sur \mathcal{F}_{surj} une structure monoïdale symétrique exacte d'unité Is_0 .

2. Il existe un monomorphisme naturel $F \otimes G \hookrightarrow F \tilde{\otimes} G$ pour $F, G \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj}$.

La première assertion se vérifie par inspection. Le monomorphisme de la seconde assertion est donné par l'inclusion du facteur direct $F(V) \otimes G(V)$ de $(F \tilde{\otimes} G)(V)$ sur $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^f$.

Par la suite, lorsque nous nous référerons à des notions dépendant d'une structure tensorielle sur \mathcal{F}_{surj} , nous utiliserons l'adjectif *total* lorsqu'il s'agira de la structure définie par $\tilde{\otimes}$, l'absence de qualificatif signifiant qu'il s'agit de la structure tensorielle usuelle définie par \otimes .

Lemme 2.10. Il existe un unique foncteur $\mathcal{E}_{surj}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{surj}^f \times \mathcal{E}_{surj}^f & \longrightarrow & \mathcal{E}_{surj}^f \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f & \xrightarrow{\oplus} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

commute. Il sera encore noté \oplus par abus.

Remarque 2.11. Par dualité, on en déduit un résultat analogue dans la catégorie \mathcal{E}_{inj}^f , où l'on peut aussi définir un produit tensoriel total.

Proposition 2.12. Il existe un isomorphisme $P_V^{surj} \tilde{\otimes} P_W^{surj} \simeq P_{V \oplus W}^{surj}$ naturel en les objets V et W de \mathcal{E}_{surj}^f .

Démonstration. Cette proposition s'obtient en linéarisant l'isomorphisme ensembliste du lemme suivant. \square

Lemme 2.13. Il existe une bijection

$$\text{Epi}_{\mathcal{E}}(A \oplus B, E) \simeq \coprod_{\substack{V, W \in \mathcal{G}r(E) \\ V + W = E}} \text{Epi}_{\mathcal{E}}(A, V) \times \text{Epi}_{\mathcal{E}}(B, W)$$

naturelle en les objets A, B et E de \mathcal{E}_{surj}^f .

Corollaire 2.14. Le produit tensoriel total de deux objets projectifs de \mathcal{F}_{surj} est projectif.

2.2 Foncteur de décalage et objets finis

Nous étudions les objets finis de \mathcal{F}_{surj} et \mathcal{F}_{inj} à l'aide du foncteur de décalage, qui joue formellement le même rôle que le foncteur différence dans l'étude des objets finis de \mathcal{F} .

Définition 2.15. Étant donné un espace vectoriel de dimension finie V , on appelle *foncteur de décalage par V dans \mathcal{F}_{surj}* (resp. \mathcal{F}_{inj}) l'endofoncteur de précomposition par $\cdot \oplus V$.

Notation 2.16. Nous noterons δ_V^{surj} (resp. δ_V^{inj}) l'endofoncteur de décalage par un espace V de la catégorie \mathcal{F}_{surj} (resp. \mathcal{F}_{inj}). Lorsque $V = \mathbb{k}$, ce foncteur sera simplement noté δ^{surj} (resp. δ^{inj}).

De plus, l'exposant *surj* (resp. *inj*) sera omis lorsqu'aucune confusion ne pourra en résulter.

Ainsi, l'association $V \mapsto \delta_V$ est fonctorielle; si V est de dimension n , les foncteurs δ_V et δ^n sont isomorphes.

Les foncteurs de décalage commutent aux limites, aux colimites et au produit tensoriel (usuel), puisque ce sont des foncteurs de précomposition.

Proposition 2.17. *Il existe un isomorphisme*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X \tilde{\otimes} P_A^{surj}, Y) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, \delta_A^{surj}(Y))$$

naturel en les objets X, Y de \mathcal{F}_{surj} et A de \mathcal{E}_{surj}^f .

Démonstration. On définit un morphisme naturel $X \rightarrow \delta_A^{surj}(X \tilde{\otimes} P_A^{surj})$ par les inclusions

$$X(V) \xrightarrow{X(V) \otimes [id_A]} X(V) \otimes P_A^{surj}(A) \hookrightarrow \bigoplus_{W_1+W_2=V \oplus A} X(W_1) \otimes P_A^{surj}(W_2).$$

On vérifie, grâce à la proposition 2.12, que l'application naturelle

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X \tilde{\otimes} P_A^{surj}, Y) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, \delta_A^{surj}(Y))$$

que l'on en déduit est un isomorphisme lorsque X est un projectif standard. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite. \square

Proposition 2.18. *Il existe dans \mathcal{F}_{surj} un isomorphisme*

$$\delta_A(I_B^{surj}) \simeq \bigoplus_{W_1+W_2=B} I_{W_1}^{surj} \otimes I_{W_2}^{surj}(A)$$

naturel en les objets A et B de \mathcal{E}_{surj}^f .

Démonstration. Cette proposition s'obtient par linéarisation de la bijection du lemme 2.13 (ou à partir de la proposition précédente et du lemme de Yoneda). \square

Corollaire 2.19. 1. *Les foncteurs de décalage de \mathcal{F}_{surj} préservent les objets injectifs et les objets de co-type fini.*

2. *Les foncteurs de décalage de \mathcal{F}_{inj} préservent les objets projectifs de type fini et les objets de type fini.*

Lemme 2.20. 1. *Soit X un objet de \mathcal{F}_{surj} tel que $X(0)$ est de dimension finie et $\delta(X)$ fini dans \mathcal{F}_{surj} . Alors X est un objet fini de \mathcal{F}_{surj} .*

2. *Soient $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et X un objet de \mathcal{F}_{inj} tel que $X(0)$ est de dimension finie et $\delta(X)$ pfi dans \mathcal{F}_{inj} . Alors X est un objet pfi de \mathcal{F}_{inj} .*

Démonstration. Le foncteur $(\delta^{surj}, ev_0) : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{surj} \times \mathcal{E}$ est exact et fidèle. Le premier point résulte donc de la proposition B.17.

Pour le second, on utilise le foncteur $(\delta^{inj}, ev_0) : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathcal{F}_{inj} \times \mathcal{E}$, qui est exact et fidèle, commute aux colimites et conserve les objets projectifs de type fini (cf. corollaire 2.19). La conclusion est donc donnée par la proposition B.16. \square

Proposition 2.21 (Objets finis, de type fini de \mathcal{F}_{surj}). *Soit X un objet de \mathcal{F}_{surj} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *l'objet X est fini;*

2. l'objet X est de type fini;
3. l'objet X est à valeurs de dimension finie et nilpotent pour le foncteur décalage δ (cette dernière condition signifiant encore que $X(V) = 0$ si $\dim V$ est assez grande).

Démonstration. Il est clair que 1 implique 2.

Le foncteur projectif standard P_V^{surj} associé à un espace V de dimension n est à valeurs de dimension finie et annihilé par le foncteur δ^{n+1} , puisque $\text{Epi}(V, W) = 0$ si $\dim W \geq n + 1$. Cela montre que la deuxième assertion implique la troisième.

Enfin, la troisième implique la première par le lemme 2.20. \square

Dualement, on a le résultat suivant.

Proposition 2.22 (Objets finis, de co-type fini de \mathcal{F}_{inj}). *Soit X un objet de \mathcal{F}_{inj} . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. l'objet X est fini;
2. l'objet X est de co-type fini;
3. l'objet X est à valeurs de dimension finie et nilpotent pour le foncteur décalage δ .

Corollaire 2.23. 1. *Tout objet de \mathcal{F}_{surj} est localement fini; en particulier, \mathcal{F}_{surj} est une catégorie localement noethérienne.*

2. *Tout objet de \mathcal{F}_{inj} est co-localement fini; en particulier, \mathcal{F}_{inj} est une catégorie co-localement artinienne.*

Corollaire 2.24. 1. *Les objets finis de \mathcal{F}_{inj} sont pf_∞ .*

2. *Les objets finis de \mathcal{F}_{surj} sont co-pf_∞ .*

Démonstration. La première assertion s'obtient en combinant le lemme 2.20 et la proposition 2.22. La seconde s'en déduit par dualité. \square

Notation 2.25. On note \mathcal{F}_{inj}^{lf} pour $(\mathcal{F}_{inj})^{lf}$ la sous-catégorie des objets localement finis de \mathcal{F}_{inj} . Celle-ci est épaisse parce que les objets finis de \mathcal{F}_{inj} sont de présentation finie, de sorte que l'on peut appliquer la proposition B.11.

Corollaire 2.26 (Filtration canonique dans \mathcal{F}_{surj}). *Étant donné $n \in \mathbb{N}$, notons T_n l'endofoncteur de \mathcal{F}_{surj} composé du foncteur de restriction $\mathcal{R} : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$ et du prolongement par zéro $\mathcal{P} : \mathcal{F}_{surj}^{\leq n} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$; la coïté de l'adjonction entre \mathcal{R} et \mathcal{P} fournit un monomorphisme $T_n \hookrightarrow \text{id}$.*

Pour tout objet F de \mathcal{F}_{surj} , $(T_n(F))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-objets de F de réunion F . Si F est à valeurs de dimension finie, alors les $T_n(F)$ sont finis.

Cette filtration est similaire à la filtration polynomiale dans \mathcal{F} (cf. par exemple [Pow98b], §2 à ce sujet). Notons $T_n^{hom} = T_n/T_{n-1}$; il existe un isomorphisme canonique $T_n^{hom}(X) \simeq X \otimes S_n^{surj}$, où $S_n^{surj} = i_n^!(\mathbb{k})$ est défini dans la notation 2.5. Contrairement à ce qui advient pour la filtration polynomiale dans \mathcal{F} , les foncteurs T_n et T_n^{hom} sont exacts.

Proposition 2.27 (Objets simples de \mathcal{F}_{surj}). *Un objet S de \mathcal{F}_{surj} est simple si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{ev}_n(S)$ est un $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module simple et que $\text{ev}_k(S) = 0$ pour $k \neq n$. Il revient au même de dire que S est isomorphe à $i_n^!(R)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et un certain $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module simple R .*

Démonstration. Un objet simple dans une sous-catégorie épaisse $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$ reste simple dans \mathcal{F}_{surj} ; réciproquement, la proposition 2.21 montre qu'un objet simple de \mathcal{F}_{surj} appartient à une sous-catégorie $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$. La conclusion s'obtient alors en combinant les propositions 2.3 et B.22. \square

Exemple 2.28. Les objets S_n^{surj} sont simples dans \mathcal{F}_{surj} .

Remarque 2.29. On peut formaliser ce raisonnement en notant que \mathcal{E}_{surj}^f est la colimite filtrante (en un sens à préciser) des sous-catégories $\mathcal{E}_{surj}^{\leq n}$ et que, par conséquent, \mathcal{F}_{surj} est la limite filtrante (id.) des $\mathcal{F}_{surj}^{\leq n}$. Kuhn détaille (dans le cadre analogue de la catégorie \mathcal{F}) cet argument dans [Kuh94b], § 2.

Corollaire 2.30. *Dans \mathcal{F}_{surj} , le produit tensoriel total, donc a fortiori le produit tensoriel usuel, de deux objets finis, est fini. Cela munit le groupe de Grothendieck $G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$ d'une structure d'anneau commutatif sans unité (le foncteur constant \mathbb{k} n'étant pas fini) via \otimes , et d'une structure d'anneau commutatif (unitaire, le foncteur Is_0 étant fini) via $\tilde{\otimes}$. Il est isomorphe, pour la première structure, à l'idéal*

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G_0^f(\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})] \mathbf{Mod})$$

de l'anneau produit

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} G_0^f(\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})] \mathbf{Mod})$$

(chaque facteur étant muni de la structure d'anneau induite par le produit tensoriel sur \mathbb{k}).

2.3 Le foncteur $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$

Nous établissons dans ce paragraphe les liens élémentaires entre les catégories \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj} .

Le foncteur d'oubli $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$

Notation 2.31. Le foncteur de précomposition par le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}_{surj}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ sera noté $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$.

Ce foncteur est exact et fidèle.

Proposition 2.32. *L'image par le foncteur $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ d'un objet simple de \mathcal{F} est un objet unisériel² de \mathcal{F}_{surj} , dont la filtration canonique est l'unique suite de composition.*

Démonstration. Soient S un objet simple de \mathcal{F} et X un quotient de $o(S)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la projection $\pi_n : S(E_n) \twoheadrightarrow X(E_n)$ est soit nulle, soit un isomorphisme, par la proposition 1.11.

Comme $o(S)$ transforme les morphismes de \mathcal{E}_{surj} en des épimorphismes, la commutation des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S(E_m) & \twoheadrightarrow & S(E_n) \\ \pi_m \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ X(E_m) & \twoheadrightarrow & X(E_n) \end{array}$$

²i.e. l'inclusion est un ordre *total* sur l'ensemble de ses sous-objets.

pour $m \geq n$ (induits par un épimorphisme arbitraire $E_m \rightarrow E_n$) montre que $X(E_n) = 0$ si $X(E_m) = 0$. Cela démontre la proposition. \square

Nous spécifions maintenant le cas particulier, immédiat mais important, du foncteur constant de \mathcal{F} .

Notation 2.33. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par $\mathbb{k}^{\geq i}$ l'image du foncteur constant \mathbb{k} de $\mathcal{F}_{surj}^{\geq i}$ par le foncteur de prolongement par zéro $\mathcal{P} : \mathcal{F}_{surj}^{\geq i} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$.

Corollaire 2.34. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite exacte $0 \rightarrow S_n^{surj} \rightarrow \mathbb{k}^{\geq n} \rightarrow \mathbb{k}^{\geq n+1} \rightarrow 0$. De plus, S_n^{surj} est le socle de $\mathbb{k}^{\geq n}$.

L'objet \mathbb{k} de \mathcal{F}_{surj} est unisériel, de suite de composition $S_0^{surj}, S_1^{surj}, \dots, S_n^{surj}, \dots$

Ce résultat est à comparer avec le résultat fondamental sur la structure du foncteur $\bar{I}_{\mathbb{F}_2}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$: la filtration polynomiale de ce foncteur est son unique suite de composition, et son n -ième quotient est isomorphe au foncteur n -ième puissance extérieure Λ^n , qui correspond à la représentation triviale de $GL_n(\mathbb{F}_2)$. De plus, $\bar{I}_{\mathbb{F}_2}$ est le « plus petit » injectif indécomposable non constant de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$. Le foncteur $\mathbb{k} \simeq I_0^{surj}$ est le « plus petit » injectif indécomposable de $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$; sa filtration canonique est son unique suite de composition, et son n -ième quotient est $T_n^{hom}(\mathbb{k}) \simeq S_n^{surj}$ (cf. corollaire 2.26), qui correspond à la représentation triviale de $GL_n(\mathbb{k})$ (noter qu'ici on a également un facteur pour $n = 0$).

Le corollaire 2.34 interviendra de façon cruciale dans la section 10.1.

L'adjonction entre les foncteurs o et ϖ

Proposition et définition 2.35. Il existe un foncteur exact et fidèle, noté $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$, donné de la façon suivante.

– Si F est un objet de \mathcal{F}_{surj} et V un objet de \mathcal{E}^f , on pose

$$(\varpi(F))(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} F(W).$$

– Si F est un objet de \mathcal{F}_{surj} et $V \xrightarrow{f} V'$ une flèche de \mathcal{E}^f , et si W et W' sont des sous-espaces respectifs de V et V' , la composante $F(W) \rightarrow F(W')$ de $(\varpi(F))(f)$ est égale à $F(g)$ si $f(W) = W'$, où g est l'épimorphisme $W \rightarrow W'$ induit par f , et nulle sinon.

– Si $F \xrightarrow{u} G$ est une flèche de \mathcal{F}_{surj} , le morphisme $\varpi(u) : \varpi(F) \rightarrow \varpi(G)$ de \mathcal{F} est défini, sur l'espace vectoriel de dimension finie V , comme la somme directe sur les sous-espaces W de V des morphismes $u_W : F(W) \rightarrow G(W)$.

Proposition 2.36. 1. Le foncteur o est adjoint à droite au foncteur ϖ .

2. Pour tout espace vectoriel V de dimension finie, on a un isomorphisme $\varpi(P_V^{surj}) \simeq P_V$.

3. Pour tout espace vectoriel V de dimension finie, on a un isomorphisme $o(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} I_W^{surj}$.

4. Le foncteur o préserve les objets de co-type fini et, plus généralement, les objets co- pf_i , où $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

5. Il existe un isomorphisme $\varpi(F \tilde{\otimes} G) \simeq \varpi(F) \otimes \varpi(G)$ naturel en les objets F et G de \mathcal{F}_{surj} .

Démonstration. Soient X un objet de \mathcal{F}_{surj} et F un objet de \mathcal{F} . Un morphisme $\varpi(X) \rightarrow F$ est la donnée, pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et tout sous-espace W de V , d'une application linéaire $u_{V,W} : X(W) \rightarrow F(V)$ de sorte que, pour tout $f \in \text{hom}_{\mathcal{E}^f}(V, V')$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(W) & \xrightarrow{u_{V,W}} & F(V) \\ X(f) \downarrow & & \downarrow F(f) \\ X(W') & \xrightarrow{u_{V',W'}} & F(V') \end{array} \quad (1)$$

commute, où l'on a posé $W' = f(W)$. Les applications linéaires $u_{V,V}$ fournissent en particulier un morphisme $X \rightarrow o(F)$ dans \mathcal{F}_{surj} .

Réciproquement, si $a : X \rightarrow o(F)$ est une flèche de \mathcal{F}_{surj} , définissons, pour $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et $W \in \mathcal{G}r(V)$, une application linéaire $u_{V,W} : X(W) \xrightarrow{a_W} F(W) \hookrightarrow F(V)$, la dernière flèche étant induite par l'inclusion. Il est clair que les diagrammes (1) commutent, de sorte que u fournit un morphisme $\varpi(X) \rightarrow F$ dans \mathcal{F} . On vérifie aussitôt que les deux applications naturelles entre $\text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, o(F))$ et $\text{hom}_{\mathcal{F}}(\varpi(X), F)$ définies précédemment sont réciproques l'une de l'autre, ce qui établit le premier point.

Les assertions 2 et 3 s'obtiennent par adjonction à partir du lemme de Yoneda : on a des isomorphismes naturels

$$\text{hom}_{\mathcal{F}}(\varpi(P_V^{surj}), F) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(P_V^{surj}, o(F)) \simeq o(F)(V) = F(V) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(P_V, F)$$

et

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, o(I_V)) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(\varpi(X), I_V) \simeq \varpi(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} X(W) \\ &\simeq \text{hom}_{\mathcal{F}_{surj}}(X, \bigoplus_{W \in \mathcal{G}r(V)} I_W^{surj}). \end{aligned}$$

La quatrième assertion provient de 3 et de l'exactitude de o .

La dernière s'obtient à partir de la décomposition ensembliste naturelle des couples de sous-espaces d'un espace vectoriel V suivante :

$$\{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{G}r(V)\} = \coprod_{W \in \mathcal{G}r(V)} \{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{G}r(W), A + B = W\}.$$

□

Remarque 2.37. L'isomorphisme de la dernière assertion est adjoint au monomorphisme canonique $F \otimes G \hookrightarrow o(\varpi(F) \otimes \varpi(G))$ donné sur l'espace A par l'injection du facteur direct

$$\bigoplus_{V+W=A} F(V) \otimes G(W) \hookrightarrow \bigoplus_{V,W \in \mathcal{G}r(A)} F(V) \otimes G(W).$$

Proposition 2.38. *Soient F un objet de \mathcal{F} et $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

1. *Si $o(F)$ est artinien, alors F est artinien.*
2. *Si $o(F)$ est co-pfi, alors F est co-pfi.*

Démonstration. Le foncteur o est exact et fidèle, ce qui fournit la première assertion, en appliquant la proposition B.15. De plus, il commute aux limites et transforme les cogénérateurs injectifs de \mathcal{F}_{surj} en des objets injectifs de co-type fini. La variante duale de la proposition B.16 donne donc la deuxième partie de la proposition. \square

La proposition suivante, que l'on vérifie par inspection, précise la compatibilité entre les foncteurs o et ϖ d'une part, et la décomposition scalaire et le tors de Frobenius d'autre part.

- Proposition 2.39.** 1. Soit $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$. Il existe des isomorphismes naturels $o(F)_i \simeq o(F_i)$ pour $1 \leq i < q-1$ et $o(F)_{q-1} \simeq o(F_{q-1}) \oplus o(F(0))$.
2. Soit $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj}$. Il existe des isomorphismes naturels $\varpi(X)_0 \simeq X(0)$, $\varpi(X)_i \simeq \varpi(X_i)$ pour $1 \leq i < q-1$ et $\varpi(X)_{q-1} \simeq \varpi(X_{q-1})/X(0)$.
3. Les foncteurs o et ϖ commutent au tors de Frobenius, à isomorphisme naturel près.

De façon similaire, le foncteur o commute aux foncteurs de restriction et d'induction associés à une extension finie du corps \mathbb{k} . En revanche, le comportement du foncteur ϖ relativement aux changements de corps est délicat.

Nous donnons maintenant quelques traductions dans le cadre de la catégorie \mathcal{F}_{inj} de la proposition 2.36.

- Proposition et définition 2.40.** 1. Nous noterons $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ le foncteur d'oubli (précomposition par l'inclusion $\mathcal{E}_{inj}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$); il est exact et fidèle. De plus, il préserve les objets de type fini.
2. Il existe un foncteur exact et fidèle $\varpi_{inj} : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathcal{F}$ donné sur les objets par

$$\varpi_{inj}(X)(V) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} X(V/W),$$

le morphisme $\varpi_{inj}(X)(V) \rightarrow \varpi_{inj}(X)(V')$ induit par une application linéaire $f : V \rightarrow V'$ ayant pour composante $X(V/W) \rightarrow X(V'/W')$ l'application $X(\bar{f})$, où \bar{f} est le monomorphisme $V/W \rightarrow V'/W'$ induit par f , si $W = f^{-1}(W')$, 0 sinon.

3. Le foncteur ϖ_{inj} est adjoint à droite à o_{inj} .

Nous avons noté o_{inj} le foncteur d'oubli de \mathcal{F} vers \mathcal{F}_{inj} , et simplement o plutôt que o_{surj} le foncteur d'oubli de \mathcal{F} vers \mathcal{F}_{surj} (qui est dual du précédent), car ce dernier interviendra beaucoup plus souvent.

Une propriété homologique du foncteur ϖ Le comportement homologique général de ϖ semble délicat; dans le cas d'une action des groupes linéaires sur les foncteurs considérés, on dispose cependant de l'utile résultat suivant.

Proposition 2.41. Soient n un entier strictement positif et Z un objet de \mathcal{F}_{surj} vérifiant les propriétés suivantes :

1. l'action du groupe linéaire sur le $GL_{n+1}(\mathbb{k})$ -module $M = \text{ev}_{n+1}(Z)$ (resp. le $GL_n(\mathbb{k})$ -module $N = \text{ev}_n(Z)$) est triviale;
2. le morphisme $u : M \rightarrow N$ induit par la projection $E_{n+1} \rightarrow E_n$ sur les n premières coordonnées est injectif;
3. on a $Z(E_k) = 0$ si $k \notin \{n, n+1\}$.

On note $X = i_{n+1}^!(M)$ et $Y = i_n^!(N)$.
Alors l'extension

$$0 \rightarrow \varpi(Y) \rightarrow \varpi(Z) \rightarrow \varpi(X) \rightarrow 0$$

de \mathcal{F} obtenue par application du foncteur exact ϖ à la suite exacte $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$ de \mathcal{F}_{surj} est essentielle.

Démonstration. Considérons un morphisme $f : \varpi(Z) \rightarrow F$ de \mathcal{F} dont la restriction à $\varpi(Y)$ est injective. On établit que l'application linéaire $f_V : \varpi(Z)(V) \rightarrow F(V)$ est injective pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ par récurrence sur $\dim V$. C'est clair si $\dim V \leq n$, nous supposons donc $\dim V > n$.

Soit a un élément de $\ker f_V$; si W (resp. B) est un sous-espace de dimension $n+1$ (resp. n) de V , notons x_W (resp. y_B) l'élément de M (resp. N) correspondant à la composante de a dans $X(W) \simeq M$ (resp. $Y(B) \simeq N$). Pour tout élément v non nul de V , l'hypothèse de récurrence montre que l'image de a dans $\varpi(Z)(V/v)$ est nulle. Soient H un sous-espace de dimension n de V/v et W son image réciproque dans V : la composante dans $Z(H)$ de cette image est

$$u(x_W) + \sum_{\substack{B \in \mathcal{G}r_n(V) \\ W = B \oplus v}} y_B = 0.$$

Étant donné un sous-espace W de dimension $n+1$ de V , faisons la somme des relations ainsi obtenues pour $v \in W \setminus \{0\}$: on obtient

$$u(x_W) + \sum_{\substack{v \in W \setminus \{0\}, B \in \mathcal{G}r_n(W) \\ W = B \oplus v}} y_B = 0,$$

soit

$$u(x_W) = \sum_{B \in \mathcal{G}r_n(W)} \text{Card}(W \setminus B) y_B.$$

Mais comme $n > 0$, les cardinaux qui apparaissent dans cette somme, égaux à $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$, sont nuls dans \mathbb{k} , d'où $u(x_W) = 0$.

Comme u est supposé injectif, cela donne $x_W = 0$; autrement dit, $a \in \varpi(Y)(V)$. Puisque la restriction à $\varpi(Y)(V)$ de f_V est par hypothèse injective, il vient finalement $a = 0$. Ainsi, l'extension de l'énoncé est bien essentielle. \square

Foncteurs de Powell Les duaux des foncteurs définis ci-après ont été introduits par Powell dans [Pow98c] (où la catégorie \mathcal{F}_{surj} n'apparaît pas explicitement) sous le nom de *foncteurs co-Weyl*; il en a montré l'intérêt dans l'étude de la conjecture artinienne.

Définition 2.42. On appelle *foncteur de Powell* l'image par le foncteur $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$ d'un objet simple de \mathcal{F}_{surj} .

Nous nommerons *filtration de Powell* d'un foncteur F de \mathcal{F} toute filtration finie

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = F$$

de F dont les sous-quotients A_i/A_{i-1} sont des foncteurs de Powell.

Dans [Pow98c], les foncteurs possédant une filtration de Powell sont appelés foncteurs *DJ-bons*. De nombreuses propriétés en sont établies. Nous nous contenterons de démontrer la stabilité par produit tensoriel, particulièrement commode avec le formalisme de la catégorie \mathcal{F}_{surj} .

Proposition 2.43. *Si X est un objet fini de \mathcal{F}_{surj} , alors $\varpi(X)$ admet une filtration de Powell.*

Cette propriété résulte de l'exactitude du foncteur ϖ .

Exemple 2.44. Les projectifs standard $P_V \simeq \varpi(P_V^{surj})$ de \mathcal{F} admettent une filtration de Powell.

Corollaire 2.45. *Le produit tensoriel de deux foncteurs de \mathcal{F} possédant une filtration de Powell admet une filtration de Powell.*

Démonstration. Cela provient de la dernière assertion de la proposition 2.36, du corollaire 2.30 et de l'exactitude du produit tensoriel de \mathcal{F} . \square

Ce corollaire, qui illustre l'intérêt du produit tensoriel total, est établi dans [Pow98c] à partir d'un critère homologique pour l'existence d'une filtration de Powell.

Signalons également le lien entre les objets simples de \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj} réalisé par les foncteurs de Powell, qui se déduit de [Pow98c], § 2.3 (cf. aussi [Kuh94b]).

Proposition 2.46 (Kuhn-Powell). *Le cosocle d'un foncteur de Powell est simple. De plus, tout foncteur simple de \mathcal{F} est le cosocle d'un unique foncteur de Powell, à isomorphisme près.*

Remarque 2.47. Cette propriété procure un isomorphisme de groupes $G_0^f(\mathcal{F}) \simeq G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$. En revanche, les structures multiplicatives sur $G_0^f(\mathcal{F}_{surj})$ et $G_0^f(\mathcal{F})$ semblent fort délicates à comparer.

Liens avec la conjecture artinienne À l'aune du corollaire 2.23, les problèmes de finitude dans \mathcal{F}_{surj} se posent en les termes suivants.

Conjecture 2.48. *La catégorie \mathcal{F}_{surj} est co-localement artinienne.*

Par dualité, cette conjecture équivaut au caractère localement noethérien de \mathcal{F}_{inj} .

Proposition 2.49. *La conjecture 2.48 implique la conjecture artinienne.*

Démonstration. Si la conjecture 2.48 est vérifiée, $o(I_V)$ est artinien pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ (cf. proposition 2.36.3); la proposition 2.38 montre que les injectifs standard I_V de \mathcal{F} sont alors également artiniens. \square

Il ne semble en revanche exister aucun argument formel pour obtenir la réciproque de la proposition 2.49.

Notation 2.50. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $\tilde{P}(n)$ l'objet $\varpi(\text{Is}_n)$ de \mathcal{F} .

On a ainsi un isomorphisme canonique $\tilde{P}(n)(V) \simeq \mathbb{k}[\text{Pl}_{\mathcal{E}}(E_n, V)]$ pour $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$.

Lemme 2.51. 1. *Étant donné un objet X de \mathcal{F}_{surj} , les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (a) *L'objet X est de co-type fini.*
- (b) *L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{hom}(\text{Is}_n, X) \neq 0\}$ est fini et X est à valeurs de dimension finie.*

- (c) Le socle de X est fini.
2. Soit X un objet co-tf de \mathcal{F}_{surj} . Les assertions suivantes sont équivalentes.
- (a) L'objet X est co-pf.
- (b) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}^1(\text{Is}_n, X) \neq 0\}$ est fini.

Proposition 2.52. *La conjecture artinienne équivaut à l'assertion suivante : pour tout objet de co-type fini F de \mathcal{F} , l'ensemble*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Ext}_{\mathcal{F}}^1(\tilde{P}(n), F) \neq 0\}$$

est fini.

Le lemme et la proposition précédents sont laissés au lecteur, qui pourra en trouver la démonstration dans [Djab].

Powell a émis, à partir des résultats de [Pow98c], la conjecture suivante, dont nous proposerons une version renforcée ultérieurement.

Conjecture 2.53 (Conjecture artinienne très forte). *Pour tout objet simple S de \mathcal{F}_{surj} tel que $ev_n(S) \neq 0$, le foncteur de Powell $\varpi(S)$ est simple noethérien de type n .*

2.4 Liens avec les systèmes de coefficients

Nous rappelons la définition de Dwyer de la catégorie des systèmes de coefficients ([Dwy80]).

Convention 2.54. Dans ce paragraphe, on note $R_n : \mathbb{k}[GL_{n+1}(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$, pour $n \in \mathbb{N}$, le foncteur de restriction. Le groupe $GL_n(\mathbb{k})$ est plongé dans $GL_m(\mathbb{k})$, pour $n \leq m$, par

$$\alpha_{n,m} : A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}.$$

On note, si $n \leq m$ sont des entiers, $l_{n,m} : E_n \hookrightarrow E_m$ l'inclusion $x \mapsto (x, 0)$.

On note enfin, pour $n \leq m$, $GL(m, n)$ le sous-groupe de $GL_m(\mathbb{k})$ des automorphismes g de E_m tels que $g \circ l_{n,m} = l_{n,m}$.

Remarque 2.55. Comme le sous-groupe $GL_n(\mathbb{k})$ de $GL_m(\mathbb{k})$ normalise $GL(m, n)$, on peut voir le foncteur $M \mapsto M^{GL(m,n)}$ (invariants sous l'action de $GL(m, n)$) défini sur les $GL_m(\mathbb{k})$ -modules comme un sous-foncteur de la restriction $R_n \dots R_{m-1} : \mathbb{k}[GL_m(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$.

Définition 2.56. On note \mathcal{E}_{coef}^f la catégorie dont les objets sont les espaces E_n pour $n \in \mathbb{N}$, les morphismes étant donnés par $\text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_n, E_m) = GL_m(\mathbb{k})$ si $n \leq m$, \emptyset si $n > m$, et où la composition est définie comme suit. Si $0 \leq n \leq m \leq k$ sont des entiers, la composée $g \circ h$, où $g \in \text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_m, E_k) = GL_k(\mathbb{k})$ et $h \in \text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_n, E_m) = GL_m(\mathbb{k})$, est l'élément $g \cdot \alpha_{m,k}(h)$ de $GL_k(\mathbb{k}) = \text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_n, E_k)$.

On note $Coeff$ la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{coef}^f, \mathcal{E})$; ses objets sont appelés *systèmes de coefficients*.

Remarque 2.57. Dans [Dwy80], un système de coefficients est une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où M_n est un $GL_n(\mathbb{k})$ -module à gauche, munie de morphismes de $GL_n(\mathbb{k})$ -modules $r_n : M_n \rightarrow R_n(M_{n+1})$.

L'équivalence entre cette définition et la nôtre résulte de ce que la catégorie \mathcal{E}_{coef}^f est engendrée (cf. [ML71], chapitre II, § 8) par les éléments de $GL_n(\mathbb{k}) = \text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_n, E_n)$ et les morphismes $i_{n,m} : E_n \rightarrow E_m$ correspondant à $I_m \in GL_m(\mathbb{k})$, pour $n \leq m$, soumis aux relations $i_{n,n+1}g = \alpha_{n,n+1}(g) \in \text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_n, E_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $g \in GL_n(\mathbb{k})$.

Lemme 2.58. *On définit un foncteur plein et essentiellement surjectif $\mathcal{E}_{coef}^f \rightarrow \mathcal{E}_{inj}^f$ de la façon suivante :*

- on associe à l'objet E_n de \mathcal{E}_{coef}^f l'objet E_n de \mathcal{E}_{inj}^f ;
- si $0 \leq n \leq m$ sont des entiers, on associe à $g \in \text{hom}_{\mathcal{E}_{coef}^f}(E_n, E_m) = GL_m(\mathbb{k})$ le monomorphisme $E_n \hookrightarrow E_m$ composé de l'inclusion $l_{n,m} : E_n \hookrightarrow E_m$ et de l'automorphisme $g : E_m \rightarrow E_m$.

Ce lemme se vérifie par inspection.

Notation 2.59. On note $C : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow Coef$ le foncteur de précomposition par le foncteur du lemme 2.58.

On rappelle que la notion de sous-catégorie de Serre est introduite dans la définition B.10.

Proposition 2.60. *Le foncteur C est pleinement fidèle ; son image est une sous-catégorie de Serre de $Coef$.*

Démonstration. Ce résultat s'obtient en combinant le lemme 2.58 et la proposition C.5. \square

On peut préciser cette propriété comme suit.

Proposition 2.61. *L'image essentielle du foncteur C est constituée des systèmes de coefficients $((M_n), (r_n))$ tels que $\text{im } r_m r_{m-1} \dots r_n \subset M_{m+1}^{GL(m+1, n)}$ pour tous entiers n et m tels que $0 \leq n \leq m$, où l'on utilise les notations de la remarque 2.57 pour les systèmes de coefficients.*

Démonstration. C'est une conséquence formelle de l'observation suivante : le squelette de la catégorie \mathcal{E}_{inj}^f constitué des espaces E_n est engendré par les inclusions $l_{n,n+1}$ et les éléments des différents $GL_n(\mathbb{k})$, soumis aux relations $\alpha_n(g) \circ l_n = l_n \circ g$ pour $g \in GL_n(\mathbb{k})$, $g \circ h = gh$ pour $g, h \in GL_n(\mathbb{k})$ et $g \circ l_{n,m} = l_{n,m}$ pour $g \in GL(m+1, n)$. \square

Remarque 2.62. En particulier, tous les systèmes de coefficients appartenant à l'image du foncteur C sont *centraux* au sens de [Dwy80], § 2.

Les catégories $Coef^{lf}$ et $Coef/Coef^{lf}$ Le foncteur de décalage $\delta^{inj} : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ admet un relèvement à $Coef$. Précisément, il existe un endofoncteur exact δ^{coef} de $Coef$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{inj} & \xrightarrow{\delta^{inj}} & \mathcal{F}_{inj} \\ \downarrow C & & \downarrow C \\ Coef & \xrightarrow{\delta^{coef}} & Coef \end{array} \quad (2)$$

commute (à isomorphisme canonique près).

Le foncteur δ^{coef} s'obtient par précomposition par l'endofoncteur de \mathcal{E}_{coef}^f donné sur les objets par $E_n \mapsto E_{n+1}$ et sur les morphismes par l'inclusion $GL_n(\mathbb{k}) \hookrightarrow GL_{n+1}(\mathbb{k})$ donnée par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

(δ^{coef} est le foncteur Σ de [Dwy80], § 2).

On établit, par la même méthode que celle employée dans \mathcal{F}_{inj} , le résultat suivant.

Proposition 2.63. *1. Un objet de $Coe f$ est fini si et seulement s'il est nilpotent pour le foncteur δ^{coef} et à valeurs de dimension finie.*
2. Tout objet fini de $Coe f$ est pf_∞ . Par conséquent, la sous-catégorie pleine $Coe f^{lf}$ de $Coe f$ des systèmes de coefficients localement finis est épaisse.

Soit $GL(\mathbb{k})$ la colimite des groupes linéaires $GL_n(\mathbb{k})$ (relativement aux inclusions $\alpha_{n,m}$). On peut voir $GL(\mathbb{k})$ comme le groupe des automorphismes linéaires g de l'espace vectoriel $E_\infty = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} E_n$ tels que $\ker(g - id)$ est de codimension finie.

On définit un foncteur $e_{coef} : Coef \rightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ par $e_{coef}(X) = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} X(E_n)$, l'action du groupe linéaire $GL(\mathbb{k})$ provenant de l'action de $GL_n(\mathbb{k})$ sur $X(E_n)$.

Proposition 2.64. *1. Le foncteur e_{coef} est adjoint à gauche au foncteur $c : \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \simeq \mathbf{Fct}(GL(\mathbb{k}), \mathcal{E}) \rightarrow Coef = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{coef}^f, \mathcal{E})$ donné par la précomposition par le foncteur $\mathcal{E}_{coef}^f \rightarrow GL(\mathbb{k})$ obtenu en plongeant les ensembles de morphismes $GL_n(\mathbb{k})$ dans $GL(\mathbb{k})$.*

2. Le foncteur e_{coef} induit une équivalence entre les catégories $Coe f / Coef^{lf}$ et $\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$.

Démonstration. Si P est un générateur projectif standard de $Coe f$, il existe un isomorphisme canonique $e_{coef}(P) \simeq \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]$. On en déduit, pour tout $GL(\mathbb{k})$ -module M , un isomorphisme canonique

$$\operatorname{hom}_{\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]}(e_{coef}(P), M) \simeq M \simeq \operatorname{hom}_{Coef}(P, c(M)).$$

Cela donne la première assertion, en écrivant un objet de $Coe f$ comme colimite de projectifs standard, puisque le foncteur e_{coef} commute aux colimites.

La première partie de la proposition 2.63 implique que le noyau du foncteur exact e_{coef} est égal à $Coe f^{lf}$; il induit donc un foncteur exact et fidèle $Coe f / Coef^{lf} \rightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$.

La conclusion s'obtient alors formellement à partir des deux observations suivantes :

1. la coïunité $e_{coef}c \rightarrow id$ de l'adjonction est un isomorphisme ;
2. l'unité $id \rightarrow ce_{coef}$ induit un isomorphisme après application du foncteur e_{coef} .

□

Remarque 2.65. L'anneau $\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]$ n'est pas noethérien à gauche. En effet, si l'on note $A_n = \ker(\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})/GL_n(\mathbb{k})])$, les A_n forment une suite strictement croissante d'idéaux à gauche de $\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]$. Par conséquent, la proposition 2.64 montre que la catégorie $Coe f$ n'est pas localement noethérienne.

Ce phénomène est à rapprocher de l'exemple 1.13 : dans cet exemple, l'obstruction au caractère noethérien de la catégorie de foncteurs considérée est de nature « combinatoire » (la catégorie source n'a pas d'endomorphismes non identiques). Ici, l'obstruction vient plutôt de la théorie des groupes.

Notation 2.66. Nous noterons $e : \mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ le foncteur composé

$$\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k}) \xrightarrow{C} \mathit{Coe}f \rightarrow \mathit{Coe}f/\mathit{Coe}f^{lf} \simeq \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}.$$

Remarque 2.67. Le foncteur e est beaucoup moins élémentaire que le foncteur analogue $\mathcal{F}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{M}(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$, où $\mathcal{M}(\mathbb{k})$ désigne le monoïde sans unité colimite des $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ relativement aux inclusions

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour une discussion à ce sujet, voir [Kuh94b], §3.

Proposition 2.68. *Le foncteur $C : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathit{Coe}f$ induit une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ et la sous-catégorie de Serre de $\mathit{Coe}f/\mathit{Coe}f^{lf} \simeq \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ des $GL(\mathbb{k})$ -modules M tels que $M = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} M^{GL(\infty, n)}$, où $GL(\infty, n)$ désigne le sous-groupe de $GL(\mathbb{k})$ des automorphismes g tels que $g(x) = x$ pour $x \in E_n$.*

Démonstration. Le diagramme commutatif (2) montre qu'un objet X de \mathcal{F}_{inj} est fini si et seulement si son image par le foncteur C est finie. Comme ce foncteur commute aux colimites, un objet de \mathcal{F}_{inj} est localement fini si et seulement s'il en est de même pour son image par C . Ainsi, ce foncteur induit un foncteur exact et fidèle $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf} \rightarrow \mathit{Coe}f/\mathit{Coe}f^{lf} \simeq \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$.

D'autre part, le lemme de Yoneda montre que le foncteur e admet un adjoint à droite r donné par

$$r(M) = \operatorname{hom}_{GL(\mathbb{k})}(\mathbb{k}[\operatorname{Pl}_{\mathcal{E}}(V, E_{\infty})], M).$$

Comme $\operatorname{Pl}_{\mathcal{E}}(E_n, E_{\infty})$ est un $GL(\mathbb{k})$ -ensemble transitif, et que le stabilisateur de l'inclusion canonique $E_n \hookrightarrow E_{\infty}$ est $GL(\infty, n)$, on a $r(M)(E_n) \simeq M^{GL(\infty, n)}$. En particulier, la coïunité de l'adjonction $er \rightarrow id$ est un *monomorphisme*. On en déduit formellement, comme dans la démonstration de la proposition 2.64, que le foncteur $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf} \rightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ qui nous intéresse induit une équivalence entre $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ et la sous-catégorie pleine de $\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ des $GL(\mathbb{k})$ -modules M tels que la coïunité $er(M) \rightarrow M$ est un isomorphisme, d'où la proposition. \square

3 Catégories de comodules sur un foncteur en coalgèbres de Boole

Nous exposons dans cette section des résultats formels généralisant, en termes de catégories de foncteurs, l'observation suivante. *Soit X un ensemble, munissons l'espace vectoriel $\mathbb{k}[X]$ de la structure de coalgèbre donnée par la diagonale $[x] \mapsto [x] \otimes [x]$ et la coïunité $[x] \mapsto 1$. La catégorie des \mathbb{k} -espaces vectoriels X -gradués est naturellement équivalente à la sous-catégorie $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[X]}$ des $\mathbb{k}[X]$ -comodules de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}$. Une coalgèbre du type $\mathbb{k}[X]$ est appelée coalgèbre de*

Boole, car, lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$, la structure de coalgèbre sur $\mathbb{F}_2[X]$ est duale de la structure d'algèbre de Boole de \mathbb{F}_2^X .

L'étude de catégories de modules ou de comodules sur des objets présentant une structure de type booléen dans un contexte proche des catégories de foncteurs remonte aux travaux des années 90 sur les modules instables sur l'algèbre de Steenrod.

Dans la deuxième partie de [HLS93], Henn, Lannes et Schwartz établissent un lien fondamental entre les foncteurs en algèbres de Boole de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{F}_p)$ et les algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p (voir aussi [Lan92]). Ils utilisent dans [HLS95] des structures de module sur ces algèbres pour étudier la cohomologie équivariante modulo p . Des considérations analogues apparaissent dans les travaux de Lannes et Zarati (cf. [LZ95]).

Convention 3.1. Dans toute cette section, on se donne une catégorie essentiellement petite \mathcal{I} .

Remarque 3.2. L'hypothèse de finitude du corps \mathbb{k} n'interviendra pas dans cette section.

3.1 La catégorie de comodules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$

Ce paragraphe a pour but d'identifier les catégories de comodules sur un foncteur obtenu par linéarisation d'un foncteur ensembliste à des catégories de foncteurs convenables.

Convention 3.3. Dans ce paragraphe, X désigne un foncteur de \mathcal{I} vers \mathbf{Ens} .

Notation 3.4. On définit une catégorie $\mathcal{I}_{\setminus X}$ de la manière suivante.

- Les objets de $\mathcal{I}_{\setminus X}$ sont les couples (E, x) , où E est un objet de \mathcal{I} et x un élément de $X(E)$.
- Les morphismes dans $\mathcal{I}_{\setminus X}$ sont donnés par

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{I}_{\setminus X}}((E, x), (F, y)) = \{u \in \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(E, F) \mid X(u)(x) = y\}.$$

- La composition des morphismes dans $\mathcal{I}_{\setminus X}$ est induite par celle de \mathcal{I} .

Le foncteur d'oubli $(E, x) \mapsto E : \mathcal{I}_{\setminus X} \rightarrow \mathcal{I}$ sera noté $\mathcal{O}_{\mathcal{I}, X}$.

Remarque 3.5. Il s'agit d'un cas particulier de la construction catégorique classique étudiée dans [ML71], chapitre II, § 6.

Notation 3.6. Nous désignerons par $\Upsilon_X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ le foncteur de précomposition par $\mathcal{O}_{\mathcal{I}, X}$.

Ainsi, Υ_X est un foncteur exact qui commute aux limites, aux colimites et au produit tensoriel (cf. proposition C.5). Dans le cas où X prend ses valeurs dans les ensembles non vides, $\mathcal{O}_{\mathcal{I}, X}$ est essentiellement surjectif, donc Υ_X est fidèle.

Proposition et définition 3.7. *Il existe un foncteur exact et fidèle, appelé foncteur de X -intégrale et noté $\Omega_X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, défini de la façon suivante.*

1. Si F est un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et E un objet de \mathcal{I} , on pose

$$(\Omega_X(F))(E) = \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x).$$

2. Si F est un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et $E \xrightarrow{f} E'$ une flèche de \mathcal{I} , et si x et x' sont des éléments respectifs de $X(E)$ et $X(E')$, la composante $F(E, x) \rightarrow F(E', x')$ de $(\Omega_X(F))(f)$ est égale à $F(f)$ si $X(f)(x) = x'$, et à 0 sinon.
3. Si $F \xrightarrow{u} G$ est une flèche de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, le morphisme $\Omega_X(u) : \Omega_X(F) \rightarrow \Omega_X(G)$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ est défini, sur l'objet E de \mathcal{I} , comme la somme directe sur les éléments x de $X(E)$ des morphismes $u(E, x) : F(E, x) \rightarrow G(E, x)$.

Exemple 3.8. On a $\Omega_X(\mathbb{k}) = \mathbb{k}[X]$ (linéarisation du foncteur X) dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, où le foncteur $\mathbb{k} \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ du membre de gauche est le foncteur constant.

Proposition 3.9. *Le foncteur Ω_X est adjoint à gauche à Υ_X .*

Cette proposition se vérifie de façon similaire à l'adjonction entre les foncteurs o et ϖ dans \mathcal{F}_{surj} .

Proposition 3.10. 1. *L'endofoncteur $\Omega_X \Upsilon_X$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ est isomorphe à $\cdot \otimes \mathbb{k}[X]$. Plus généralement, on a un isomorphisme*

$$\Omega_X(A \otimes \Upsilon_X(F)) \simeq \Omega_X(A) \otimes F$$

naturel en les objets A de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

2. *La coïunité $\Omega_X \Upsilon_X \rightarrow id$ de l'adjonction de la proposition 3.9 s'identifie au produit tensoriel par le morphisme d'augmentation $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$ obtenu par linéarisation de l'unique transformation naturelle $X \rightarrow *$.*

Proposition 3.11. *Les injections diagonales*

$$\bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, x) \hookrightarrow \bigoplus_{x, y \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, y)$$

fournissent un monomorphisme $\Omega_X(F \otimes G) \hookrightarrow \Omega_X(F) \otimes \Omega_X(G)$ naturel en les objets F et G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Cette proposition se vérifie par inspection. Appliquée aux isomorphismes canoniques $F \xrightarrow{\cong} F \otimes \mathbb{k}$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, elle donne le corollaire suivant.

Corollaire 3.12. 1. *Le foncteur $\mathbb{k}[X] = \Omega_X(\mathbb{k})$ est canoniquement une coalgèbre cocommutative dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.*

2. *Pour tout objet F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, $\Omega_X(F)$ est naturellement un $\mathbb{k}[X]$ -comodule. Autrement dit, on peut compléter le diagramme suivant.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) & \xrightarrow{\Omega_X} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \\ & \searrow & \uparrow \text{oubli} \\ & & \mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[X]} \end{array}$$

Remarque 3.13. La structure de coalgèbre sur $\mathbb{k}[X]$ généralise celle de l'algèbre d'un groupe, puisque sa diagonale est donnée par les applications linéaires $[x] \mapsto [x] \otimes [x]$.

Proposition 3.14. *Le foncteur Ω_X induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[X]}$.*

Démonstration. On applique la proposition A.8, de sorte qu'il suffit de constater qu'un $\mathbb{k}[X]$ -comodule est un comodule sur la comonade déterminée par l'adjonction entre Ω_X et Υ_X . Cela découle de la proposition 3.10 et du corollaire 3.12. \square

Remarque 3.15. 1. Dans l'équivalence de catégories de la proposition, le produit tensoriel de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ correspond au produit cotensoriel de $\mathbb{k}[X]$ -comodules.

2. L'image du foncteur Υ_X correspond aux comodules libres.

Remarque 3.16. Les considérations de ce paragraphe sont fonctorielles en X en le sens suivant. Toute transformation naturelle de foncteurs ensemblistes $X \rightarrow X'$ induit un foncteur $\mathcal{I}_{\setminus X} \rightarrow \mathcal{I}_{\setminus X'}$, donc par précomposition un foncteur $i : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X'}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ (qui généralise Υ_X). Via l'équivalence de catégories de la proposition 3.14, ce foncteur correspond à la coïnduction : pour tous objets F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X'}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et E de \mathcal{I} , le $\mathbb{k}[X(E)]$ -comodule $\Omega_X(i(F))(E)$ est le produit cotensoriel du $\mathbb{k}[X'(E)]$ -comodule $\Omega_{X'}(F)(E)$ et de $\mathbb{k}[X(E)]$ (vu comme un $\mathbb{k}[X'(E)]$ -comodule par le morphisme de coalgèbres $\mathbb{k}[X(E)] \rightarrow \mathbb{k}[X'(E)]$ déduit de la transformation naturelle $X \rightarrow X'$).

3.2 Recollements de catégories de comodules

Ce paragraphe traite d'une variante non coïtatoire des considérations précédentes, que l'on étudie commodément à partir d'un diagramme de recollement (proposition 3.19).

Convention 3.17. Dans ce paragraphe, X désigne un foncteur de \mathcal{I} vers la catégorie **Ens** et Y un sous-foncteur de X .

Nous désignerons par $\mathcal{I}_{X,Y}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{I}_{\setminus X}$ dont les objets sont les couples (E, x) pour lesquels $x \in X(E) \setminus Y(E)$.

On prendra garde que $X \setminus Y$ n'est *pas* en général un foncteur ensembliste. Nous noterons cependant, par abus, $\mathbb{k}[X \setminus Y]$ le conoyau du monomorphisme $\mathbb{k}[Y] \hookrightarrow \mathbb{k}[X]$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ induit par l'inclusion $Y \hookrightarrow X$.

On a un scindement canonique

$$\mathbb{k}[X/Y] \simeq \mathbb{k}[X \setminus Y] \oplus \mathbb{k} \tag{3}$$

obtenu en constatant que le foncteur ensembliste X/Y se relève canoniquement en un foncteur vers les ensembles pointés (on convient que $E/\emptyset = E \amalg \{*\}$).

Comme l'épimorphisme $\mathbb{k}[X/Y] \rightarrow \mathbb{k}$ est la coïtité du foncteur en coalgèbres $\mathbb{k}[X/Y]$, le foncteur $\mathbb{k}[X \setminus Y]$ est une coalgèbre sans coïtité dans $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$; nous y reviendrons à la proposition 3.24.

Dans le lemme suivant, nous nommons *sous-catégorie complémentaire* d'une sous-catégorie pleine \mathcal{B} d'une catégorie \mathcal{A} la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} dont la classe d'objets est le complémentaire de celle de \mathcal{B} .

Lemme 3.18. *La catégorie $\mathcal{I}_{\setminus Y}$ s'identifie canoniquement à une sous-catégorie pleine complète à droite de $\mathcal{I}_{\setminus X}$, dont la catégorie complémentaire est $\mathcal{I}_{X,Y}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que, si $f : (E, x) \rightarrow (E', x')$ est un morphisme de $\mathcal{I}_{\setminus X}$, où $x \in Y(E)$, alors on a $x' = X(f)(x) = Y(f)(x) \in Y(E')$ puisque Y est un sous-foncteur de X . \square

Appliquant le corollaire C.26, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.19. *Il existe un diagramme de recollement*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$$

où \mathcal{P} désigne le prolongement par zéro et \mathcal{R} la restriction.

Nous adaptons maintenant certains résultats de la section précédente à la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Notation 3.20. Nous noterons $\Upsilon_{X,Y}$ le foncteur composé

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \xrightarrow{\Upsilon_X} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

Autrement dit, $\Upsilon_{X,Y}$ est le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli $\mathcal{I}_{X,Y} \rightarrow \mathcal{I}$.

Définition 3.21. Le foncteur de $X \setminus Y$ -intégrale, noté $\Omega_{X,Y}$, est défini comme la composée

$$\Omega_{X,Y} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{\setminus X}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \xrightarrow{\Omega_X} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

On a donc $\Omega_{X,Y}(F)(E) = \bigoplus_{x \in X(E) \setminus Y(E)} F(E, x)$ pour $F \in \text{Ob } \mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et $E \in \text{Ob } \mathcal{I}$. On prendra garde que les foncteurs $\Upsilon_{X,Y}$ et $\Omega_{X,Y}$ ne sont généralement pas adjoints.

Remarque 3.22. 1. On a un isomorphisme canonique $\Omega_{X,Y}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}[X \setminus Y]$.

2. Le foncteur $\Omega_{X,Y}$ est exact et fidèle.

La proposition 3.10 entraîne le résultat suivant, puisque les foncteurs de restriction et de prolongement par zéro commutent canoniquement au produit tensoriel.

Proposition 3.23. *L'endofoncteur $\Omega_{X,Y} \Upsilon_{X,Y}$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ est isomorphe à $\cdot \otimes \mathbb{k}[X \setminus Y]$. Plus généralement, on a un isomorphisme*

$$\Omega_{X,Y}(A \otimes \Upsilon_{X,Y}(F)) \simeq \Omega_{X,Y}(A) \otimes F$$

naturel en les objets A de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

De même, la proposition 3.11 et le corollaire 3.12 procurent le résultat suivant.

Proposition 3.24. 1. *Les injections diagonales fournissent un monomorphisme $\Omega_{X,Y}(F \otimes G) \hookrightarrow \Omega_{X,Y}(F) \otimes \Omega_{X,Y}(G)$ naturel en les objets F et G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$. Celui-ci est compatible aux isomorphismes d'associativité et de commutativité du produit tensoriel.*

2. *Le foncteur $\mathbb{k}[X \setminus Y]$ est canoniquement une coalgèbre cocommutative sans coïunité dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$; le morphisme canonique $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}[X \setminus Y]$ est un morphisme de coalgèbres sans coïunité.*

3. *Pour tout objet F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, $\Omega_{X,Y}(F)$ est naturellement un $\mathbb{k}[X \setminus Y]$ -comodule.*

Remarque 3.25. Le scindement (3) (page 32) permet d'identifier les catégories de comodules sur $\mathbb{k}[X \setminus Y]$ et $\mathbb{k}[X/Y]$. On rappelle que les comodules sur une coalgèbre coïunitaire, comme $\mathbb{k}[X/Y]$, sont supposés compatibles à la coïunité.

Proposition 3.26. *Le foncteur $\Omega_{X,Y}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[X \setminus Y]}$ formée des $\mathbb{k}[X \setminus Y]$ -comodules à droite (C, ψ_C) (que nous nommerons fidèles) tels que la comultiplication ψ_C est injective, notée $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[X \setminus Y]}^{fid}$.*

Démonstration. On utilise l'identification de la remarque précédente. Le foncteur de prolongement par zéro et la proposition 3.14 identifient alors $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}_{X,Y}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ à la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[X \setminus Y]}$ des comodules (C, ψ_C) tels que le produit fibré de l'inclusion $C \hookrightarrow C \oplus (C \otimes \mathbb{k}[X \setminus Y])$ et du morphisme $(id_C, \psi_C) : C \rightarrow C \oplus (C \otimes \mathbb{k}[X \setminus Y])$ est nul. Ce produit fibré étant égal à $\ker \psi_C$, cette condition équivaut à la fidélité de ψ_C , ce qui établit la proposition. \square

3.3 La catégorie de modules $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$

Nous présentons maintenant la situation duale de celle du paragraphe 3.1. Toutes les propriétés énoncées se démontrent de façon analogue à celles du paragraphe 3.1, c'est pourquoi nous les laissons au lecteur.

Convention 3.27. Dans ce paragraphe, X désigne un foncteur de la catégorie \mathcal{I}^{op} vers la catégorie \mathbf{Ens}^f des ensembles finis.

Nous expliquerons en fin de paragraphe l'utilité de cette restriction aux ensembles finis.

Notation 3.28. Nous noterons \mathcal{I}/X la catégorie $((\mathcal{I}^{op}) \setminus X)^{op}$. Le foncteur d'oubli $\mathcal{I}/X \rightarrow \mathcal{I}$ sera noté $\mathcal{O}^{\mathcal{I},X}$.

Explicitement, les objets de \mathcal{I}/X sont les couples (E, x) formés d'un objet E de \mathcal{I} et d'un élément x de $X(E)$. On a $\mathcal{O}^{\mathcal{I},X}(E, x) = E$ sur les objets.

Notation 3.29. Nous désignerons par $\Upsilon^X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ le foncteur de précomposition par $\mathcal{O}^{\mathcal{I},X}$.

Proposition et définition 3.30. *Il existe un foncteur exact et fidèle $\Omega^X : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, appelé foncteur de X -intégrale, défini de la façon suivante.*

1. Si F est un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et E un objet de \mathcal{I} , on pose

$$(\Omega^X(F))(E) = \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x).$$

2. Si F est un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et $E \xrightarrow{f} E'$ une flèche de \mathcal{I} , et si x et x' sont des éléments respectifs de $X(E)$ et $X(E')$, la composante $F(E, x) \rightarrow F(E', x')$ de $(\Omega^X(F))(f)$ est égale à $F(f)$ si $X(f)(x) = x'$, et à 0 sinon.
3. Si $F \xrightarrow{u} G$ est une flèche de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, le morphisme $\Omega^X(u) : \Omega^X(F) \rightarrow \Omega^X(G)$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ est défini, sur l'objet E de \mathcal{I} , comme la somme directe sur les éléments x de $X(E)$ des morphismes $u(E, x) : F(E, x) \rightarrow G(E, x)$.

Exemple 3.31. On a $\Omega^X(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^X$.

Proposition 3.32. *Le foncteur Ω^X est adjoint à droite à Υ^X .*

Proposition 3.33. 1. L'endofoncteur $\Omega^X \Upsilon^X$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ est isomorphe à $\cdot \otimes \mathbb{k}^X$. Plus généralement, on a un isomorphisme

$$\Omega^X(A \otimes \Upsilon^X(F)) \simeq \Omega^X(A) \otimes F$$

naturel en les objets A de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

2. L'unité $id \rightarrow \Omega^X \Upsilon^X$ de l'adjonction de la proposition 3.32 s'identifie au produit tensoriel par le morphisme $\mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}^X$ obtenu en appliquant cette unité au foncteur constant \mathbb{k} .

Proposition 3.34. Les projections canoniques

$$\bigoplus_{x,y \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, y) \rightarrow \bigoplus_{x \in X(E)} F(E, x) \otimes G(E, x)$$

fournissent un épimorphisme $\Omega^X(F) \otimes \Omega^X(G) \twoheadrightarrow \Omega^X(F \otimes G)$ naturel en les objets F et G de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Cette proposition, appliquée aux isomorphismes canoniques $F \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{\simeq} F$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, procure le corollaire suivant.

Corollaire 3.35. 1. Le foncteur $\mathbb{k}^X = \Omega^X(\mathbb{k})$ est canoniquement une algèbre commutative dans la catégorie monoïdale symétrique $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

2. Pour tout objet F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, $\Omega^X(F)$ est naturellement un \mathbb{k}^X -module. Autrement dit, on peut compléter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) & \xrightarrow{\Omega^X} & \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \\ & \searrow & \uparrow \text{oubli} \\ & & \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}^X} \end{array}$$

Proposition 3.36. Le foncteur Ω^X induit une équivalence de catégories entre $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}/X, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}^X}$.

Remarque 3.37. L'hypothèse de finitude des ensembles $X(E)$ permet d'assurer que, dans la définition de Ω^X , on peut remplacer la somme directe par un produit, ce qui est nécessaire pour établir la proposition 3.32. Il est obligatoire de considérer une somme directe pour disposer des propriétés de commutation avec le produit tensoriel.

4 Les catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$

Dans cette section, nous introduisons les catégories sources des *catégories de foncteurs en grassmanniennes*. Ces catégories sources, notées $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(\mathbb{k})$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k})$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f(\mathbb{k})$, possèdent une riche structure : de nombreux foncteurs, avec des propriétés d'adjonction et de composition, apparaissent très naturellement. Toutes les propriétés s'établissent de façon directe, c'est pourquoi nous ne démontrons que certaines d'entre elles.

Une partie des définitions et des résultats de cette section constituent des illustrations des constructions catégoriques utilisées dans la section 3.

Convention 4.1. Dans toute cette section, I désigne une partie de \mathbb{N} et n un entier naturel.

4.1 Définition des catégories et foncteurs utilisés

On rappelle que $\mathcal{G}r(V)$ désigne la grassmannienne des sous-espaces d'un sous-espace vectoriel V . Dans la suite, nous regarderons $\mathcal{G}r$ comme un foncteur $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$, en définissant $\mathcal{G}r(f) : \mathcal{G}r(V) \rightarrow \mathcal{G}r(V')$, où $f : V \rightarrow V'$ est un morphisme de \mathcal{E}^f , comme étant la fonction $W \mapsto f(W)$.

On rappelle également que, si I est une partie de \mathbb{N} , $\mathcal{G}r_I(V)$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{G}r(V)$ formé des sous-espaces de V dont la dimension appartient à I .

Remarque 4.2. On notera que $\mathcal{G}r_I$ est un sous-foncteur de $\mathcal{G}r$ si et seulement si I est de la forme $\leq n$ ou \mathbb{N} .

Définition 4.3 (Catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ et $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$). 1. Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ la catégorie donnée comme suit.

- Les objets de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ sont les couples (V, W) , où V est un \mathbb{k} -espace vectoriel de dimension finie et W un élément de $\mathcal{G}r_I(V)$.
- Les morphismes de (V, W) vers (V', W') dans $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ sont les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ telles que $f(W) \subset W'$.
- La composition des morphismes s'obtient par composition des applications linéaires sous-jacentes.

2. Nous désignerons par $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont donnés par

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})}((V, W), (V', W')) = \{f \in \text{hom}_{\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})}((V, W), (V', W')) \mid f(W) = W'\}.$$

3. Nous noterons $\widetilde{\text{incl}}_I$ le foncteur (fidèle et essentiellement surjectif) d'inclusion de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ dans $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$.

La mention du corps \mathbb{k} sera souvent omise.

De plus, lorsque la partie I est égale à \mathbb{N} , nous omettrons l'indice I dans la notation de ces catégories et des foncteurs où elles interviennent.

Par exemple, nous noterons $\widetilde{\text{incl}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ pour $\widetilde{\text{incl}}_{\mathbb{N}} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,\mathbb{N}}^f(\mathbb{k}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,\mathbb{N}}^f(\mathbb{k})$.

Dans la suite, nous ne considérerons la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ que lorsque $I = \mathbb{N}$. Nous ne donnerons donc la plupart des définitions et des propriétés des foncteurs où cette catégorie intervient que dans ce cadre, mais beaucoup d'entre elles se généralisent sans difficulté au cas de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k})$ pour $I \subset \mathbb{N}$ quelconque.

Notation 4.4 (Catégorie $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f(\mathbb{k})$). 1. Étant donné un objet V de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$, nous noterons $\mathbf{P}1_n(V)$ l'ensemble $\text{Pl}_{\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f}(E_n, V)$ des monomorphismes $E_n \hookrightarrow V$.

2. Nous désignerons par $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f(\mathbb{k})$ la catégorie définie ainsi.

- Les objets de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f(\mathbb{k})$ sont les couples (V, u) formés d'un objet V de $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ et d'un élément u de $\mathbf{P}1_n(V)$.
- Les morphismes dans $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f(\mathbb{k})$ de (V, u) vers (V', u') sont les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{u} & V \\ & \searrow u' & \downarrow f \\ & & V' \end{array}$$

- La composition des morphismes est induite par la composition des applications linéaires.

- Remarque 4.5.**
1. Si I est une partie du type $\leq n$ ou \mathbb{N} , alors $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(\mathbb{k})$ est la catégorie $(\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f)_{\setminus \mathcal{G}_r, I}$ (cf. notation 3.4).
 2. Avec les notations du paragraphe 3.2, $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ est la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r \leq n, \mathcal{G}_r \leq n-1}^f$.
 3. L'association $V \mapsto \mathbf{P}_n(V)$ n'est pas fonctorielle, mais si l'on note $\text{hom}_{\leq i}(E, V)$ le sous-ensemble de $\text{hom}_{\mathcal{E}}(E, V)$ formé des applications linéaires de rang au plus i , alors $\text{hom}_{\leq i}(E_n, \cdot)$ est un sous-foncteur de $\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(E_n, \cdot)$. On peut voir $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$ comme la catégorie $\mathcal{E}_{\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(E_n, \cdot), \text{hom}_{\leq n-1}(E_n, \cdot)}^f$.
 4. L'ensemble $\mathcal{G}_r(V)$ s'identifie canoniquement au quotient de $\mathbf{P}_n(V)$ par l'action à droite libre du groupe $GL_n(\mathbb{k})$.
 5. Les catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, 0}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, 0}^f$ s'identifient canoniquement à \mathcal{E}^f .
 6. Les catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, 1}^f(\mathbb{F}_2)$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, 1}^f(\mathbb{F}_2)$ sont isomorphes.
 7. Toutes les catégories introduites vérifient l'hypothèse C.14 (finitude des ensembles de morphismes), car \mathbb{k} est fini.

- Notation 4.6 (Foncteurs d'oubli).**
1. Soit J une partie de \mathbb{N} telle que $I \subset J$. On note $\text{incl}_{I, J} : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ le foncteur (pleinement fidèle) d'oubli.
 2. Nous désignerons par $\text{inc}_n^{\mathbf{P}_1}$ le foncteur (fidèle et essentiellement surjectif) d'oubli du plongement $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ associant à un objet $(V, E_n \xrightarrow{u} V)$ de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$ l'objet $(V, \text{im } u)$ de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ et égal à l'inclusion évidente sur les morphismes.

Comme nous le verrons en fin de section, les catégories introduites précédemment ne sont en général pas abéliennes. Une partie de la structure abélienne de la catégorie \mathcal{E}^f s'y reflète cependant, grâce à la notion suivante.

Définition 4.7 (Foncteurs de translation). On définit des foncteurs $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$, $\mathcal{E}^f \times \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$, appelés *foncteurs de translation*, et notés \boxplus , par $V \boxplus (A, B) = (V \oplus A, B)$ (dans les deux premiers cas) et $V \boxplus (A, u : E_n \hookrightarrow A) = (V \oplus A, E_n \xrightarrow{u} A \hookrightarrow V \oplus A)$ (dans le troisième) sur les objets, l'action sur les morphismes se déduisant de la functorialité de $\oplus : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.

Remarque 4.8. On a des isomorphismes $0 \boxplus X \simeq X$ et $(V' \oplus V) \boxplus X \simeq V' \boxplus (V \boxplus X)$ naturels en les objets V, V' de \mathcal{E}^f et X de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f, \mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$), vérifiant des propriétés de cohérence qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter. Ainsi, on peut voir \boxplus comme un foncteur d'action de la catégorie additive \mathcal{E}^f sur $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ (resp. $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f, \mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$).

Définition 4.9 (Foncteurs fondamentaux de source $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ ou $\mathcal{E}_{\mathbf{P}_1, n}^f$). 1.

Le *foncteur d'oubli principal* $\tilde{\mathfrak{D}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ est le foncteur associant à un objet (V, W) de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ l'espace vectoriel V , et à un morphisme l'application linéaire sous-jacente.

2. On appelle également *foncteurs d'oubli principaux* les foncteurs composés

$$\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\widetilde{\text{incl}}_I} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r, I}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{D}}_I} \mathcal{E}^f$$

et

$$\bar{\mathfrak{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \xrightarrow{\text{inc}_{\mathbf{P}1}^f} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}_n} \mathcal{E}^f.$$

3. Le foncteur *base* $\mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\text{surj}}^I$ est défini sur les objets par $\mathfrak{B}_I(V, W) = W$, et associe à un morphisme $f : (V, W) \rightarrow (V', W')$ l'application linéaire (surjective par définition de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$) $W \rightarrow W'$ induite par f .
4. Le foncteur *d'oubli secondaire* $\tilde{\mathfrak{B}} : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ associe à un objet (V, W) l'espace vectoriel W et à un morphisme $(V, W) \rightarrow (V', W')$ l'application linéaire induite $W \rightarrow W'$.
5. Le foncteur de *réduction* $\tilde{\mathfrak{K}}_I : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ est donné par $(V, W) \mapsto V/W$ sur les objets et associe à un morphisme l'application linéaire induite.
6. On appelle également *foncteurs de réduction* les foncteurs composés

$$\mathfrak{K}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \xrightarrow{\tilde{\text{incl}}_I} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{K}}_I} \mathcal{E}^f$$

et

$$\bar{\mathfrak{K}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \xrightarrow{\text{inc}_{\mathbf{P}1}^f} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f \xrightarrow{\bar{\mathfrak{K}}_n} \mathcal{E}^f.$$

On rappelle que l'indice I sera omis dans toutes ces notations lorsque $I = \mathbb{N}$.

Remarque 4.10. 1. Soit J une partie de \mathbb{N} telle que $I \subset J$. Le foncteur composé $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \xrightarrow{\text{incl}_{I,J}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}_J} \mathcal{E}^f$ est égal à \mathfrak{D}_I . De même, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f & \xrightarrow{\mathfrak{B}_I} & \mathcal{E}_{\text{surj}}^I \\ \text{incl}_{I,J} \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & \xrightarrow{\mathfrak{B}_J} & \mathcal{E}_{\text{surj}}^J \end{array}$$

commute. On a d'autres propriétés analogues de compatibilité à l'extension de la partie I avec les différents foncteurs introduits.

2. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f & \xrightarrow{\tilde{\text{incl}}} & \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \\ \mathfrak{B} \downarrow & & \downarrow \tilde{\mathfrak{B}} \\ \mathcal{E}_{\text{surj}}^f & \xrightarrow{\text{oubli}} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

commute.

3. Les foncteurs base ou d'oubli secondaire n'ont pas d'analogue non trivial en termes de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$; le rôle de cette catégorie est justement de simplifier certaines des considérations relatives à $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f$ en « rendant la base canoniquement isomorphe à E_n ».

Remarque 4.11. Le foncteur $\mathfrak{K}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ est le conoyau de la transformation naturelle injective tautologique $\mathfrak{B}_I \rightarrow \mathfrak{D}_I$ (où l'on note par abus \mathfrak{B}_I pour la composée de ce foncteur avec l'inclusion $\mathcal{E}_{\text{surj}}^I \rightarrow \mathcal{E}^f$); un constat analogue vaut pour $\tilde{\mathfrak{K}}_I$ et $\bar{\mathfrak{K}}_n$.

La proposition suivante établit des liens entre les foncteurs de translation et les foncteurs introduits dans la définition 4.9.

Proposition 4.12. *Il existe des isomorphismes*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(V \boxplus X, Y) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{E}^f}(V, \mathfrak{D}_I(Y)) \times \mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(X, Y) \quad \text{et}$$

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(X, V \boxplus Y) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathfrak{K}_I(X), V) \times \mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(X, Y)$$

naturels en les objets V de \mathcal{E}^f et X, Y de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$.

On a des énoncés similaires dans $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$.

Démonstration. Les deux isomorphismes étant très analogues, nous nous bornerons à montrer le second, qui s'obtient par la suite d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(X, V \boxplus Y) &\simeq \{f \in \mathrm{hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathfrak{D}_I(X), V \oplus \mathfrak{D}_I(Y)) \mid f(\mathfrak{B}_I(X)) = \mathfrak{B}_I(Y)\} \simeq \\ &\{(a, b) \in \mathrm{hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathfrak{D}_I(X), V) \times \mathrm{hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathfrak{D}_I(X), \mathfrak{D}_I(Y)) \mid a(\mathfrak{B}_I(X)) = 0 \text{ et } b(\mathfrak{B}_I(X)) = \mathfrak{B}_I(Y)\} \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{E}^f}(\mathfrak{K}_I(X), V) \times \mathrm{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(X, Y). \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.13. *Supposons que I contient 0. Le foncteur d'inclusion $\mathrm{incl}_{0,I} : \mathcal{E}^f \simeq \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,0}^f \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ est adjoint à droite à \mathfrak{K}_I .*

Définition 4.14 (Foncteurs fondamentaux de but $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ ou $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$). 1.

Les foncteurs de *plongement diagonal* sont les foncteurs $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathrm{surj}}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ et $\tilde{\mathfrak{D}} : \mathcal{E}^f \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ donnés sur les objets par $V \mapsto (V, V)$ et par le plongement évident sur les morphismes.

2. Les foncteurs de *plongement relatif* sont les foncteurs composés

$$\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathrm{surj}}^I \xrightarrow{\mathcal{E}^f \times \mathfrak{D}_I} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \xrightarrow{\boxplus} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$$

et

$$\tilde{\mathfrak{L}} : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f \xrightarrow{\mathcal{E}^f \times \tilde{\mathfrak{D}}} \mathcal{E}^f \times \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \xrightarrow{\boxplus} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f.$$

Ces foncteurs sont donc donnés sur les objets par $(A, B) \mapsto (A \oplus B, B)$.

3. Le foncteur de *décalage pointé* $\mathfrak{S}_n : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$ associe à un objet V de \mathcal{E}^f l'objet $(V \oplus E_n, E_n \hookrightarrow V \oplus E_n)$ et à une application linéaire u le morphisme $u \oplus E_n$.

Remarque 4.15. 1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f & \xrightarrow{\tilde{\mathrm{incl}}} & \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \\ \mathfrak{D} \uparrow & & \uparrow \tilde{\mathfrak{D}} \\ \mathcal{E}_{\mathrm{surj}}^f & \xrightarrow{\mathrm{oubli}} & \mathcal{E}^f \end{array}$$

commute.

2. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^f & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^n \\ \mathfrak{S}_n \downarrow & & \downarrow \mathfrak{L}_n \\ \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f & \xrightarrow{inc_{\mathbf{P}1}^{\mathbf{P}1}} & \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f \end{array}$$

commute, où l'inclusion supérieure est donnée par $V \mapsto (V, E_n)$.

Remarque 4.16. Le plongement évident $GL_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^n(\mathbb{k})$ étant une équivalence de catégories, nous commettrons parfois des abus de notation consistant à l'assimiler à une égalité pour les foncteurs mettant en jeu $\mathcal{E}_{surj}^n(\mathbb{k})$.

4.2 Propriétés des foncteurs fondamentaux

Nous commençons par donner des propriétés d'adjonction entre les foncteurs introduits précédemment qui seront utilisées de façon intensive dans tout l'article.

- Proposition 4.17.**
1. Le foncteur de plongement diagonal $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ est adjoint à gauche à $\mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^I$.
 2. Le foncteur de plongement diagonal $\tilde{\mathfrak{D}} : \mathcal{E}^f \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ est adjoint à gauche à $\tilde{\mathfrak{B}} : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.
 3. Le foncteur de plongement relatif $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$ est adjoint à gauche au foncteur $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$.
 4. Le foncteur de plongement relatif $\tilde{\mathfrak{L}} : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f$ est adjoint à gauche au foncteur $\tilde{\mathfrak{D}} \times \tilde{\mathfrak{B}} : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f$.
 5. Le décalage pointé $\mathfrak{S}_n : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$ est adjoint à gauche à $\bar{\mathfrak{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.

Démonstration. Si A est un objet de \mathcal{E}_{surj}^I et (V, W) un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$, on a un isomorphisme canonique

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f}(\mathfrak{D}_I(A), (V, W)) = \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}^f}(A, V) \mid f(A) = W\} \simeq \text{Epi}_{\mathcal{E}^f}(A, W),$$

ce qui démontre la première assertion. La troisième assertion s'en déduit en utilisant la proposition 4.12.

Les deuxième et quatrième points se traitent pareillement.

Établissons le dernier : si A est un objet de \mathcal{E}^f et $(V, u : E_n \hookrightarrow V)$ un objet de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$, on a un isomorphisme canonique

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f}(\mathfrak{S}_n(A), (V, u)) = \{f \in \text{hom}_{\mathcal{E}^f}(A \oplus E_n, V) \mid f|_{E_n} = u\} \simeq \text{hom}_{\mathcal{E}^f}(A, V).$$

Cela achève la démonstration. \square

La proposition suivante, laissée au lecteur, jouera un rôle fondamental par la suite.

Proposition 4.18 (Compositions fondamentales). *Les foncteurs composés*

$$\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \xrightarrow{\mathfrak{L}_I} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \xrightarrow{\mathfrak{B}_I \times \mathfrak{B}_I} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$$

et

$$\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{L}}} \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{K}} \times \tilde{\mathfrak{B}}} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f$$

sont canoniquement isomorphes aux foncteurs identités.

Proposition 4.19. *Supposons I non vide.*

1. Les foncteurs d'oubli principaux sont fidèles.
2. Le foncteur $\tilde{\mathfrak{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ induit un foncteur essentiellement surjectif $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}^{\geq n}$, où le but désigne la sous-catégorie pleine de \mathcal{E}^f des espaces de dimension au moins n . Si I a pour plus petit élément n , $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ induit un foncteur essentiellement surjectif $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^{\geq n}$. Le foncteur $\tilde{\mathfrak{D}} : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$ est essentiellement surjectif.
3. Les foncteurs de plongement relatif \mathfrak{L}_I et $\tilde{\mathfrak{L}}$ sont fidèles et essentiellement surjectifs. Il en est de même pour le décalage pointé \mathfrak{S}_n .
4. Les foncteurs $\mathfrak{K}_I \times \mathfrak{B}_I$ (donc en particulier \mathfrak{K}_I et \mathfrak{B}_I) et $\tilde{\mathfrak{K}} \times \tilde{\mathfrak{B}}$ (donc en particulier $\tilde{\mathfrak{K}}$ et $\tilde{\mathfrak{B}}$) sont pleins et essentiellement surjectifs.
5. Les foncteurs de plongement diagonal \mathfrak{D}_I et $\tilde{\mathfrak{D}}$ sont pleinement fidèles.

Démonstration. Les deux premières assertions s'établissent par inspection. L'essentielle surjectivité des foncteurs de plongement relatif et de décalage pointé découle de ce que tout sous-espace d'un espace vectoriel est facteur direct ; leur fidélité est claire. La quatrième assertion s'obtient en combinant la proposition 4.18 et l'essentielle surjectivité des plongements relatifs. La dernière s'obtient à partir des deux premières adjonctions de la proposition 4.17 et du constat que leurs unités $id \rightarrow \mathfrak{B}_I \mathfrak{D}_I$ et $id \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}} \tilde{\mathfrak{D}}$ sont des isomorphismes. \square

4.3 Propriétés de structure des catégories $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$

Les catégories qui nous intéresseront le plus par la suite sont les $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r,I}^f$. Les propriétés qui suivent montrent que, par certains côtés, les catégories $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$ ont une structure plus « régulière », c'est pourquoi nous serons parfois amenés à travailler dans ces catégories auxiliaires.

Proposition 4.20. *La catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ est additive et \mathbb{k} -linéaire. Les foncteurs d'oubli principal et secondaire sont additifs — autrement dit, on a un isomorphisme $(V, W) \oplus (V', W') \simeq (V \oplus V', W \oplus W')$ naturel en les objets (V, W) et (V', W') de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$. En particulier, on a un isomorphisme $E \boxplus (V, W) \simeq (E, 0) \oplus (V, W)$ naturel en les objets E de \mathcal{E}^f et (V, W) de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$.*

Remarque 4.21. La catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ n'est pas abélienne. En effet, on vérifie que pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, le morphisme $(V, 0) \rightarrow (V, V)$ de $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ dont l'application linéaire sous-jacente est l'identité est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. En revanche, ce n'est pas un isomorphisme, si V est non nul.

Proposition et définition 4.22 (Dualité dans $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$). *Le foncteur de dualité $(\cdot)^* : (\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$ induit une équivalence de catégories $(\cdot)^\vee : (\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f)^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ donnée sur les objets par $(V, W)^\vee = (V^*, W^\perp)(V, W)^\vee$.*

Proposition 4.23. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. (a) La catégorie $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$ possède des sommes finies.

(b) Son objet initial est (E_n, id_{E_n}) .

(c) La somme $(A, a) \amalg (B, b)$ de deux objets (A, a) et (B, b) de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ s'obtient en formant le carré cocartésien d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{a} & A \\ \downarrow b & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \oplus_{E_n} B \end{array}$$

et en munissant l'espace vectoriel $A \oplus_{E_n} B$ du plongement donné par la diagonale du carré.

2. Deux objets (A, a) et (B, b) de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$ possèdent toujours un produit. Il est donné par

$$(A, a) \times (B, b) = (A \oplus B, (a, b) : E_n \hookrightarrow A \oplus B).$$

3. On a des isomorphismes

$$\mathfrak{S}_n(V) \amalg X \simeq V \boxplus X \quad \text{et}$$

$$\mathfrak{S}_n(V) \times X \simeq \mathfrak{S}_n(V \oplus \bar{\mathfrak{D}}_n(X))$$

naturels en les objets V de \mathcal{E}^f et X de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1, n}^f$.

La démonstration des propositions 4.20, 4.22 et 4.23 est laissée au lecteur. La proposition 4.23 ne sera d'ailleurs pas utilisée explicitement.

Remarque 4.24. 1. Si I contient 0, alors $(0, 0)$ est objet final de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r, I}^f$, et tout objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r, I}^f$ admet un produit avec $(V, 0)$ (où $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$), qui est donné par le foncteur $V \boxplus \cdot$.

2. En revanche, on vérifie facilement que deux objets (V, W) et (V', W') de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r, I}^f$ tels que W et W' sont non nuls ne possèdent jamais de somme ni de produit.

Les propriétés suivantes fournissent un substitut à l'absence de sommes et de produits dans $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$; elles reposent sur le lemme simple et très utile suivant.

Lemme 4.25. *Il existe une bijection*

$$\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(A, A') \simeq \coprod_{B' \in \mathcal{G}r(A')} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f}((A, B), (A', B'))$$

naturelle en l'objet (A, B) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$ et l'objet A' de \mathcal{E}^f .

La functorialité doit être comprise dans le sens suivant :

– pour le terme de gauche, on considère le foncteur

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f)^{op} \times \mathcal{E}^f \xrightarrow{(\mathfrak{D})^{op} \times \mathcal{E}^f} (\mathcal{E}^f)^{op} \times \mathcal{E}^f \xrightarrow{\text{hom}} \mathbf{Ens};$$

– pour le terme de droite, la functorialité en (A, B) provient de manière usuelle du foncteur hom ; pour la functorialité en A' , on fait correspondre à une application linéaire $u : A' \rightarrow A''$ et à un élément f de $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f}((A, B), (A', B'))$ (où $B' \in \mathcal{G}r(A')$) la flèche $(A, B) \rightarrow (A'', B'')$, où $B'' = u(B')$, donnée par $u \circ f : A \rightarrow A''$.

Démonstration. Cette bijection s'obtient en faisant correspondre à une application linéaire $f : A \rightarrow A'$ le sous-espace $B' = f(B)$ de A' et le morphisme $(A, B) \rightarrow (A', B')$ de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ induit par f . \square

Proposition 4.26. *Il existe une bijection*

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A \oplus A', B \oplus B'), (V, W)) \simeq \\ & \coprod_{\substack{W_1, W_2 \in \text{Gr}(W) \\ W_1 + W_2 = W}} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V, W_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V, W_2)) \end{aligned}$$

naturelle en les objets (A, B) , (A', B') et (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.

Cette proposition, comme la proposition 4.28 ci-après, est laissée au lecteur. La functorialité doit être comprise dans le sens suivant :

- sur les ensembles hom , on utilise la functorialité usuelle ;
- pour $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ $((A, B), (A', B')) \mapsto (A \oplus A', B \oplus B')$, on associe à un morphisme (u, v) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ le morphisme $u \oplus v$ de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$;
- dans le terme de droite, la functorialité en (V, W) s'obtient comme suit. Si $u : (V, W) \rightarrow (V', W')$ est un morphisme de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ et W_1, W_2 deux sous-espaces de W tels que $W_1 + W_2 = W$, on pose $W'_i = f(W_i)$ ($i \in \{1, 2\}$), de sorte que $W'_1 + W'_2 = f(W) = W'$. Le morphisme induit par u s'obtient par somme sur les (W_1, W_2) des morphismes $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V, W_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V, W_2)) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A, B), (V', W'_1)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((A', B'), (V', W'_2))$ induits par u .

Notation 4.27. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. Nous noterons $\text{Gr}(V, W)\text{Gr}@Gr$ le sous-ensemble de $\text{Gr}(V \oplus W)$ formé des sous-espaces E de $V \oplus W$ tels que les morphismes $E \hookrightarrow V \oplus W \twoheadrightarrow V$ et $E \hookrightarrow V \oplus W \twoheadrightarrow W$ soient surjectifs.

On définit ainsi un foncteur $Gr : \mathcal{E}_{\text{surj}}^f \times \mathcal{E}_{\text{surj}}^f \rightarrow \mathbf{Ens}$, l'action sur les morphismes étant obtenue par un biais analogue à celui détaillé précédemment.

Proposition 4.28. *Il existe une bijection*

$$\begin{aligned} & \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A, B)) \times \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A', B')) \\ & \simeq \coprod_{C \in \text{Gr}(B, B')} \text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, W), (A \oplus A', C)) \end{aligned}$$

naturelle en les objets (A, B) , (A', B') et (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.

La functorialité repose ici sur celle de Gr (d'une manière similaire à celle explicitée pour la proposition 4.26).

Remarque 4.29. Les propositions 4.26 et 4.28 sont spécifiques à la catégorie « globale » $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$; elles n'ont pas d'analogue dans $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$, par exemple.

Deuxième partie

Les catégories de foncteurs en grassmanniennes

Le principal sujet de cet article réside dans l'étude de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$, appelée parfois *catégorie de foncteurs en grassmanniennes globale*, et de ses sous-catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}(\mathbb{k})$, où $n \in \mathbb{N}$. Ces catégories possèdent un intérêt intrinsèque en raison de leur riche structure algébrique; elles s'interprètent notamment en termes de modules ou de comodules. De plus, nous verrons dans la partie III que le *foncteur d'intégrale en grassmanniennes* $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{k})$ constitue un outil puissant d'étude de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$.

La section 5 décrit la structure de base de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Après avoir introduit les foncteurs fondamentaux reliant cette catégorie aux autres catégories de foncteurs que nous avons introduites, notamment \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj} , elle décrit les groupes de Grothendieck de ses objets finis et projectifs de type fini. Dans la section 7, nous présentons une approche monadique de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Enfin, la section 9 présente quelques propriétés générales des adjoints au produit tensoriel dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Les autres catégories de foncteurs en grassmanniennes que nous introduisons serviront surtout d'auxiliaires dans l'étude de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$. Dans la section 6, nous présentons quelques propriétés d'une catégorie notée $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$ et étudions le foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$, dont une propriété fondamentale, l'auto-dualité, constitue un cas particulier d'un résultat sur la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$. Le rôle fondamental du foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ provient de ce que la catégorie de foncteurs en grassmanniennes globale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ est équivalente à la catégorie des $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ -comodules.

La section 8 étudie une dernière famille de catégories de foncteurs en grassmanniennes, notées $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}(\mathbb{k})$, qui fournit un analogue des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ obtenu en trivialisant l'action du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{k})$ (assertion qui sera précisée par la proposition 8.31). En outre, la structure monadique de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ donne lieu à de nouvelles structures dans les catégories de foncteurs en grassmanniennes.

5 Les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$

Cette section est consacrée à une première étude des catégories suivantes. Son principal objectif consiste à en comprendre les objets finis.

Définition 5.1. Étant donnée une partie I de \mathbb{N} , on introduit la catégorie de foncteurs

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}(\mathbb{k}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f(\mathbb{k}), \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

Nous noterons simplement $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$, ou $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, pour $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,\mathbb{N}}(\mathbb{k})$.

Remarque 5.2. Les cas les plus intéressants sont ceux où $I = \mathbb{N}$, $\leq n$ ou n .

5.1 Généralités

Nous introduisons les foncteurs obtenus par précomposition à partir de ceux du paragraphe 4.1, et utilisons les propriétés établies dans le paragraphe 4.2 et

la section 3.

Notation 5.3. 1. Soit J une partie de \mathbb{N} . Nous abrègerons la notation des espaces vectoriels $\text{hom}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}}$ en $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, J}$, et utiliserons une convention analogue pour les groupes d'extensions ou les hom internes. De même, nous noterons les projectifs standard $P_A^{\mathcal{G}_r, J}$ (où $A \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$) plutôt que $P_A^{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f}$, et les injectifs standard $I_A^{\mathcal{G}_r, J}$ plutôt que $I_A^{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f}$ (cf. § C.2). L'exposant J sera omis pour $J = \mathbb{N}$.

2. Soient I et J deux parties de \mathbb{N} telles que $J \subset I$. Nous noterons $\mathcal{R}_{I, J} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ le foncteur de restriction $(\text{incl}_{J, I})^*$. Le foncteur de prolongement par zéro, lorsqu'il est défini (cf. paragraphe C.6), sera noté $\mathcal{P}_{J, I} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$. Les indices seront omis lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

La proposition 3.19 fournit le résultat suivant, dans lequel nous omettons les indices des foncteurs de restriction et de prolongement par zéro (de sorte que la notation \mathcal{R} et \mathcal{P} désigne à chaque fois deux foncteurs différents).

Proposition 5.4. *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un diagramme de recollement*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n-1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \\ \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n} \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} .$$

Nous introduisons maintenant les deux foncteurs fondamentaux de source \mathcal{F} et de but $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Définition 5.5. Soit I une partie de \mathbb{N} .

1. On définit le foncteur de *plongement standard* $\iota_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ comme le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli principal $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.
2. Le foncteur de *plongement réduit* $\kappa_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est le foncteur de précomposition par le foncteur de réduction $\mathfrak{K}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.

Autrement dit, on a

$$\iota_I(F)(V, W) = F(V)$$

et

$$\kappa_I(F)(V, W) = F(V/W)$$

pour $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ et $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$.

L'indice I sera omis quand $I = \mathbb{N}$; des conventions analogues vaudront dans les notations suivantes.

Remarque 5.6. Les foncteurs $\iota_{\leq n}$ et ι sont, avec la notation du paragraphe 3.1, les foncteurs $\Upsilon_{\mathcal{G}_r, \leq n}$ et $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}$ respectivement. De même, le foncteur ι_n est, selon la convention du paragraphe 3.2, le foncteur $\Upsilon_{\mathcal{G}_r, \leq n, \mathcal{G}_r, \leq n-1}$.

Grâce à la remarque précédente, nous pouvons considérer les foncteurs d'intégrale introduits dans les définitions 3.7 et 3.21. Il s'agit des seuls foncteurs de cette section qui ne soient pas des foncteurs de précomposition. Des foncteurs d'une catégorie de foncteurs en grassmanniennes vers la catégorie \mathcal{F} , ce sont les plus fondamentaux (cf. partie III).

Définition 5.7 (Foncteurs d'intégrale en grassmanniennes). Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Nous noterons $\omega_{\leq n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur $\Omega_{\mathcal{G}_r, \leq n}$.

2. Nous noterons $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur $\Omega_{\mathcal{G}_r}$.
3. Nous désignerons par $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur $\Omega_{\mathcal{G}_{r \leq n}, \mathcal{G}_{r \leq n-1}}$.

Ces foncteurs seront appelés *foncteurs d'intégrale en grassmanniennes*.

Remarque 5.8. On a des isomorphismes canoniques $\omega_{\leq n} \simeq \omega \circ \mathcal{P}_{\leq n, \mathbb{N}}$ et $\omega_n \simeq \omega_{\leq n} \circ \mathcal{P}_{n, \leq n}$.

Les résultats des paragraphes 3.1 et 3.2 se traduisent par le résultat formel mais fondamental suivant.

Proposition 5.9. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Le foncteur $\omega_{\leq n}$ est adjoint à gauche à $\iota_{\leq n}$. Il induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r, \leq n}}$ et la sous-catégorie $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[G_{r \leq n}]}$ de \mathcal{F} .*
2. *Le foncteur ω est adjoint à gauche à ι . Il induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et la sous-catégorie $\mathbf{Comod}_{\mathbb{k}[G_r]}$ de \mathcal{F} .*
3. *Le foncteur ω_n induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$ et la sous-catégorie $\mathbf{Comod}_{\bar{G}(n)}^{\text{fid}}$ de \mathcal{F} des $\bar{G}(n)$ -comodules fidèles.*
4. *On a un isomorphisme*

$$\omega_I(X \otimes \iota_I(F)) \simeq \omega_I(X) \otimes F$$

naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ et F de \mathcal{F} , où $I = \mathbb{N}, \leq n$ ou n .

Démonstration. Les deux premières assertions constituent des cas particuliers des propositions 3.9 et 3.14, la troisième de la proposition 3.26. Le dernier point résulte pour sa part des propositions 3.10 et 3.23. \square

Nous définissons maintenant les deux foncteurs fondamentaux entre les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ et $\mathcal{F}_{\text{surj}}^I$.

Définition 5.10. Soit I une partie de \mathbb{N} .

1. Le foncteur de *plongement secondaire* $\rho_I : \mathcal{F}_{\text{surj}}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ est le foncteur de précomposition par le foncteur base $\mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_{r,I}}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\text{surj}}^I$.
2. Le foncteur d'évaluation généralisée $\varepsilon_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{surj}}^I$ est la précomposition par le foncteur de plongement diagonal $\mathfrak{D}_I : \mathcal{E}_{\text{surj}}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_{r,I}}^f$.

Autrement dit, on a

$$\rho_I(F)(V, W) = F(W)$$

pour $F \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\text{surj}}^I$ et $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_{r,I}}^f$, et

$$\varepsilon_I(X)(V) = X(V, V)$$

pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ et $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\text{surj}}^I$.

Remarque 5.11. Avec l'abus de la remarque 4.16, le foncteur $\varepsilon_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}} \rightarrow \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ s'identifie au foncteur d'évaluation $\text{ev}_{(E_n, E_n)}$, ce qui justifie la terminologie employée.

On peut de même voir ρ_n comme un foncteur $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,n}}$; il est donné par $\rho_n(X)(V, W) = \text{Iso}(E_n, W) \otimes_{\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]} M$.

On rappelle que l'on désigne par $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{\text{surj}}^I$ la catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{\text{surj}}^I, \mathcal{E})$, selon la notation C.21.

Définition 5.12 (Foncteurs fondamentaux entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ et $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$). Soit I une partie de \mathbb{N} .

1. Le foncteur de *plongement complet* $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ est la précomposition par le foncteur $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$.
2. Le foncteur de *plongement total* $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ est la précomposition par le foncteur $\mathfrak{K}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$.
3. On définit le foncteur de *décalage en grassmanniennes* $\sigma_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ comme le foncteur de précomposition par le foncteur de plongement relatif $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\xi_I(F)(V, W) &= F(V, W), \\ \theta_I(F)(V, W) &= F(V/W, W)\end{aligned}$$

pour $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ et $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,I}^f$, et

$$\sigma_I(X)(A, B) = X(A \oplus B, B)$$

pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$, $A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et $B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$.

Intuitivement, la catégorie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ ne doit pas être vue comme très différente de la catégorie \mathcal{F} . En effet, dans le cas où I est réduite à un élément n , on a des équivalences de catégories canoniques $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^n \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \underline{GL_n(\mathbb{k})}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\underline{GL_n(\mathbb{k})}, \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{E})) = \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$ (cf. notation 3b donnée à la fin de l'introduction). Si I est une partie quelconque de \mathbb{N} , la catégorie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ s'obtient par recollement de telles catégories (cf. proposition 2.3).

Remarque 5.13. Compte-tenu des identifications que nous venons de mentionner, nous considérerons ξ_n et θ_n comme des foncteurs $\mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ (et de même $\sigma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$).

Premières propriétés Nous commençons par relier les foncteurs projectifs ou injectifs standard des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$, \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj}^I à l'aide des foncteurs introduits plus haut.

Proposition 5.14. *Soit J une partie de \mathbb{N} . On a des isomorphismes*

$$P_{\mathfrak{L}_J(V,W)}^{\mathcal{G}r,J} \simeq \iota_J(P_V) \otimes \rho_J(P_W^{\mathcal{E}_{surj}^J}) \quad (4)$$

et

$$I_{\mathfrak{L}_J(V,W)}^{\mathcal{G}r,J} \simeq \kappa_J(I_V) \otimes I_{\mathfrak{D}_J(W)}^{\mathcal{G}r,J} \quad (5)$$

naturels en les objets V de \mathcal{E}^f et W de \mathcal{E}_{surj}^J .

Démonstration. Par la troisième adjonction de la proposition 4.17, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f}(\mathfrak{L}_J(V, W), \cdot) \simeq (\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(V, \cdot) \circ \mathfrak{D}_J) \times (\text{hom}_{\mathcal{E}_{surj}^J}(W, \cdot) \circ \mathfrak{B}_J).$$

On en déduit le premier isomorphisme, en linéarisant.

De même, on obtient formellement l'isomorphisme (5) à partir du second isomorphisme de la proposition 4.12. \square

Remarque 5.15. 1. Comme le foncteur de plongement relatif $\mathfrak{L}_J : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ est essentiellement surjectif, cette proposition décrit tous les projectifs et tous les injectifs standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$.

2. Les injectifs du type $I_{\mathfrak{D}_J(W)}^{\mathcal{G}_r, J} = I_{(W, W)}^{\mathcal{G}_r, J}$ ne se ramènent pas facilement à des injectifs de catégories plus simples. Illustrons-le pour $J = \mathbb{N}$, afin de simplifier les notations.

En effet, le comportement du foncteur $I_{(W, W)}^{\mathcal{G}_r}$ se rapproche de l'injectif I_W^{surj} de \mathcal{F}_{surj} dans la mesure où il existe un isomorphisme canonique $\varepsilon_J(I_{(W, W)}^{\mathcal{G}_r}) \simeq I_W^{surj}$ (car $\text{hom}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f}((V, V), (W, W)) \simeq \text{Epi}_{\mathcal{E}}(V, W)$), et aussi parce que $I_{(W, W)}^{\mathcal{G}_r}$ comme I_W^{surj} ont un anneau d'endomorphismes isomorphe à $\mathbb{k}[GL(W)]$. Cependant, $I_{(W, W)}^{\mathcal{G}_r}$ n'est pas isomorphe à l'image de I_W^{surj} par le foncteur $\rho : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

La propriété suivante des foncteurs injectifs et projectifs standard de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ (qui n'a pas d'équivalent dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ pour $I \neq \mathbb{N}$) est analogue aux assertions 2 et 3 de la proposition 2.36.

Proposition 5.16. 1. Il existe un isomorphisme $\omega(P_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r}) \simeq P_V$ naturel en l'objet (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.

2. Il existe un isomorphisme $\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r}$ naturel en l'objet V de \mathcal{E}^f .

Démonstration. Ces deux assertions proviennent, par linéarisation, du lemme 4.25. \square

La proposition qui suit donne les propriétés d'usage courant des foncteurs de précomposition introduits en début de section.

Proposition 5.17. Soit I une partie non vide de \mathbb{N} .

1. Les foncteurs $\iota_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, $\sigma_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et $\varepsilon_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^I$ sont exacts; ils commutent au produit tensoriel, aux limites et aux colimites. De plus, les foncteurs ι_I , σ_I et ξ_I sont fidèles.
2. Les foncteurs $\kappa_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, $\rho_I : \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sont exacts et pleinement fidèles; ils commutent au produit tensoriel, aux limites et aux colimites. De surcroît, leurs images sont des sous-catégories de Serre de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Démonstration. Tous les foncteurs de l'énoncé sont des foncteurs de précomposition, ils commutent donc aux limites, aux colimites et au produit tensoriel, par la proposition C.5.

Comme le foncteur \mathfrak{L}_I est essentiellement surjectif, par la proposition 4.19, le foncteur de précomposition associé, σ_I , est fidèle (par la proposition C.5). La fidélité du foncteur ι_I s'établit de même, car l'inclusion $\mathcal{E}^{\leq n} \hookrightarrow \mathcal{E}^f$ (cf. la deuxième assertion de la proposition 4.19), où n désigne le plus petit élément de I , induit par précomposition une équivalence de catégories $\mathcal{F} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{E}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^{\leq n}, \mathcal{E})$. La fidélité de ξ_I est analogue, en remarquant que tout objet de $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$ est rétracte d'un objet de l'image du foncteur $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I$.

Comme les foncteurs \mathfrak{K}_I , \mathfrak{B}_I et $\mathfrak{K}_I \times \mathfrak{B}_I$ sont pleins et essentiellement surjectifs, par la proposition 4.19, la proposition C.5 montre qu'ils sont pleinement fidèles et que leurs images sont des sous-catégories de Serre de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$. \square

La partie de la proposition 5.17 relative au foncteur θ_I , ainsi que la composition fondamentale donnée par la proposition suivante, apparaîtront sous un jour nouveau dans la section 7.

Proposition 5.18. *Soit I une partie de \mathbb{N} . Le foncteur composé*

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \xrightarrow{\theta_I} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \xrightarrow{\sigma_I} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$$

est canoniquement isomorphe au foncteur identique.

Cette propriété découle de la proposition 4.18.

Proposition 5.19. *Soit I une partie de \mathbb{N} . Le foncteur $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est adjoint à gauche au foncteur σ_I .*

Ce résultat et le suivant s'obtiennent en combinant les propositions 4.17 et C.5.5.

Proposition 5.20. *Soit I une partie de \mathbb{N} . Le foncteur ρ_I est adjoint à gauche au foncteur ε_I . De surcroît, l'unité $id \rightarrow \varepsilon_I \rho_I$ de l'adjonction est un isomorphisme.*

Le corollaire 4.13 et la proposition C.25 fournissent les adjonctions suivantes.

Proposition 5.21. *Soit I une partie de \mathbb{N} contenant 0. Le foncteur $\mathcal{R}_{I,0} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}$ est adjoint à gauche à κ_I et à droite à $\mathcal{P}_{0,I}$.*

Nous terminons ce sous-paragraphe par deux propriétés de compatibilité relatives aux foncteurs entre \mathcal{F} , \mathcal{F}_{surj} et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Proposition 5.22. *Le foncteur composé $\mathcal{F} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}_{surj}$ s'identifie canoniquement au foncteur d'oubli o .*

Démonstration. En effet, le foncteur composé $\mathcal{E}_{surj}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathcal{E}^f$ s'identifie au foncteur d'inclusion. \square

Par adjonction, on en déduit (cf. propositions 5.9, 5.20 et 2.36) le corollaire suivant, que l'on peut évidemment établir par une vérification directe.

Corollaire 5.23. *Le foncteur $\omega \circ \rho : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe à ϖ .*

Décomposition scalaire et tors de Frobenius La catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(\mathbb{k})$ est munie d'une action naturelle du groupe \mathbb{k}^\times . De façon analogue à la proposition/définition 2.7, on en déduit le résultat suivant.

Proposition et définition 5.24. *Étant donné un entier i , notons $(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})_i(\mathbb{k})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathbb{k})$ formée des foncteurs X tels que $X(\lambda.id_V) = \lambda^i \cdot id_{X(V)}$ pour tous $\lambda \in \mathbb{k}^\times$ et $V \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$. Les inclusions induisent une équivalence de catégories*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathbb{k}) \simeq \prod_{i=1}^{q-1} (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})_i(\mathbb{k}).$$

On notera $X \simeq \bigoplus_{i=1}^{q-1} X_i$ la décomposition naturelle d'un foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathbb{k})$ qu'on en déduit, où $X_i \in \text{Ob } (\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})_i(\mathbb{k})$. On l'appelle décomposition scalaire de X .

De même que $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$, la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathbb{k})$ possède un *tors de Frobenius*, parce que l'automorphisme ϕ de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f$ déduit du morphisme de Frobenius se prolonge naturellement en un automorphisme de la catégorie $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(\mathbb{k})$.

Les foncteurs introduits précédemment possèdent des propriétés de commutation vis-à-vis de la décomposition scalaire et du tors de Frobenius qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter (pour les foncteurs de précomposition, elles se lisent sur le foncteur d'origine entre les catégories sources).

Changement de corps Si K est une extension finie de \mathbb{k} , les foncteurs d'induction et de restriction induisent des foncteurs $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(K)$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(K) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f(\mathbb{k})$, d'où l'on déduit, comme dans \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj} , des foncteurs (encore dits d'induction et de restriction) $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathbb{k}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(K)$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(K) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathbb{k})$. Néanmoins, comme dans le cas de \mathcal{F}_{surj} , on perd la propriété d'adjonction mutuelle entre induction et restriction.

Tous les foncteurs de précomposition introduits dans ce paragraphe commutent aux changements de corps. En revanche, ce n'est pas le cas du foncteur d'intégrale en grassmanniennes.

5.2 Structures tensorielles

Il est naturel, comme le montrera la proposition 5.29, d'introduire sur la catégorie de foncteurs en grassmanniennes globale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, à côté de la structure tensorielle usuelle donnée par \otimes (à laquelle nous nous référerons lorsque nous parlerons de structure tensorielle sans plus de précision) une seconde structure tensorielle, très analogue à celle donnée par le produit tensoriel total de \mathcal{F}_{surj} (cf. paragraphe 2.1).

Définition 5.25 (Produit tensoriel total). Étant donnés deux objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, on appelle *produit tensoriel total* de X et Y le foncteur noté $X \tilde{\otimes} Y$ et défini comme suit.

1. Si (V, W) est un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, on pose

$$(X \tilde{\otimes} Y)(V, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}_r(W) \\ A+B=W}} X(V, A) \otimes Y(V, B).$$

2. Si $u : (V, W) \rightarrow (V', W')$ est un morphisme de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, le morphisme $(X \tilde{\otimes} Y)(u) : (X \tilde{\otimes} Y)(V, W) \rightarrow (X \tilde{\otimes} Y)(V', W')$ est défini comme la somme directe sur les sous-espaces A et B de W tels que $A + B = W$ des morphismes

$$\begin{aligned} X(V, A) \otimes Y(V, B) &\xrightarrow{X(u) \otimes Y(u)} X(V', u(A)) \otimes Y(V', u(B)) \\ \hookrightarrow &\bigoplus_{\substack{A', B' \in \mathcal{G}_r(W') \\ A'+B'=W'}} X(V', A') \otimes Y(V', B') \end{aligned}$$

où l'on note encore, par abus, u pour les morphismes $(V, A) \rightarrow (V', u(A))$ et $(V, B) \rightarrow (V', u(B))$ induits par u .

Cette définition fait sens puisque $u(A) + u(B) = u(A + B) = u(W) = W'$.

Avant de préciser les liens entre ce produit tensoriel total et celui défini dans \mathcal{F}_{surj} , définissons un produit tensoriel total dans la catégorie auxiliaire $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$.

Définition 5.26. Le *produit tensoriel total* sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ est le foncteur $\tilde{\otimes} : (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}) \times (\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}) \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ donné, via l'isomorphisme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj} \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj})$, par

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj} \times \mathcal{F}_{surj}) \xrightarrow{\tilde{\otimes}^*} \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}).$$

Autrement dit,

$$(X \tilde{\otimes} Y)(A, B) = \bigoplus_{\substack{V, W \in \mathcal{G}r(B) \\ V+W=B}} X(A, V) \otimes Y(A, W) \quad (A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f, B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^f).$$

Proposition 5.27. 1. Le produit tensoriel total définit sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ une structure monoïdale symétrique exacte d'unité $\rho(\text{Is}_0)$.

2. Il existe un monomorphisme $X \otimes Y \hookrightarrow X \tilde{\otimes} Y$ naturel en les objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$.

3. Les produits tensoriels totaux sur les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, \mathcal{F}_{surj} et $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ vérifient les propriétés de compatibilité suivantes : on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \rho(A \tilde{\otimes} B) &\simeq \rho(A) \tilde{\otimes} \rho(B) & (A, B \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj}), \\ \xi(F \tilde{\otimes} G) &\simeq \xi(F) \tilde{\otimes} \xi(G) & (F, G \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}). \end{aligned}$$

Cette proposition se vérifie par inspection.

Remarque 5.28. En revanche, les foncteurs ε , σ et θ ne commutent pas au produit tensoriel total. Par exemple, on a

$$\theta(F \tilde{\otimes} G)(V, W) \simeq (F \tilde{\otimes} G)(V/W, W) = \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}r(W) \\ A+B=W}} F(V/W, A) \otimes G(V/W, B)$$

tandis que

$$\begin{aligned} (\theta(F) \tilde{\otimes} \theta(G))(V, W) &= \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}r(W) \\ A+B=W}} \theta(F)(V, A) \otimes \theta(G)(V, B) \\ &\simeq \bigoplus_{\substack{A, B \in \mathcal{G}r(W) \\ A+B=W}} F(V/A, A) \otimes G(V/B, B). \end{aligned}$$

On voit cependant ainsi qu'il existe un épimorphisme canonique $\theta(F) \tilde{\otimes} \theta(G) \rightarrow \theta(F \tilde{\otimes} G)$.

On dispose d'un foncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f \times \mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$ donné sur les objets par $((A, B), (A', B')) \mapsto (A \oplus A', B \oplus B')$, dont l'action sur les morphismes se déduit de la functorialité de $\oplus : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$. La proposition suivante montre l'utilité du produit tensoriel total à l'aide de ce foncteur.

Proposition 5.29. Il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ un isomorphisme $P_{(A, B)}^{\mathcal{G}r} \tilde{\otimes} P_{(A', B')}^{\mathcal{G}r} \simeq P_{(A \oplus A', B \oplus B')}^{\mathcal{G}r}$ naturel en les objets (A, B) et (A', B') de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}r}^f$.

Démonstration. Cet énoncé découle de la proposition 4.26. \square

Corollaire 5.30. *Le produit tensoriel total de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ préserve les objets projectifs, les objets de type fini et les objets pf_n .*

Remarque 5.31. 1. Le produit tensoriel usuel de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ préserve également les objets de type fini et pf_n .

2. Cependant, le produit tensoriel usuel de deux objets projectifs de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ n'est généralement pas projectif, car il en est ainsi dans \mathcal{F}_{surj} — par exemple, $P_{\mathbb{k}}^{surj} \otimes P_{E_2}^{surj}$ n'est pas projectif.

3. Le produit tensoriel de deux objets projectifs d'une catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ est en revanche projectif. Cela provient de ce que le produit tensoriel d'un $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module projectif et d'un $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module fini est projectif, de ce que le produit tensoriel dans \mathcal{F} de deux projectifs est projectif, et de l'isomorphisme (4) de la proposition 5.14.

Contrairement à la situation que nous venons d'observer pour les projectifs, le produit tensoriel total possède un comportement déplaisant sur les injectifs. En revanche, le produit tensoriel ordinaire est adapté à leur étude.

On rappelle que le symbole Gr qui intervient dans la proposition suivante a été introduit dans la notation 4.27.

Proposition 5.32. *Il existe un isomorphisme*

$$I_{(A,B)}^{\mathcal{G}_r} \otimes I_{(A',B')}^{\mathcal{G}_r} \simeq \bigoplus_{C \in Gr(B,B')} I_{(A \oplus A', C)}^{\mathcal{G}_r}$$

naturel en les objets (A, B) et (A', B') de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.

Démonstration. C'est la version linéarisée de la proposition 4.28. \square

Corollaire 5.33. *Le produit tensoriel de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ préserve :*

1. les objets injectifs de co-type fini ;
2. les objets de co-type fini ;
3. les objets co- pf_n .

La proposition suivante (qui généralise la dernière assertion de la proposition 2.36) constitue la principale motivation de l'introduction du produit tensoriel total dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Proposition 5.34. *Il existe dans \mathcal{F} un isomorphisme*

$$\omega(X \tilde{\otimes} Y) \simeq \omega(X) \otimes \omega(Y)$$

naturel en les objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Démonstration. Cela provient, par linéarisation, de la décomposition ensembliste

$$Gr(V) \times Gr(V) \simeq \coprod_{W \in Gr(V)} \{(A, B) \in Gr(W) \times Gr(W) \mid A + B = W\}$$

naturelle en l'objet V de \mathcal{E}^f . \square

5.3 Le foncteur différence

Comme dans la catégorie \mathcal{F} , il existe dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ un foncteur différence, fondamental dans l'étude de ces catégories, notamment de leurs objets finis. L'analogie avec le cas de \mathcal{F} est particulièrement étroite du fait que le foncteur différence des $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ « n'agit pas sur la base ».

Convention 5.35. Dans tout ce paragraphe, J désigne une partie de \mathbb{N} .

Définition 5.36 (Foncteurs de décalage et foncteur différence dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$). 1.

Soit V un objet de \mathcal{E}^f . Le foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ de précomposition par le foncteur de translation $V \boxplus \cdot : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ (cf. définition 4.7) est appelé *foncteur de décalage* par V et se note $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$.

On a ainsi $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J} X(A, B) = X(V \oplus A, B)$ pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ et $(A, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$.

La bifonctorialité de \boxplus rend l'association $V \mapsto \Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$ fonctorielle.

2. Le *foncteur différence* $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ est le noyau de la transformation naturelle $\Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow id$ induite par le morphisme $\mathbb{k} \rightarrow 0$ de \mathcal{E}^f .

La proposition suivante, laissée au lecteur, montre que le comportement de ces foncteurs ne dépend guère de la partie J de \mathbb{N} .

Proposition 5.37. *Si I est un sous-ensemble de J , le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} & \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{G}_r, I}} & \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \\ \mathcal{P}_{I, J} \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_{I, J} \\ \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} & \xrightarrow{\Delta^{\mathcal{G}_r, J}} & \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \end{array}$$

commute à isomorphisme canonique près, lorsque le prolongement par zéro $\mathcal{P}_{I, J}$ est défini. Il existe une propriété analogue relative au foncteur de restriction $\mathcal{R}_{J, I}$.

Une grande part des considérations relatives aux foncteurs de décalage et différence de \mathcal{F} se transcrivent dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Notons tout d'abord que la transformation naturelle $id \rightarrow \Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}_r, J}$ procure un scindement canonique

$$\Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}_r, J} \simeq \Delta^{\mathcal{G}_r, J} \oplus id,$$

de sorte que $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$ commute aux limites et colimites, comme les foncteurs de décalage.

Une autre propriété fondamentale, similaire à la proposition 1.3 relative à \mathcal{F} , réside dans l'existence d'adjoints à gauche et à droite exacts et explicites aux foncteurs de décalage et différence.

Proposition 5.38. *Soit V un objet de \mathcal{E}^f . Le foncteur $\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}$ est adjoint :*

1. à droite à $\cdot \otimes \iota_J(P_V)$;
2. à gauche à $\cdot \otimes \kappa_J(I_V)$.

Ces adjonctions sont naturelles en V .

Démonstration. On combine les propositions C.17 et C.18 avec les isomorphismes de la proposition 4.12. \square

Corollaire 5.39. *Le foncteur différence $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$ est adjoint :*

1. à droite à $\cdot \otimes \iota_J(\bar{P}_{\mathbb{k}})$;
2. à gauche à $\cdot \otimes \kappa_J(\bar{I}_{\mathbb{k}})$.

Corollaire 5.40. *Les foncteurs de décalage et le foncteur différence de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ conservent les objets projectifs et les objets injectifs.*

Démonstration. C'est une conséquence formelle de la proposition et du corollaire précédents et de l'exactitude des adjoints. \square

Nous évaluons maintenant les foncteurs de décalage sur les objets projectifs et injectifs standard de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$.

Proposition 5.41. *Il existe des isomorphismes*

$$\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}(P_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r, J}) \simeq P_{A/B}(V) \otimes P_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r, J}$$

et

$$\Delta_V^{\mathcal{G}_r, J}(I_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r, J}) \simeq I_A(V) \otimes I_{(A, B)}^{\mathcal{G}_r, J}$$

naturels en les objets V de \mathcal{E}^f et (A, B) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$.

Démonstration. C'est une conséquence formelle de la proposition 4.12. \square

Comme dans le cas de \mathcal{F} , cette propriété a l'utile conséquence suivante.

Corollaire 5.42. *Les foncteurs de décalage et le foncteur différence de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ conservent les objets de type fini, de co-type fini, pf_n et co-pf_n .*

Démonstration. Ce corollaire se déduit de la proposition 5.41 et de la commutation des foncteurs de décalage et différence aux limites et colimites. \square

La proposition suivante donne les propriétés de compatibilité entre les deux produits tensoriels de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et son foncteur différence.

Proposition 5.43. *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ et V un objet de \mathcal{E}^f . Il existe des isomorphismes naturels*

$$\Delta_V^{\mathcal{G}_r}(X \otimes Y) \simeq \Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \otimes \Delta_V^{\mathcal{G}_r} Y,$$

$$\Delta_V^{\mathcal{G}_r}(X \otimes Y) \simeq (\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \otimes Y) \oplus (X \otimes \Delta_V^{\mathcal{G}_r} Y) \oplus (\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \otimes \Delta_V^{\mathcal{G}_r} Y);$$

et, dans le cas où $J = \mathbb{N}$,

$$\Delta_V^{\mathcal{G}_r}(X \tilde{\otimes} Y) \simeq \Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \tilde{\otimes} \Delta_V^{\mathcal{G}_r} Y,$$

$$\Delta_V^{\mathcal{G}_r}(X \tilde{\otimes} Y) \simeq (\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \tilde{\otimes} Y) \oplus (X \tilde{\otimes} \Delta_V^{\mathcal{G}_r} Y) \oplus (\Delta_V^{\mathcal{G}_r} X \tilde{\otimes} \Delta_V^{\mathcal{G}_r} Y).$$

Démonstration. Établissons la première assertion relative au produit tensoriel total : si (A, B) est un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_V(X \tilde{\otimes} Y)(A, B) &= (X \tilde{\otimes} Y)(V \oplus A, B) = \bigoplus_{\substack{W, W' \in \mathcal{G}_r(B) \\ W+W'=B}} X(V \oplus A, W) \otimes Y(V \oplus A, W') \\ &= \bigoplus_{\substack{W, W' \in \mathcal{G}_r(B) \\ W+W'=B}} \Delta_V(X)(A, W) \otimes \Delta_V(Y)(A, W') = \Delta_V(X) \tilde{\otimes} \Delta_V(Y)(A, B). \end{aligned}$$

L'inclusion canonique

$$\begin{aligned} X \tilde{\otimes} Y &\hookrightarrow \Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}r}(X \tilde{\otimes} Y) = \Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}r}(X) \tilde{\otimes} \Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}r}(Y) \simeq (X \oplus \Delta^{\mathcal{G}r}(X)) \tilde{\otimes} (Y \oplus \Delta^{\mathcal{G}r}(Y)) \\ &\simeq (X \tilde{\otimes} Y) \oplus (X \tilde{\otimes} \Delta^{\mathcal{G}r}(Y)) \oplus (\Delta^{\mathcal{G}r}(X) \tilde{\otimes} Y) \oplus (\Delta^{\mathcal{G}r}(X) \tilde{\otimes} \Delta^{\mathcal{G}r}(Y)) \end{aligned}$$

s'identifie à l'inclusion du facteur direct, d'où le dernier point.

La première assertion relative au produit tensoriel ordinaire résulte de ce que $\Delta_V^{\mathcal{G}r}$ est un foncteur de précomposition ; la seconde s'en déduit comme dans le cas du produit tensoriel total. \square

Commutation des foncteurs fondamentaux aux foncteurs différences

Conformément à nos conventions générales (cf. notation C.2), l'endofoncteur Δ_* de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F})$ qui apparaît dans la proposition suivante est donné par la postcomposition par le foncteur différence Δ de \mathcal{F} .

- Proposition 5.44.** 1. On a des isomorphismes canoniques $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \iota_J \simeq \iota_J \circ \Delta$ et $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \kappa_J \simeq \kappa_J \circ \Delta$ de foncteurs $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$.
2. On a des isomorphismes canoniques $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \xi_J \simeq \xi_J \circ \Delta_*$ et $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \circ \theta_J \simeq \theta_J \circ \Delta_*$ de foncteurs $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$.
3. On a un isomorphisme canonique $\Delta_* \circ \sigma_J \simeq \sigma_J \circ \Delta^{\mathcal{G}r,J}$ de foncteurs $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$.

Démonstration. Établissons par exemple le dernier point, les autres se montrant de manière analogue. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J & \xrightarrow{(\mathbb{F}_2 \oplus \cdot) \times \mathcal{E}_{surj}^J} & \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J \\ \mathcal{L}_J \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}_J \\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & \xrightarrow{\mathbb{k} \boxplus \cdot} & \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f \end{array}$$

commute à isomorphisme canonique près, d'où un isomorphisme canonique $\tilde{\Delta}_* \circ \sigma_J \simeq \sigma_J \circ \Delta_{\mathbb{k}}^{\mathcal{G}r,J}$, puis $\Delta_* \circ \sigma_J \simeq \sigma_J \circ \Delta^{\mathcal{G}r,J}$. \square

5.4 Foncteurs polynomiaux

Le foncteur différence de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ permet d'introduire les foncteurs polynomiaux de cette catégorie. On commence, à l'aide du lemme et de la proposition suivants, par identifier le noyau du foncteur différence, qui, contrairement au cas de la catégorie \mathcal{F} , ne se réduit pas aux foncteurs constants.

Lemme 5.45. *Le foncteur composé $\Delta^{\mathcal{G}r,J} \rho_J : \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,J}$ est nul.*

Démonstration. Pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, l'injection naturelle $\rho_J \hookrightarrow \Delta_V^{\mathcal{G}r,J} \circ \rho_J$ est un isomorphisme, puisque le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & \xrightarrow{\mathfrak{B}_J} & \mathcal{E}_{surj}^J \\ V \boxplus \cdot \downarrow & \nearrow \mathfrak{B}_J & \\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,J}^f & & \end{array}$$

commute (à isomorphisme naturel près). \square

Proposition et définition 5.46 (Foncteurs pseudo-constants). *Soit X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *le foncteur $\Delta^{\mathcal{G}_r, J} X$ est nul ;*
2. *la coïunité $\rho_{J \in J}(X) \rightarrow X$ de l'adjonction de la proposition 5.20 est un isomorphisme ;*
3. *il existe un objet R de \mathcal{F}_{surj}^J tel que X est isomorphe à $\rho_J(R)$.*

Lorsqu'elles sont vérifiées, nous dirons que X est un foncteur pseudo-constant.

Démonstration. La coïunité $\rho_{J \in J}(X) \rightarrow X$ est donnée sur l'objet (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$ par l'injection $X(W, W) \hookrightarrow X(V, W)$ induite par le morphisme canonique $(W, W) \rightarrow (V, W)$ de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$. La première assertion signifie que le monomorphisme canonique $X(A, B) \hookrightarrow X(A \oplus \mathbb{k}, B)$ est un isomorphisme pour tout objet (A, B) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$, on en déduit donc que le morphisme précédent est un isomorphisme par récurrence sur la codimension de W dans V . Ainsi, la première assertion implique la deuxième.

Il est clair que la deuxième implique la troisième. Enfin, la troisième entraîne la première par le lemme 5.45. \square

Nous introduisons maintenant la notion générale de foncteur polynomial et de foncteur analytique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$, de la même manière que dans \mathcal{F} . Nous avons précédemment identifié les foncteurs polynomiaux de degré 0.

Définition 5.47 (Foncteurs polynomiaux, analytiques dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$). Un foncteur $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ est dit :

1. *polynomial* s'il existe un entier naturel n tel que $(\Delta^{\mathcal{G}_r, J})^n X = 0$;
2. *analytique* s'il est colimite de ses sous-foncteurs polynomiaux.

Le *degré* d'un foncteur polynomial X est le plus grand entier positif n tel que $(\Delta^{\mathcal{G}_r, J})^n X \neq 0$ si X est non nul, on le note $\deg X$; on pose également $\deg 0 = -\infty$.

Notation 5.48. Nous désignerons par $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^k$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ formée des foncteurs polynomiaux de degré au plus k .

La proposition 5.43 a la conséquence suivante.

Proposition 5.49. 1. *Si X et Y sont deux foncteurs polynomiaux de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$, alors $X \otimes Y$ et $X \tilde{\otimes} Y$ sont polynomiaux et $\deg(X \otimes Y) = \deg(X \tilde{\otimes} Y) = \deg X + \deg Y$.*

2. *Le produit tensoriel total (donc aussi usuel) de deux foncteurs analytiques de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ est analytique.*
3. *Un foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ est polynomial si et seulement si $\Delta^{\mathcal{G}_r, J} X$ est polynomial ; dans ce cas $\deg(\Delta^{\mathcal{G}_r, J} X) = \deg X - 1$ si X n'est pas pseudo-constant.*

Afin de donner les propriétés de conservation des foncteurs polynomiaux ou analytiques par les foncteurs fondamentaux de source ou de but $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$, nous avons besoin d'introduire la notion de foncteur polynomial ou analytique dans la catégorie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$.

Proposition et définition 5.50. *Soient X un objet de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ et $i \in \mathbb{N}$.*

1. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*
 - (a) *Le foncteur $\Delta_*^i X$ est nul.*

(b) Le foncteur X appartient à la sous-catégorie épaisse $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}^{i-1})$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F})$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, nous dirons que X est un foncteur polynomial de degré strictement inférieur à i .

2. On dit que X est analytique s'il est colimite de ses sous-foncteurs polynomiaux.

Démonstration. C'est une application directe de la proposition C.4. \square

L'énoncé qui suit découle quant à lui de la proposition 5.44.

Proposition 5.51. 1. (a) Si F est un objet de \mathcal{F} , F est polynomial si et seulement si $\iota_J(F)$ est un objet polynomial de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Ils ont alors même degré.

(b) Si F est un objet de \mathcal{F} , F est polynomial si et seulement si $\kappa_J(F)$ est un objet polynomial de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Ils ont alors même degré.

2. (a) Un objet F de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ est polynomial si et seulement si l'objet $\xi_J(F)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ est polynomial. Ils ont alors même degré.

(b) Si F est un objet de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$, F est polynomial si et seulement si $\theta_J(F)$ est un objet polynomial de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Ils ont alors même degré.

3. Un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ est polynomial si et seulement si l'objet $\sigma_J(X)$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$ est polynomial. Ils ont alors même degré.

Comme les foncteurs considérés commutent aux colimites, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.52. Les foncteurs ι_J , κ_J , ξ_J , θ_J et σ_J préservent les foncteurs analytiques.

Remarque 5.53. En revanche, le foncteur d'intégrale en grassmanniennes $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ ne préserve pas les foncteurs analytiques. Nous reviendrons en détail sur cette observation essentielle dans la partie III.

Quotients de la filtration polynomiale de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ Grâce à la proposition 5.46, la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^0$ est équivalente à la catégorie \mathcal{F}_{surj}^J . À l'aide des lemmes 5.54 et 5.56, nous allons généraliser ce résultat en identifiant les catégories quotients $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^k / \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^{k-1}$ pour tout entier k . Dans le paragraphe suivant, nous appliquerons ces résultats à la description des objets simples de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$.

Lemme 5.54. Soit X un objet polynomial de degré $i \geq 0$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Le noyau de l'épimorphisme canonique $p_X : \xi_J \sigma_J(X) \twoheadrightarrow X$ (coüinité de l'adjonction de la proposition 5.19) est de degré strictement inférieur à i .

Démonstration. La proposition 5.44 montre que les endofoncteurs $\xi_J \sigma_J$ et $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ commutent à isomorphisme naturel près ; de plus, $\Delta^{\mathcal{G}_r, J}(p_X) \simeq p_{\Delta^{\mathcal{G}_r, J} X}$. Comme p_X est un isomorphisme lorsque le foncteur X est pseudo-constant, cela donne la conclusion. \square

Lemme 5.55. Si F est un objet polynomial de degré $i \geq 0$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J$, le noyau de l'épimorphisme canonique $\xi_J(F) \twoheadrightarrow \theta_J(F)$ est de degré strictement inférieur à i .

Démonstration. Ce lemme s'obtient par application du précédent à l'objet $\theta_J(F)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$, qui est de degré i par la proposition 5.51, puisque $\sigma_J \circ \theta_J \simeq id$ (proposition 5.18). \square

Le lemme suivant se démontre de la même façon que le lemme 5.54.

Lemme 5.56. *Soit X un objet polynomial de degré $i \geq 0$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$. Le conoyau du monomorphisme canonique $X \hookrightarrow \sigma_J \xi_J(X)$ (unité de l'adjonction de la proposition 5.19) est de degré strictement inférieur à i .*

Les lemmes 5.54 et 5.56 impliquent l'important résultat suivant.

Proposition 5.57. 1. *Le foncteur $\xi_J : \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ induit un foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}^n / \mathcal{F}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^n / \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Ce foncteur est une équivalence de catégories dont un inverse est donné par le foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^n / \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^{n-1} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}^n / \mathcal{F}^{n-1})$ induit par $\sigma_J : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F})$.*

Nous utiliserons également la description suivante de l'équivalence de catégories donnée par la proposition 5.57.

Proposition 5.58. *Le foncteur $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}^n / \mathcal{F}^{n-1}) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^n / \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^{n-1}$ induit par θ_J est le même que celui qu'induit ξ_J .*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 5.55. □

Les propositions 5.57 et 1.8 fournissent le corollaire suivant.

Corollaire 5.59. *On suppose $d = 1$, i.e. le corps \mathbb{k} premier.*

Pour tout entier naturel n , les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^n / \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}^{n-1}$ et $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathbf{Mod}_{\mathbb{k}[\Sigma_n]})$ sont équivalentes.

5.5 Foncteurs finis

Les résultats du paragraphe précédent permettent de décrire les objets simples et les objets finis des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ à partir de ceux de \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj}^I . Comme pour la catégorie \mathcal{F} , l'un des résultats les plus importants réside dans le caractère polynomial des objets finis.

Convention 5.60. Dans ce paragraphe, I désigne une partie de \mathbb{N} .

Lemme 5.61. *Soit X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ tel que $\Delta^{Gr, I} X$ est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et $\varepsilon_I(X)$ un objet fini de \mathcal{F}_{surj}^I . Alors X est fini.*

Démonstration. Le foncteur exact

$$(\Delta^{Gr, I}, \varepsilon_I) : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \times \mathcal{F}_{surj}^I$$

est fidèle : son noyau est constitué des foncteurs pseudo-constants X tels que $\varepsilon_I(X) = 0$. Mais un tel foncteur X est isomorphe à $\rho_I \varepsilon_I(X) = 0$, par la proposition 5.46, d'où la fidélité annoncée. La proposition B.17 donne donc la conclusion. □

Remarque 5.62. On a des résultats semblables en remplaçant dans cet énoncé fini par de type fini, pf_n ou $co-pf_n$.

Définition 5.63 (Niveau). On appelle niveau d'un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ l'élément

$$\text{niv}(X) = \sup \{ \dim W \mid (V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, X(V, W) \neq 0 \}$$

de $I \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que X est de niveau fini si $\text{niv}(X) < +\infty$.

On définit de même le coniveau de X comme l'élément

$$\text{coniv}(X) = \inf \{ \dim W \mid (V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, X(V, W) \neq 0 \}$$

de $I \cup \{+\infty\}$.

Ainsi, lorsque l'ensemble I est fini, tous les foncteurs de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sont de niveau fini.

Proposition 5.64. *Un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est fini si et seulement s'il est polynomial, à valeurs de dimension finie et de niveau fini.*

Démonstration. Soient S un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et (A, B) un objet de $\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$ tel que $S(\mathfrak{L}_I(A, B)) \neq 0$ (le foncteur \mathfrak{L}_I est essentiellement surjectif — cf. proposition 4.19), de sorte qu'il existe un épimorphisme $P_{\mathfrak{L}_I(A, B)}^{\mathcal{G}_r, I} \simeq \iota_I(P_A) \otimes \rho_I(P_B^{\mathcal{E}_{surj}^I}) \twoheadrightarrow S$ (cf. proposition 5.14). Cela montre d'une part que S est à valeurs de dimension finie, et que $S(V, W) = 0$ pour $\dim W > \dim B$. D'autre part, comme l'objet P_A de \mathcal{F} est coanalytique (proposition 1.6), il existe un objet polynomial F de \mathcal{F} et un épimorphisme $\iota_I(F) \otimes \rho_I(P_B^{surj}) \twoheadrightarrow S$. La proposition 5.51 montre que $\iota_I(F) \otimes \rho_I(P_B^{surj})$, donc S , est polynomial. On en déduit les mêmes propriétés pour les foncteurs finis par un argument d'épaisseur.

La réciproque résulte du lemme 5.61 et de la proposition 2.21 par récurrence sur le degré polynomial. \square

Cette proposition essentielle permet d'établir la préservation des foncteurs finis par les foncteurs ξ_I , θ_I et σ_I , donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 5.65. *Soient F un objet de \mathcal{F} et A un objet de \mathcal{F}_{surj}^I .*

1. *Si F et A sont finis, il en est de même pour $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A)$. La réciproque est vraie si A et F sont non nuls.*
2. *Si F et A sont finis, il en est de même pour $\kappa_I(F) \otimes \rho_I(A)$. La réciproque est vraie si A et F sont non nuls.*
3. *Un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est fini si et seulement si l'objet $\sigma_I(X)$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ est fini.*

Démonstration. Traitons le premier cas, en écartant le cas trivial où F ou A est nul. Le foncteur $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A) = \xi_I(F \boxtimes A)$ (on rappelle que le produit tensoriel extérieur \boxtimes est introduit au § C.5) est polynomial si et seulement s'il en est de même pour $F \boxtimes A$, par la proposition 5.51, ou encore de F , puisque $\Delta_*(F \boxtimes A) = \Delta(F) \boxtimes A$. Le foncteur $\iota_I(F) \otimes \rho_I(A)$ est à valeurs de dimension finie si et seulement s'il en est de même pour F et A . Enfin, le foncteur $F \boxtimes A$ est de niveau fini si et seulement si $A(E_n) = 0$ pour n assez grand. Les propositions 5.64 et 2.21 fournissent donc la première assertion.

Les autres s'établissent de façon analogue. \square

Notation 5.66. Nous désignerons par la suite par $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}^{lf}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ formée des objets localement finis.

Le corollaire suivant donne les principales propriétés de régularité des objets finis et localement finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Corollaire 5.67. 1. *Si X est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, il en est de même pour $\Delta^{\mathcal{G}_r, I} X$.*

2. *Le produit tensoriel total (donc, a fortiori, usuel) de deux objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est fini.*
3. *Les objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sont pf_∞ et $co-pf_\infty$.*
4. *La sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}^{lf}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est épaisse. Ses objets sont les foncteurs analytiques.*

5. Un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est de co-type fini si et seulement s'il est analytique et de socle fini.

Démonstration. Elle est similaire à celle du corollaire 1.7. Pour le dernier point, on établit que les injectifs standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sont analytiques de la façon suivante : le corollaire 5.52 et la proposition 1.6 montrent que l'image par le foncteur ι_I d'un injectif standard de \mathcal{F} est analytique. Comme tout injectif standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est facteur direct d'un tel foncteur, par la proposition 5.16, cela donne la conclusion. \square

Description des objets simples Les objets simples de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ seront ramenés à ceux de la catégorie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$. Le lemme suivant les décrit à partir des objets simples de \mathcal{F} et \mathcal{F}_{surj}^I , qui sont eux-mêmes assez bien compris (cf. sections 1 et 2).

Lemme 5.68. *Les objets simples de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ sont, à isomorphisme près, les $S \boxtimes R$, où S est un objet simple de \mathcal{F} et R un objet simple de \mathcal{F}_{surj}^I . Le produit tensoriel extérieur induit de plus un isomorphisme d'anneaux (sans unité si I est infini) $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj}^I)$.*

Démonstration. Cela découle de la proposition C.22 et de son corollaire C.23, dont les hypothèses sont vérifiées grâce à la proposition 1.10. \square

Avec la proposition 5.64, le résultat suivant est le plus important de cette section.

Proposition 5.69. 1. *Étant donné un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est simple ;*
- (b) *l'objet $\sigma_I(X)$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ est simple ;*
- (c) *il existe un objet simple F de \mathcal{F} et un objet simple R de \mathcal{F}_{surj}^I tel que X est isomorphe à $\kappa_I(F) \otimes \rho_I(R)$.*

2. *Les foncteurs exacts σ_I et θ_I induisent des isomorphismes d'anneaux (sans unité si I est infini) entre $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$ et $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \simeq G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj}^I)$ réciproques l'un de l'autre.*

Démonstration. La proposition 5.17.2 montre que le foncteur θ_I transforme un objet simple de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ en un objet simple de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et induit un *monomorphisme* de groupes abéliens, compatible au produit, $G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \hookrightarrow G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$. Ces deux groupes sont naturellement gradués par le degré polynomial, qui est respecté par θ_I (cf. proposition 5.51), de sorte que ce monomorphisme s'identifie à la somme directe sur $k \in \mathbb{N}$ des morphismes

$$G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}^k / \mathcal{F}^{k-1})) \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}^k / \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}^{k-1}$$

induits par θ_I , lesquels sont des isomorphismes par la proposition 5.57. La compatibilité au produit tensoriel extérieur pour $I = \mathbb{N}$ provient de la proposition 5.27.

Cela démontre la seconde assertion de l'énoncé, et la première compte-tenu du lemme 5.68 et de ce que l'isomorphisme $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}) \xrightarrow{\simeq} G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I)$ inverse du précédent est induit par σ_I (par les propositions 5.51 et 5.58). \square

Corollaire 5.70. *Le foncteur exact ξ_I induit un isomorphisme d'anneaux (sans unité si I est infini) entre $G_0^f(\mathcal{F}) \otimes G_0^f(\mathcal{F}_{surj}^I) \simeq G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I)$ et $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$.*

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, ces foncteurs induisent également un isomorphisme d'anneaux pour la structure induite par le produit tensoriel total sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et \mathcal{F}_{surj} (et le produit tensoriel sur \mathcal{F}).

Démonstration. Pour obtenir l'isomorphisme de groupes, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 5.69, compte-tenu de la proposition 5.58. La proposition 5.27 procure la compatibilité au produit tensoriel total. \square

Quelques conséquences Avant d'aborder la description des objets projectifs indécomposables de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ (proposition 5.74), qui sera cependant moins explicite que celle de ses objets simples, nous tirons de la proposition 5.69 le corollaire suivant relatif aux cosocles — rappelons que cette notion est introduite dans la définition B.13.

Corollaire 5.71. *Pour tout objet F de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, on a des isomorphismes naturels*

$$\text{cosoc } \xi_I(F) \simeq \text{cosoc } \theta_I(F) \simeq \theta_I(\text{cosoc } F).$$

Le premier isomorphisme est induit par la projection canonique $\xi_I(F) \rightarrow \theta_I(F)$ et le second par $F \rightarrow \text{cosoc } F$.

Démonstration. Grâce à la proposition 5.69, l'isomorphisme $\text{cosoc } \xi_I(F) \simeq \theta_I(\text{cosoc } F)$ provient des isomorphismes naturels

$$\text{hom}_{\mathcal{G}_r}(\xi_I(F), \theta_I(S)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(F, \sigma_I \theta_I(S)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(F, S)$$

déduits des propositions 5.19 et 5.18.

L'isomorphisme $\text{cosoc } \theta_I(F) \simeq \theta_I(\text{cosoc } F)$ se déduit de la seconde assertion de la proposition 5.17. \square

Remarque 5.72. Le premier isomorphisme du corollaire 5.71 implique, que pour tout objet de type fini F de \mathcal{F} , l'épimorphisme canonique $\iota_I(F) \rightarrow \kappa_I(F)$ est essentiel. En effet, un épimorphisme entre objets co-localement finis et à valeurs de dimension finie de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ qui induit un isomorphisme entre les cosocles est essentiel — cet énoncé s'obtient, par dualité, à partir de l'observation que dans une catégorie de Grothendieck, un monomorphisme entre objets localement finis qui induit un isomorphisme entre les socles est essentiel.

Le comportement de l'épimorphisme canonique $\iota_I \rightarrow \kappa_I$ est totalement différent sur les objets de co-type fini; ainsi, la proposition 5.16 montre que, dans le cas où $I = \mathbb{N}$, cet épimorphisme se scinde toujours lorsque F est un injectif standard I_V de \mathcal{F} (alors que $\iota(I_V) \rightarrow \kappa(I_V)$ n'est un isomorphisme que pour $V = 0$).

Rappelons que K_0 désigne le groupe de Grothendieck des classes d'objets projectifs indécomposables de type fini (cf. notation B.20).

Lemme 5.73. 1. *Le produit tensoriel extérieur induit un isomorphisme $K_0(\mathcal{F}) \otimes$*

$$K_0(\mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I).$$

2. *Si \mathcal{I} est une catégorie essentiellement petite vérifiant l'hypothèse C.14 (page 120), on obtient des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre $G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k))$ et $K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k))$ en associant à un objet simple sa couverture projective et à un objet projectif de type fini son cosocle.*

Démonstration. La première assertion se démontre de manière analogue au lemme 5.68.

La seconde est un résultat classique en théorie des représentations (cf. [CR90]) ; dans le cas général, on le déduit aisément en dualisant (à l'aide de l'hypothèse C.14) des propriétés des enveloppes injectives dans les catégories de Grothendieck (cf. [Gab62]) — on pourra se reporter à [Djab] pour une démonstration détaillée. \square

Proposition 5.74. *Le foncteur $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ induit un isomorphisme de groupes abéliens $K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$.*

Ainsi, le produit tensoriel des morphismes induits par ι_I et ρ_I fournit un isomorphisme $K_0(\mathcal{F}) \otimes K_0(\mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, le produit tensoriel total sur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et \mathcal{F}_{surj} et le produit tensoriel sur \mathcal{F} munissent les deux membres de structures d'anneau commutatif ; l'isomorphisme précédent est un isomorphisme d'anneaux pour ces structures.

Démonstration. La proposition 5.14 montre que le foncteur exact ξ_I conserve les objets projectifs de type fini, il induit donc un morphisme de groupes $K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) \rightarrow K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$. Par le corollaire 5.71, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) & \xrightarrow{(\xi_I)_*} & K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ G_0^f(\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I) & \xrightarrow{(\theta_I)_*} & G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}) \end{array}$$

commute, où les flèches verticales, induites par le cosocle, sont des isomorphismes par la seconde assertion du lemme 5.73. Comme le morphisme $(\theta_I)_*$ est un isomorphisme par la proposition 5.69, il en est de même pour le morphisme $(\xi_I)_*$.

La première assertion du lemme 5.73 permet d'en déduire l'isomorphisme $K_0(\mathcal{F}) \otimes K_0(\mathcal{F}_{surj}^I) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I})$.

Le corollaire 5.30 établit enfin la compatibilité au produit tensoriel extérieur. \square

Remarque 5.75. L'inverse de l'isomorphisme de la proposition 5.74 ne se décrit pas simplement en termes des foncteurs fondamentaux depuis $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

6 La catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$

Nous introduisons dans cette section une catégorie de foncteurs $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$, qui est intuitivement à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ ce que $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ est à $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$. Nous en étudions quelques propriétés au paragraphe 6.1 en vue d'applications à d'autres catégories. C'est la propriété de dualité démontrée au paragraphe 6.2, qui n'a pas d'analogue dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$, qui nous permettra de compléter les renseignements sur la structure du foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ déduits de la section 2 (§ 6.3).

Cette propriété interviendra également dans la partie III, afin d'appliquer des propriétés du foncteur ω à la catégorie $\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k})$.

Notation 6.1. Nous noterons $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ la catégorie $\mathbf{Fct}(\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k}), \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

6.1 Généralités

La catégorie $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ possède un comportement assez différent des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$: elle n'entre pas dans le cadre étudié à la section 3, de sorte qu'elle ne s'interprète pas en termes de (co)modules.

Plutôt que de donner une description complète des foncteurs qui apparaissent naturellement, par précomposition, à partir des foncteurs étudiés dans la section 4, nous nous focaliserons sur les liens entre $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Notation 6.2. Le foncteur de précomposition $\widetilde{incl}^* : \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ sera noté \mathfrak{R} .

Nous introduisons maintenant un foncteur très analogue au foncteur ϖ .

Proposition et définition 6.3. *Il existe un foncteur exact et fidèle $\mathfrak{J} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ défini de la manière suivante :*

– action sur les objets :

$$\mathfrak{J}(X)(V, B) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(B)} X(V, W)$$

– action sur les morphismes : si $f : (V, B) \rightarrow (V', B')$ est un morphisme de $\widetilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$, $\mathfrak{J}(X)(f)$ a pour composante $X(V, W) \rightarrow X(V', W')$ (où $W \in \mathcal{G}_r(B)$ et $W' \in \mathcal{G}_r(B')$) le morphisme induit par f si $W' = f(W)$ et 0 sinon,

– functorialité : si $t : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, $\mathfrak{J}(t) : \mathfrak{J}(X) \rightarrow \mathfrak{J}(Y)$ s'obtient sur l'objet (V, B) par somme directe des $t(V, W)$ pour $W \in \mathcal{G}_r(B)$.

Proposition 6.4. *Le foncteur $\mathfrak{J} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ est adjoint à gauche à \mathfrak{R} .*

La vérification de ces propriétés, analogue à celle des propositions 2.35 et 2.36 (ou 3.7 et 3.9), est laissée au lecteur.

Notation 6.5. L'endofoncteur $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{J}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ sera noté \mathcal{I} .

Explicitement, on a

$$\mathcal{I}(X)(V, W) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}_r(W)} X(V, B) \quad (6)$$

pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et $(V, W) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.

L'unité de l'adjonction de la proposition 6.4 procure une transformation naturelle injective $id \rightarrow \mathcal{I}$. Elle est donnée sur un objet X par l'inclusion $X(V, W) \hookrightarrow \mathcal{I}(X)(V, W)$ correspondant au facteur direct de (6) obtenu pour $B = W$.

Notation 6.6. Nous noterons $j^\omega : \mathcal{I} \rightarrow \iota \circ \omega$ la transformation naturelle donnée par les inclusions

$$\bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(B)} X(V, W) \hookrightarrow \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} X(V, W) \quad (X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}, (V, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f).$$

Cette transformation naturelle jouera un rôle essentiel dans le paragraphe 10.2.

Remarque 6.7. Le diagramme suivant d'endofoncteurs de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, dans lequel les flèches non spécifiées sont les unités des adjonctions des propositions 6.4 et 5.9.2, commute.

$$\begin{array}{ccc} id & \longrightarrow & \omega \\ & \searrow & \uparrow j^\omega \\ & & \mathcal{I} \end{array}$$

Nous introduisons à présent l'auto-dualité de la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ que l'on déduit de la proposition/définition 4.22, dont on conserve la notation $(\cdot)^\vee$.

Définition 6.8. Le foncteur de dualité $(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r})^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$, noté $D_{\mathcal{G}_r}$, est la composée de la précomposition par $(\cdot)^\vee : (\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f)^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$ et de la postcomposition par $(\cdot)^* : \mathcal{E}^{op} \rightarrow \mathcal{E}$.

On a ainsi $(D_{\mathcal{G}_r} X)(V, W) = X((V, W)^\vee)^*$ pour tous $X \in \text{Ob } \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ et $(V, W) \in \text{Ob } \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f$.

La proposition suivante, que l'on déduit aussitôt de la proposition C.12, justifie l'appellation de dualité.

Proposition 6.9. 1. Le foncteur $D_{\mathcal{G}_r} : (\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r})^{op} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ est adjoint à droite à $D_{\mathcal{G}_r}^{op}$.

2. Le foncteur $D_{\mathcal{G}_r}$ induit une équivalence entre la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ des foncteurs à valeurs de dimension finie et sa catégorie opposée.

Cela permet de définir la notion d'objet *auto-dual* de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$, de façon similaire à la définition 1.1.

Décomposition scalaire, tors de Frobenius et changement de corps

Comme la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f(\mathbb{k})$ est \mathbb{k} -linéaire, il existe dans $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ une décomposition scalaire au sens de la proposition/définition C.20. On dispose par ailleurs, comme dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$, d'un tors de Frobenius et de foncteurs de restriction et d'induction relativement à une extension finie de \mathbb{k} . On laisse au lecteur le soin d'écrire les détails et les propriétés de compatibilité de ces différents foncteurs.

Objets finis La catégorie $\tilde{\mathcal{E}}^f$ étant additive, on dispose d'un endofoncteur de décalage $\Delta_A^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ dans $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ associé à chaque objet A de $\tilde{\mathcal{E}}^f$, et l'on a des inclusions canoniques scindées $id \hookrightarrow \Delta_{(\mathbb{k}, 0)}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et $id \hookrightarrow \Delta_{(\mathbb{k}, \mathbb{k})}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$, de conoyaux notés $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, 0)}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, \mathbb{k})}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ respectivement. On peut alors montrer le résultat suivant.

Proposition 6.10. Un objet de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ est fini si et seulement s'il est nilpotent pour les deux foncteurs $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, 0)}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, \mathbb{k})}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et à valeurs de dimension finie.

Esquisons la démonstration de cette proposition, que nous n'utiliserons pas :

1. le foncteur $(\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, 0)}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}, \bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, \mathbb{k})}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}) : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \times \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ est exact et son noyau se réduit aux foncteurs constants. On en déduit facilement qu'un foncteur de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ nilpotent pour $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, 0)}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, \mathbb{k})}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et à valeurs de dimension finie est fini ;
2. à partir du caractère analytique des injectifs standard de \mathcal{F} , on obtient que les injectifs standard de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ sont colimite de foncteurs nilpotents pour $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, 0)}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et $\bar{\Delta}_{(\mathbb{k}, \mathbb{k})}^{\tilde{\mathcal{G}}_r}$ et à valeurs de dimension finie, ce qui montre la réciproque.

Remarque 6.11. On peut déduire de la proposition précédente un isomorphisme d'anneaux $G_0^f(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}) \simeq G_0^f(\mathcal{F})^{\otimes 2}$, d'une manière analogue à la proposition 5.69.

6.2 Propriété de dualité du foncteur $\tilde{\omega}$

Ce paragraphe est consacré à l'étude d'une propriété de dualité liée au foncteur $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$. Son cadre naturel est la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$, par l'intermédiaire du foncteur introduit dans la notation suivante. En effet, la catégorie $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ est étroitement liée à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et possède un foncteur dualité, contrairement à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Notation 6.12. Nous désignerons par $\tilde{\omega} : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur composé

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\omega} \mathcal{F}.$$

Le foncteur $\tilde{\omega}$ est donné explicitement par $\tilde{\omega}(X)(V) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}_r(V)} X(V, B)$; un morphisme $f : V \rightarrow V'$ de \mathcal{E}^f induit l'application linéaire $\tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}(X)(V')$ dont la composante $X(V, B) \rightarrow X(V', B')$ est le morphisme induit par f si $B' = f(B)$, 0 sinon.

L'introduction de la variante suivante du foncteur $\tilde{\omega}$ est motivée par les propositions 6.14 et 6.15.

Notation 6.13. On note $\tilde{\omega}' : \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur défini par

$$\tilde{\omega}'(X)(V) = \tilde{\omega}(X)(V) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}_r(V)} X(V, B)$$

et tel que pour tout morphisme $f : V \rightarrow V'$ de \mathcal{E}^f , la composante $X(V, B) \rightarrow X(V', B')$ de $\tilde{\omega}'(X)(f)$ est l'application induite par le morphisme $(V, B) \rightarrow (V', B')$ induit par f si $f^{-1}(B') = B$, 0 sinon.

La proposition suivante exprime que les foncteurs $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega}'$ sont *duaux*.

Proposition 6.14. *Il existe des isomorphismes $\tilde{\omega} \circ D_{\mathcal{G}_r} \simeq D \circ \tilde{\omega}'$ et $\tilde{\omega}' \circ D_{\mathcal{G}_r} \simeq D \circ \tilde{\omega}$ de foncteurs contravariants de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ vers \mathcal{F} .*

Démonstration. Cela découle de l'observation suivante : si $f : V \rightarrow V'$ est un morphisme de \mathcal{E}^f , W un élément de $\mathcal{G}_r(V)$ et W' un élément de $\mathcal{G}_r(V')$, les conditions $W^\perp = {}^t f(W'^\perp)$ et $W = f^{-1}(W')$ sont équivalentes, où ${}^t f : V'^* \rightarrow V^*$ désigne la transposée de f . \square

La proposition suivante constitue le résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 6.15. *Les foncteurs $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega}'$ sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $u_{X,V} : \tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}'(X)(V)$, pour $X \in \text{Ob } \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ et $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, l'application linéaire dont la composante $X(V, W) \rightarrow X(V, B)$ (où $W, B \in \mathcal{G}_r(V)$) est induite par l'inclusion $(V, W) \hookrightarrow (V, B)$ si $W \subset B$, 0 sinon. Alors $u_{X,V}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, car si l'on munit $\mathcal{G}_r(V)$ d'un ordre total \leq tel que $W \subset B$ implique $W \leq B$, on obtient pour $u_{X,V}$ une matrice triangulaire par blocs, avec des blocs diagonaux identiques.

De plus, pour toute application linéaire $f : V \rightarrow V'$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}(X)(V) & \xrightarrow{\tilde{\omega}(X)(f)} & \tilde{\omega}(X)(V') \\ u_{X,V} \downarrow & & \downarrow u_{X,V'} \\ \tilde{\omega}'(X)(V) & \xrightarrow{\tilde{\omega}'(X)(f)} & \tilde{\omega}'(X)(V') \end{array}$$

commute. En effet, la composante $X(V, W) \rightarrow X(V', B')$ de l'application $\tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}'(X)(V')$ obtenue en suivant la composée supérieure est la somme des applications induites par le morphisme $(V, W) \rightarrow (V', B')$ induit par f indexée sur les $W' \in \mathcal{G}_r(V')$ tels que $f(W) = W'$ et $W' \subset B'$. Autrement dit, cette composante est l'application induite par le morphisme $(V, W) \rightarrow (V', B')$ induit par f si $f(W) \subset B'$ et 0 sinon.

De même, la composante $X(V, W) \rightarrow X(V', B')$ de l'application $\tilde{\omega}(X)(V) \rightarrow \tilde{\omega}'(X)(V')$ obtenue en suivant la composée inférieure est l'application induite par

le morphisme $(V, W) \rightarrow (V', B')$ induit par f si $W \subset f^{-1}(B')$ et 0 sinon, d'où la commutativité recherchée.

Par conséquent, les applications linéaires $u_{X,V}$ définissent un isomorphisme $u_X : \tilde{\omega}(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{\omega}'(X)$ de \mathcal{F} , qui est naturel en X , d'où un isomorphisme de foncteurs $u : \tilde{\omega} \xrightarrow{\cong} \tilde{\omega}'$. \square

Les propositions 6.15 et 6.14 fournissent le corollaire suivant.

Corollaire 6.16. *Il existe un isomorphisme $\alpha : \tilde{\omega} \circ D_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\cong} D \circ \tilde{\omega}$ tel que pour tout objet X de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}(D_{\mathcal{G}_r}^2 X) & \xrightarrow{\alpha_{D_{\mathcal{G}_r} X}} & D\tilde{\omega}(D_{\mathcal{G}_r} X) \\ \uparrow & & \uparrow D\alpha_X \\ \tilde{\omega}(X) & \hookrightarrow & D^2\tilde{\omega}(X) \end{array}$$

dont les monomorphismes non spécifiés sont les unités de l'adjonction commute.

Démonstration. Soient $a : \tilde{\omega} \circ D_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\cong} D \circ \tilde{\omega}'$ et $b : \tilde{\omega}' \circ D_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{\cong} D \circ \tilde{\omega}$ les deux isomorphismes canoniques de la proposition 6.14, et $u : \tilde{\omega} \xrightarrow{\cong} \tilde{\omega}'$ l'isomorphisme de la proposition 6.15. Les deux composées $\tilde{\omega} \circ D_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{a} D \circ \tilde{\omega}' \xrightarrow{Du} D \circ \tilde{\omega}$ et $\tilde{\omega} \circ D_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{u \circ D_{\mathcal{G}_r}} \tilde{\omega}' \circ D_{\mathcal{G}_r} \xrightarrow{b} D \circ \tilde{\omega}$ coïncident, car si W et B sont deux sous-espaces de $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, les conditions $W \subset B$ et $B^\perp \subset W^\perp$ sont équivalentes. Notons α l'isomorphisme donné par ces composées. La commutation du diagramme de l'énoncé se ramène à celle de

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\omega}(D_{\mathcal{G}_r}^2 X) & \xrightarrow{a_{D_{\mathcal{G}_r} X}} & D\tilde{\omega}'(D_{\mathcal{G}_r} X) \\ \uparrow & & \uparrow Db_X \\ \tilde{\omega}(X) & \hookrightarrow & D^2\tilde{\omega}(X) \end{array}$$

qui se vérifie par inspection. \square

Dans le paragraphe suivant, nous utiliserons le corollaire 6.16 par la conséquence directe suivante.

Corollaire 6.17. *Si X est un objet auto-dual de $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$, alors $\tilde{\omega}(X)$ est un objet auto-dual de \mathcal{F} .*

6.3 Structure de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$

La proposition 5.9 identifiant la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ à celle des $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ -comodules de \mathcal{F} illustre l'importance de ce foncteur dans l'étude des catégories de foncteurs en grassmanniennes.

Structure fondamentale La proposition 2.39 montre que la décomposition scalaire de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r] = \varpi(\mathbb{k})$ se réduit à $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r] \simeq \mathbb{k} \oplus \overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]}$, où $\overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]} \in \text{Ob } \mathcal{F}_{q-1}$. La proposition 2.41 fournit quant à elle le résultat suivant.

Proposition 6.18. *Le foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r] \simeq \mathbb{k} \oplus \overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]}$ est colimite filtrante des sous-foncteurs $\varpi(T_n(\mathbb{k})) \simeq \mathbb{k}[\mathcal{G}_{\leq n}]$; on a des extensions essentielles*

$$0 \rightarrow \overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}_{\leq n-1}]} \rightarrow \overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}_{\leq n}]} \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{G}_n] \rightarrow 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}r_{\leq 1}]} \simeq \mathbb{k}[\mathcal{G}r_1] \simeq P_{\mathbb{k}, q-1}$.

Comme le foncteur $P_{\mathbb{k}, q-1}$ est indécomposable, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 6.19. *Le foncteur $\overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}r]}$ est indécomposable.*

Appliqué au foncteur constant \mathbb{k} , le corollaire 6.17 fournit l'important résultat suivant.

Proposition 6.20. *Le foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ est auto-dual.*

À partir de cette auto-dualité et de la structure de comodule de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 6.21. *Munissons le foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ du produit et de l'unité obtenus en dualisant sa structure de coalgèbre de Boole.*

Le foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ devient ainsi un foncteur en algèbres de Hopf.

Démonstration. En reprenant la démonstration de la proposition 6.15 et en notant que $B \subset W_1^\perp$ et $B \subset W_2^\perp$ équivaut à $B \subset (W_1 + W_2)^\perp$, où B , W_1 et W_2 sont des sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie V , on voit que la structure d'algèbre sur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ est donnée sur V par

$$\mathbb{k}[\mathcal{G}r(V)] \otimes \mathbb{k}[\mathcal{G}r(V)] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{G}r(V)] \quad [W_1] \otimes [W_2] \mapsto [W_1 + W_2].$$

Ainsi, le produit de deux générateurs canoniques de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r(V)]$ est encore un générateur canonique de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r(V)]$, ce qui montre que les structures d'algèbre et de coalgèbre de Boole sur cet espace vectoriel sont compatibles : c'est une algèbre de Hopf. \square

À l'aide de la proposition 6.20 et du lemme suivant, laissé au lecteur, nous allons décrire les foncteurs $\text{hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{k}[\mathcal{G}r], \cdot)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(\cdot, \mathbb{k}[\mathcal{G}r])$. On rappelle que $\text{ev}_n : \mathcal{F}_{\text{surj}} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{k})\text{Mod}$ désigne le foncteur d'évaluation sur E_n .

Lemme 6.22. *Le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{F}_{\text{surj}}}(\mathbb{k}, \cdot)$ est isomorphe à $\lim_{n \in \mathbb{N}} \text{ev}_n^{GL_n(\mathbb{k})}$, où :*

- l'on désigne par $\text{ev}_n^{GL_n(\mathbb{k})}$ le foncteur obtenu en prenant les invariants de ev_n sous l'action naturelle de $GL_n(\mathbb{k})$;
- la limite est relative aux transformations naturelles $\text{ev}_n^{GL_n(\mathbb{k})} \rightarrow \text{ev}_m^{GL_m(\mathbb{k})}$ (pour $n \geq m$) induites par la projection $E_n \rightarrow E_m$ sur les m premières coordonnées.

Proposition 6.23. *Soient $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ et $i \in \mathbb{N}$. Il existe des isomorphismes naturels*

$$\text{hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{k}[\mathcal{G}r], F) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} F(E_n)^{GL_n(\mathbb{k})}$$

et

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(F, \mathbb{k}[\mathcal{G}r]) \simeq \left(\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} H_i(GL_n(\mathbb{k}), F(E_n)) \right)^*.$$

Démonstration. Le lemme 6.22 et l'adjonction entre ϖ et o (cf. proposition 2.36) donnent le premier isomorphisme. Par auto-dualité de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ (proposition 6.20), on en déduit des isomorphismes naturels

$$\text{hom}_{\mathcal{F}}(F, \mathbb{k}[\mathcal{G}r]) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(\mathbb{k}[\mathcal{G}r], DF) \simeq \lim_{n \in \mathbb{N}} DF(E_n)^{GL_n(\mathbb{k})} \simeq \left(\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} F(E_n)_{GL_n(\mathbb{k})} \right)^*.$$

L'intérêt de la dernière écriture est de remplacer la limite par une colimite filtrante, exacte. Cela permet d'en déduire le second isomorphisme, en dérivant les foncteurs considérés. \square

Anneau d'endomorphismes Nous poursuivons l'étude du foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ par la détermination de son anneau d'endomorphisme, donnée par le corollaire 6.28.

Définition 6.24 (Algèbre en grassmanniennes). On appelle *algèbre en grassmanniennes*, et l'on note $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$, la \mathbb{k} -algèbre $\text{End}_{\mathcal{F}}(\mathbb{k}[\mathcal{G}r])$. L'*algèbre en grassmanniennes réduite*, notée $\overline{A}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$, est définie comme $\text{End}_{\mathcal{F}}(\overline{\mathbb{k}[\mathcal{G}r]})$.

Le scindement $\varpi(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k} \oplus \overline{\varpi(\mathbb{k})}$ fournit donc un isomorphisme d'algèbres $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k} \oplus \overline{A}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$.

Pour déterminer explicitement ces algèbres, nous emploierons le lemme combinatoire élémentaire suivant. On rappelle que p désigne la caractéristique de \mathbb{k} et q son cardinal.

Lemme 6.25. *Soient l et i deux entiers naturels.*

1. *Soit a un élément non nul de l'espace vectoriel E_l . Les classes d'équivalences de la relation définie par $W \sim W'$ si $W + a = W' + a$ sur l'ensemble des éléments W de $\mathcal{G}r_i(E_l)$ ne contenant pas a sont de cardinal q^i , donc multiple de p si $i > 0$.*
2. *Si $i \leq l$, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{G}r_i(E_l)$ est congru à 1 modulo p .*

Démonstration. Pour le premier point, on note que le groupe $GL(W \oplus a, a)$ des automorphismes u de $W \oplus a$ tels que $u(a) = a$ opère transitivement sur la classe d'équivalence de W , le stabilisateur de W étant $GL(W)$. Le cardinal de cette classe est donc celui de $GL(W \oplus a, a)/GL(W)$, soit q^i .

Pour la seconde assertion, on remarque que le cardinal de l'ensemble $\text{Pl}_{\mathcal{E}}(E_i, E_l)$ est $\prod_{j=0}^{i-1} (q^l - q^j)$. Comme l'ensemble $\mathcal{G}r_i(E_l)$ s'identifie au quotient de $\text{Pl}_{\mathcal{E}}(E_i, E_l)$ par l'action libre de $GL_i(\mathbb{k})$, on a pour $i \leq l$

$$\text{Card } \mathcal{G}r_i(l) = \frac{\text{Card } \text{Pl}_{\mathcal{E}}(E_i, E_l)}{\text{Card } GL_i(\mathbb{k})} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{q^{l-j} - 1}{q^{i-j} - 1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

□

La proposition suivante fournit une première description de l'algèbre en grassmanniennes.

Proposition 6.26. *La \mathbb{k} -algèbre $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$ est isomorphe au \mathbb{k} -espace vectoriel $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ muni de loi multiplicative $*$ définie par*

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} f(i)g(j) + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j > 0}} f(i)g(j).$$

Démonstration. Par la proposition 2.36, on a un isomorphisme (linéaire) d'adjonction $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k}) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}_{s_{urj}}}(\mathbb{k}, o(\mathbb{k}[\mathcal{G}r]))$. Le $GL_n(\mathbb{k})$ -module $\text{ev}_n(o(\mathbb{k}[\mathcal{G}r]))$ est librement engendré comme \mathbb{k} -espace vectoriel par $\mathcal{G}r(E_n)$, sur lequel $GL_n(\mathbb{k})$ agit tautologiquement. Le sous-espace vectoriel $\text{ev}_n(o(\mathbb{k}[\mathcal{G}r]))^{GL_n(\mathbb{k})}$ de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r(E_n)]$ a pour base $s_0^n, s_1^n, \dots, s_n^n$, où s_i^n désigne la somme des générateurs canoniques $[B]$ associés à un sous-espace B de dimension i de E_n . L'application linéaire induite par la projection $E_{n+1} \rightarrow E_n$ envoie s_i^{n+1} sur s_{i-1}^n si $i > 0$ et s_0^{n+1} sur s_0^n , grâce à la première assertion du lemme 6.25.

Par le lemme 6.22, on en déduit une identification entre $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$ et la limite L des espaces vectoriels \mathbb{k}^{n+1} (dont nous continuerons à noter $s_0^n, s_1^n, \dots, s_n^n$ une

base privilégiée) relativement aux applications linéaires $f_n : \mathbb{k}^{n+1} \rightarrow \mathbb{k}^n$ données par $s_i^n \mapsto s_{i-1}^{n-1}$ pour $i > 0$ et $s_0^n \mapsto s_0^{n-1}$.

Soit $l_0^n, l_1^n, \dots, l_n^n$ la base duale de $s_0^n, s_1^n, \dots, s_n^n$. L'application linéaire $a : L \rightarrow \mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (l_0^n(v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bijective; sa réciproque est donnée par

$$b : \mathbb{k}^{\mathbb{N}} \rightarrow L \quad (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

En effet, b prend bien ses valeurs dans L parce que

$$\begin{aligned} f_n \left(t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n \right) &= t_n s_0^{n-1} + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_{i-1}^{n-1} \\ &= t_{n-1} s_0^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (t_{n-1-j} + t_{n-j}) s_j^{n-1}, \end{aligned}$$

l'égalité $a \circ b = id$ est immédiate, et $b \circ a = id$ se déduit facilement des remarques précédentes.

On a ainsi obtenu une identification de $A_{Gr}(\mathbb{k})$ et $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ comme *espaces vectoriels*; il reste à lire la structure multiplicative de $A_{Gr}(\mathbb{k})$ dans les isomorphismes précédents.

Soient u un endomorphisme de $\mathbb{k}[Gr]$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'élément de $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ correspondant. Par ce qui précède, pour tout sous-espace W de $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, le générateur $[W]$ de $\mathbb{k}[Gr(V)]$ est envoyé par $u(V)$ sur $t_m s_0(W) + \sum_{i=1}^m (t_{m-i} + t_{m-i+1}) s_i(W)$, où $m = \dim W$ et $s_i(W)$ est la somme des générateurs de $\mathbb{k}[Gr(V)]$ associés aux sous-espaces de dimension i de V . On en déduit que u_{E_n} envoie s_m^n sur $t_m s_0^n + \sum_{i=1}^m (t_{m-i} + t_{m-i+1}) s_i^n$, puisque le coefficient d'un générateur $[B]$ (où $\dim B = i$) dans cette image est égal au cardinal de l'ensemble des sous-espaces W de E_n de dimension m contenant B , multiplié par t_0 si $i = 0$, $t_{m-i} + t_{m-i+1}$ si $1 \leq i \leq m$, et 0 sinon. Le cardinal en question n'est autre que celui des sous-espaces de dimension $m - i$ de E_n/B , égal à 1 dans \mathbb{k} par la seconde assertion du lemme 6.25, d'où notre assertion.

Soient u' un autre endomorphisme de $\mathbb{k}[Gr]$ et $u'' = u'u$; notons $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les éléments de $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ correspondant à u' et u'' respectivement. On a

$$\begin{aligned} u''(E_n)([E_n]) &= u' \left(t_n s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) s_i^n \right) \\ &= t_n t'_0 s_0^n + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) \left(t'_i s_0^n + \sum_{j=1}^i (t'_{i-j} + t'_{i-j+1}) s_j^n \right), \end{aligned}$$

d'où en identifiant le coefficient de s_0^n

$$t''_n = t_n t'_0 + \sum_{i=1}^n (t_{n-i} + t_{n-i+1}) t'_i = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} t_i t'_j + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j > 0}} t_i t'_j,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 6.27. *La loi $*$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{k}^{\mathbb{N}^*}$ définie par*

$$(f * g)(n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 1}} f(i)g(j) + \sum_{\substack{i+j=n+1 \\ i,j \geq 1}} f(i)g(j)$$

fait de $\mathbb{k}^{\mathbb{N}^}$ une \mathbb{k} -algèbre isomorphe à $\overline{A}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$.*

Démonstration. Dans l'isomorphisme précédent, $\overline{A}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ correspond à l'idéal de $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ des fonctions nulles en 0. \square

Corollaire 6.28. *L'algèbre $\overline{A}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ est une algèbre de séries formelles sur l'élément τ donné par la fonction $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{k}$ associant 0 à 1 et 1 à $n \geq 2$.*

Démonstration. Pour tout $f \in \overline{A}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$, on a $\tau f(n) = f(n-1)$ si $n \geq 2$ et $\tau f(1) = 0$. On en déduit que τ^k est la fonction $n \mapsto 1$ si $n \geq k+1$, 0 sinon. Cela fournit aussitôt le résultat. \square

Explicitement, l'isomorphisme est donné par $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \tau^i \mapsto \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Remarque 6.29. 1. En reprenant la démonstration de la proposition 6.26, on voit que l'endomorphisme τ envoie un générateur canonique $[W]$ sur

$$\sum_{\substack{B \in \mathcal{G}_r(W) \\ \text{codim}_W B=1}} [B].$$

2. Malgré le corollaire 6.28, il pourra être utile de conserver la description de $A_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ donnée à la proposition 6.26. Cela apparaîtra clairement à la remarque 6.31. 1.

Nous terminons cette section par quelques considérations combinant l'auto-dualité de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ (proposition 6.20) et le corollaire 6.28.

Corollaire 6.30. *L'involution de l'algèbre $A_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ induite par l'auto-dualité du foncteur $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ est triviale.*

Démonstration. Par le corollaire 6.28, il suffit de le vérifier sur l'endomorphisme τ de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$.

Pour cela, on note que la structure auto-duale de $\mathbb{k}[\mathcal{G}_r]$ est donnée par les formes bilinéaires

$$b_V : \mathbb{k}[\mathcal{G}_r(V)] \times \mathbb{k}[\mathcal{G}_r(V^*)] \rightarrow \mathbb{k} \quad ([W], [H]) \mapsto 1 \text{ si } H \subset W^\perp, 0 \text{ sinon.}$$

On calcule alors, pour $W \in \mathcal{G}_r(V)$,

$$b_V(\tau([W]), [H]) = \sum_{B \in \mathcal{G}_{r-1}(W)} b_V([B], [H]) =$$

$$\text{Card} \{B \in \mathcal{G}_{r-1}(W) \mid H \subset B^\perp\} = \text{Card} \mathcal{G}_{r-1}(W \cap H^\perp).$$

En utilisant le lemme 6.25, on voit que cet élément de \mathbb{k} vaut 1 si $\dim(W \cap H^\perp) \geq n-1$, i.e. $\dim W - \dim(W \cap H^\perp) \leq 1$, et 0 sinon. Comme cette condition est symétrique en W et H (modulo l'identification de V à V^{**}), cela donne la conclusion. \square

Remarque 6.31. 1. On déduit la structure d'algèbre de Hopf sur $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ donnée par le corollaire 6.21 une nouvelle structure d'algèbre sur $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$, donnée comme suit. Si u et v sont deux éléments de $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$, leur produit $u.v$ est le morphisme composé

$$\mathbb{k}[\mathcal{G}r] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{G}r] \otimes \mathbb{k}[\mathcal{G}r] \xrightarrow{u \otimes v} \mathbb{k}[\mathcal{G}r] \otimes \mathbb{k}[\mathcal{G}r] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{G}r],$$

où la première flèche est le coproduit et la dernière le produit (cf. [Kuh95], §5).

Dans l'isomorphisme $A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}^{\mathbb{N}}$ de la proposition 6.26, le produit \cdot est le produit usuel d'algèbre de Boole de l'anneau produit $\mathbb{k}^{\mathbb{N}}$. Pour le voir, il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 6.26 et de constater que, en conservant ses notations, le produit de s_i^n et de s_j^n (pour la structure d'algèbre de Boole de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r(E_n)]$) est s_0^n si $i = j = 0$, et que sinon le coefficient de s_0^n dans sa décomposition dans la base s_0^n, \dots, s_n^n de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r(E_n)]^{GL_n(\mathbb{k})}$ est nul (en fait, on a $s_i^n \cdot s_j^n = s_{\max(i,j)}^n$). Avec la description du corollaire 6.28, on a $\tau^i \cdot \tau^j = \tau^{\max(i,j)}$.

2. Si X est un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, on peut munir naturellement le groupe abélien $\text{hom}_{\mathcal{G}r}(\omega(X), \mathbb{k}[\mathcal{G}r])$ d'une structure de module sur l'algèbre de Boole $(A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k}), \cdot)$, en utilisant la structure de $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ -comodule de $\omega(X)$ et en procédant comme au point précédent. Cela suggère une structure algébrique très riche sur ces objets, qui sont également, comme tous les groupes $\text{hom}_{\mathcal{G}r}(F, \mathbb{k}[\mathcal{G}r])$, des modules sur l'algèbre de séries formelles $(A_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k}), *) \simeq \mathbb{k} \oplus \mathbb{k}[[\tau]]$.

7 La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$ comme catégorie de modules

L'équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et la catégorie des $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ -comodules repose sur l'adjonction entre les foncteurs ι et ω . Nous donnons maintenant une équivalence entre la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ (et plus généralement, toutes les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$) et une catégorie de modules sur une monade explicite à partir de l'adjonction entre les foncteurs ξ et σ .

Convention 7.1. Dans cette section, on se donne une partie I de \mathbb{N} .

On rappelle que le foncteur $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$ est adjoint à gauche à σ_I (proposition 5.19). Les transformations naturelles introduites dans la notation suivante seront identifiées dans la proposition 7.3.

Notation 7.2. Nous désignerons par $\mathcal{T}_{\mathcal{G}r, I} = (\tilde{\Delta}_{surj}^I, u_{\mathcal{G}r, I}, \mu_{\mathcal{G}r, I})$ la monade sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ associée à l'adjonction entre les foncteurs ξ_I et σ_I conformément à la proposition A.5. Ainsi :

1. on a $\tilde{\Delta}_{surj}^I = \sigma_I \circ \xi_I$, soit $\tilde{\Delta}_{surj}^I(F)(A, B) = F(A \oplus B, B)$ sur les objets $(F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I, A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f, B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I)$.
2. La transformation naturelle $u_{\mathcal{G}r, I} : id \rightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$ est l'unité de l'adjonction.
3. La transformation naturelle $\mu_{\mathcal{G}r, I} : (\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 \rightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$ est donnée par $\sigma_I(v_{\xi_I})$, où v désigne la coïté de l'adjonction.

Proposition 7.3. Soit F un objet de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

1. L'unité $u_{\mathcal{G}_r, I} : id \hookrightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$ est la transformation naturelle injective telle que $((u_{\mathcal{G}_r, I})_F)_{(A, B)} : F(A, B) \rightarrow F(A \oplus B, B)$ est induit par le monomorphisme canonique $(A, B) \hookrightarrow (A \oplus B, B)$ pour tous $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, $A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et $B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$.
2. La multiplication $\mu_{\mathcal{G}_r, I} : (\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 \rightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I$ est fournie par le morphisme $F(A \oplus B \oplus B, B) \rightarrow F(A \oplus B, B)$ induit le morphisme $A \oplus B \oplus B \rightarrow A \oplus B$ somme directe de id_A et de la somme $B \oplus B \rightarrow B$, et par le morphisme identique $B \rightarrow B$.
3. Il existe un scindement naturel

$$F \xrightarrow{(u_{\mathcal{G}_r, I})_F} \tilde{\Delta}_{surj}^I(F) \xrightarrow{(p_{\mathcal{G}_r, I})_F} F$$

où $(p_{\mathcal{G}_r, I})_F$ est donné sur l'objet (A, B) par le morphisme induit par l'épimorphisme canonique $(A \oplus B, B) \twoheadrightarrow (A, B)$, pour tous $F \in \text{Ob } \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, $A \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et $B \in \text{Ob } \mathcal{E}_{surj}^I$.

De plus, $(F, (p_{\mathcal{G}_r, I})_F)$ est un module sur la monade $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Démonstration. Analysons la monade associée à l'adjonction entre les foncteurs $\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I$ et $\mathfrak{L}_I : \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ (cf. proposition 4.17). Son unité est la transformation naturelle $id \rightarrow (\mathfrak{D}_I \times \mathfrak{B}_I)\mathfrak{L}_I$ donnée par l'inclusion $(A, B) \hookrightarrow (A \oplus B, B)$ (de composantes l'inclusion du facteur direct A et id_B). Sa multiplication est donnée par le morphisme $(A \oplus B \oplus B, B) \rightarrow (A \oplus B, B)$ induit le morphisme $A \oplus B \oplus B \rightarrow A \oplus B$ somme directe de id_A et de la somme $B \oplus B \rightarrow B$, et par le morphisme identique $B \rightarrow B$. En effet, la coïunité de l'adjonction est donnée sur l'objet (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ par le morphisme $(V \oplus W, W) \rightarrow (V, W)$ de composantes id_V et $W \hookrightarrow V$.

En utilisant la proposition C.5, on en déduit les deux premières assertions. La dernière est immédiate. \square

Le dernier point de cette proposition conduit à donner la définition suivante, qui introduit une sorte de foncteur de différence dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, distinct de l'endofoncteur Δ_* considéré à la fin du paragraphe 5.3.

Définition 7.4. Le noyau de $(p_{\mathcal{G}_r, I})_F$, qui s'identifie donc au conoyau de $(u_{\mathcal{G}_r, I})_F$, sera noté $\Delta_{surj}^I(F)$. On définit ainsi un endofoncteur exact Δ_{surj}^I de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Le reste de cette section s'emploie à tirer les conséquences du résultat suivant.

Proposition 7.5. La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est équivalente à la catégorie des modules sur la monade $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de la proposition A.9. \square

Convention 7.6. Dans la suite de cette section, nous *identifierons* la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ avec la sous-catégorie des modules sur $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$. Autrement dit, un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sera désormais un couple $(X, \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X)$, où X est un objet de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ et \tilde{m}_X un morphisme tel que :

1. la composée $X \xrightarrow{(u_{\mathcal{G}_r, I})_X} \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$ est le morphisme identique ;
2. les composées $(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 X \xrightarrow{(\mu_{\mathcal{G}_r, I})_X} \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$ et $(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^2 X \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{surj}^I \tilde{m}_X} \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$ coïncident.

Par abus, nous noterons souvent simplement X pour (X, \tilde{m}_X) . Nous désignerons aussi par m_X le morphisme $\Delta_{surj}^I X \hookrightarrow \tilde{\Delta}_{surj}^I X \xrightarrow{\tilde{m}_X} X$.

Avec ces conventions, les morphismes $(X, \tilde{m}_X) \rightarrow (Y, \tilde{m}_Y)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sont les morphismes $f : X \rightarrow Y$ de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta}_{surj}^I X & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{surj}^I f} & \tilde{\Delta}_{surj}^I Y \\ \tilde{m}_X \downarrow & & \downarrow \tilde{m}_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

commute. Cette condition est équivalente à la commutation du diagramme analogue sans tilde.

Le lien avec la définition originelle de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ s'obtient à partir des remarques suivantes :

1. le $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ -module associé à un foncteur $X : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}$ est $\sigma_I(X)$ (muni de la multiplication dérivant de l'adjonction de la proposition 5.19) ;
2. le foncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathcal{E}$ associé à un $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$ -module X est le coégalisateur de $\xi_I(\tilde{m}_X)$ et de la flèche canonique $\xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I X) \rightarrow \xi_I(X)$ (adjointe à $id_{\tilde{\Delta}_{surj}^I X}$).

Nous identifions maintenant le foncteur θ_I en termes de modules sur la monade $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Lemme 7.7. *Soient F un objet de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, et (A, B) un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$. Notons $p_{A, B} : A \oplus B \twoheadrightarrow A$ et $\pi_{A, B} : A \twoheadrightarrow A/B$ les projections canoniques et $q_{A, B} : A \oplus B \rightarrow A$ le morphisme dont les composantes sont id_A et l'inclusion $B \hookrightarrow A$. La suite*

$$F(A \oplus B, B) \xrightarrow{F(p_{A, B}, id_B) + F(q_{A, B}, id_B)} F(A, B) \xrightarrow{F(\pi_{A, B}, id_B)} F(A/B, B) \rightarrow 0 \quad (7)$$

de \mathcal{E} est exacte.

Démonstration. Notons $i : B \hookrightarrow A$ l'inclusion : on a $\pi_{A, B} \circ i = 0$, donc $\pi_{A, B} \circ q_{A, B} = \pi_{A, B} \circ p_{A, B}$, ce qui montre que la suite (7) est un complexe. La surjectivité de $F(\pi_{A, B}, id_B)$ provient de ce que $(\pi_{A, B}, id_B) : (A, B) \rightarrow (A/B, B)$ admet une section.

Pour établir l'exactitude en $F(A, B)$, considérons une rétraction $r : A \twoheadrightarrow B$ de i et notons $u : (A, B) \rightarrow (A \oplus B, B)$ le morphisme $(id_A \oplus r, id_B)$. Alors $(p_{A, B}, id_B) \circ u = id_{(A, B)}$, tandis que $(q_{A, B}, id_B) \circ u$ est nul sur $(B, 0)$, donc se factorise par $(\pi_{A, B}, id_B)$. Par conséquent, la restriction à $N = \ker F(\pi_{A, B}, id_B)$ de $F(u)$ est une section du morphisme $F(A \oplus B, B) \rightarrow N$ induit par $F(p_{A, B}, id_B) + F(q_{A, B}, id_B)$, ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 7.8. Cette suite exacte est une partie d'une suite exacte longue dépendant d'une structure simpliciale (cf. proposition 7.19).

On déduit du lemme 7.7, compte-tenu des remarques précédentes sur le lien entre les deux descriptions de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, la proposition suivante.

Proposition 7.9. *Le foncteur $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est donné par $\theta_I(F) = (F, (p_{\mathcal{G}_r, I})_F : \tilde{\Delta}_{surj}^I F \twoheadrightarrow F)$ sur les objets — cf. proposition 7.3.3 — et par l'égalité $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\theta_I(F), \theta_I(G)) = \text{hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(F, G)$ sur les morphismes.*

Autrement dit, θ_I identifie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ formée des objets X tels que $m_X = 0$.

Remarque 7.10. Ce résultat fournit une seconde démonstration de la pleine fidélité du foncteur θ_I et de ce que son image est une sous-catégorie de Serre de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$ (cf. proposition 5.17).

Exemple 7.11. Considérons le cas où I est réduit à l'entier 1. On a $\Delta_{surj}^1 = \Delta$; le foncteur $\omega_1 : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,1} \rightarrow \mathcal{F}$ associe à un objet (X, \tilde{m}_X) le coégalisateur de la flèche canonique $\bar{P} \otimes \Delta X \rightarrow \bar{P} \otimes X$ (composée de $\bar{P} \otimes \Delta X \xrightarrow{j \otimes \Delta X} \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Delta X$, où j est le coproduit de \bar{P} , et de $\bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Delta X \xrightarrow{\bar{P} \otimes f} \bar{P} \otimes X$, où f est la coïunité de l'adjonction) et de $\bar{P} \otimes m_X$. Cette description de ω_1 se déduit aisément de l'exactitude de ce foncteur de l'isomorphisme canonique $\omega_1 \circ \iota_1 \simeq \bar{P} \otimes \cdot$.

Par conséquent, la proposition 7.9 montre que, pour tout objet F de \mathcal{F} , le foncteur $\omega_1 \kappa_1(F)$ est canoniquement isomorphe au conoyau de l'application naturelle $\bar{P} \otimes \Delta F \rightarrow \bar{P} \otimes F$.

7.1 Le foncteur η_I

Les considérations précédentes permettent de décrire très naturellement l'adjoint à gauche au foncteur θ_I .

Définition 7.12. On définit un foncteur $\eta_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ par $\eta_I(X) = \text{coker } m_X$ sur les objets; si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de $\mathcal{T}_{\mathcal{G}r,I}$ -modules, $\eta_I(f) : \eta_I(X) \rightarrow \eta_I(Y)$ est le morphisme induit par f .

Ainsi, le foncteur $\eta_I : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ est un quotient du foncteur σ_I .

Lemme 7.13. *Pour tout foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$, il existe un épimorphisme naturel $X \rightarrow \theta_I \eta_I(X)$. De plus, $\theta_I \eta_I(X)$ est le plus grand quotient de X appartenant à l'image du foncteur $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$.*

Démonstration. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) & \xrightarrow{m_X} & \sigma_I(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{surj}^I \eta_I(X) & \xrightarrow{0} & \eta_I(X) \end{array}$$

de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ commute, de sorte que la projection $\sigma_I(X) \rightarrow \eta_I(X)$ induit un épimorphisme $X \rightarrow \theta_I \eta_I(X)$ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$. La proposition 7.9 et la propriété universelle du conoyau montrent ensuite que tout épimorphisme de X sur un foncteur dans l'image de θ_I se factorise par $X \rightarrow \theta_I \eta_I(X)$. \square

Le principal résultat de ce paragraphe est le suivant.

Proposition 7.14. *Le foncteur η_I est adjoint à gauche au foncteur $\theta_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du lemme précédent, puisque le foncteur θ_I est pleinement fidèle (cf. proposition 5.17). \square

Les deux énoncés suivants sont à rapprocher du corollaire 5.71 relatif aux cosocles.

Corollaire 7.15. *Il existe un isomorphisme*

$$\text{cosoc } X \simeq \theta_I(\text{cosoc } \eta_I(X))$$

naturel en l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Démonstration. Ce corollaire se déduit des propositions 5.69 et 7.14. \square

Proposition 7.16. *Il existe des isomorphismes d'endofoncteurs de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$*

$$\eta_I \circ \xi_I \simeq \eta_I \circ \theta_I \simeq id.$$

Démonstration. L'isomorphisme $\eta_I \xi_I \simeq id$ vient de ce que le foncteur $\eta_I \xi_I$ est adjoint à gauche à $\sigma_I \theta_I \simeq id$ (proposition 5.18).

L'isomorphisme $\eta_I \theta_I \simeq id$ découle de la proposition 7.9 et de la définition de η_I . \square

Nous signalons dans la remarque qui suit un autre lien entre les foncteurs η_I , ξ_I , σ_I et θ_I .

Remarque 7.17. On vérifie qu'il existe un diagramme commutatif *cocartésien*

$$\begin{array}{ccc} \xi_I \sigma_I(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \theta_I \sigma_I(X) & \longrightarrow & \theta_I \eta_I(X) \end{array}$$

naturel en l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

La proposition suivante, qui ne découle pas formellement de l'adjonction entre les foncteurs η_I et θ_I , illustre l'utilité de la description monadique explicite de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Proposition 7.18. *Il existe un isomorphisme*

$$\eta_I(X \otimes Y) \simeq \eta_I(X) \otimes \eta_I(Y)$$

naturel en les objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Démonstration. La commutation du foncteur $\tilde{\Delta}_{surj}^I$ au produit tensoriel procure un isomorphisme canonique $\Delta_{surj}^I(X \otimes Y) \simeq (\Delta_{surj}^I X \otimes Y) \oplus (X \otimes \Delta_{surj}^I Y) \oplus (\Delta_{surj}^I X \otimes \Delta_{surj}^I Y)$, dans lequel $m_{X \otimes Y}$ se lit comme le morphisme de composantes $\Delta_{surj}^I X \otimes Y \xrightarrow{m_X \otimes Y} X \otimes Y$, $X \otimes \Delta_{surj}^I Y \xrightarrow{X \otimes m_Y} X \otimes Y$ et $\Delta_{surj}^I X \otimes \Delta_{surj}^I Y \xrightarrow{m_X \otimes m_Y} X \otimes Y$. Par conséquent, l'image de $m_{X \otimes Y}$ est la somme des sous-objets $im(m_X) \otimes Y$, $X \otimes im(m_Y)$ et $im(m_X) \otimes im(m_Y)$ de $X \otimes Y$, i.e. $im(m_X) \otimes Y + X \otimes im(m_Y) = ker(X \otimes Y \rightarrow \eta_I(X) \otimes \eta_I(Y))$. Ainsi, $coker m_{X \otimes Y} = \eta_I(X \otimes Y)$ s'identifie à $\eta_I(X) \otimes \eta_I(Y)$. \square

7.2 Résolution canonique et algèbre homologique monadique

L'intérêt majeur de l'adjonction entre les foncteurs $\xi_I : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et σ_I , qui sous-tend toute cette section, réside dans la possibilité de construire une résolution naturelle d'un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ par des foncteurs dans l'image du foncteur ξ_I . Cette résolution, donnée par la proposition suivante, permet de ramener le comportement homologique de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ à celui de la catégorie $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Proposition 7.19. *Il existe une suite exacte*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^n \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \xi_I \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I \sigma_I(X) \rightarrow X \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (8)$$

naturelle en l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Démonstration. Nous revenons à la définition originelle de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, et notons \mathbf{E} la sous-catégorie pleine de \mathbf{Ens}^f formée des ensembles finis non vides.

On définit un foncteur $a : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \times \mathbf{E}^{op} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ en associant à un objet (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ et à un ensemble fini non vide E la somme amalgamée de V et de W^E relativement aux monomorphismes $W \hookrightarrow V$ (inclusion) et $W \hookrightarrow W^E$ (plongement diagonal — on utilise ici la non-vacuité de E) muni de la base W . L'action sur les morphismes se déduit de la functorialité de l'association $\mathcal{E}^f \times (\mathbf{Ens}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{E}^f$ $(V, E) \mapsto V^E \simeq V \otimes \mathbb{k}^E$. On remarque que si E est de cardinal n , l'endofoncteur $a(\cdot, E)$ de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ est isomorphe à la $n - 1$ -ième itérée du foncteur $\mathcal{L}_I \circ (\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I)$.

Par restriction à la sous-catégorie simpliciale Δ de \mathbf{E} (squelette de la sous-catégorie des ensembles totalement ordonnés, les morphismes étant les applications croissantes), on en déduit un foncteur $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \times \Delta^{op} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$, puis $c_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta : \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \rightarrow \mathbf{Fct}(\Delta^{op}, \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f)$. Ce foncteur vérifie les propriétés suivantes :

1. en degré zéro, on a $(c_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_0 \simeq id$;
2. en degré un, on a $(c_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_1 \simeq \mathcal{L}_I \circ (\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I)$;
3. plus généralement, en degré $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(c_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_n \simeq \mathcal{L}_I \circ ((\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I) \mathcal{L}_I)^{n-1} \circ (\mathcal{D}_I \times \mathcal{B}_I)$.

Par précomposition, on en déduit un foncteur

$$C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f \times \Delta^{op}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\Delta^{op}, \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}).$$

Les remarques précédentes montrent que $(C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_0 \simeq id$ et $(C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_n \simeq \xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I$ pour $n > 0$.

Le complexe de Moore associé à cet objet simplicial fournit dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ un complexe

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^n \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I(\tilde{\Delta}_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I(X) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \xi_I \tilde{\Delta}_{surj}^I \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I \sigma_I(X) \rightarrow X \rightarrow 0 \end{aligned}$$

naturel en X . Nous allons montrer qu'il est acyclique. Évaluée sur un objet (V, W) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$, sa différentielle $\partial_n : (C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_n \rightarrow (C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_{n-1}$ est la somme alternée des $n + 1$ morphismes induits par $[v, w_0, \dots, w_n] \mapsto [v, w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n]$ (le chapeau signifiant que le terme considéré doit être omis), où l'on désigne par $[v, w_0, \dots, w_n]$ la classe dans $V \oplus_{\mathcal{W}} W^{n+1}$ (base de $(c_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta)_n(V, W)$) de $(v, w_0, \dots, w_n) \in V \oplus W^{n+1}$. On obtient donc une homotopie entre les endomorphismes nul et identité de ce complexe en considérant les morphismes induits par $[v, w_0, \dots, w_n] \mapsto [v, -\pi(v), w_0, \dots, w_n]$, où $\pi : V \rightarrow W$ est un projecteur.

La suite exacte de l'énoncé s'obtient en considérant le complexe normalisé associé à $C_{\mathcal{G}_r, I}^\Delta$, qui est homotopiquement équivalent au complexe de Moore, donc également acyclique. \square

Remarque 7.20. 1. La proposition 7.19 repose uniquement sur la proposition 7.3.3 (relative au scindement naturel de la monade $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$). Nous avons préféré en donner une démonstration directe car les objets simpliciaux de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ qui apparaissent sont particulièrement naturels, et plus parlants que la construction générale d'un objet simplicial canonique à partir d'une monade scindée.

2. Les monades et les comonades (en particulier, celles qui proviennent d'adjonctions) fournissent un cadre général efficace pour faire de l'algèbre homologique, y compris dans un contexte non abélien ; la proposition 7.19 et les quelques conséquences que nous développons en sont un cas particulier. On trouvera dans [BB69] une exposition systématique de ces notions.

On prendra garde au fait que la notion de résolution canonique dans ce cadre général est légèrement différente (on part d'une **comonade** pour obtenir une résolution homologique). En appliquant le foncteur σ_I à la résolution de la proposition 7.19, on obtient la résolution canonique pour la **comonade** associée à l'adjonction entre ξ_I et σ_I qui sert de point de départ à [BB69]. La possibilité de « relever » cette résolution dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ en une résolution dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ provient du scindement de la monade $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_r, I}$; alors que la résolution initiale dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ n'apporte essentiellement rien, la proposition 7.19 constitue un résultat important sur la structure de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Définition 7.21 (Résolution canonique). Le complexe concentré en degrés positifs

$$\cdots \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^n \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I(\Delta_{surj}^I)^{n-1} \sigma_I(X) \rightarrow \cdots \rightarrow \xi_I \Delta_{surj}^I \sigma_I(X) \rightarrow \xi_I \sigma_I(X)$$

de la proposition 7.19 est appelé *résolution canonique* de l'objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$. Nous la noterons $\mathfrak{R}_{\bullet}^{\mathcal{G}_r, I}(X)$. Ainsi, $\mathfrak{R}_n^{\mathcal{G}_r, I}(X) = \xi_I(\Delta_{surj}^I)^n \sigma_I(X)$ si $n \geq 0$, 0 sinon.

Le résultat suivant constitue l'une des conséquences les plus notables de la proposition 7.19.

Corollaire 7.22. *Il existe une suite spectrale du premier quadrant (donc convergente) naturelle en les objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ dont le terme E^1 est donné par*

$$E_{p,q}^1 = \text{Ext}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}^p((\Delta_{surj}^I)^q \sigma_I(X), \sigma_I(Y))$$

et dont l'aboutissement est $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, I}^(X, Y)$.*

Démonstration. On considère les deux suites spectrales associées au bicomplexe $\text{hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathfrak{R}_{\bullet}^{\mathcal{G}_r, I}(X), J^*(Y))$ (cf. [ML63], chapitre XI, § 6), où $J^*(Y)$ désigne une résolution injective de Y , que l'on peut choisir fonctorielle en Y , car la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ possède un cogénérateur injectif. La suite spectrale obtenue en prenant d'abord la différentielle de $\mathfrak{R}_{\bullet}^{\mathcal{G}_r, I}(X)$ dégénère au terme E^2 , donné par $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, I}^*(X, Y)$, tandis que celle obtenue en considérant d'abord la différentielle de $J^*(Y)$ a le terme E^1 indiqué dans l'énoncé, par adjonction entre les foncteurs exacts ξ_I et σ_I . \square

La proposition suivante montre que l'on peut ramener théoriquement le calcul des groupes d'extension dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ entre des foncteurs *finis* à un nombre fini de calculs de groupes d'extension entre foncteurs finis de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Proposition 7.23. *La résolution canonique d'un foncteur polynomial X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ est finie ; sa longueur est majorée par $\deg X + 1$ si $X \neq 0$.*

Démonstration. Grâce à la proposition 5.51, il suffit de voir que l'endofoncteur Δ_{surj}^I de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ diminue strictement le degré des foncteurs polynomiaux non nuls. Ce fait est une traduction du lemme 5.56. \square

Nous appliquons maintenant la proposition 7.19 à des considérations relatives aux foncteurs dérivés gauches du foncteur η_I , qui est exact à droite par la proposition 7.14.

Notation 7.24. Étant donné $n \in \mathbb{Z}$, nous noterons $h_n^{\mathcal{G}_r, I} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ le n -ième foncteur dérivé gauche de η_I .

Remarque 7.25. Les foncteurs dérivés de η_I mesurent, intuitivement, le défaut d'essentielle surjectivité du foncteur θ_I , donc la différence homologique entre les catégories $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$. Cela motive la notation employée pour ces foncteurs.

En effet, si l'on se restreint aux foncteurs finis, nous avons vu (proposition 5.69) que tout objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ s'obtient par extensions successives de foncteurs appartenant à l'image du foncteur θ_I . La description de ces objets équivaut donc essentiellement au calcul de groupes d'extensions entre deux objets de l'image de θ_I . Ces calculs font naturellement intervenir les foncteurs $h_n^{\mathcal{G}_r, I}$: il existe une suite spectrale du premier quadrant

$$E_{p,q}^2 = \text{Ext}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}^p(h_q^{\mathcal{G}_r, I}(X), F) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}_r, I}^*(X, \theta_I(F))$$

naturelle en les objets F de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

La proposition et le corollaire suivants établissent le lien entre le foncteur gradué $h_*^{\mathcal{G}_r, I}$ et la résolution canonique.

Proposition 7.26. *Pour tout entier $n > 0$ et tout objet F de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$, on a $h_n^{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(F)) = 0$.*

Démonstration. Soit P_\bullet une résolution projective de F . Comme le foncteur ξ_I est exact et préserve les projectifs (son adjoint à droite σ_I est exact), $\xi(P_\bullet)$ est une résolution projective de $\xi_I(F)$. La proposition 7.16 montre que $\eta_I \xi_I(P_\bullet)$ s'identifie à P_\bullet . Ce complexe, dont l'homologie est (isomorphe à) $h_*^{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(F))$, est donc acyclique en degrés strictement positifs. \square

Corollaire 7.27. *Le foncteur gradué $h_*^{\mathcal{G}_r, I}$ est canoniquement isomorphe à l'homologie du complexe $\eta_I(\mathfrak{R}_\bullet^{\mathcal{G}_r, I})$ de foncteurs $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.*

Nous illustrons à présent la proposition 7.26 par un calcul élémentaire.

Exemple 7.28 (Calcul sur les injectifs standard — cas $I = \mathbb{N}$). La proposition 5.16 permet un calcul rapide des objets $h_*^{\mathcal{G}_r}(I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r})$. En effet, par les propositions 7.16 et 7.26, on a $h_0^{\mathcal{G}_r}(u(I_V)) \simeq I_V$, où l'on plonge \mathcal{F} dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$ par le foncteur $\cdot \boxtimes \mathbb{k}$, et $h_n^{\mathcal{G}_r}(u(I_V)) = 0$ si $n \neq 0$. Comme $\eta(I_{(V, 0)}) \simeq \eta(\kappa(I_V)) \simeq I_V$ (par les propositions 5.14 et 7.16), on a finalement :

1. l'objet gradué $h_*^{\mathcal{G}_r}(I_{(V, W)}^{\mathcal{G}_r})$ est nul si $\dim W > 0$;
2. l'objet gradué $h_*^{\mathcal{G}_r}(I_{(V, 0)}^{\mathcal{G}_r})$ est concentré en degré 0, où il est naturellement isomorphe à I_V .

La proposition 7.18 fournit la formule de Künneth suivante.

Proposition 7.29. *Il existe un isomorphisme d'objets gradués de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$*

$$h_*^{\mathcal{G}r,I}(X \otimes Y) \simeq h_*^{\mathcal{G}r,I}(X) \otimes h_*^{\mathcal{G}r,I}(Y)$$

naturel en les objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$.

Démonstration. Comme le foncteur ξ_I commute au produit tensoriel, la proposition 7.26 montre que le complexe total du produit tensoriel des résolutions canoniques de X et Y est une résolution η_I -acyclique de $X \otimes Y$. L'homologie de ce complexe étant naturellement isomorphe au produit tensoriel de $h_*^{\mathcal{G}r,I}(X)$ et $h_*^{\mathcal{G}r,I}(Y)$, on en déduit la proposition. \square

8 Les catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$

Le diagramme de recollement de la proposition 5.4 permet de dévisser la catégorie de foncteurs en grassmanniennes globale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}(\mathbb{k})$ à l'aide des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}(\mathbb{k})$. Il est patent que l'on peut pousser plus loin ce dévissage, en raison de l'intervention du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{k})$ dans un grand nombre de considérations relatives à cette catégorie. Nous étudions dans ce qui suit des catégories réalisant un tel dévissage, dans un sens qui sera précisé et illustré à la fin du paragraphe 8.2.

Convention 8.1. Dans toute cette section, n désigne un entier naturel.

Nous noterons encore E_n , pour abrégé, l'objet initial (E_n, id) de $\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f(\mathbb{k})$.

Définition 8.2. La catégorie de foncteurs en grassmanniennes $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}(\mathbb{k})$ est la catégorie définie par

$$\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}(\mathbb{k}) = \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f(\mathbb{k}), \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f).$$

8.1 Généralités

Nous introduisons maintenant des foncteurs analogues à ceux du § 5.1 dans le cas $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ et en donnons les propriétés élémentaires. Les démonstrations, semblables à celles dudit paragraphe, sont laissées au lecteur.

Notation 8.3. Nous abrègerons respectivement en $\mathrm{hom}_{\mathbf{P}1,n}$, $P_X^{\mathbf{P}1,n}$, $I_X^{\mathbf{P}1,n}$ les expressions $\mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}}$, $P_X^{\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f}$ et $I_X^{\mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f}$.

- Définition 8.4.**
1. Le foncteur de *restriction sans plongement* $\gamma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ est défini comme étant le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli du plongement $inc_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f$.
 2. Le foncteur de *plongement standard* $\iota_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ est le foncteur de précomposition par le foncteur d'oubli principal $\bar{\mathcal{D}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.
 3. Le foncteur de *plongement réduit* $\kappa_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ est le foncteur de précomposition par le foncteur de réduction $\bar{\mathcal{K}}_n : \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$.
 4. On définit le foncteur de *décalage en grassmanniennes* $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$ comme le foncteur de précomposition par le foncteur de décalage pointé $\mathfrak{S}_n : \mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P}1,n}^f$.
- Explicitement, on a

$$\gamma_n(X)(V, u) = X(V, im u),$$

$$\begin{aligned}\iota_n^{\mathbf{P1}}(F)(V, u) &= F(V), \\ \kappa_n^{\mathbf{P1}}(F)(V, u) &= F(\text{coker } u), \\ \sigma_n^{\mathbf{P1}}(A)(W) &= A(W \oplus E_n, E_n \hookrightarrow W \oplus E_n)\end{aligned}$$

pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}$, $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$, $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$, $(V, u : E_n \hookrightarrow V) \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathbf{P1}, n}^f$ et $W \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$.

Remarque 8.5. 1. On a $\iota_n^{\mathbf{P1}} = \gamma_n \iota_n$ et $\kappa_n^{\mathbf{P1}} = \gamma_n \kappa_n$.

2. Nous ne donnons pas de notation pour les foncteurs d'intégrale $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n} \rightarrow \mathcal{F}$, qui ne revêtent pas la même importance que les foncteurs d'intégrale en grassmanniennes des catégories de type $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, I}$.

La proposition suivante donne les principales variantes des propriétés du paragraphe 5.1 en termes des foncteurs introduits précédemment.

Proposition 8.6. 1. Les foncteurs γ_n , $\iota_n^{\mathbf{P1}}$, $\sigma_n^{\mathbf{P1}}$ et $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ sont exacts et fidèles ; ils commutent au produit tensoriel, aux limites et aux colimites.

2. Le foncteur $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ est de plus plein, et son image est une sous-catégorie de Serre de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$.
3. La composition $\mathcal{F} \xrightarrow{\kappa_n^{\mathbf{P1}}} \mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n} \xrightarrow{\sigma_n^{\mathbf{P1}}} \mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe au foncteur identique.
4. Le foncteur $\iota_n^{\mathbf{P1}}$ est adjoint à gauche à $\sigma_n^{\mathbf{P1}}$.
5. On a des isomorphismes $P_{\mathfrak{S}_n(V)}^{\mathbf{P1}, n} \simeq \iota_n^{\mathbf{P1}}(P_V)$ et $I_{\mathfrak{S}_n(V)}^{\mathbf{P1}, n} \simeq \kappa_n^{\mathbf{P1}}(I_V) \otimes I_{E_n}^{\mathbf{P1}, n}$ naturels en l'objet V de \mathcal{E}^f .
6. Le foncteur composé $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \xrightarrow{\rho_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n} \xrightarrow{\gamma_n} \mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$, où la première flèche est le foncteur d'oubli de l'action de $GL_n(\mathbb{k})$ et le second le plongement canonique (donné par les foncteurs constants).

Décomposition scalaire, tors de Frobenius et changement de corps

Ces notions se définissent comme dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}$ et possèdent des propriétés tout à fait analogues.

Les objets polynomiaux et finis de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$ L'endofoncteur de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$ donné par la précomposition par le foncteur de translation $V \boxplus \cdot : \mathcal{E}_{\mathbf{P1}, n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P1}, n}^f$ (où $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$) s'appelle *foncteur de décalage* et se note $\Delta_V^{\mathbf{P1}, n}$; il existe un scindement canonique $\Delta_{\mathbb{k}}^{\mathbf{P1}, n} \simeq id \oplus \Delta^{\mathbf{P1}, n}$, où $\Delta^{\mathbf{P1}, n}$ est le *foncteur différence* de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$.

Les *foncteurs polynomiaux* de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$ sont ses objets $\Delta^{\mathbf{P1}, n}$ -nilpotents ; on a une notion de degré. On note $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}^k$ la sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$ des foncteurs polynomiaux de degré au plus k . La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}^0$ est réduite aux foncteurs constants, comme dans la catégorie \mathcal{F} (contrairement à ce qui advient dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, n}$). Nous nous contentons d'énoncer les analogues les plus importants des propriétés des § 5.4 et 5.5, qui s'adaptent sans difficulté à $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$.

Le résultat suivant, similaire à la proposition 5.57 identifie les quotients de la filtration polynomiale de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1}, n}$.

Proposition 8.7. *Le foncteur $\sigma_n^{\mathbf{P1}} : \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \rightarrow \mathcal{F}$ induit pour tout $k \in \mathbb{N}$ une équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}^k / \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}^{k-1} \rightarrow \mathcal{F}^k / \mathcal{F}^{k-1}$.*

Les foncteurs $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ et $\iota_n^{\mathbf{P1}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ induisent chacun une équivalence de catégories $\mathcal{F}^k / \mathcal{F}^{k-1} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}^k / \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}^{k-1}$ inverse de la précédente.

L'analogie suivant de la proposition 5.64 sous-tend, avec la proposition précédente, la proposition 8.9 ci-dessous.

Proposition 8.8. *Un foncteur de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est fini si et seulement s'il est polynomial et à valeurs de dimension finie.*

Nous en venons maintenant à la description explicite des objets simples de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ (cf. proposition 5.69).

Proposition 8.9. *1. Étant donné un objet X de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *L'objet X de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est simple.*

(b) *L'objet $\sigma_n^{\mathbf{P1}}(X)$ de \mathcal{F} est simple.*

(c) *Il existe un objet simple S de \mathcal{F} tel que $X \simeq \kappa_n^{\mathbf{P1}}(S)$.*

2. Les foncteurs $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ et $\sigma_n^{\mathbf{P1}}$ induisent des isomorphismes d'anneaux inverses l'un de l'autre entre $G_0^f(\mathcal{F})$ et $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n})$.

Premiers liens entre les catégories \mathcal{F} , $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ en termes de (co)modules L'un des thèmes de la section 8 consiste à compléter l'équivalence de catégories fondamentale entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$ et les $\mathbb{k}[\mathcal{G}r]$ -comodules (cf. proposition 5.9) par l'identification d'autres catégories de modules ou de comodules à des catégories de foncteurs. Dans ce sous-paragraphe, nous donnons deux telles propriétés, qui reposent sur la section 3.

Proposition 8.10. *La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est équivalente à la sous-catégorie $\mathbf{Comod}_{P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}}$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.*

Démonstration. Le foncteur

$$(\mathcal{E}_{\mathcal{G}r,n}^f)_{\backslash \text{hom}((E_n, E_n), \cdot)} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f \quad ((V, W), u) \mapsto (V, u)$$

est une équivalence de catégories, où la catégorie source dérive de la notation 3.4. La proposition est donc un cas particulier de la proposition 3.14. \square

Remarque 8.11. Le foncteur $\text{hom}_{\mathcal{G}r,n}((E_n, E_n), \cdot)$ est canoniquement isomorphe à la composée $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\mathfrak{B}_n} \mathcal{E}_{\text{surj}}^n \xrightarrow{\text{hom}(E_n, \cdot)} \mathbf{Ens}$. Comme $\mathcal{E}_{\text{surj}}^n \simeq \underline{GL}_n(\mathbb{k})$ est équivalente à sa catégorie opposée, on peut remplacer dans la démonstration précédente ce foncteur par un foncteur *contravariant*, et obtenir ainsi sur $P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$ une structure d'algèbre telle que $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est équivalente à la sous-catégorie $\mathbf{Mod}_{P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}}$

de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$. Ce phénomène est à rapprocher de la remarque suivante : $P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$ s'identifie à $\rho_n(\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})])$, et $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ est un objet auto-dual de $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ (la dualité consistant à associer à une représentation linéaire la représentation contragrédiente).

Grâce au lemme suivant, nous établirons, à la proposition 8.13, un lien direct entre les catégories \mathcal{F} et $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$.

Lemme 8.12. *La catégorie $(\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)}$ est équivalente à \mathcal{E}^f .*

Démonstration. On vérifie aussitôt que les deux foncteurs introduits ci-après sont des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre.

- On définit un foncteur $\mathcal{E}^f \rightarrow (\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)}$ en associant à $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ l'objet $\mathfrak{S}_n(V)$ de $\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f$ muni du morphisme vers E_n donné par la projection $V \oplus E_n \twoheadrightarrow E_n$, et à une application linéaire $f : V \rightarrow W$ le morphisme $f \oplus E_n$.
- On définit un foncteur $(\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)} \rightarrow \mathcal{E}^f$ en associant à un objet $((V, u : E_n \hookrightarrow V), r : V \rightarrow E_n)$ de $(\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f)_{/\text{hom}(\cdot, E_n)}$ l'espace vectoriel $\text{coker } u \simeq \text{ker } r$, et à un morphisme l'application linéaire induite.

□

Proposition 8.13. *La catégorie \mathcal{F} est équivalente à la sous-catégorie $\mathbf{Mod}_{I_{E_n}}^{\mathbf{P1},n}$ de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$.*

Démonstration. On combine le lemme précédent avec la proposition 3.36. □

8.2 L'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \simeq \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$

L'analogue des considérations de la section 7 dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ permet d'obtenir l'équivalence de catégories éponyme de ce paragraphe. Les structures que l'on en déduit constituent une justification essentielle à l'étude des catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$, dont nous verrons comment elle peut intervenir dans les catégories de type $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Le point de départ de ce paragraphe réside dans le fait que le foncteur $\iota_n^{\mathbf{P1}}$ est adjoint à gauche au foncteur $\sigma_n^{\mathbf{P1}}$ (proposition 8.6.4).

Proposition et définition 8.14. *La monade de \mathcal{F} associée à l'adjonction entre les foncteurs $\iota_n^{\mathbf{P1}}$ et $\sigma_n^{\mathbf{P1}}$ conformément à la proposition A.5, que nous désignerons par $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n} = (\Delta_{E_n}, u_{\mathbf{P1},n}, \mu_{\mathbf{P1},n})$, est donnée comme suit.*

- Le foncteur Δ_{E_n} est le foncteur de décalage de \mathcal{F} (cf. section 1).
- La transformation naturelle $u_{\mathbf{P1},n} : \text{id} \rightarrow \Delta_{E_n}$ (unité de l'adjonction) est induite par l'application linéaire $0 \rightarrow E_n$, compte-tenu de l'identification entre id et Δ_0 .
- La multiplication $\mu_{\mathbf{P1},n} : (\Delta_{E_n})^2 \simeq \Delta_{E_n \oplus E_n} \rightarrow \Delta_{E_n}$ est la transformation naturelle induite par la somme $E_n \oplus E_n \rightarrow E_n$.

En outre, il existe un scindement naturel $\text{id} \xrightarrow{u_{\mathbf{P1},n}} \Delta_{E_n} \xrightarrow{p_{\mathbf{P1},n}} \text{id}$, où $p_{\mathbf{P1},n}$ est induit par l'application linéaire $E_n \rightarrow 0$.

Proposition 8.15. *La catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est équivalente à la catégorie des modules sur la monade $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$ de \mathcal{F} .*

Les deux propositions précédentes se démontrent comme les propositions 7.3 et 7.5.

Convention 8.16. Dans la suite de ce paragraphe, nous *identifierons* la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ avec la sous-catégorie des modules sur $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$ de \mathcal{F} . Autrement dit, un objet de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ sera désormais un couple $(X, \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X)$, où X est un objet de \mathcal{F} et m_X un morphisme tel que :

- la composée $X \xrightarrow{(u_{\mathbf{P1},n})_X} \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X$ est le morphisme identique ;
- les composées $(\Delta_{E_n})^2 X \xrightarrow{(\mu_{\mathbf{P1},n})_X} \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X$ et $(\Delta_{E_n})^2 X \xrightarrow{\Delta_{E_n} m_X} \Delta_{E_n} X \xrightarrow{m_X} X$ coïncident.

Par abus, nous noterons parfois simplement X pour (X, m_X) .

Notation 8.17. Le morphisme $X \rightarrow X \otimes I_{E_n}$ adjoint à m_X (cf. proposition 1.3) sera noté ψ_X dans la suite de ce paragraphe.

Nous indiquons, dans la proposition suivante, l'analogie du foncteur η_I . Nous omettons la démonstration, similaire à celle des propositions 7.14, 7.16 et 7.18.

Proposition et définition 8.18 (Foncteur $\eta_n^{\mathbf{P1}}$). 1. On définit le foncteur $\eta_n^{\mathbf{P1}} : \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \rightarrow \mathcal{F}$ comme le coégalisateur des deux transformations naturelles $p_{\mathbf{P1},n}$ (cf. notation de la proposition 8.14) et $m : \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}} \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P1}}$.

2. Le foncteur $\eta_n^{\mathbf{P1}}$ est adjoint à gauche au foncteur $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$.
3. Il existe des isomorphismes

$$\eta_n^{\mathbf{P1}} \circ \kappa_n^{\mathbf{P1}} \simeq \eta_n^{\mathbf{P1}} \circ l_n^{\mathbf{P1}} \simeq id.$$

4. Le foncteur $\eta_n^{\mathbf{P1}}$ commute au produit tensoriel à isomorphisme naturel près.

On peut introduire, comme dans la section 7, une notion de résolution canonique dans $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$, grâce à laquelle on peut calculer les foncteurs dérivés du foncteur $\eta_n^{\mathbf{P1}}$, et relier les groupes d'extension dans $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ à ceux de \mathcal{F} par une suite spectrale. Plutôt que de détailler ces considérations, nous abordons des constructions plus spécifiques à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$.

Remarque 8.19. Pour tout espace vectoriel V de dimension finie, le foncteur P_V est muni d'une structure naturelle d'algèbre commutative, dont la multiplication est le morphisme $P_V \otimes P_V \simeq P_{V \oplus V} \rightarrow P_V$ induit par la diagonale $V \rightarrow V \oplus V$ et l'unité $P_V \rightarrow \mathbb{k} \simeq P_0$ par $0 \rightarrow V$. Explicitement, la structure d'algèbre sur les espaces vectoriels $P_V(W) = \mathbb{k}[\text{hom}(V, W)]$ qui s'en déduit est celle de l'algèbre du groupe abélien $\text{hom}(V, W)$.

En utilisant le foncteur de dualité D , on en déduit une structure naturelle de coalgèbre cocommutative sur les injectifs standard I_V de \mathcal{F} .

La proposition fondamentale suivante repose sur l'identification de l'adjoint à droite au foncteur Δ_{E_n} de la monade $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$. Elle n'a pas d'analogie dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,I}$, car l'adjoint à droite au foncteur Δ_{surj}^I (qui existe par le corollaire C.9) n'est généralement pas un foncteur qui admet une description simple.

Proposition 8.20. *Il existe une équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$ qui factorise le foncteur $\sigma_n^{\mathbf{P1}} : \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \rightarrow \mathcal{F}$ à travers le foncteur d'oubli $\mathbf{Comod}_{I_{E_n}} \rightarrow \mathcal{F}$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} & \xrightarrow{\sigma_n^{\mathbf{P1}}} & \mathcal{F} \\ & \searrow \simeq & \uparrow \\ & & \mathbf{Comod}_{I_{E_n}} \end{array}$$

Démonstration. La proposition découle de ce qu'une flèche $\Delta_{E_n} X \rightarrow X$ de \mathcal{F} fait de X un module sur $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$ si et seulement si la flèche adjointe $X \rightarrow X \otimes I_{E_n}$ définit une structure de I_{E_n} -comodule sur X . En effet, la multiplication de $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$ comme la comultiplication de I_{E_n} sont induites par la somme $E_n \oplus E_n \rightarrow E_n$, et l'unité de $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$ comme la coïmité de I_{E_n} proviennent du morphisme $0 \rightarrow E_n$. \square

Remarque 8.21. La proposition 8.20 est à comparer avec l'équivalence de catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Comod}_{\tilde{P}(n)}^{fid}$ (fournie par un foncteur d'intégrale) déduite de la proposition 3.26, où $\tilde{P}(n)$ est le foncteur introduit dans la notation 2.50.

Produit cotensoriel et foncteur $\chi_n^{\mathbf{P1}}$ Dans la suite de ce paragraphe, nous identifierons les catégories $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ et $\mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$. En particulier, la coalgèbre I_{E_n} étant cocommutative, on dispose dans $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ d'un produit cotensoriel $\square_{I_{E_n}}$, qui sera noté simplement \square par la suite ; c'est un bifoncteur exact à gauche.

Avant d'utiliser ce produit cotensoriel, nous avons besoin de décrire quelques foncteurs usuels de source ou de but $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ dans l'identification de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ à $\mathbf{Comod}_{I_{E_n}}$.

Le foncteur $\sigma_n^{\mathbf{P1}} : \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \rightarrow \mathcal{F}$ correspond au foncteur d'oubli (cf. proposition 8.20).

Nous identifions, dans la proposition qui suit, le produit tensoriel de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ en termes de I_{E_n} -comodules.

Proposition 8.22. *Le coproduit $\psi_{X \otimes Y}$ d'un produit tensoriel de deux objets X et Y de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est égal à la composée*

$$X \otimes Y \xrightarrow{\psi_X \otimes \psi_Y} (X \otimes I_{E_n}) \otimes (Y \otimes I_{E_n}) \simeq (X \otimes Y) \otimes (I_{E_n} \otimes I_{E_n}) \xrightarrow{(X \otimes Y) \otimes a_n} (X \otimes Y) \otimes I_{E_n}$$

où $a_n : I_{E_n} \otimes I_{E_n} \rightarrow I_{E_n}$ est le produit du foncteur en algèbres de Boole I_{E_n} .

Ainsi, le produit tensoriel de la catégorie de comodules $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ provient de la structure d'algèbre sur I_{E_n} . Le fait que le produit tensoriel de deux I_{E_n} -comodules est naturellement un I_{E_n} -comodule provient de la compatibilité des structures d'algèbre et de coalgèbre sur I_{E_n} , qui est une *algèbre de Hopf* de la catégorie symétrique monoidale \mathcal{F} .

Démonstration. La propriété provient, par adjonction, de ce que le morphisme $m_{X \otimes Y} : \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X \otimes Y) \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X \otimes Y)$ s'identifie, modulo les isomorphismes canoniques $\sigma_n^{\mathbf{P1}}(X \otimes Y) \simeq \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes \sigma_n^{\mathbf{P1}}(Y)$ et $\Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X \otimes Y) \simeq \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(Y)$, à $m_X \otimes m_Y : \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes \Delta_{E_n} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(Y) \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes \sigma_n^{\mathbf{P1}}(Y)$. \square

Notation 8.23. Dans ce paragraphe, nous noterons $j_F : F \hookrightarrow F \otimes I_{E_n}$, pour $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$, l'inclusion canonique déduite de $\mathbb{k} \hookrightarrow I_{E_n}$.

Nous identifions maintenant le foncteur $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ en termes de I_{E_n} -comodules.

Proposition 8.24. *Le foncteur $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ associe à un objet F de \mathcal{F} le I_{E_n} -comodule (F, j_F) .*

Ainsi, le foncteur $\kappa_n^{\mathbf{P1}}$ identifie \mathcal{F} à la sous-catégorie de Serre des I_{E_n} -comodules X tels que $\psi_X = j_X$.

Démonstration. De manière semblable à la proposition 7.9, on voit que $\kappa_n^{\mathbf{P1}}(F)$ est le $\mathcal{T}_{\mathbf{P1},n}$ -module $(F, (p_{\mathbf{P1},n})_F)$. La proposition se déduit alors de ce que le morphisme $(p_{\mathbf{P1},n})_F : \Delta_{E_n} F \rightarrow F$ est adjoint à j_F . \square

Corollaire 8.25. *Soient F un objet de \mathcal{F} et X un objet de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$. Les morphismes $\psi_{\kappa_n^{\mathbf{P1}}(F) \otimes X}$ et $F \otimes \psi_X : F \otimes \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \rightarrow F \otimes \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes I_{E_n}$ de \mathcal{F} sont égaux.*

Démonstration. C'est une conséquence directe des propositions 8.24 et 8.22. \square

Remarque 8.26. Il existe un monomorphisme canonique $\sigma_n^{\mathbf{P1}}(X \square Y) \hookrightarrow \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X \otimes Y) \simeq \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes \sigma_n^{\mathbf{P1}}(Y)$ dans \mathcal{F} ; il ne provient pas d'un morphisme naturel $X \square Y \rightarrow X \otimes Y$ de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$. En revanche, le corollaire 8.25 montre qu'il est induit par un monomorphisme naturel $X \square Y \hookrightarrow \kappa_n^{\mathbf{P1}} \sigma_n^{\mathbf{P1}}(X) \otimes Y$.

Nous introduisons à présent un nouveau foncteur déduit de la proposition 8.20.

Définition 8.27 (Foncteur $\chi_n^{\mathbf{P}1}$). On définit le foncteur $\chi_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$ par la composition suivante.

$$\chi_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\cdot \square_{\mathbf{k}}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\sigma_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}$$

Ainsi, $\chi_n^{\mathbf{P}1}$ est l'égalisateur des transformations naturelles ψ et $j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}} : \sigma_n^{\mathbf{P}1} \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1} \otimes I_{E_n}$.

La proposition suivante constitue le résultat principal de ce sous-paragraphe.

Proposition 8.28. *Le foncteur $\chi_n^{\mathbf{P}1}$ est adjoint à droite à $\kappa_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$.*

Démonstration. Soient F un objet de \mathcal{F} et X un I_{E_n} -comodule. Par la proposition 8.24, $\text{hom}_{\mathbf{P}1,n}(\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F), X)$ s'identifie à l'ensemble des morphismes $f : F \rightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)$ de \mathcal{F} tels que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \\ j_F \downarrow & & \downarrow \psi_X \\ F \otimes I_{E_n} & \xrightarrow{f \otimes I_{E_n}} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes I_{E_n} \end{array}$$

Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \\ j_F \downarrow & & \downarrow j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)} \\ F \otimes I_{E_n} & \xrightarrow{f \otimes I_{E_n}} & \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes I_{E_n} \end{array}$$

commute, la condition précédente revient à dire que le morphisme f est à valeurs dans l'égalisateur des morphismes $j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)}$ et ψ_X , qui est $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X)$. Cela démontre la proposition. \square

La proposition ci-après donne une propriété de compatibilité entre les foncteurs $\chi_n^{\mathbf{P}1}$ et $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$.

Proposition 8.29. *Il existe des isomorphismes naturels $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)) \simeq \chi_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F$ et $X \square_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}}(F) \simeq \kappa_n^{\mathbf{P}1}(\chi_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F)$ pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ et $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$.*

Démonstration. Le foncteur $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F))$ est l'égalisateur des flèches $\psi_{X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)} = \psi_X \otimes F$ (par le corollaire 8.25) et $j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F))} = j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)} \otimes F$, il s'identifie donc canoniquement au produit tensoriel de $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X)$ et F .

Par ailleurs, $X \square_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}}(F)$ est l'égalisateur des flèches $X \otimes F \xrightarrow{\psi_X \otimes F} X \otimes I_{E_n} \otimes F$ et $X \otimes F \xrightarrow{X \otimes \psi_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)}} X \otimes F \otimes I_{E_n} \simeq X \otimes I_{E_n} \otimes F$; comme $X \otimes \psi_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}(F)} = X \otimes j_F \simeq j_{\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X)} \otimes F$ (modulo l'isomorphisme d'échange des facteurs du produit tensoriel), ce foncteur s'identifie (dans \mathcal{F}) à $\chi_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F$. Il reste à voir que sa structure de I_{E_n} -comodule est triviale, ce qui provient de l'inclusion $X \square_{\kappa_n^{\mathbf{P}1}}(F) \hookrightarrow \kappa_n^{\mathbf{P}1} \sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes \kappa_n^{\mathbf{P}1}(F) \simeq \kappa_n^{\mathbf{P}1}(\sigma_n^{\mathbf{P}1}(X) \otimes F)$ (cf. remarque 8.26). \square

Remarque 8.30. On peut expliciter l'équivalence de catégories de la proposition 8.13 à l'aide des foncteurs $\kappa_n^{\mathbf{P}1}$ et $\chi_n^{\mathbf{P}1}$. Ainsi, on vérifie que les foncteurs

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\kappa_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n} \otimes \cdot} \mathbf{Mod}_{I_{E_n}^{\mathbf{P}1,n}}$$

et

$$\mathbf{Mod}_{I_{E_n}^{\mathbf{P1},n}} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \xrightarrow{\chi_n^{\mathbf{P1}}} \mathcal{F}$$

sont des équivalences réciproques l'une de l'autre.

Le foncteur $\chi_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$ Nous revenons maintenant à la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, en montrant comment les résultats précédents peuvent être utilisés pour en étudier certaines propriétés. Nous commençons par préciser le lien entre $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

- Proposition et définition 8.31.** 1. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{k})$ agit à droite sur la catégorie $\mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f$: pour tout $g \in GL_n(\mathbb{k})$, on définit un foncteur $\tau_g : \mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{P1},n}^f$ par $(V, u) \mapsto (V, u \circ g)$ sur les objets et par l'égalité $\text{hom}_{\mathbf{P1},n}((V, u), (V', u')) = \text{hom}_{\mathbf{P1},n}((V, u \circ g), (V', u' \circ g))$ sur les morphismes, et l'on a $\tau_1 = \text{id}$ et $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{hg}$ pour tous $g, h \in GL_n(\mathbb{k})$.
2. Par précomposition, on en déduit une action à gauche de $GL_n(\mathbb{k})$ sur $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$: les foncteurs $\tau_g^* : \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ vérifient $\tau_1^* = \text{id}$ et $\tau_g^* \circ \tau_h^* = \tau_{gh}^*$.
3. On appelle $GL_n(\mathbb{k})$ -module dans $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ tout objet X de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ muni de flèches $\tau_g^*(X) \xrightarrow{t_g} X$ (dites d'action de $GL_n(\mathbb{k})$) telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tau_g^* \tau_h^*(X) & \xrightarrow{\tau_g^*(t_h)} & \tau_g^*(X) \\ \parallel & & \downarrow t_g \\ \tau_{gh}^*(X) & \xrightarrow{t_{gh}} & X \end{array}$$

commute pour tous $g, h \in GL_n(\mathbb{k})$. Un morphisme de $GL_n(\mathbb{k})$ -modules de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est un morphisme de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ compatible aux morphismes d'action de $GL_n(\mathbb{k})$. On définit ainsi la sous-catégorie des $GL_n(\mathbb{k})$ -modules de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$.

4. Le foncteur $\gamma_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ et la sous-catégorie des $GL_n(\mathbb{k})$ -modules de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$.
5. Le foncteur γ_n admet un adjoint à gauche $\Phi_n : \mathcal{F}_{\mathbf{P1},n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ donné sur les objets par

$$\Phi_n(X)(V, W) = \bigoplus_{u \in \text{Iso}_{\mathcal{E}}(E_n, W)} X(V, E_n \xrightarrow{u} W \hookrightarrow V).$$

Démonstration. Les deux premières assertions sont claires. Le dernier point est un cas particulier de la proposition 3.9 (cf. démonstration de la proposition 8.10). Comme le foncteur γ_n est exact et fidèle, la proposition A.9 montre que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ est équivalente à la sous-catégorie de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ des modules sur la monade associée à cette adjonction. Cette monade se décrit comme suit.

- L'endofoncteur $\gamma_n \Phi_n$ de $\mathcal{F}_{\mathbf{P1},n}$ est $\bigoplus_{g \in GL_n(\mathbb{k})} \tau_g^*$.
- L'unité est l'inclusion $\text{id} \hookrightarrow \bigoplus_{g \in GL_n(\mathbb{k})} \tau_g^*$ du facteur direct correspondant à $g = 1$.
- La multiplication est la transformation naturelle

$$\bigoplus_{h, h' \in GL_n(\mathbb{k})} \tau_h^* \tau_{h'}^* \rightarrow \bigoplus_{g \in GL_n(\mathbb{k})} \tau_g^*$$

dont la composante $\tau_h^* \tau_{h'}^* \rightarrow \tau_g^*$ est l'identité si $hh' = g$, 0 sinon.

La proposition en résulte. \square

Convention 8.32. Dans la suite de ce paragraphe, on *identifie* $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ avec la catégorie des $GL_n(\mathbb{k})$ -modules de $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$.

Remarque 8.33. Si \mathcal{A} est une catégorie abélienne, on peut voir la catégorie $\mathcal{A}_{GL_n(\mathbb{k})}$ comme une catégorie de $GL_n(\mathbb{k})$ -modules dans \mathcal{A} . La catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ est quant à elle une catégorie de $GL_n(\mathbb{k})$ -modules « tordus » par l'action du groupe linéaire sur $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$.

Pour mener des raisonnements sur la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$ des $GL_n(\mathbb{k})$ -modules tordus de $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ analogues à ceux relatifs aux $GL_n(\mathbb{k})$ -modules ordinaires, nous sommes conduits à introduire la notion suivante.

Définition 8.34. On appelle *trivialisation* sur $GL_n(\mathbb{k})$ d'un foncteur α de source $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ la donnée d'isomorphismes $T_g : \alpha \circ \tau_g^* \rightarrow \alpha$ pour tout $g \in GL_n(\mathbb{k})$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \alpha \tau_g^* \tau_h^* & \xrightarrow{(T_g)_{\tau_h^*}} & \alpha \tau_h^* \\ \parallel & & \downarrow T_h \\ \alpha \tau_{gh}^* & \xrightarrow{T_{gh}} & \alpha \end{array}$$

commute pour tous $g, h \in GL_n(\mathbb{k})$.

Proposition et définition 8.35. Soient \mathcal{A} une catégorie abélienne et $\alpha : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{A}$ un foncteur muni d'une trivialisation sur $GL_n(\mathbb{k})$. On définit un foncteur $\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{A}_{GL_n(\mathbb{k})}$ comme suit.

- Sur les objets : si X est un $GL_n(\mathbb{k})$ -module de $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$, alors $\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r}(X)$ est l'objet $\alpha(X)$ de \mathcal{A} muni de l'action de $GL_n(\mathbb{k})$ donnée par les flèches $\alpha(X) \simeq \alpha(\tau_g^*(X)) \rightarrow \alpha(X)$ (pour $g \in GL_n(\mathbb{k})$), où la première flèche est la trivialisation et la seconde est induite par la structure de $GL_n(\mathbb{k})$ -module de X .
- La flèche qu'elle induit un morphisme de $GL_n(\mathbb{k})$ -modules de $\mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n}$ via α est un morphisme de $\mathcal{A}_{GL_n(\mathbb{k})}$, ce qui permet de déduire la functorialité de $\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r}$ de celle de α .

De plus, le diagramme suivant commute (à isomorphisme canonique près)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} & \xrightarrow{\alpha_{GL_n}^{\mathcal{G}r}} & \mathcal{A}_{GL_n(\mathbb{k})} \\ \gamma_n \downarrow & & \downarrow O_{GL_n}^{\mathcal{A}} \\ \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} \end{array}$$

où $O_{GL_n}^{\mathcal{A}}$ désigne le foncteur d'oubli, conformément à la notation 3.4.

Nous illustrons cette construction élémentaire sur le foncteur $\chi_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$, qui aboutit à une description explicite de l'adjoint à droite au foncteur $\theta_n : \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.

Proposition et définition 8.36. 1. Le foncteur $\sigma_n^{\mathbf{P}1} : \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \rightarrow \mathcal{F}$ admet une trivialisation sur $GL_n(\mathbb{k})$ pour laquelle le foncteur $(\sigma_n^{\mathbf{P}1})_{GL_n}^{\mathcal{G}r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$ s'identifie à σ_n .

2. La trivialisation précédente induit, via le monomorphisme canonique $\chi_n^{\mathbf{P}1} \hookrightarrow \sigma_n^{\mathbf{P}1}$, une trivialisation sur $\chi_n^{\mathbf{P}1}$.
3. Nous noterons $\chi_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$ le foncteur $(\chi_n^{\mathbf{P}1})_{GL_n}^{\mathcal{G}r}$.
4. Le foncteur χ_n est adjoint à droite à θ_n .

Démonstration. La trivialisation canonique de $\sigma_n^{\mathbf{P}1}$ se lit sur le foncteur de décalage pointé \mathfrak{S}_n : pour tout $g \in GL_n(\mathbb{k})$, $\tau_g \mathfrak{S}_n$ est donné sur un objet V de \mathcal{E}^f par $(V \oplus E_n, E_n \xrightarrow{0 \oplus g} V \oplus E_n)$, et les transformations naturelles $\tau_g \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ données par le diagramme commutatif suivant fournissent la trivialisation recherchée.

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{0 \oplus g} & V \oplus E_n \\ & \searrow 0 \oplus id & \downarrow id \oplus g^{-1} \\ & & V \oplus E_n \end{array}$$

Pour en déduire le second point, on remarque que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \sigma_n^{\mathbf{P}1} \tau_g^* & \longrightarrow & \sigma_n^{\mathbf{P}1} \tau_g^* \otimes I_{E_n} \\ T_g \downarrow & & \downarrow T_g \otimes g^* \\ \sigma_n^{\mathbf{P}1} & \longrightarrow & \sigma_n^{\mathbf{P}1} \otimes I_{E_n} \end{array}$$

commute pour tout $g \in GL_n(\mathbb{k})$, où T_g est l'isomorphisme de trivialisation et les flèches horizontales sont données par la somme de ψ et de l'inclusion canonique.

La dernière assertion s'obtient à partir des trois observations suivantes.

1. La composée $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n} \xrightarrow{\chi_n} \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})} \xrightarrow{O_{GL_n}^{\mathcal{F}}} \mathcal{F}$ est adjointe à droite à $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})} \xrightarrow{\theta_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, où la première flèche est la postcomposition par le foncteur $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ d'extension des scalaires. En effet, le diagramme commutatif de la proposition 8.35, la proposition 8.28 et la dernière assertion de la proposition 8.31 montrent que la première composée est adjointe à droite à $\mathcal{F} \xrightarrow{\kappa_n^{\mathbf{P}1}} \mathcal{F}_{\mathbf{P}1,n} \xrightarrow{\Phi_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, qui coïncide avec $\kappa_n \otimes P_{(E_n, E_n)}^{\mathcal{G}r,n}$, flèche à laquelle s'identifie également $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})} \xrightarrow{\theta_n} \mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$.
2. Le foncteur χ_n est un sous-foncteur de σ_n . Cela découle de la première partie de la démonstration.
3. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}}(F, \chi_n(X)) & \hookrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}}(F, \sigma_n(X)) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{hom}_{\mathcal{G}r,n}(\theta_n(F), X) & \hookrightarrow & \mathrm{hom}_{\mathcal{G}r,n}(\xi_n(F), X) \end{array}$$

naturel en les objets F de $\mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$ et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r,n}$, où la flèche verticale de droite provient de la proposition 5.19. L'isomorphisme en pointillé résulte des deux remarques précédentes lorsque F appartient à l'image du foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{GL_n(\mathbb{k})}$ induit par l'extension des scalaires ; le cas général s'en déduit par un argument de colimite.

□

9 Foncteurs hom internes et foncteurs de division dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$

Nous présentons dans cette section des propriétés élémentaires des foncteurs hom internes et des foncteurs de division dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ (cf. proposition/définition C.16). Ces propriétés reposent sur les différentes adjonctions établies dans les paragraphes 5.1 et 7.1 et la description explicite des projectifs et injectifs standard de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Nous nous attacherons surtout aux foncteurs hom internes, notre but principal étant d'aboutir, dans la partie III, à la proposition 11.9 et ses corollaires, relatifs au comportement mutuel des foncteurs hom internes du foncteur ω . Les foncteurs de division n'interviendront que comme auxiliaires, dans le paragraphe 11.1.

9.1 Comparaison entre les différentes catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$

Il est parfois commode de passer de la catégorie globale $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ aux catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, par exemple, pour traiter des adjoints au produit tensoriel. En effet, si les foncteurs ι et ω sont adjoints, il n'en est pas de même des foncteurs ι_n et ω_n , ce qui induit une difficulté dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ nouvelle par rapport à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. En revanche, dès que l'on traite de foncteurs pseudo-constants, la catégorie globale se trouve beaucoup moins maniable que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, puisque les adjoints au produit tensoriel entre $GL_n(\mathbb{k})$ -modules sont faciles à décrire, contrairement à ce qui advient dans $\mathcal{F}_{surj}(\mathbb{k})$.

Convention 9.1. Dans ce paragraphe, on se donne deux parties I et J de \mathbb{N} telles que $I \subset J$.

On rappelle que $\mathcal{R}_{J, I}$ est le foncteur de restriction et $\mathcal{P}_{I, J}$ le foncteur de prolongement par zéro — défini sous certaines conditions sur I et J — introduits dans la notation 5.3.

Proposition 9.2. *Supposons que tout élément de J supérieur ou égal à un élément de I appartient à I . Alors il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, J}(X, \mathcal{P}_{I, J}(Y)) \simeq \mathcal{P}_{I, J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\mathcal{R}_{J, I}(X), Y))$$

naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, J}$ et Y de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$, et dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ un isomorphisme naturel

$$\mathcal{R}_{J, I}(\mathcal{P}_{I, J}(Y) : X) \simeq (Y : \mathcal{R}_{J, I}(X))$$

si X est à valeurs de dimension finie.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$ un isomorphisme naturel

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, \leq n}(X, \mathcal{P}_{n, \leq n}(Y)) \simeq \mathcal{P}_{n, \leq n}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, n}(\mathcal{R}_{\leq n, n}(X), Y))$$

et, si X est à valeurs de dimension finie, un isomorphisme naturel dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$

$$\mathcal{R}_{\leq n, n}(\mathcal{P}_{n, \leq n}(Y) : X) \simeq (Y : \mathcal{R}_{\leq n, n}(X)).$$

Démonstration. L'hypothèse assure que $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, I}^f$ est une sous-catégorie complète à gauche de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, J}^f$. Par conséquent, le foncteur $\mathcal{P}_{I, J}$ est adjoint à droite à $\mathcal{R}_{J, I}$ (cf. proposition C.25). Le premier isomorphisme de la proposition provient alors

de la commutation du foncteur de restriction au produit tensoriel, comme le montrent les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(A, \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(X, \mathcal{P}_{I,J}(Y))) &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(A \otimes X, \mathcal{P}_{I,J}(Y)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\mathcal{R}_{J,I}(A \otimes X), Y) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\mathcal{R}_{J,I}(A) \otimes \mathcal{R}_{J,I}(X), Y) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\mathcal{R}_{J,I}(A), \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\mathcal{R}_{J,I}(X), Y)) \\ &\simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(A, \mathcal{P}_{I,J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\mathcal{R}_{J,I}(X), Y))) \end{aligned}$$

(où $A \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}}$) et le lemme de Yoneda. Le second se traite de façon analogue. \square

Nous donnons maintenant un résultat plus précis de commutation entre foncteurs hom internes et foncteurs de restriction ou de prolongement par zéro, dans le cas où la source du foncteur hom interne appartient à l'image du foncteur $\iota_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$.

Proposition 9.3. *Il existe des isomorphismes naturels*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\iota_J(F), \mathcal{P}_{I,J}(A)) \simeq \mathcal{P}_{I,J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\iota_I(F), A))$$

dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}}$, si le prolongement par zéro est défini, et

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\iota_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X)) \simeq \mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\iota_J(F), X))$$

dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$, où $F \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}$, $A \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ et $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}}$.

Démonstration. Les morphismes naturels

$$\mathcal{P}_{I,J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\iota_I(F), A)) \otimes_{\iota_J(F)} \simeq \mathcal{P}_{I,J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\iota_I(F), A) \otimes_{\iota_I(F)}) \rightarrow \mathcal{P}_{I,J}(A)$$

(lorsque le prolongement par zéro est défini) et

$$\mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\iota_J(F), X)) \otimes_{\iota_I(F)} \simeq \mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\iota_J(F), X) \otimes_{\iota_J(F)}) \rightarrow \mathcal{R}_{J,I}(X)$$

dont les secondes flèches s'obtiennent par application du foncteur $\mathcal{P}_{I,J}$ ou $\mathcal{R}_{J,I}$ à la coïté de l'adjonction fournissent, par adjonction, des morphismes naturels $\mathcal{P}_{I,J}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\iota_I(F), A)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\iota_J(F), \mathcal{P}_{I,J}(A))$ et $\mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\iota_J(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\iota_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X))$. Ce sont des isomorphismes dans le cas où F est un projectif standard grâce aux propositions 5.38 et 5.37. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite. \square

La notation *ad hoc* suivante n'interviendra que dans les deux lemmes techniques ci-dessous.

Notation 9.4. Dans ce paragraphe, nous noterons $r : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}}$ le foncteur adjoint à gauche au foncteur $\mathcal{R}_{J,I} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$, et $R : \mathcal{F}_{surj}^I \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^J$ l'adjoint à gauche au foncteur de restriction $\mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F}_{surj}^I$ (de tels adjoints existent par le corollaire C.9).

Lemme 9.5. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}} & \xrightarrow{\sigma_I} & \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}^I) \\ \downarrow r & & \downarrow R_* \\ \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}} & \xrightarrow{\sigma_J} & \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}^f, \mathcal{F}_{surj}^J) \end{array}$$

commute à isomorphisme naturel près.

Démonstration. Soit $a : \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ le foncteur de restriction. On définit une transformation naturelle $R_*\sigma_I \rightarrow \sigma_J r$ comme l'adjointe (cf. proposition C.4) à la flèche $\sigma_I \rightarrow a\sigma_J r \simeq \sigma_I \mathcal{R}_{J,I} r$ obtenue en composant σ_I et l'unité $id \rightarrow \mathcal{R}_{J,I} r$ de l'adjonction. Cette transformation naturelle est un isomorphisme, car elle induit un isomorphisme $\text{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\sigma_J r(X), I_{(A,B)}^{\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J}) \xrightarrow{\simeq} \text{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(R_*\sigma_I(X), I_{(A,B)}^{\mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J})$ pour tous $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ et $(A, B) \in \text{Ob } \mathcal{E}^f \times \mathcal{E}_{surj}^J$ grâce aux isomorphismes (5) (page 47). \square

Lemme 9.6. *Il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}}$ un isomorphisme $r(X \otimes \kappa_I(F)) \simeq r(X) \otimes \kappa_J(F)$ naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$ et F de \mathcal{F} .*

Démonstration. On établit, à l'aide du lemme précédent, que la transformation naturelle $r(X \otimes \kappa_I(F)) \rightarrow r(X) \otimes \kappa_J(F)$ adjointe au morphisme $X \otimes \kappa_I(F) \rightarrow \mathcal{R}_{J,I} r(X) \otimes \kappa_I(F) \simeq \mathcal{R}_{J,I}(r(X) \otimes \kappa_J(F))$ obtenu en tensorisant par $\kappa_I(F)$ l'unité de l'adjonction procure un isomorphisme lorsqu'on lui applique σ_J . Cela provient du lemme 9.5 et des deux observations suivantes :

- il existe dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ un isomorphisme canonique $\sigma_I(X \otimes \kappa_I(F)) \simeq \sigma_I(X) \otimes (F \boxtimes \mathbf{k})$, que l'on peut encore voir comme l'image de $\sigma_I(X)$ par le foncteur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}) \xrightarrow{(\cdot \otimes F)^*} \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F})$;
- le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}) & \xrightarrow{(\cdot \otimes F)^*} & \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^I, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I \\ \downarrow R_* & & \downarrow R_* \\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}) & \xrightarrow{(\cdot \otimes F)^*} & \mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{surj}^J, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^J \end{array}$$

commute (à isomorphisme canonique près).

Comme le foncteur σ_J est exact et fidèle, cela donne la conclusion. \square

Nous sommes désormais en mesure d'établir la commutation des foncteurs hom internes et des foncteurs de restriction, dans le cas où la source du foncteur hom interne appartient à l'image du foncteur $\kappa_I : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$.

Proposition 9.7. *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\kappa_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X)) \simeq \mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\kappa_J(F), X))$$

naturel en les objets F de \mathcal{F} et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,J}}$.

Démonstration. Par le lemme 9.6 (dont on conserve la notation), on a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \text{hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(Y, \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(\kappa_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X))) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(Y \otimes \kappa_I(F), \mathcal{R}_{J,I}(X)) \simeq \\ &\text{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(r(Y \otimes \kappa_I(F)), X) \simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(r(Y) \otimes \kappa_J(F), X) \simeq \\ \text{hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(r(Y), \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\kappa_J(F), X)) &\simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_{r,I}}(Y, \mathcal{R}_{J,I}(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_{r,J}}(\kappa_J(F), X))) \end{aligned}$$

(où $Y \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_{r,I}}$), ce qui démontre la proposition. \square

9.2 Propriétés formelles

Nous étudions à présent le comportement mutuel des foncteurs de division ou hom internes et des foncteurs fondamentaux du § 5.1.

Foncteurs de division C'est le cas des foncteurs de division par des objets injectifs de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ qui nous intéresse le plus (cf. proposition 9.10).

Nous donnons d'abord une propriété de compatibilité entre les foncteurs ω , ι et les foncteurs de division.

Proposition 9.8. *Il existe dans \mathcal{F} un isomorphisme $\omega(X : \iota(F)) \simeq (\omega(X) : F)$ naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et F de \mathcal{F}^{df} . On a un résultat analogue dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence formelle de l'adjonction entre ι et ω (cf. proposition 5.9) et de la commutation de ι au produit tensoriel (cf. proposition 9.2). \square

La proposition élémentaire suivante interviendra dans [Djaa].

Proposition 9.9. *Pour toute partie I de \mathbb{N} , il existe dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ un isomorphisme canonique $(\rho_I(A) : X) \simeq \rho_I(A : \varepsilon_I(X))$ pour $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{surj}^I$, et $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ à valeurs de dimension finie.*

Démonstration. Cette proposition s'établit de la même manière que la précédente, à partir de la proposition 5.20 et de la commutation de ε_I au produit tensoriel. \square

On rappelle que le symbole Gr qui apparaît dans l'importante proposition suivante a été introduit au notation 4.27.

Proposition 9.10. *Il existe un isomorphisme*

$$(X : \iota(I_V))(A, B) \simeq \bigoplus_{\substack{C \in Gr(V \oplus A) \\ \text{im}(C \hookrightarrow V \oplus A \rightarrow A) = B}} X(V \oplus A, C)$$

naturel en les objets V de \mathcal{E}^f , (A, B) de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$ et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

De plus, pour tout $W \in Gr(V)$, le monomorphisme scindé naturel $(X : I_{(V, W)}^{Gr}) \hookrightarrow (X : \iota(I_V))$ induit par l'épimorphisme scindé $\iota(I_V) \rightarrow I_{(V, W)}^{Gr}$ fourni par la proposition 5.16 identifie $(X : I_{(V, W)}^{Gr})(A, B)$ au sous-espace

$$\bigoplus_{C \in Gr(W, B)} X(V \oplus A, C)$$

de $(X : \iota(I_V))(A, B)$.

Démonstration. On a des isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} ((X : I_{(V, W)}^{Gr})(A, B))^* &\simeq \text{hom}_{Gr}((X : I_{(V, W)}^{Gr}), I_{(A, B)}^{Gr}) \simeq \text{hom}_{Gr}(X, I_{(V, W)}^{Gr} \otimes I_{(A, B)}^{Gr}) \\ &\simeq \bigoplus_{C \in Gr(W, B)} \text{hom}_{Gr}(X, I_{(V \oplus A, C)}^{Gr}) \simeq \bigoplus_{C \in Gr(W, B)} X(V \oplus A, C)^* \end{aligned}$$

par la proposition 5.32, ce qui donne le résultat, pour X à valeurs de dimension finie, en dualisant ; le cas quelconque s'en déduit en écrivant X comme colimite de sous-foncteurs à valeurs de dimension finie. \square

Foncteurs hom internes Nous ramenons dans ce sous-paragraphe le calcul de nombreux foncteurs hom internes dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ à celui de foncteurs hom internes des catégories \mathcal{F} ou $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Convention 9.11. Dans la suite de ce paragraphe, I désigne une partie de \mathbb{N} .

Le principal objectif de la proposition suivante est d'établir la commutation entre le foncteur κ_I et les foncteurs hom internes (corollaire 9.14).

Proposition 9.12. *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(X, \theta_I(A)) \simeq \theta_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(\eta_I(X), A))$$

naturel en les objets X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ et A de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Démonstration. C'est une conséquence formelle de l'adjonction entre les foncteurs θ_I et η_I (proposition 7.14) et de la commutation du foncteur η_I au produit tensoriel (proposition 7.18). \square

Corollaire 9.13. *Il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\theta_I(B), \theta_I(A)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(B), \theta_I(A)) \simeq \theta_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(B, A))$$

naturel en les objets A et B de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$.

Démonstration. On combine les propositions 9.12 et 7.16. \square

Corollaire 9.14. *Il existe des isomorphismes*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\kappa_I(F), \kappa_I(G)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \kappa_I(G)) \simeq \kappa_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G))$$

naturels en les objets F et G de \mathcal{F} .

Démonstration. C'est le cas particulier $A = G \boxtimes \mathbb{k}$ et $B = F \boxtimes \mathbb{k}$ du corollaire précédent. \square

Remarque 9.15. Une approche alternative de ce corollaire consiste à traiter d'abord le cas où la partie I contient 0 à l'aide de la proposition 5.21, puis d'en déduire le cas général grâce à la proposition 9.7.

Nous traitons à présent de la commutation du foncteur ι_I aux foncteurs hom internes.

Proposition 9.16. *Il existe un isomorphisme naturel $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \iota_I(G)) \simeq \iota_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G))$ pour $F, G \in \text{Ob } \mathcal{F}$.*

Démonstration. Comme $\iota_I(F) = \mathcal{R}_{\mathbb{N}, I}(\iota(F))$, la proposition 9.3 permet de ne traiter que le cas où $I = \mathbb{N}$. La conclusion provient alors des assertions 2 et 4 de la proposition 5.9. \square

Il existe aussi une propriété de commutation relative au foncteur σ_I :

Proposition 9.17. *Il existe dans $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ un isomorphisme*

$$\sigma_I(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\xi_I(F), X)) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I}(F, \sigma_I(X))$$

naturel en les objets F de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}^I$ et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$.

Démonstration. Cette propriété s'obtient à partir de l'adjonction entre les foncteurs ξ_I et σ_I (proposition 5.19) et de la commutation du foncteur ξ_I au produit tensoriel. \square

La généralisation de la description très simple des foncteurs hom internes de la catégorie $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ (cf. [CR90], § 10 D) aux foncteurs pseudo-constants de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ est donnée par la proposition suivante, laissée au lecteur (cf. [Djab] pour les détails).

Proposition 9.18. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et M un $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module fini. Les endofoncteurs $\cdot \otimes \rho_n(M^*)$, $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, n}(\rho_n(M), \cdot)$ et $(\cdot : \rho_n(M))$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ sont naturellement isomorphes.*

On en déduit aussitôt la propriété de commutation suivante :

Corollaire 9.19. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et M un $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module fini. L'endofoncteur $\cdot \otimes \rho_n(M)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ commute naturellement aux foncteurs hom internes et aux foncteurs de division.*

Le foncteur $\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), \cdot)$ Commençons par introduire une nouvelle notation. Soit A un objet de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$; nous désignerons par $\tau_A : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur de précomposition par $\mathcal{E}^f \rightarrow \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \quad E \mapsto E \boxplus A$. Cette construction est fonctorielle en A .

Proposition 9.20. *Il existe un isomorphisme $\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)(A) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \tau_A(X))$ naturel en les objets F de \mathcal{F} , X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et A de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.*

Démonstration. Il existe des isomorphismes naturels $\tau_A \circ \iota \simeq \Delta_{\mathcal{D}(A)}$ et $\tau_A(P_A^{\mathcal{G}_r}) \simeq \mathbb{k}[\mathbf{End}_{\mathcal{G}_r}(A)] \otimes P_{\mathcal{R}(A)}$ (par la proposition 4.12). On en déduit une transformation naturelle $F \rightarrow \tau_A(\iota(F) \otimes P_A^{\mathcal{G}_r}) \simeq \Delta_{\mathcal{D}(A)}(F) \otimes \mathbb{k}[\mathbf{End}_{\mathcal{G}_r}(A)] \otimes P_{\mathcal{R}(A)}$ par produit tensoriel des injections canoniques $F \hookrightarrow \Delta_{\mathcal{D}(A)}(F)$, $\mathbb{k} \hookrightarrow P_{\mathcal{R}(A)}$ et $\mathbb{k} \hookrightarrow \mathbb{k}[\mathbf{End}_{\mathcal{G}_r}(A)]$ (donnée par $[id_A]$).

L'application naturelle $\mathbf{hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F) \otimes P_A^{\mathcal{G}_r}, X) \rightarrow \mathbf{hom}_{\mathcal{F}}(F, \tau_A(X))$ qu'on en déduit est bijective. En effet, il suffit de le voir pour F projectif standard de \mathcal{F} , auquel cas c'est une conséquence de la proposition 5.38. Cet isomorphisme s'étend, grâce à la proposition A.1, en un isomorphisme naturel gradué $\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F) \otimes P_A^{\mathcal{G}_r}, X) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \tau_A(X))$. La conclusion provient alors de l'isomorphisme naturel (10) de l'appendice C. \square

Troisième partie

Propriétés du foncteur ω .

Applications

Le foncteur d'intégrale en grassmanniennes $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ possède un comportement qui diffère notablement de celui des autres foncteurs fondamentaux entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et \mathcal{F} ou $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_{surj}$. En particulier, il ne préserve pas les objets localement finis ; en fait, le foncteur $\omega(X)$ de \mathcal{F} n'est localement fini que si le foncteur X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ appartient à la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, 0} \simeq \mathcal{F}$ — cela résultera du théorème 10.10. Une autre façon d'illustrer ce phénomène consiste à étudier la composée $\Delta \circ \omega$: elle est « nettement plus grosse » que $\omega \circ \Delta$ — cf. § 11.1.

C'est dans ces observations que réside tout l'intérêt du foncteur ω , en vue de l'étude de la structure de la catégorie \mathcal{F} . Remarquons que les progrès significatifs obtenus à ce sujet par Powell dans [Pow98c] constituent essentiellement des

traductions de propriétés du foncteur $\varpi : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}$ (cf. § 2.3); il n'est pas étonnant que le foncteur ω , qui généralise ϖ , permette d'aller plus loin dans la compréhension de la catégorie \mathcal{F} .

L'une des avancées importantes obtenues grâce aux catégories de foncteurs en grassmanniennes réside en le théorème 10.10, qui constitue le résultat principal de cet article. Il donne une propriété d'annulation cohomologique très générale, qui trouve deux applications essentielles.

L'une d'entre elle, traitée dans le paragraphe 13.2, concerne le lien entre cohomologie du groupe linéaire $GL(\mathbb{k})$ (ou K -théorie stable de \mathbb{k}) et cohomologie fonctorielle. Le résultat obtenu, qui généralise le théorème de Betley-Suslin donné dans l'appendice de [FFSS99], fournit un isomorphisme entre la cohomologie de $GL(\mathbb{k})$ à coefficients convenables et des groupes d'extensions dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{k})$ entre des objets finis, nettement plus faciles d'accès.

Les calculs cohomologiques dans la catégorie $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ donnés par le théorème 10.10 possèdent également un intérêt intrinsèque. Ainsi, ce théorème suggère une conjecture décrivant la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F} , qui renforce toutes les formes antérieurement formulées de la conjecture artinienne; il est l'un des outils fondamentaux de la démonstration des formes partielles que nous en établirons dans [Djaa]. Nous discutons ces questions dans la section 12.

L'application du théorème 10.10 exposée dans la section 11 traite de propriétés de commutation entre le foncteur ω et des foncteurs hom internes. Son intérêt est illustré par [Dja06], comme il est discuté à la fin du § 11.2.

10 Théorème d'annulation cohomologique

L'objectif de cette section consiste à établir le théorème 10.10 et le corollaire 10.11 qui s'en déduit. Leur démonstration repose sur des considérations explicites liées à la catégorie \mathcal{F}_{surj} et des arguments d'adjonction. On emploie également une catégorie de foncteurs auxiliaire, variante de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ obtenue en considérant deux éléments de la grassmannienne d'un espace vectoriel. Hormis l'utilisation de ce nouveau type de catégories, notre démarche procède des mêmes idées conceptuelles que celles inaugurées par Pirashvili (cf. remarque 10.12.1).

10.1 Préliminaires

On rappelle que $o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{surj}$ désigne le foncteur d'oubli (cf. section 2) et que le foncteur $\mathbb{k}^{\geq i}$ est défini dans la notation 2.33 (page 21).

Les résultats de cette section reposent sur la structure du foncteur constant $\mathbb{k} = I_0^{surj}$ de \mathcal{F}_{surj} donnée par le corollaire 2.34. On rappelle que ce foncteur est *unisériel*.

Lemme 10.1. *Il existe dans \mathcal{F}_{surj} un monomorphisme $\mathbb{k}^{\geq 1} \hookrightarrow o(\bar{I}_{\mathbb{k}})$, unique à homothétie près.*

Démonstration. Par l'assertion 3 de la proposition 2.36, il existe dans \mathcal{F}_{surj} un

diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} o(I_0) & \xrightarrow{\simeq} & I_0^{surj} \\ \downarrow & & \downarrow \\ o(I_{\mathbb{k}}) & \xrightarrow{\simeq} & I_0^{surj} \oplus I_{\mathbb{k}}^{surj} \end{array}$$

On en déduit un isomorphisme entre $o(\bar{I}_{\mathbb{k}})$ et $I_{\mathbb{k}}^{surj}$.

Par conséquent, $\text{hom}(\mathbb{k}^{\geq 1}, o(\bar{I}_{\mathbb{k}})) \simeq \mathbb{k}^{\geq 1}(\mathbb{k})^* = \mathbb{k}$. Le morphisme correspondant à 1 est injectif, car sa restriction au socle de $\mathbb{k}^{\geq 1}$, l'objet simple S_1^{surj} (cf. corollaire 2.34), est non nulle, l'inclusion $S_1^{surj} \hookrightarrow \mathbb{k}^{\geq 1}$ induisant un isomorphisme par évaluation sur \mathbb{k} . Cela démontre le lemme. \square

Remarque 10.2. Le foncteur $\mathbb{k}^{\geq 1}$ est *idempotent* pour le produit tensoriel : $(\mathbb{k}^{\geq 1})^{\otimes 2} \simeq \mathbb{k}^{\geq 1}$. Il induit donc un endofoncteur idempotent $\cdot \otimes \mathbb{k}^{\geq 1}$ de \mathcal{F}_{surj} .

Avant d'exploiter le lemme 10.1, nous aurons besoin d'introduire des catégories de foncteurs auxiliaires (qui n'interviendront que dans ce paragraphe).

Notation 10.3. 1. Nous désignerons par $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$ la catégorie $(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f)_{\setminus \mathcal{G}_r}$, où l'on note encore \mathcal{G}_r , par abus de notation, le foncteur composé

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathcal{E}^f \xrightarrow{\mathcal{G}_r} \mathbf{Ens},$$

qui est donc donné sur les objets par $(V, W) \mapsto \mathcal{G}_r(V)$.

Autrement dit, les objets de $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$ sont les triplets (V, B, W) formés d'un espace vectoriel de dimension finie V et de deux sous-espaces B et W de V , et les flèches $(V, B, W) \rightarrow (V', B', W')$ de $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$ sont les applications linéaires $f : V \rightarrow V'$ telles que $f(B) = B'$ et $f(W) = W'$.

La catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f, \mathcal{E})$ sera notée $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$.

2. Nous désignerons par $\mathcal{E}_{2-\mathcal{D}_r}^f$ la catégorie $(\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f)_{\setminus \mathcal{G}_r'}$, où l'on désigne par \mathcal{G}_r' le foncteur

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{B}} \mathcal{E}^f \xrightarrow{\mathcal{G}_r} \mathbf{Ens},$$

qui est donc donné sur les objets par $(V, W) \mapsto \mathcal{G}_r(W)$.

La catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{E}_{2-\mathcal{D}_r}^f, \mathcal{E})$ sera notée $\mathcal{F}_{2-\mathcal{D}_r}$.

3. L'inclusion naturelle de foncteurs ensemblistes $\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ identifie $\mathcal{E}_{2-\mathcal{D}_r}^f$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$. Nous noterons $i_{\mathcal{D}_r} : \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{2-\mathcal{D}_r}$ le foncteur de précomposition par l'inclusion.

Remarque 10.4. L'indice $2 - \mathcal{D}_r$ utilisé est une abréviation de *2-drapeau*. On pourrait naturellement généraliser les considérations de ce paragraphe à des catégories correspondant aux espaces vectoriels munis de drapeaux de longueur fixée arbitraire.

On dispose, conformément aux résultats de la section 3, d'un foncteur de plongement $\Upsilon_{\mathcal{G}_r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ et d'un foncteur d'intégrale $\Omega_{\mathcal{G}_r} : \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Sur les objets, on a $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}(X)(V, B, W) = X(V, B)$ et $\Omega_{\mathcal{G}_r}(A)(V, B) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} A(V, B, W)$.

Définition 10.5. Nous noterons \mathcal{N} la sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ noyau du foncteur exact $i_{\mathcal{D}_r}$. Explicitement, \mathcal{N} contient les objets X de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ tels que $X(V, B, W) = 0$ pour tout objet (V, B, W) de $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$ tel que $W \subset B$.

- Remarque 10.6.* 1. La catégorie $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{E}_{\setminus(\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_r)}^f$: c'est la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie munie de deux sous-espaces. Nous avons préféré donner la présentation ci-dessus « dessymétrisant les deux bases » de manière à introduire plus naturellement les foncteurs $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}$, $\Omega_{\mathcal{G}_r}$ et $i_{\mathcal{D}_r}$.
2. La catégorie $\mathcal{F}_{2-\mathcal{D}_r}$ n'interviendra pas en elle-même, c'est la sous-catégorie \mathcal{N} de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ qui nous intéressera.

Le lemme suivant donne les faits concrets dont nous aurons besoin pour établir nos résultats d'annulation cohomologique.

- Lemme 10.7.** 1. Il existe un foncteur $\beta : \mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}_{surj}^f$ tel que $\beta(V, B, W) = W/(W \cap B)$ pour tout objet (V, B, W) de $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f$.
2. Il existe dans $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ un épimorphisme du foncteur constant \mathbb{k} vers le foncteur $\beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1})$, où $\beta^* : \mathcal{F}_{surj} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ désigne le foncteur de précomposition par β ; \mathcal{N} est la sous-catégorie pleine des objets X de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ tels que la projection canonique $X \twoheadrightarrow X \otimes \beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1})$ qui s'en déduit est un isomorphisme. En particulier, \mathcal{N} est un idéal de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$: le produit tensoriel d'un objet de \mathcal{N} et d'un objet de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ appartient à \mathcal{N} .
3. Le foncteur $\beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1})$ se plonge dans $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}(\kappa(\bar{I}_{\mathbb{k}}))$.

Démonstration. La vérification du premier point est immédiate. Le second point vient de ce que la projection $\mathbb{k} \twoheadrightarrow \mathbb{k}^{\geq 1}$ de \mathcal{F}_{surj} (cf. lemme 2.34) induit un épimorphisme $\mathbb{k} = \beta^*(\mathbb{k}) \twoheadrightarrow \beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1})$ dans $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ dont l'image est nulle sur l'objet (V, B, W) si et seulement si $\beta(V, B, W)$ est nul, i.e. si $W \subset B$.

On remarque ensuite que le foncteur composé $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}_{surj}^f \hookrightarrow \mathcal{E}^f$ se plonge dans le foncteur $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_r}^f}} \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f \xrightarrow{\mathfrak{R}} \mathcal{E}^f$ (on rappelle que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, \mathcal{G}_r}^f}$ désigne le foncteur $(V, B, W) \mapsto (V, B) -$ cf. notation 3.4), via l'inclusion canonique $\beta(V, B, W) = W/(W \cap B) \hookrightarrow V/B = \mathfrak{R}(V, B)$. Comme les foncteurs de \mathcal{F} préservent les monomorphismes, on en déduit que le foncteur de précomposition $\beta^* \circ o : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ s'injecte dans $\Upsilon_{\mathcal{G}_r} \circ \kappa : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$. Le lemme 10.1 fournit alors un monomorphisme $\beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1}) \hookrightarrow \beta^*(o(\bar{I}_{\mathbb{k}})) \hookrightarrow \Upsilon_{\mathcal{G}_r}(\kappa(\bar{I}_{\mathbb{k}}))$, ce qui achève la démonstration. \square

Résultats d'annulation cohomologique « abstraits » La première propriété d'annulation cohomologique de cette section, dont toutes les autres se déduiront formellement, s'obtient à l'aide du lemme précédent et du résultat formel donné par le corollaire A.2.

Lemme 10.8. Soient A un foncteur analytique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et X un objet de \mathcal{N} . Le groupe d'extensions $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^i(A, \Omega_{\mathcal{G}_r}(X))$ est nul pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Un argument de colimite filtrante (cf. [Jen72], th. 4.2) permet de se ramener au cas où A est *polynomial* : il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\Delta^d A = 0$.

Notons F l'endofoncteur $\cdot \otimes \kappa(\bar{I}_{\mathbb{k}})$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, $G = \Delta^{\mathcal{G}_r}$, $H : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ la restriction à \mathcal{N} de $\Omega_{\mathcal{G}_r}$, et K l'endofoncteur de \mathcal{N} induit par $\cdot \otimes \Upsilon_{\mathcal{G}_r}(\kappa(\bar{I}_{\mathbb{k}}))$ (on utilise que \mathcal{N} est un idéal de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$). Alors :

1. tous ces foncteurs sont exacts;
2. G est adjoint à gauche à F par le corollaire 5.39;
3. la proposition 3.10 fournit un isomorphisme $F \circ H \simeq H \circ K$;

4. grâce au lemme 10.7, il existe un monomorphisme $id_{\mathcal{N}} \hookrightarrow K$.

Le corollaire A.2 donne alors la conclusion. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe.

On rappelle que Is_0 est une autre écriture pour S_0^{surj} (cf. notation 2.5).

Proposition 10.9. *Soient X un foncteur analytique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et A un objet (quelconque) de $\mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$. Le morphisme gradué naturel $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \Omega_{\mathcal{G}_r}(A \otimes \beta^*(\text{Is}_0))) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \Omega_{\mathcal{G}_r}(A))$ induit par le monomorphisme canonique $A \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \hookrightarrow A$ fourni par $\text{Is}_0 \hookrightarrow \mathbb{k}$ (cf. lemme 2.34) est un isomorphisme.*

Démonstration. On écrit la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \rightarrow A \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \rightarrow A \rightarrow A \otimes \beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1}) \rightarrow 0$ et l'on applique le lemme précédent à l'objet $A \otimes \beta^*(\mathbb{k}^{\geq 1})$ de \mathcal{N} (cf. lemme 10.7). \square

10.2 Résultats fondamentaux

Rappelons que le foncteur $\mathfrak{J} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$, l'endofoncteur \mathcal{I} de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et la transformation naturelle $j^\omega : \mathcal{I} \rightarrow \omega$ ont été définis au paragraphe 6.1.

Théorème 10.10. *Soient X un objet analytique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et Y un objet quelconque de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Le morphisme gradué naturel $(j_Y^\omega)_* : \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \mathcal{I}(Y)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \omega(Y))$ induit par $j_Y^\omega : \mathcal{I}(Y) \rightarrow \omega(Y)$ est un isomorphisme.*

En particulier, les adjonctions des propositions 5.9 et 6.4 fournissent des isomorphismes gradués naturels

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \omega(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \mathcal{I}(Y)) \simeq \text{Ext}_{\tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}}^*(\mathfrak{J}(X), \mathfrak{J}(Y)).$$

Démonstration. Notons $\Upsilon'_{\mathcal{G}_r} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}_{bi-\mathcal{G}_r}$ la composée de $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}$ et du foncteur de précomposition par l'endofoncteur $\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f \ll \text{échangeant les deux bases} \gg$, i.e. donné par $(V, B, W) \rightarrow (V, W, B)$ sur les objets et sur les morphismes par l'égalité

$$\text{hom}_{\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f}((V, B, W), (V', B', W')) = \text{hom}_{\mathcal{E}_{bi-\mathcal{G}_r}^f}((V, W, B), (V', W', B')).$$

Autrement dit, on a $\Upsilon'_{\mathcal{G}_r}(X)(V, B, W) = X(V, W)$ (tandis que $\Upsilon_{\mathcal{G}_r}(X)(V, B, W) = X(V, B)$).

Alors les endofoncteurs $\Omega_{\mathcal{G}_r} \Upsilon'_{\mathcal{G}_r}$ et ω de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ coïncident, car il existe des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{G}_r} \Upsilon'_{\mathcal{G}_r}(X)(V, B) &\simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} \Upsilon'_{\mathcal{G}_r}(X)(V, B, W) \\ &\simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} X(V, W) \simeq \omega(X)(V) \simeq \omega(X)(V, B). \end{aligned}$$

De plus, il existe un isomorphisme $\mathcal{I}(Y) \simeq \Omega_{\mathcal{G}_r} \Upsilon'_{\mathcal{G}_r}(Y \otimes \beta^*(\text{Is}_0))$ naturel en Y , par lequel j_Y^ω s'identifie à la transformation naturelle induite par $Y \otimes \beta^*(\text{Is}_0) \hookrightarrow Y$. Ainsi, $(j_Y^\omega)_* : \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \mathcal{I}(Y)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \omega(Y))$ est un isomorphisme, par la proposition 10.9.

Les autres flèches considérées sont des isomorphismes pour des raisons formelles (corollaire A.1). \square

En utilisant l'adjonction entre foncteurs de restriction et de prolongement par zéro, on en déduit un résultat analogue dans les catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}$. Ce même principe est mis en œuvre dans le corollaire suivant.

Corollaire 10.11. *Soient k et n deux entiers naturels, X un objet analytique de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$ et Y un objet quelconque de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$.*

1. *Si $k < n$, alors $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_k(X), \omega_n(Y)) = 0$.*
2. *Si $k = n$, alors le morphisme naturel $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, n}^*(X, Y) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_n(X), \omega_n(Y))$ induit par ω_n est un isomorphisme.*

On rappelle que les foncteurs de restriction \mathcal{R} et de prolongement par zéro \mathcal{P} qui interviennent dans la démonstration ci-dessous ont été définis dans la notation 5.3.

Démonstration. Comme $\omega_k(X) \simeq \omega_{\mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}}(X)$, le théorème 10.10 fournit un isomorphisme naturel gradué entre $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega_k(X), \omega_n(Y))$ et $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}(X), \mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(Y))$. On remarque que $\mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(Y)$ appartient à l'image de la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \geq n}$ dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ par le foncteur de prolongement par zéro. Comme $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, \geq n}^f$ est une sous-catégorie complète à gauche de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$, la proposition C.25 (et le corollaire A.1) montrent que ce groupe d'extensions est canoniquement isomorphe à

$$\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, \geq n}^*(\mathcal{R}_{\mathbb{N}, \geq n}\mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}(X), \mathcal{R}_{\mathbb{N}, \geq n}\mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(Y)).$$

Si $k < n$, $\mathcal{R}_{\mathbb{N}, \geq n}\mathcal{P}_{k, \mathbb{N}}(X)$ est nul, ce qui établit la première assertion. Si $k = n$, cet objet s'identifie à $\mathcal{P}_{n, \geq n}(X)$. Puisque $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ est une sous-catégorie complète à droite de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r, \geq n}^f$, la proposition C.25 montre cette fois que ce groupe d'extensions est canoniquement isomorphe à $\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, n}^*(X, \mathcal{R}_{\mathbb{N}, n}\mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(Y))$. On conclut en constatant que le morphisme naturel $Y \rightarrow \mathcal{R}_{\mathbb{N}, n}\mathcal{I}\mathcal{P}_{n, \mathbb{N}}(Y)$ est un isomorphisme. \square

Remarque 10.12. 1. Les premiers résultats d'annulation cohomologique dans des catégories de foncteurs remontent à Pirashvili. Ainsi, le lemme 0.4 de [FLS94] (dû à Pirashvili) s'est avéré l'un des premiers outils efficaces pour simplifier des calculs de groupes d'extensions dans \mathcal{F} .

2. Le cas $k = 0$ du corollaire 10.11 constitue une généralisation du résultat (énoncé d'ordinaire dans sa variante duale) dû à Franjou selon lequel $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \bar{P}) = 0$ si F est un foncteur fini de \mathcal{F} (cf. [Pow98a], appendice, pour une démonstration due à Schwartz). Les lemmes techniques de [Pow98a] illustrent l'intérêt de ce genre de résultat cohomologique pour aborder la conjecture artinienne.

Gaudens et Schwartz ont établi dans [GS05] une généralisation du résultat de Franjou que le théorème 10.10 recoupe partiellement.

11 Foncteur ω et foncteurs hom internes

Le foncteur ω étant adjoint à gauche à ι , on dispose pour des raisons formelles de propriétés de compatibilité entre les foncteurs de division et ω — cf. proposition 9.8. En revanche, l'adjoint à gauche à ω ne se décrivant pas aisément, il est plus délicat d'étudier le comportement mutuel des foncteurs hom internes et ω . Nous utiliserons les foncteurs de décalage, qui sont à la fois des foncteurs hom internes et des foncteurs de division (dans $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ comme dans \mathcal{F}), pour contourner cette difficulté.

11.1 Scindement de $\Delta_V \circ \omega$

Par les propositions 9.8 et 5.16, il existe des isomorphismes naturels

$$\Delta_V \omega(X) \simeq (\omega(X) : \iota(I_V)) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} \omega(X : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}), \quad (9)$$

où l'on a utilisé l'identification de Δ_V à $(\cdot : I_V)$ (proposition 1.3); la proposition 9.10 décrit explicitement ce scindement, qui sous-tend nombre d'aspects de la structure des catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et \mathcal{F} (cf. [Djab] et [Djaa]).

Précisons l'effet des foncteurs de division $(\cdot : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r})$ qui apparaissent relativement au niveau et aux coniveau (notions introduites dans la définition 5.63). On remarque que $\text{niv}(X : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r}) \leq \text{niv}(X)$, mais les foncteurs $(\cdot : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r})$ abaissent en général le coniveau. La proposition suivante, que l'on utilisera au paragraphe suivant, décrit la restriction à $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r,0} \simeq \mathcal{F}$ de $(X : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r})$. Elle fait usage des foncteurs τ_A introduits en fin de section 9 et résulte de la proposition 9.10.

Proposition 11.1. *Il existe dans \mathcal{F} un isomorphisme naturel $\mathcal{R}_{\mathbb{N},0}(X : I_A^{\mathcal{G}_r}) \simeq \tau_A(X)$ pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et $A \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$.*

Signalons enfin que, pour élémentaire qu'il soit, le scindement (9) jouera un rôle essentiel dans les arguments de [Djaa].

11.2 Le morphisme $h_{X,F}^* : \omega(\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(X))$

Nous donnons d'abord la définition et quelques propriétés générales d'un morphisme gradué $h_{X,F}^*$ naturel en un objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et F de \mathcal{F} . Notre objectif principal est d'établir que $h_{X,F}^*$ est un isomorphisme lorsque F est localement fini.

Définition 11.2. Soit $h_{X,F}^0 : \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X))$ le morphisme naturel en les objets F de \mathcal{F} et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ adjoint à

$$\omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X)) \otimes F \xrightarrow{\simeq} \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), X) \otimes \iota(F)) \xrightarrow{\omega(u_{F,X})} \omega(X),$$

où la première flèche est l'isomorphisme de la dernière assertion de la proposition 5.9 et $u_{F,X}$ la coïunité de l'adjonction.

Comme le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), \cdot)$ est exact lorsque F est un objet projectif de \mathcal{F} (par la proposition 5.38) et que le foncteur ω est exact, ce morphisme naturel s'étend en un morphisme naturel gradué

$$h_{X,F}^* : \omega(\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(X)).$$

Notation 11.3. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. Dans ce paragraphe, nous noterons π_V l'épimorphisme canonique $\iota(I_V) \twoheadrightarrow \kappa(I_V)$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Remarque 11.4. L'épimorphisme π_V peut se lire comme la projection canonique

$$\iota(I_V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r} \twoheadrightarrow I_{(V,0)}^{\mathcal{G}_r} \simeq \kappa(I_V)$$

(cf. propositions 5.16 et 5.14); il est donc *scindé*.

Lemme 11.5. *Pour tous objets V de \mathcal{E}^f et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P_V), X)) & \xrightarrow{\simeq} & \omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X) & \xrightarrow{\simeq} & \omega(X : \kappa(I_V)) \\ h_{X, P_V}^0 \downarrow & & & & \downarrow \omega(X : \pi_V) \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) & \xrightarrow{\simeq} & \Delta_V \omega(X) & \xrightarrow{\simeq} & (\omega(X) : I_V) \xrightarrow{\simeq} \omega(X : \iota(I_V)) \end{array}$$

commute, où :

- les flèches supérieures sont les isomorphismes fournis par la proposition 5.38 ;
- les flèches inférieures sont les isomorphismes fournis par les propositions 1.3 et 9.8.

Démonstration. Le morphisme

$$\omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X) \simeq \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P_V), X)) \xrightarrow{h_{X, P_V}^0} \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) \simeq \Delta_V \omega(X)$$

est l'adjoint du morphisme $P_V \otimes \omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X) \rightarrow \omega(X)$ donné, sur l'espace vectoriel A , par $[f] \otimes a \mapsto X(i_f)(a)$ pour $f \in \text{hom}_{\mathcal{E}}(V, A)$, $B \in \mathcal{G}r(A)$ et $a \in X(A, B)$, où l'on désigne par $i_f : (V \oplus A, B) \rightarrow (A, B)$ le morphisme de composante f sur V et id_A sur A .

Par conséquent, la flèche

$$\omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X) \simeq \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P_V), X)) \xrightarrow{h_{X, P_V}^0} \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P_V, \omega(X)) \simeq \Delta_V \omega(X)$$

est donnée sur l'espace A par l'inclusion

$$\omega(\Delta_V^{\mathcal{G}r} X)(A) = \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(A)} X(V \oplus A, B) \hookrightarrow \bigoplus_{B \in \mathcal{G}r(V \oplus A)} X(V \oplus A, B) = \Delta_V \omega(X)(A).$$

La conclusion s'obtient alors par la proposition 9.10. \square

Proposition 11.6. *Pour tous objets F de \mathcal{F} et X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, le morphisme $h_{X, F}^0$ est injectif.*

Démonstration. Le lemme 11.5 montre l'assertion lorsque F est un projectif standard P_V . On en déduit (par commutation de ω aux limites et de ι aux colimites) que $h_{X, P}^0$ est également injectif lorsque P est une somme directe de projectifs standard. Le cas général s'en déduit en considérant un épimorphisme p d'un tel projectif P sur F et en considérant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(F), X)) & \xrightarrow{p^*} & \omega(\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(P), X)) \\ h_{X, F}^0 \downarrow & & \downarrow h_{X, P}^0 \\ \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X)) & \xrightarrow{p^*} & \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(P, \omega(X)). \end{array}$$

\square

Remarque 11.7. Il existe même un endofoncteur T_F de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r}$, un isomorphisme naturel $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega(X)) \simeq \omega(T_F(X))$ et une transformation naturelle injective $j_F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}r}(\iota(F), \cdot) \hookrightarrow T_F$ telle que $h_{X, F}^0$ s'identifie à $\omega(j_F)$. On le voit par un argument analogue, en considérant une présentation de F par des sommes directes de projectifs standard. Ce qui suit précise ces considérations.

Description explicite du morphisme $h_{X,F}^*$ Soit $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$. On a d'une part

$$\omega(\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X))(V) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} \mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)(V, W) \simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \tau_{(V,W)}(X))$$

par la proposition 9.20.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(X))(V) &\simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F \otimes P_V, \omega(X)) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \Delta_V \omega(X)) \\ &\simeq \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(X : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r})) \end{aligned}$$

grâce à l'isomorphisme (9) et à la proposition C.16.

Proposition 11.8. *Via les isomorphismes précédents et la proposition 9.10, le morphisme $h_{X,F}^*$ est induit par l'inclusion naturelle*

$$\tau_{(V,W)}(X)(E) = X(E \oplus V, W) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{A \in \mathcal{G}_r(W) \\ B \in \mathcal{G}_r(E,A)}} X(E \oplus V, B) = \omega(X : I_{(V,W)}^{\mathcal{G}_r})(E).$$

Démonstration. Par naturalité, il suffit de vérifier cette identification lorsque F est un projectif standard de \mathcal{F} , auquel cas elle résulte du lemme 11.5. \square

Les préliminaires précédents nous permettent, à l'aide du théorème fondamental de la section précédente, d'établir le résultat principal de cette section.

Proposition 11.9. *Si F est un objet localement fini de \mathcal{F} , le morphisme naturel gradué*

$$h_{X,F}^* : \omega(\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(F), X)) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(X))$$

est un isomorphisme pour tout objet X de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Démonstration. Notons $i_E^X(V, W)$ l'inclusion naturelle de la proposition 11.8 : l'énoncé équivaut à l'annulation des groupes d'extensions $\mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega(\text{coker } i_E^X))$ pour tout $E \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$. La proposition 11.1 montre que l'image par le foncteur de restriction $\mathcal{R}_{\mathbb{N},0}$ du foncteur $\text{coker } i_E^X$ de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ est nulle. Le théorème 10.10 (ou son corollaire 10.11) donne alors la conclusion. \square

Dans les conséquences qui suivent, nous nous contentons du cas du degré 0 (i.e. des foncteurs hom internes), le plus significatif.

Corollaire 11.10. *Soient F un objet localement fini de \mathcal{F} , n et k des entiers naturels et I une partie de \mathbb{N} du type $\leq n$ ou n . Les foncteurs $\omega_I \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \cdot)$ et $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \cdot) \circ \omega_I$ de \mathcal{F} vers $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, I}$ sont isomorphes.*

Démonstration. Par la proposition 11.9, il existe un morphisme

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \cdot) \circ \omega_I \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \cdot) \circ \omega \circ \mathcal{P}_{I, \mathbb{N}} \simeq \omega \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), \cdot) \circ \mathcal{P}_{I, \mathbb{N}}.$$

Le corollaire s'en déduit parce que $\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(F), \cdot) \circ \mathcal{P}_{I, \mathbb{N}} \simeq \mathcal{P}_{I, \mathbb{N}} \circ \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}_r, I}(\iota_I(F), \cdot)$, par la proposition 9.3. \square

Nous terminons cette section en donnant un corollaire des résultats précédents qui décrit notamment l'image par un foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \cdot)$ (où $F \in \mathcal{F}_\omega$) d'un $\tilde{G}(n)$ -comodule simple (cf. propositions 5.9 et 5.69).

Corollaire 11.11. *Soient n et k des entiers naturels, F un objet localement fini de \mathcal{F} , G un objet de \mathcal{F} et M un $\mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})]$ -module fini. Il existe dans \mathcal{F} un isomorphisme naturel*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \omega_n(\kappa_n(G) \otimes \rho_n(M))) \simeq \omega_n(\kappa_n(\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, G)) \otimes \rho_n(M)).$$

Démonstration. Ce résultat s'obtient en combinant les corollaires 9.14, 9.19 et 11.10. \square

Retour sur la méthode de [Dja06] L'article [Dja06] étudie, dans le cas $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$, la structure de foncteurs de type fini³ de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ (précisément, le produit tensoriel entre le projectif $P_{\mathbb{F}_2, 2}$ et une puissance extérieure) par un argument de récurrence utilisant le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^1, \cdot)$, où Λ^1 désigne le foncteur d'inclusion $\mathcal{E}^f \hookrightarrow \mathcal{E}$.

Le corollaire 11.11 montre, en particulier, que les $\bar{G}(n)$ -comodules finis sont nilpotents pour le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^1, \cdot)$ (cf. proposition 12.16 ci-après). Cet énoncé sous-tend toute la démarche de [Dja06]; cependant, sans le formalisme des catégories de foncteurs en grassmanniennes, il est malaisé d'en donner une forme et une démonstration générales. La proposition 5.29 de [Dja06], qui fournit une estimation de l'image par le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)}(\Lambda^1, \cdot)$ des foncteurs étudiés dans l'article en question, sert de succédané élémentaire au corollaire 11.11. Dans le dernier chapitre de [Djab], nous étendons la méthode de [Dja06] en employant le corollaire 11.11 de façon beaucoup plus générale.

12 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}

La conjecture que nous introduisons dans ce paragraphe, appelée *conjecture artinienne extrêmement forte* (elle implique la conjecture artinienne très forte 2.53), affirme que la restriction aux objets localement finis du foncteur d'intégrale en grassmanniennes $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ envoie la filtration de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}^{lf}$ donnée par les sous-catégories $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, \leq n}^{lf}$ dans la filtration de Krull de \mathcal{F} , et induit une équivalence entre les quotients associés. Après des préliminaires présentés dans le paragraphe 12.1, nous exposons les différentes formes de la conjecture artinienne extrêmement forte et les cas particuliers qu'on peut en établir (§ 12.2) puis en examinons des conséquences importantes (§ 12.3).

12.1 Foncteurs oméga-adaptés

Nous nous intéresserons à la propriété suivante d'une sous-catégorie pleine \mathcal{A} de \mathcal{F} :

Hypothèse 12.1. Pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de \mathcal{F} , si deux des objets A, B, C appartiennent à \mathcal{A} , il en est de même du troisième.

Conjecturalement, les foncteurs oméga-adaptés de hauteur au plus n introduits ci-après sont exactement les foncteurs noethériens de type n de \mathcal{F} . L'étude de ceux-là se ramène essentiellement à celle d'objets *finis* de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, ce qui les rend assez facilement maniables.

³En fait, cet article travaille sur les objets duaux, de co-type fini. Nous avons traduit, pour la cohérence de l'exposition, ses énoncés en termes de foncteurs de type fini.

Définition 12.2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous noterons $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ la plus petite sous-catégorie pleine de \mathcal{F} vérifiant 12.1 et contenant l'image de la restriction à la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq n}^f$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq n}$ du foncteur $\omega_{\leq n} : \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq n} \rightarrow \mathcal{F}$.

Nous dirons que F est *oméga-adapté de hauteur au plus n* s'il est objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$.

Proposition 12.3. 1. Le produit tensoriel d'un objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ et d'un objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(m)}$ est un objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n+m)}$.

2. Les sous-catégories $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ sont stables par le foncteur différence de \mathcal{F} .

3. Tout foncteur oméga-adapté est pf_∞ .

Démonstration. Si X est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq k}$, alors le produit tensoriel de $\omega_{\leq k}(X)$ et d'un objet oméga-adapté de hauteur au plus n est oméga-adapté de hauteur au plus $n+k$. En effet, la sous-catégorie pleine des objets de \mathcal{F} dont le produit tensoriel par $\omega_{\leq k}(X)$ est oméga-adapté de hauteur au plus $n+k$ contient les $\omega_{\leq n}(A)$, pour $A \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq n}^f$, par la proposition 5.34, et vérifie l'hypothèse 12.1. On démontre ensuite par le même raisonnement l'assertion 1.

La proposition 5.16 montre, par exactitude de ω , que ω transforme un objet pf_∞ , donc en particulier un objet fini (cf. corollaire 5.67), en un objet pf_∞ . Comme la sous-catégorie pleine des objets pf_∞ de \mathcal{F} vérifie l'hypothèse 12.1, par la proposition B.7, on en déduit l'assertion 3.

Pour l'assertion 2, on considère la sous-catégorie pleine \mathcal{C}_n des objets F de \mathcal{F} tels que ΔF appartient à $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$. Les propositions 9.8 et 9.10 montrent que \mathcal{C}_n contient $\omega_{\leq n}(X)$ pour $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \leq n}^f$. D'autre part, l'exactitude du foncteur différence montre que \mathcal{C}_n vérifie l'hypothèse 12.1, ce qui achève la démonstration. \square

Exemple 12.4. Les projectifs standard $P_V = \omega(P_{(V,V)}^{\mathcal{G}r}) = \omega(\rho(P_V^{\text{surj}}))$ de \mathcal{F} sont oméga-adaptés, de hauteur $\dim V$ (le fait que cette hauteur n'est pas strictement inférieure à $\dim V$ n'est pas tout à fait immédiat ; il découlera des considérations de [Djaa]).

Nous utiliserons, dans cette section, le théorème 10.10 par l'intermédiaire du résultat d'annulation cohomologique suivant.

Proposition 12.5. Soient $n \in \mathbb{N}$, X un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}r, \geq n}$ et F un objet de $\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$. On a $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega_{\geq n}(X)) = 0$.

Démonstration. Cette propriété s'obtient à partir du corollaire 10.11 et de l'observation que la sous-catégorie pleine de \mathcal{F} formée des objets F tels que $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, \omega_{\geq n}(X)) = 0$ vérifie l'hypothèse 12.1. \square

12.2 La conjecture artinienne extrêmement forte

Nous introduisons la conjecture artinienne extrêmement forte sous une forme globale utilisant la notion de foncteur oméga-adapté.

Conjecture 12.6 (Conjecture artinienne extrêmement forte). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un quotient d'un foncteur oméga-adapté de hauteur au plus n est oméga-adapté de hauteur au plus n .

Remarque 12.7. Cet énoncé implique déjà la conjecture artinienne sous sa forme minimale en raison de l'assertion 3 de la proposition 12.3.

La proposition suivante lie la conjecture artinienne extrêmement forte à la filtration de Krull de \mathcal{F} .

Proposition 12.8. *Supposons la conjecture 12.6 vérifiée.*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ de \mathcal{F} est épaisse. Elle est égale à la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}$ des objets noethériens de type n de \mathcal{F} .*
2. *De plus, le foncteur $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \rightarrow \mathcal{F}$ induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}/\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$.*
3. *Désignons par $\overline{\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}}$ la plus petite sous-catégorie épaisse de \mathcal{F} stable par colimites contenant $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$. C'est aussi la catégorie des foncteurs qui sont colimite de leurs sous-foncteurs noethériens de type n . Alors la filtration de Krull de \mathcal{F} est donnée par $\mathcal{K}_n(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}}$, et le foncteur ω_n induit une équivalence de catégories entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^{lf}$ et $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$.*

Démonstration. Les sous-catégories $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ de \mathcal{F} sont par hypothèse stables par quotients et elles vérifient 12.1, elles sont donc épaisses. La description de $\overline{\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}}$ comme sous-catégorie pleine des objets colimite de leurs sous-objets oméga-adaptés de hauteur au plus n vient de ce que les foncteurs oméga-adaptés sont de présentation finie (assertion 3 de la proposition 12.3) et de la proposition B.12.

On note ensuite que $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ est l'image réciproque par le foncteur canonique $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ de l'image, notée \mathcal{C}_n , du foncteur $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ induit par ω_n . En effet, la sous-catégorie des objets de \mathcal{F} dont l'image dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ appartient à \mathcal{C}_n vérifie 12.1 et contient bien les $\omega_i(X)$ pour $i \leq n$ et $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, i}^f$, donc elle contient $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$. Réciproquement, si F est un objet de \mathcal{F} isomorphe à $\omega_n(X)$ dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$, avec $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f$, la proposition 12.5 prouve⁴ qu'il existe dans \mathcal{F} un morphisme $F \rightarrow \omega_n(X)$ dont le noyau et le conoyau appartiennent à $\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$, ce qui entraîne que F appartient à $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$.

On établit les autres résultats par récurrence sur l'entier n . Ils sont clairs pour $n = 0$. On suppose donc $n > 0$ et la proposition vérifiée au rang $n - 1$.

Le foncteur ω_n induit une équivalence entre $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f$ et la sous-catégorie épaisse $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ de $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$, et aussi de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^{lf}$ vers la sous-catégorie épaisse $\overline{\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}}$ de $\overline{\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}}$. Cela montre en particulier, compte-tenu de l'hypothèse de récurrence, que ces images sont respectivement incluses dans $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}/\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$ et $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$.

Si X est un objet fini non nul de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$, avec $k > n$, alors $\omega_k(X)$ est limite de ses quotients appartenant à $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ et n'y appartient pas lui-même, par la proposition 12.5. On en déduit que son image dans $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)}$ est infinie, donc que $\omega_k(X)$ n'est pas noethérien de type n , puisque $\mathcal{F}^{\omega-ad(n-1)} = \mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n-1)}$ par l'hypothèse de récurrence. Cela entraîne qu'il n'y a pas, dans \mathcal{F} , d'objet noethérien de type n qui ne soit pas oméga-adapté de hauteur au plus n . On a donc $\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)} = \mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$.

Comme la catégorie \mathcal{F} est localement noethérienne, par la remarque 12.7, la proposition B.27 donne $\mathcal{K}_n(\mathcal{F}) = \overline{\mathcal{F}_{\mathbf{NT}(n)}} = \overline{\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}}$, d'où la proposition. \square

Les deux énoncés qui suivent constituent les versions « locales » de la conjecture artinienne extrêmement forte.

⁴Utiliser les résultats de base sur les catégories abéliennes quotients donnés dans [Gab62].

Conjecture 12.9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le foncteur exact $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n} \xrightarrow{\omega_n} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ induit un isomorphisme $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}) \xrightarrow{\cong} G_0^f(\mathcal{F}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F}))$ qui préserve les classes des objets simples.

Conjecture 12.10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout objet simple S de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$, le foncteur $\omega_n(S)$ de \mathcal{F} est simple noethérien de type n . De plus, un foncteur de \mathcal{F} est simple noethérien de type n si et seulement s'il est isomorphe à un quotient non nul d'un tel objet.

La proposition 12.8 fournit l'équivalence entre les différentes conjectures de ce paragraphe.

Corollaire 12.11. Les conjectures 12.6, 12.9 et 12.10 sont équivalentes.

Démonstration. La proposition 12.8 montre que la conjecture 12.6 implique la conjecture 12.10.

La proposition B.27 montre que la conjecture 12.10 entraîne la conjecture 12.9.

Supposons maintenant la conjecture 12.9 satisfaite. Alors tout foncteur oméga-adapté de hauteur au plus n appartient à $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(n)}$ de \mathcal{F} est épaisse et que les objets de $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})$ sont colimite de sous-objets oméga-adaptés de hauteur au plus n . Si cette assertion est vérifiée, tout quotient strict d'un foncteur du type $\omega_{n+1}(S)$, où $S \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n+1}$ est simple, est oméga-adapté de hauteur au plus n : un tel quotient appartient à $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})$ (parce que la conjecture 12.9 est satisfaite), et est de type fini. En particulier, tous les quotients de $\omega_{n+1}(S)$ sont dans $\mathcal{F}^{\omega-ad(n+1)}$. On en déduit que la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\omega-ad(n+1)}$ de \mathcal{F} est épaisse. Son image dans le quotient $\mathcal{F}/\mathcal{K}_n(\mathcal{F})$ contient les objets simples de cette catégorie (car la conjecture 12.9 est satisfaite) ; elle est épaisse. Le fait que les foncteurs oméga-adaptés sont de présentation finie implique, par la proposition B.12, que la sous-catégorie des foncteurs de \mathcal{F} qui sont colimite de leurs sous-foncteurs oméga-adaptés de hauteur au plus $n+1$ est aussi épaisse. On en déduit que cette sous-catégorie coïncide avec $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F})$, par définition de la filtration de Krull. Cela établit la conjecture 12.6 et achève la démonstration. \square

En considérant les objets simples pseudo-constants des $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$ dans la conjecture 12.10, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 12.12. La conjecture artinienne extrêmement forte implique la conjecture artinienne très forte 2.53.

Résultats partiels sur la filtration de Krull de \mathcal{F} Dans [Djaa], nous établirons les résultats suivants. Le premier démontre la moitié de la conjecture 12.10 pour $n = 1$ et $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$; le second, qui généralise l'important théorème de simplicité de Powell (cf. [Pow98c]), consiste une forme affaiblie de cette conjecture valable pour tout n .

Théorème 12.13. Le foncteur $\omega_1 : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, 1}(\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ induit une équivalence entre la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, 1}^f(\mathbb{F}_2)$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, 1}(\mathbb{F}_2)$ et une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)/\mathcal{F}_\omega(\mathbb{F}_2)$.

Dans le théorème 12.14 ci-dessous, les endofoncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ sont les *duaux* de ceux introduits par Powell dans [Pow98b]. Explicitement, on a

$$\tilde{\nabla}_n(F)(V) = \text{im} \left(F(V \oplus \mathbb{F}_2^{\oplus n}) \xrightarrow{\sum_{l \in (\mathbb{F}_2^{\oplus n})^*} F(V \oplus l)} F(V \oplus \mathbb{F}_2) \right).$$

On désigne par $\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$ la plus petite sous-catégorie épaisse stable par colimites de \mathcal{F} contenant les foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotents.

Théorème 12.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le foncteur $\omega_n : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}(\mathbb{F}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$ induit une équivalence entre la sous-catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f(\mathbb{F}_2)$ des objets finis de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}(\mathbb{F}_2)$ et une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)/\overline{\mathcal{N}il}_{\tilde{\nabla}_n}$.*

L'intérêt de ce théorème réside dans le fait qu'un foncteur oméga-adapté de hauteur strictement inférieure à n est $\tilde{\nabla}_n$ -nilpotent.

Nous déduisons du théorème 12.14 le résultat suivant.

Théorème 12.15. *Pour tout foncteur fini F de $\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)$, le foncteur $P_{\mathbb{F}_2}^{\otimes 2} \otimes F$ est noethérien de type 2.*

12.3 Conséquences de la conjecture artinienne extrêmement forte

Nous donnons des propriétés des foncteurs oméga-adaptés qui montrent que la conjecture artinienne extrêmement forte implique des conjectures profondes sur la structure de la catégorie \mathcal{F} que les formes plus faibles de la conjecture artinienne ne suffisent pas à résoudre.

Proposition 12.16. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et F un foncteur de oméga-adapté de \mathcal{F} . Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout foncteur analytique A de \mathcal{F} tel que $A(0) = 0$, on ait $\mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^*(A^{\otimes n}, F) = 0$.*

Démonstration. Comme la sous-catégorie pleine des foncteurs F de \mathcal{F} tels que $\mathbf{Ext}^*(A^{\otimes n}, F) = 0$ pour n assez grand vérifie l'hypothèse 12.1, il suffit de démontrer l'assertion lorsque $F = \omega(X)$, où X est un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Comme $A(0) = 0$, le foncteur A admet une résolution projective dont les termes sont du type $\bar{P}_{\mathbb{k}} \otimes B_i$, donc $A^{\otimes n}$ admet une résolution projective dont les termes sont du type $\bar{P}_{\mathbb{k}}^{\otimes n} \otimes C_i$. Pour tout entier $n > \deg(X)$ et tout $E \in \text{Ob } \mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$,

$$\text{hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(\bar{P}_{\mathbb{k}}^{\otimes n} \otimes C_i) \otimes P_E^{\mathcal{G}_r}, X) \simeq \text{hom}_{\mathcal{G}_r}(\iota(C_i) \otimes P_E^{\mathcal{G}_r}, (\Delta^{\mathcal{G}_r})^n X) = 0$$

(par le corollaire 5.39), donc $\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(A^{\otimes n}) \otimes P_E^{\mathcal{G}_r}, X) = 0$, puisque $(\iota(\bar{P}_{\mathbb{k}}^{\otimes n} \otimes C_i) \otimes P_E^{\mathcal{G}_r})_i$ est une résolution projective de $\iota(A^{\otimes n}) \otimes P_E^{\mathcal{G}_r}$. L'isomorphisme (10) de la proposition C.16 fournit alors $\mathbf{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(\iota(A^{\otimes n}), X) = 0$ pour $n > \deg(X)$.

La conclusion résulte donc de la proposition 11.9. \square

Remarque 12.17. 1. L'argument d'annulation cohomologique utilisé dans cette démonstration, analogue à la proposition 1.5.1 de [Fra96], est dû originellement à Pirashvili (cf. remarque 10.12.1).

2. Cette proposition est surtout significative en degré 0, i.e. pour les foncteurs hom internes. En particulier, elle illustre le comportement radicalement différent du foncteur différence $\Delta \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(\bar{P}_{\mathbb{k}}, \cdot)$ et de $\mathbf{Hom}_{\mathcal{F}}(F, \cdot)$ pour F fini.

3. Pour $\mathbb{k} = \mathbb{F}_2$, le cas le plus intéressant est celui où $A = \Lambda^1$ (cf. [Dja06]).

Proposition 12.18. *Si F est un foncteur oméga-adapté de \mathcal{F} , pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples S de \mathcal{F} tels que $\mathbf{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S, F) \neq 0$ est fini.*

Démonstration. Il suffit de montrer la propriété pour F de la forme $\omega_n(X)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $X \in \text{Ob } \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}^f$. Pour $n = 0$, cela vient de ce que les objets finis de \mathcal{F} sont co-pf $_{\infty}$ (cf. [Djab] pour les détails); pour $n > 0$, tous les groupes $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^i(S, \omega_n(X))$ sont nuls par le corollaire 10.11, d'où la proposition. \square

Cet énoncé est à comparer à la forme de la conjecture artinienne donnée par l'assertion 9 de la proposition 1.12.

Le groupe de Grothendieck $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ Le foncteur exact ω préserve les objets de type fini, il induit donc un morphisme de groupes $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F})$, qui est un morphisme d'anneaux lorsqu'on munit la source de la structure multiplicative induite par le produit tensoriel total (cf. proposition 5.34). Si F est un foncteur oméga-adapté, la classe de F dans $G_0^{tf}(\mathcal{F})$ appartient à l'image de ω_* , donc la conjecture artinienne extrêmement forte implique que ce morphisme est *surjectif*. On peut compléter cette remarque comme suit.

Notation 12.19. Soient \mathcal{S} un système complet de représentants des objets simples de \mathcal{F} et $\widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ le groupe produit $\mathbb{Z}^{\mathcal{S}}$. Le morphisme de groupes canonique $j : G_0^{tf}(\mathcal{F}) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F})$ s'obtient en associant à un objet de type fini F de \mathcal{F} la famille des multiplicités d'un élément S de \mathcal{S} dans F .

Dans [Djaa], nous établirons le résultat suivant.

Théorème 12.20. *Le morphisme $G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{F}_2)) \xrightarrow{\omega_*} G_0^{tf}(\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)) \xrightarrow{j} \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}(\mathbb{F}_2))$ est injectif.*

Corollaire 12.21. *Si la conjecture artinienne extrêmement forte pour \mathbb{F}_2 est vérifiée, alors le morphisme $\omega_* : G_0^f(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}(\mathbb{F}_2)) \rightarrow G_0^{tf}(\mathcal{F}(\mathbb{F}_2))$ est un isomorphisme, et le morphisme canonique $j : G_0^{tf}(\mathcal{F}(\mathbb{F}_2)) \rightarrow \widehat{G}_0^f(\mathcal{F}(\mathbb{F}_2))$ est un monomorphisme.*

13 Résultats d'annulation cohomologique dans

\mathcal{F}_{inj}

La comparaison entre les groupes d'extensions dans les catégories \mathcal{F} et des modules sur un groupe linéaire s'opère naturellement par l'intermédiaire de la catégorie \mathcal{F}_{inj} (ou \mathcal{F}_{surj}); on peut l'illustrer par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{o_{inj}} & \mathcal{F}_{inj} \\ \text{ev}_{E_n} \downarrow & & \downarrow \text{ev}_n \\ \mathbb{k}[\mathcal{M}_n(\mathbb{k})] \mathbf{Mod} & \longrightarrow & \mathbb{k}[GL_n(\mathbb{k})] \mathbf{Mod} \end{array}$$

dans lequel la flèche inférieure est le foncteur de restriction : il s'agit d'étudier le comportement cohomologique du foncteur composé $\mathcal{F} \rightarrow_{GL_n(\mathbb{k})} \mathbf{Mod}$ de ce diagramme.

Ce principe est implicite dans la démonstration de Suslin, donnée dans l'appendice de [FFSS99], du théorème selon lequel ce foncteur induit un isomorphisme entre les groupes d'extensions entre deux foncteurs *finis* de la catégorie \mathcal{F} , pourvu que n soit assez grand.

Le résultat principal de cette section constitue une généralisation de ce théorème. Il est démontré dans le paragraphe 13.2, à partir d'une propriété d'annulation cohomologique déduite du théorème 10.10 relatif au foncteur $\omega : \mathcal{F}_{\mathcal{G}_r} \rightarrow \mathcal{F}$ et de la proposition 6.15 relative à l'auto-dualité du foncteur $\tilde{\omega}$.

Le premier paragraphe établit, de façon directe, une autre propriété d'annulation cohomologique du foncteur d'oubli $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$. Dans le paragraphe 13.3, nous formulons une conjecture sur la filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}_{inj} analogue à la conjecture artinienne extrêmement forte. Nous en démontrons un cas particulier à l'aide des résultats des deux paragraphes précédents.

13.1 Une propriété élémentaire

Le résultat que nous établissons dans ce paragraphe (proposition 13.3) repose uniquement sur les résultats de la section 2. Pour les appliquer plus commodément, pour traitons d'abord de la catégorie \mathcal{F}_{surj} .

Lemme 13.1. *Il existe dans \mathcal{F}_{surj} un épimorphisme scindé $o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj} \rightarrow o(F)$ naturel en les objets V de \mathcal{E}_{surj}^f et F de \mathcal{F} .*

Démonstration. On définit un morphisme naturel $o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj} \rightarrow o(F)$ comme l'adjoint de la projection canonique

$$\varpi(o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}) \simeq \varpi o(F) \otimes \varpi(P_V^{surj}) \simeq \varpi o(F) \otimes P_V \twoheadrightarrow \varpi o(F) \rightarrow F$$

déduit de l'épimorphisme $P_V \twoheadrightarrow \mathbb{k}$ et de la coïté de l'adjonction, via la proposition 2.36.

D'autre part, l'épimorphisme $V \twoheadrightarrow 0$ induit un morphisme $\text{Is}_0 \simeq P_0^{surj} \rightarrow P_V^{surj}$ dans \mathcal{F}_{surj} , d'où un morphisme naturel $o(F) \simeq o(F) \tilde{\otimes} \text{Is}_0 \rightarrow o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}$.

On vérifie aussitôt que le morphisme $o(F) \rightarrow o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj} \rightarrow o(F)$ composé des deux flèches précédentes est l'identité. \square

Proposition 13.2. *Soient X un objet fini de \mathcal{F}_{surj} et F un objet de \mathcal{F} . On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F), X) = 0.$$

Démonstration. Par la proposition 2.21, il existe un espace vectoriel de dimension finie V tel que $\delta_V(X) = 0$. La proposition 2.17 et le corollaire A.1 montrent alors que $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}, X) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F), \delta_V(X)) = 0$. Mais $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F), X)$ est facteur direct de $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{surj}}^*(o(F) \tilde{\otimes} P_V^{surj}, X)$ par le lemme 13.1, d'où la proposition. \square

Revenons maintenant à la catégorie \mathcal{F}_{inj} , plus naturelle pour les considérations suivantes.

Proposition 13.3. *Soient X un objet localement fini de \mathcal{F}_{inj} et F un objet de \mathcal{F} . On a*

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(X, o_{inj}(F)) = 0.$$

Démonstration. Le cas où X est fini est dual du précédent. Le cas général s'en déduit par passage à la colimite. \square

13.2 Propriétés utilisant le foncteur ω

Nous présentons maintenant d'autres résultats d'annulation cohomologique dans la catégorie \mathcal{F}_{inj} , reposant sur le théorème 10.10 et la proposition suivante.

Proposition 13.4. *Les endofoncteurs $\varpi_{inj}o_{inj}$ et $\omega\kappa$ de \mathcal{F} sont isomorphes.*

Démonstration. Soit $\tilde{\kappa} : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{G}_r}$ le foncteur de précomposition par le foncteur de réduction $\tilde{\kappa} : \tilde{\mathcal{E}}_{\mathcal{G}_r}^f \rightarrow \mathcal{E}^f$. On a des isomorphismes canoniques $\varpi_{inj}o_{inj} \simeq \tilde{\omega}' \circ \tilde{\kappa}$ et $\omega\kappa \simeq \tilde{\omega} \circ \tilde{\kappa}$, où $\tilde{\omega}$ (resp. $\tilde{\omega}'$) est le foncteur introduit dans la notation 6.12 (resp. 6.13), de sorte que la proposition 6.15 donne la conclusion. \square

On introduit à présent un foncteur très analogue à \mathcal{I} .

Définition 13.5. On définit un endofoncteur \mathcal{J} de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ par

$$\mathcal{J}(X)(V, B) = \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(B)} X(V/W, B/W),$$

l'application linéaire

$$\mathcal{J}(X)(f) : \mathcal{J}(X)(V, B) \rightarrow \mathcal{J}(X)(V', B')$$

(où $f : (V, B) \rightarrow (V', B')$ est une flèche de $\mathcal{E}_{\mathcal{G}_r}^f$) ayant pour composante

$$X(V/W, B/W) \rightarrow X(V'/W', B'/W')$$

l'application linéaire induite par le morphisme $(V/W, B/W) \rightarrow (V'/W', B'/W')$ induit par f si $f(W) = W'$, 0 sinon.

La propriété suivante justifie l'apparition du foncteur \mathcal{J} dans ce paragraphe.

Proposition 13.6. *Il existe un isomorphisme de foncteurs $\omega\kappa\omega \simeq \omega\mathcal{J}$.*

Démonstration. On l'obtient par la suite d'isomorphismes naturels

$$\begin{aligned} \omega\kappa\omega(X)(V) &= \bigoplus_{W \in \mathcal{G}_r(V)} \omega(X)(V/W) \simeq \bigoplus_{W \subset B \subset V} X(V/W, B/W) \\ &\simeq \bigoplus_{B \in \mathcal{G}_r(V)} \mathcal{J}(X)(V, B) = \omega\mathcal{J}(X)(V). \end{aligned}$$

\square

La proposition suivante est la plus importante de cette section. Elle joue dans \mathcal{F}_{inj} un rôle analogue à celui qu'occupe le théorème 10.10 dans la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$.

Proposition 13.7. *Soient X un objet localement fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et Y un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$. Il existe un isomorphisme naturel gradué $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega(X), o_{inj}\omega(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}}^*(X, \mathcal{I}\mathcal{J}(Y))$.*

Démonstration. Le foncteur o_{inj} étant adjoint à gauche à ϖ_{inj} (proposition 2.40), le corollaire A.1, la proposition 13.4, la proposition 13.6 puis le théorème 10.10 procurent des isomorphismes gradués naturels

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega(X), o_{inj}\omega(Y)) &\simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \varpi_{inj}o_{inj}\omega(Y)) \\ &\simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \omega\kappa\omega(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(\omega(X), \omega\mathcal{J}(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \mathcal{I}\mathcal{J}(Y)). \end{aligned}$$

\square

Remarque 13.8. Ainsi, pour obtenir un énoncé relatif à la catégorie \mathcal{F}_{inj} , nous avons transité par la catégorie $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$, dont l'étude requiert celle de \mathcal{F}_{surj} . Cela explique pourquoi nous avons dû introduire les deux catégories \mathcal{F}_{inj} et \mathcal{F}_{surj} .

Le corollaire suivant permet d'utiliser la proposition 13.7 tout en s'affranchissant des foncteurs \mathcal{I} et \mathcal{J} .

Corollaire 13.9. *Soient $k, n \in \mathbb{N}$, X un objet localement fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, k}$ et Y un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r, n}$.*

1. *Si $k < n$, alors $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega_k(X), o_{inj}\omega_n(Y)) = 0$.*
2. *Si $k = n$, le foncteur exact $o_{inj}\omega_n$ induit un isomorphisme naturel gradué*

$$\text{Ext}_{\mathcal{G}_r, n}^*(X, Y) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}}^*(o_{inj}\omega_n(X), o_{inj}\omega_n(Y)).$$

Démonstration. On déduit ce résultat de la proposition 13.7 de la même façon que l'on a déduit le corollaire 10.11 du théorème 10.10. En effet, si A est un objet de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ de coniveau au moins égal à n , l'inclusion canonique $A \hookrightarrow \mathcal{J}(A)$ induit après application du foncteur $\mathcal{R}_{\mathbb{N}, \leq n}$ un isomorphisme. \square

Application à la K -théorie stable La démonstration par Suslin (cf. appendice de [FFSS99]) de l'isomorphisme entre la K -théorie stable de \mathbb{k} et l'homologie dans $\mathcal{F}(\mathbb{k})$ pour des foncteurs finis se décompose en deux étapes⁵.

Rappelons que l'on dispose d'un foncteur exact $e : \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$, conformément au § 2.4. Nous noterons $F \mapsto F(\mathbb{k}^\infty)$ le foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]\mathbf{Mod}$ composé de $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ et du précédent. Il induit un morphisme gradué naturel

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k})}^*(o_{inj}(F), o_{inj}(G)) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]}^*(F(\mathbb{k}^\infty), G(\mathbb{k}^\infty))$$

pour $F, G \in \text{Ob } \mathcal{F}$. La première étape de la démonstration de Suslin consiste à démontrer que ce morphisme est un isomorphisme lorsque F et G sont finis ; c'est vrai en fait lorsque F est pf_∞ et G fini (cf. [Pir02], proposition 4.3). Le lien avec la K -théorie stable vient de ce que, à dualisation près, les groupes d'extensions $\text{Ext}_{\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]}^*(F(\mathbb{k}^\infty), G(\mathbb{k}^\infty))$ sont des groupes de K -théorie stable de \mathbb{k} (voir encore [Pir02]).

Corollaire 13.10. *Soient X un objet fini de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_r}$ et F un objet fini de \mathcal{F} . Il existe un isomorphisme naturel gradué*

$$\text{Ext}_{\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]}^*(\omega(X)(\mathbb{k}^\infty), F(\mathbb{k}^\infty)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{G}_r}^*(X, \mathcal{I}\kappa(F)).$$

Démonstration. Comme X est pf_∞ et que le foncteur exact ω préserve les projectifs de type fini, $\omega(X)$ est pf_∞ , de sorte que $\text{Ext}_{\mathcal{F}_{inj}(\mathbb{k})}^*(o_{inj}\omega(X), o_{inj}(F)) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]}^*(\omega(X)(\mathbb{k}^\infty), F(\mathbb{k}^\infty))$. On conclut en appliquant la proposition 13.7, puisque $\mathcal{J}\mathcal{P}_{0, \mathbb{N}} \simeq \kappa$. \square

Lorsque X est de niveau 0, i.e. que $\omega(X)$ est un objet fini de \mathcal{F} , on retrouve le résultat de Betley-Suslin affirmant que le morphisme naturel $\text{Ext}_{\mathcal{F}}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{k}[GL(\mathbb{k})]}^*(F(\mathbb{k}^\infty), G(\mathbb{k}^\infty))$ est un isomorphisme si F et G sont finis.

⁵Scorichenko a étendu le résultat de Suslin au cas des modules sur anneau arbitraire — cf. le dernier chapitre de [FFPS03].

13.3 La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{F}_{inj}

Le corollaire 13.9 et la proposition 13.3 nous amènent à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 13.11 (Conjecture artinienne extrêmement forte pour \mathcal{F}_{inj}).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur $o_{inj}\omega_n : \mathcal{F}_{Gr,n} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{F}_{Gr,n}^{lf}$ et $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$.

Si la conjecture artinienne extrêmement forte est satisfaite, cet énoncé équivaut au suivant.

Conjecture 13.12. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le foncteur o_{inj} induit une équivalence entre les catégories $\mathcal{K}_n(\mathcal{F})/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{K}_{n+1}(\mathcal{F}_{inj})/\mathcal{K}_n(\mathcal{F}_{inj})$.*

Le résultat suivant donne une réponse positive partielle à la conjecture 13.11 pour $n = 0$.

Proposition 13.13. *Le foncteur $o_{inj} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}$ induit une équivalence entre la sous-catégorie \mathcal{F}^f de \mathcal{F} et une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$.*

Démonstration. Si S est un objet simple de \mathcal{F} , le corollaire 2.32 montre, par dualité, que $o_{inj}(F)$ est un objet simple noethérien de type 1 de \mathcal{F}_{inj} , donc un objet simple de $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$. Le corollaire 13.9 (appliqué avec $n = 0$) et la proposition 13.3 établissent par ailleurs que le foncteur o_{inj} induit un foncteur pleinement fidèle entre \mathcal{F}^f et une sous-catégorie de $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ stable par extensions. Cela prouve la proposition. \square

Remarque 13.14. 1. Dans [Djab], nous établissons ce résultat de façon différente.

La méthode suivie, moins élémentaire que celle de la proposition 13.13, est une variante moins technique de la démonstration du théorème 12.13 que nous donnerons dans [Djaa], théorème que l'on ne peut pas en revanche montrer de manière aussi directe que la proposition 13.13, le corollaire 2.32 n'ayant pas d'équivalent dans la catégorie \mathcal{F} .

2. La proposition 2.68 esquisse une autre approche de la catégorie $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$. Malheureusement, celle-ci ne semble pas suffisante pour établir simplement que tous les objets simples de la catégorie $\mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$ sont dans l'image du foncteur $\mathcal{F} \xrightarrow{o_{inj}} \mathcal{F}_{inj} \rightarrow \mathcal{F}_{inj}/\mathcal{F}_{inj}^{lf}$.

A Adjonctions

A.1 Algèbre homologique

La propriété immédiate suivante est d'un usage très courant dans les catégories de foncteurs.

Proposition A.1. *Supposons que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux catégories abéliennes possédant suffisamment d'objets injectifs. Si $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ et $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sont des foncteurs exacts tels que F est adjoint à droite à G , alors l'isomorphisme naturel $\text{hom}_{\mathcal{A}}(X, F(Y)) \simeq \text{hom}_{\mathcal{B}}(G(X), Y)$ s'étend en un isomorphisme naturel gradué*

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, F(Y)) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{B}}^*(G(X), Y).$$

Nous utiliserons parfois cette proposition via le corollaire suivant.

Corollaire A.2. *Supposons que :*

1. \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux catégories abéliennes, \mathcal{A} possédant assez d'injectifs ;
2. F et G sont deux endofoncteurs exacts de \mathcal{A} , avec G adjoint à gauche à F ;
3. $H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur exact ;
4. K est un endofoncteur de \mathcal{B} tel que $F \circ H \simeq H \circ K$;
5. il existe une transformation naturelle injective $j : id_{\mathcal{B}} \hookrightarrow K$.

Soient X un objet de \mathcal{A} tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $G^n(X) = 0$ et Y un objet de \mathcal{B} . On a $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, H(Y)) = 0$.

Démonstration. Quitte à remplacer F par F^n , G par G^n et K par K^n , on peut supposer $n = 1$.

Pour tout objet Y de \mathcal{B} , on a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow Y \xrightarrow{f_1} K(Y_1) \xrightarrow{f_2} K(Y_2) \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} K(Y_n) \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

où $Y_1 = Y$ et $f_1 = j_Y$, et pour $n > 1$, $Y_n = \text{coker } f_{n-1}$ et f_n est la composée $K(Y_{n-1}) \rightarrow Y_n \xrightarrow{j_{Y_n}} K(Y_n)$. En appliquant le foncteur exact H à cette suite exacte et en utilisant l'isomorphisme $F \circ H \simeq H \circ K$, on en déduit une résolution de $H(Y)$ par les objets $F(H(Y_i))$. Comme $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^*(X, F(A)) = 0$ pour tout $A \in \text{Ob } \mathcal{A}$ par la proposition A.1, cela donne la conclusion. \square

A.2 Monades et comonades

Pour les démonstrations des propriétés rappelées ci-dessous, nous renvoyons à [ML71], chapitre VI.

Définition A.3. Soit \mathcal{C} une catégorie.

1. Une *monade* sur \mathcal{C} est un triplet (T, η, μ) formé d'un endofoncteur T de \mathcal{C} et de transformations naturelles $\eta : id_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ et $\mu : T^2 \rightarrow T$ telles que $\mu \circ \eta_T = id_T = \mu \circ T(\eta)$ et $\mu \circ T(\mu) = \mu \circ \mu_T$. La transformation naturelle μ est appelée *multiplication* de la monade.
2. Une *comonade* sur \mathcal{C} est une monade sur \mathcal{C}^{op} , i.e. un triplet (T, γ, δ) formé d'un endofoncteur T de \mathcal{C} et de transformations naturelles $\gamma : T \rightarrow id_{\mathcal{C}}$ et $\delta : T \rightarrow T^2$ telles que $\gamma_T \circ \delta = id_T = T(\gamma) \circ \delta$ et $\delta_T \circ \delta = T(\delta) \circ \delta$.

Convention A.4. Dans la suite de cet appendice, nous considérons des catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} et des foncteurs $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ et $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tels que F est adjoint à droite à G .

Proposition A.5. L'adjonction entre F et G détermine :

1. une monade $(FG, \eta, F(\gamma_G))$ sur \mathcal{A} ;
2. une comonade $(GF, \gamma, G(\eta_F))$ sur \mathcal{B} .

Définition A.6. 1. Soit (T, η, μ) une monade sur une catégorie \mathcal{C} . Un *module* sur cette monade est la donnée d'un objet X de \mathcal{C} et d'un morphisme $m : T(X) \rightarrow X$ tel que $m \circ \eta_X = id_X$ et $m \circ T(m) = m \circ \mu_X : T^2(X) \rightarrow X$.

2. Soit (T, γ, δ) une comonade sur une catégorie \mathcal{C} . Un *comodule* sur cette comonade est un module sur la monade de \mathcal{C}^{op} associée, i.e. un objet X de \mathcal{C} muni d'un morphisme $c : X \rightarrow T(X)$ tel que $\gamma_X \circ c = id_X$ et $T(c) \circ c = \delta_X \circ c : X \rightarrow T^2(X)$.

On définit de façon évidente la notion de morphisme de modules sur une monade, ou de comodules sur une comonade. On prendra garde au fait que nous nommons *module* (resp. *comodule*) ce que Mac Lane appelle *algèbre* (resp. *coalgèbre*).

Proposition A.7. *Il existe un foncteur de \mathcal{A} vers la catégorie des comodules sur la comonade $(GF, \gamma, G(\eta_F))$; il s'obtient sur les objets en munissant $G(X)$ (où $X \in \text{Ob } \mathcal{A}$) de la structure de comodule donnée par le morphisme $G(\eta_X) : G(X) \rightarrow GFG(X)$.*

Cette proposition possède une variante duale en terme de monade.

Le résultat suivant, qui se déduit de [ML71], chapitre VI, § 7, théorème 1, est un cas particulier du *théorème de Beck*.

Proposition A.8. *Faisons les hypothèses suivantes :*

1. *les catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} sont abéliennes ;*
2. *le foncteur G est exact et fidèle.*

Alors le foncteur de la proposition précédente de \mathcal{A} vers la catégorie des comodules sur la comonade déterminée par l'adjonction entre F et G est une équivalence de catégories.

Dualement, on a le résultat suivant.

Proposition A.9. *Faisons les hypothèses suivantes :*

1. *les catégories \mathcal{A} et \mathcal{B} sont abéliennes ;*
2. *le foncteur F est exact et fidèle.*

Alors la catégorie \mathcal{B} est équivalente à la catégorie des modules sur la monade déterminée par l'adjonction entre F et G .

B Propriétés de finitude dans les catégories abéliennes

Cet appendice donne les définitions, notations et propriétés relatives aux notions de finitude utilisées dans cet article. La plupart des ces notions se trouvent dans [Pop73], [Gab62] ou [CR90]; d'autres références et les démonstrations sont données dans [Djab].

Convention B.1. Dans cet appendice, \mathcal{A} désigne une catégorie de Grothendieck.

On rappelle que, par définition, une *catégorie de Grothendieck* est une catégorie abélienne possédant des colimites, un ensemble de générateurs et dans laquelle les colimites filtrantes sont exactes. Une telle catégorie possède toujours des limites, des enveloppes injectives et un cogénérateur injectif (cf. [Pop73], § 3.7 et [Gab62], chapitre II, § 6).

B.1 Définitions

Soit A un objet de \mathcal{A} .

Définition B.2. On dit que A est :

1. *noethérien* si toute suite croissante de sous-objets de A stationne;
2. *artinien* si toute suite décroissante de sous-objets de A stationne;
3. *de type fini* si toute suite croissante de sous-objets de A de colimite A stationne;

4. de *co-type fini* si toute suite décroissante de sous-objets de \mathcal{A} de limite nulle stationne.

Notation B.3. Nous désignerons par \mathcal{A}^{tf} la sous-catégorie pleine des objets de type fini de \mathcal{A} .

Définition B.4. On dit que la catégorie \mathcal{A} est localement noethérienne (resp. co-localement artinienne) si elle possède un ensemble de générateurs (resp. cogénérateurs) noethériens (resp. artiniens).

Hypothèse B.5. Il existe dans \mathcal{A} un ensemble de générateurs projectifs de type fini.

Le premier point de la définition suivante est valable sous l'hypothèse B.5 : la « bonne » définition d'un objet pf_n est différente lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Définition B.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que \mathcal{A} est :

1. de *n-présentation finie*, en abrégé pf_n , s'il existe une suite exacte $P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$, où les P_i sont des objets projectifs de type fini de \mathcal{A} .
2. de *n-co-présentation finie*, en abrégé co-pf_n , s'il existe une suite exacte $0 \rightarrow I_0 \rightarrow \cdots \rightarrow I_n$, où les I_i sont des objets injectifs de co-type fini de \mathcal{A} .

On dit que \mathcal{A} est de *présentation finie* s'il est de 1-présentation finie, pf_∞ s'il est pf_n pour tout n . On adopte des simplifications terminologiques analogues pour les objets co-pf_i (ainsi, on écrira co-pf pour co-pf_1).

La manipulation des objets pf_∞ est facilitée par la proposition suivante :

Proposition B.7. Soit $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{A} . Si deux des objets A , B et C sont pf_∞ , il en est de même du troisième.

Définition B.8. On dit que \mathcal{A} est :

1. *simple* s'il est non nul mais que tous ses sous-objets stricts sont nuls ;
2. *fini* s'il admet une filtration finie de sous-quotients simples ;
3. *localement fini* s'il est colimite de ses sous-objets finis ;
4. *co-localement fini* s'il est limite de ses quotients finis.

Notation B.9. On note \mathcal{A}^f (respectivement \mathcal{A}^{lf}) la sous-catégorie pleine des objets finis (resp. localement finis) de \mathcal{A} .

Définition B.10. Une *sous-catégorie de Serre* de \mathcal{A} est une sous-catégorie pleine \mathcal{C} de \mathcal{A} stable par sommes directes finies et par sous-quotients.

Une *sous-catégorie épaisse* de \mathcal{A} est une sous-catégorie de Serre de \mathcal{A} stable par extensions.

Proposition B.11. 1. La sous-catégorie \mathcal{A}^f de \mathcal{A} est épaisse.

2. La catégorie \mathcal{A}^{lf} est une sous-catégorie de Serre de \mathcal{A} . Si les objets simples de \mathcal{A} sont de *présentation finie*, elle est épaisse.

La dernière assertion de cette proposition est un cas particulier du résultat suivant.

Proposition B.12. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie épaisse de \mathcal{A} . Notons $\bar{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} dont les objets sont les colimites d'objets de \mathcal{C} .

Si les objets de \mathcal{C} sont de *présentation finie*, alors $\bar{\mathcal{C}}$ est une sous-catégorie épaisse de \mathcal{A} .

Définition B.13. 1. On appelle *socle* de A la somme $\text{soc}(A)$ des sous-objets simples de A .

2. On nomme *radical* de A l'intersection $\text{rad}(A)$ des sous-objets stricts maximaux de A . On appelle *cosocle* de A le quotient $A/\text{rad}(A)$, noté $\text{cosoc}(A)$.

Proposition B.14. *Si A est localement fini et que $\text{soc}(A)$ est fini, alors A est de co-type fini.*

B.2 Effet de foncteurs exacts

Les propositions énoncées dans ce paragraphe s'établissent par des méthodes standard ; on en trouvera une démonstration complète dans [Djab].

Proposition B.15. *Soient \mathcal{B} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact et fidèle.*

1. *Si X est un objet de \mathcal{A} tel que $F(X)$ est noethérien (resp. artinien) dans \mathcal{B} , alors X est noethérien (resp. artinien) dans \mathcal{A} .*
2. *Si F commute aux colimites (resp. limites) filtrantes et si X est un objet de \mathcal{A} tel que $F(X)$ est de type fini (resp. de co-type fini), alors X est de type fini (resp. de co-type fini).*
3. *Supposons que F est plein et que son image est une sous-catégorie de Serre de \mathcal{B} . Si X est un objet noethérien (resp. de type fini, artinien, de co-type fini) de \mathcal{A} , alors $F(X)$ est un objet noethérien (resp. de type fini, artinien, de co-type fini) de \mathcal{B} .*

Proposition B.16. *Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et F un foncteur exact et fidèle de \mathcal{A} dans une catégorie de Grothendieck, commutant aux colimites filtrantes et préservant les objets projectifs de type fini. Si X est un objet de \mathcal{A} tel que $F(X)$ est pf_i , alors X est pf_i .*

Proposition B.17. *Soient \mathcal{B} une catégorie de Grothendieck et $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur exact.*

1. *Supposons F fidèle. Si X est un objet de \mathcal{A} tel que $F(X)$ est fini dans \mathcal{B} , alors X est fini dans \mathcal{A} .*
2. *Supposons que F est plein et que son image est une sous-catégorie de Serre de \mathcal{B} . Si X est un objet fini de \mathcal{A} , alors $F(X)$ est un objet fini de \mathcal{B} .*

B.3 Groupes de Grothendieck

Définition B.18. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine et *petite* de \mathcal{A} , contenant 0 . On appelle *groupe de Grothendieck* de \mathcal{C} relativement à \mathcal{A} le groupe abélien noté $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$ défini par générateurs et relations de la manière suivante.

- **Générateurs** : un générateur $[A]$ pour chaque objet A de \mathcal{C} .
- **Relations** : $[A] = [B] + [C]$ pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow 0$ de \mathcal{A} dont tous les objets A, B, C sont dans \mathcal{C} .

On a $[A] = [B]$ dans $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$ si A et B sont deux objets isomorphes de \mathcal{C} , ce qui permet de définir ce groupe lorsque \mathcal{C} est seulement *essentiellement petite*.

Lemme B.19. *La sous-catégorie \mathcal{A}^{tf} de \mathcal{A} est essentiellement petite.*

Cela permet de donner la notation suivante.

Notation B.20. Nous noterons respectivement $G_0^f(\mathcal{A})$, $G_0^{tf}(\mathcal{A})$ et $K_0(\mathcal{A})$ les groupes de Grothendieck $G_0(\mathcal{A}^f; \mathcal{A})$, $G_0(\mathcal{A}^{tf}, \mathcal{A})$ et $G_0(\mathcal{C}; \mathcal{A})$, où \mathcal{C} est la sous-catégorie pleine des objets projectifs de type fini de \mathcal{A} .

Le théorème de Jordan-Hölder dit que le groupe abélien $G_0^f(\mathcal{A})$ est libre, les classes des objets simples de \mathcal{A} en formant une base.

Nous rappelons maintenant la notion de *recollement* de catégories abéliennes.

Définition B.21. Un *diagramme de recollement* est un diagramme du type

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xleftarrow{q} \\ \xrightarrow{i} \\ \xrightarrow{p} \end{array} \mathcal{A} \begin{array}{c} \xleftarrow{l} \\ \xrightarrow{e} \\ \xrightarrow{r} \end{array} \mathcal{B}$$

dans lequel :

- \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des catégories abéliennes.
- Le foncteur l est adjoint à gauche à e et e est adjoint à gauche à r (en particulier, e est exact).
- L'unité $id_{\mathcal{B}} \rightarrow el$ et la coïté $er \rightarrow id_{\mathcal{B}}$ sont des isomorphismes.
- Le foncteur q est adjoint à gauche à i et i est adjoint à gauche à p (en particulier, i est exact).
- L'unité $id_{\mathcal{C}} \rightarrow pi$ et la coïté $qi \rightarrow id_{\mathcal{C}}$ sont des isomorphismes.
- Le foncteur i est un plongement pleinement fidèle d'image $ker e$ (en particulier, i identifie \mathcal{C} à une sous-catégorie épaisse de \mathcal{A}).

Dans cette situation, le foncteur e induit une équivalence $\mathcal{A}/\mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{B}$ (nous renvoyons le lecteur à [Gab62] pour ce qui concerne la notion de quotient d'une catégorie abélienne par une sous-catégorie épaisse).

Nous renvoyons à [Kuh94b] à ce sujet, ainsi que pour la démonstration de la proposition suivante (et la description explicite de l'isomorphisme).

Proposition B.22. *On a un isomorphisme de groupes $G_0^f(\mathcal{A}) \simeq G_0^f(\mathcal{B}) \oplus G_0^f(\mathcal{C})$.*

B.4 Filtration de Krull

Définition B.23. La *filtration de Krull* de la catégorie \mathcal{A} est la suite croissante de sous-catégories épaisses stables par colimites $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} définie inductivement comme suit.

- La catégorie $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ est réduite à l'objet nul pour $n < 0$.
- Pour $n \geq 0$, $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ est l'image réciproque par le foncteur canonique $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ de la plus petite sous-catégorie épaisse et stable par colimites de $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ contenant tous les objets simples de cette catégorie.

Remarque B.24. On peut étendre de manière claire la définition de la filtration de Krull à tout ordinal (cf. [Gab62]); nous n'avons introduit que les termes indicés par \mathbb{N} car eux seuls interviendront dans notre contexte.

Définition B.25. On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ les notions d'objet *simple noethérien de type n* et *noethérien de type n* de \mathcal{A} de la façon suivante.

- Un objet est simple noethérien de type -1 s'il est nul.
- Un objet X est noethérien de type n s'il possède une filtration finie $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = X$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le quotient F_i/F_{i-1} est simple noethérien de type $a(i)$, pour un certain entier $a(i) \leq n$.
- Un objet est simple noethérien de type n pour $n \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il n'est pas noethérien de type $n-1$ et que tous ses quotients stricts sont noethériens de type $n-1$.

Notation B.26. Nous désignerons par $\mathcal{A}_{\mathbf{NT}(n)}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} formée des objets noethériens de type n . Elle est épaisse.

Proposition B.27. Soient $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et X un objet noethérien de type n de \mathcal{A} . Alors X est noethérien, appartient à $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ et son image dans $\mathcal{A}/\mathcal{K}_{n-1}(\mathcal{A})$ (si $n \geq 0$) est finie. Elle est même simple si X est simple noethérien de type n .

Réciproquement, un objet noethérien de \mathcal{A} qui appartient à $\mathcal{K}_n(\mathcal{A})$ est noethérien de type n .

C Catégories de foncteurs

Nous rappelons ici quelques propriétés d'usage courant des catégories de foncteurs. Bien que standard, elles ne sont pas toujours facilement accessibles dans la littérature — voir [Djab] pour plus de détails.

Convention C.1. Dans cet appendice, \mathcal{I} et \mathcal{J} désignent des catégories essentiellement petites, \mathcal{A} et \mathcal{B} des catégories abéliennes et A un anneau.

C.1 Généralités

Notation C.2. 1. Si F est un foncteur de \mathcal{J} vers \mathcal{I} , nous désignerons par $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ le foncteur de précomposition par F .

2. Pour tout foncteur $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, nous désignerons par $G_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ le foncteur de postcomposition par G .

3. Soit E un objet de \mathcal{I} . Nous noterons $ev_E : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ et $ev_E : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, {}_A \mathbf{Mod}) \rightarrow {}_A[M] \mathbf{Mod}$ les foncteurs d'évaluation en E , donnés par la précomposition par le foncteur $*$ $\rightarrow \mathcal{I}$ d'image E et par le foncteur pleinement fidèle $\underline{\text{End}}_{\mathcal{I}}(E) \rightarrow \mathcal{I}$ d'image E respectivement.

Proposition C.3. 1. La catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est abélienne.

2. L'exactitude se teste « argument par argument » : une suite $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est exacte si et seulement si la suite $X(E) \rightarrow Y(E) \rightarrow Z(E)$ est exacte dans \mathcal{A} pour tout objet E de \mathcal{I} .

3. Si \mathcal{A} est une catégorie A -linéaire, $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ hérite d'une structure de catégorie A -linéaire.

4. Supposons que la catégorie abélienne \mathcal{A} est monoïdale symétrique. Le bifoncteur

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A} \times \mathcal{A}) \xrightarrow{\otimes_*} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$$

définit une structure monoïdale symétrique sur $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A})$.

On rappelle que les notions de sous-catégorie de Serre et sous-catégorie épaisse sont introduites dans la définition B.10.

Proposition C.4. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur.

1. Si F est exact (resp. additif, exact à gauche, exact à droite), il en est de même pour $F_* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$.

2. Si F est fidèle, alors F_* est fidèle.

3. Si F est pleinement fidèle, alors F_* est pleinement fidèle. Si de plus l'image de F est une sous-catégorie de Serre (resp. épaisse) de \mathcal{B} , alors l'image de F_* est une sous-catégorie de Serre (resp. épaisse) de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{B})$.

4. Si F possède un adjoint à gauche G , alors G_* est adjoint à gauche à F_* .

Proposition C.5. Soit $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ un foncteur.

1. Le foncteur $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ commute aux limites et aux colimites ; il est en particulier exact.
2. Si \mathcal{A} est une catégorie monoïdale symétrique, F^* commute au produit tensoriel.
3. Si F est essentiellement surjectif, F^* est fidèle.
4. Si F est plein et essentiellement surjectif, F^* est pleinement fidèle, et son image est une sous-catégorie de Serre de $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ stable par limites et colimites.
5. Si F possède un adjoint à gauche G , alors G^* est adjoint à droite à F^* .

Dans la suite de cette annexe, on ne s'intéresse plus qu'au cas où la catégorie but est la catégorie d'espaces vectoriels $\mathcal{E}_{\mathbb{k}}$.

C.2 Générateurs projectifs

Étant donné un objet E de \mathcal{I} , nous noterons $P_E^{\mathcal{I}}$ l'objet $\mathbb{k}[\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(E, \cdot)]$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$. On rappelle que $\mathbb{k}[\cdot]$ désigne le foncteur de \mathbb{k} -linéarisation ; ainsi, $\mathbb{k}[F]$ désigne la \mathbb{k} -linéarisation $\mathbb{k}[\cdot]_* F$ d'un foncteur $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{Ens}$.

La bifonctorialité de $\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}$ permet de considérer $E \mapsto P_E^{\mathcal{I}}$ comme un foncteur $\mathcal{I}^{op} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Proposition C.6 (Lemme de Yoneda linéaire). Il existe un isomorphisme

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}(P_E^{\mathcal{I}}, F) \simeq F(E)$$

naturel en les objets E de \mathcal{I} et F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Proposition et définition C.7. Les objets $P_E^{\mathcal{I}}$ forment un ensemble de générateurs projectifs de type fini de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ lorsque E parcourt un squelette de \mathcal{I} . On les appelle générateurs projectifs standard de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Corollaire C.8. La catégorie de foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ est une catégorie de Grothendieck vérifiant l'hypothèse B.5.

Corollaire C.9. Pour tout foncteur $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$, le foncteur de précomposition $F^* : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ admet un adjoint à droite et un adjoint à gauche.

Les extensions de Kan (cf. [ML71], ch. X) permettent de donner une construction des adjoints.

Remarque C.10. Si deux objets V et W de \mathcal{I} possèdent une somme, on a un isomorphisme canonique $P_V^{\mathcal{I}} \otimes P_W^{\mathcal{I}} \simeq P_{V \amalg W}^{\mathcal{I}}$.

Corollaire C.11. Supposons que \mathcal{I} possède des sommes finies. Alors le produit tensoriel de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ préserve les objets projectifs et les objets de type fini.

Proposition et définition C.12 (Dualité entre catégories de foncteurs). Notons $D_{\mathcal{I}, \mathbb{k}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})^{op} \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{op}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ le foncteur de postcomposition par le foncteur de dualité $(\cdot)^* = \mathrm{hom}_{\mathcal{E}}(\cdot, \mathbb{k}) : \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^{op} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{k}}$, et $D'_{\mathcal{I}, \mathbb{k}} = D_{\mathcal{I}^{op}, \mathbb{k}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})^{op} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

1. Les foncteurs $D_{\mathcal{I}, \mathbb{k}}$ et $D'_{\mathcal{I}, \mathbb{k}}$ sont exacts et fidèles.
2. Le foncteur $D_{\mathcal{I}, \mathbb{k}}$ est adjoint à droite à $(D'_{\mathcal{I}, \mathbb{k}})^{op}$.

3. Ces foncteurs induisent des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre entre $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f)^{op}$ et $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f)$.

Ces foncteurs seront appelés foncteurs de dualité.

Ce résultat entraîne formellement, via la proposition C.6, la propriété suivante.

Proposition et définition C.13 (Cogénérateurs injectifs standard). *Pour tout objet E de \mathcal{I} , nous noterons $I_E^{\mathcal{I}}$ l'objet $D'_{\mathcal{I}, \mathbb{k}}(P_E^{\mathcal{I}^{op}})$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ (ainsi, on a $I_E^{\mathcal{I}}(V) = \mathbb{k}^{\text{hom}_{\mathcal{I}}(V, E)}$). Cette construction est fonctorielle contravariante en E .*

1. Il existe un isomorphisme $\text{hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}(F, I_E^{\mathcal{I}}) \simeq F(E)^*$ naturel en les objets F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et E de \mathcal{I} .
2. Les $I_E^{\mathcal{I}}$ forment un ensemble de cogénérateurs injectifs lorsque E décrit un squelette de \mathcal{I} . On les appelle cogénérateurs injectifs standard de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Dans tous les cas que nous considérerons, l'hypothèse suivante sera vérifiée⁶.

Hypothèse C.14. Les ensembles $\text{hom}_{\mathcal{I}}(V, W)$ sont finis pour tous $V, W \in \text{Ob } \mathcal{I}$.

Cette hypothèse assure que les foncteurs projectifs standard, donc tous les foncteurs de type fini, prennent des valeurs de dimension finie, de sorte que la dernière assertion de la proposition C.12 donne un lien très rigide entre $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})^{op}$ et $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

Corollaire C.15. *Lorsque l'hypothèse C.14 est satisfaite, les injectifs standard de la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ sont de co-type fini.*

C.3 Foncteurs hom internes et foncteurs de division

Proposition et définition C.16. 1. *Pour tout objet X de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, l'endofoncteur $\cdot \otimes X$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ admet un adjoint à droite, noté $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}(X, \cdot)$; on dispose ainsi d'un foncteur hom interne*

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})^{op} \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

On note $\mathbf{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}^*$ les foncteurs dérivés droits de ce bifoncteur exact à gauche.

2. On a un isomorphisme naturel gradué

$$\mathbf{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}^*(X, Y)(E) \simeq \mathbf{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}^*(P_E^{\mathcal{I}} \otimes X, Y), \quad (10)$$

où E est un objet de \mathcal{I} et X et Y sont des objets de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$.

3. *Pour tout objet A de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f)$, l'endofoncteur $\cdot \otimes A$ de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ admet un adjoint à gauche, noté $(\cdot : A)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}$; on dispose ainsi d'un foncteur de division*

$$(\cdot : \cdot)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}^f)^{op} \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

Les indices seront omis dans ces notations quand il n'y a pas d'ambiguïté.

⁶Les catégories de foncteurs dont la source ne vérifie pas l'hypothèse C.14 ont un comportement profondément différent de celles que nous étudierons.

La terminologie de foncteur *hom interne* est standard (cf. [ML71], ch. VII, § 7). Le terme de *foncteur de division* a quant à lui été introduit par Lannes (cf. [Lan92]) dans le cadre des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, voisin de celui des catégories de foncteurs (cf. [Pow98b], § 3).

Proposition C.17. *Soient F un endofoncteur de \mathcal{I} et T un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathbf{Ens})$ tels qu'il existe une bijection*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(F(V), W) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, W) \times T(W)$$

naturelle en les objets V et W de \mathcal{I} .

Alors le foncteur $\mathbf{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}(\mathbb{k}[T], \cdot)$ est isomorphe au foncteur de précomposition F^ ; autrement dit, F^* est adjoint à droite à $\cdot \otimes \mathbb{k}[T]$.*

Proposition C.18. *Soient F un endofoncteur de \mathcal{I} et T un objet de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}^{op}, \mathbf{Ens}^f)$ tels qu'il existe une bijection*

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, F(W)) \simeq \mathrm{hom}_{\mathcal{I}}(V, W) \times T(V)$$

naturelle en les objets V et W de \mathcal{I} .

Alors le foncteur $(\cdot : \mathbb{k}^T)_{\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})}$ est isomorphe au foncteur de précomposition F^ ; autrement dit, F^* est adjoint à gauche à $\cdot \otimes \mathbb{k}^T$.*

C.4 Décomposition scalaire

On suppose ici que \mathcal{I} est une catégorie \mathbb{k} -linéaire.

Notation C.19. Étant donné un entier naturel i , on désigne par $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_i$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ formée des foncteurs F tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$ et tout objet E de \mathcal{I} , on a $F(\lambda \cdot \mathrm{id}_E) = \lambda^i \cdot \mathrm{id}_{F(E)}$ (on convient ici que $0^0 = 1$).

Le produit tensoriel induit des foncteurs $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_i \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_j \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_{i+j}$.

Comme le groupe cyclique fini \mathbb{k}^\times est d'ordre premier à la caractéristique de \mathbb{k} , il existe un isomorphisme de \mathbb{k} -algèbres $\mathbb{k}[\mathbb{k}^\times] \simeq \mathbb{k}^{q-1}$, et la \mathbb{k} -algèbre du monoïde multiplicatif sous-jacent à \mathbb{k} est isomorphe à \mathbb{k}^q . On en déduit la proposition suivante (cf. [Kuh94a], § 3.3).

Proposition et définition C.20. *Les inclusions $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_i \hookrightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ induisent une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \simeq \prod_{i=0}^{q-1} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_i.$$

Nous noterons $F \simeq \bigoplus_{i=0}^{q-1} F_i$ la décomposition canonique d'un foncteur F de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ qu'on en déduit, où F_i appartient à $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})_i$. On l'appelle décomposition scalaire de F .

C.5 Produit tensoriel extérieur

C'est le foncteur

$$\boxtimes : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$$

défini par la composition

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}^* \times \pi_{\mathcal{J}}^*} \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k) \xrightarrow{\otimes} \mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k),$$

où l'on note $\pi_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}$ et $\pi_{\mathcal{J}} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$ les foncteurs de projection. Autrement dit, $(F \boxtimes G)(A, B) = F(A) \otimes G(B)$.

On a ainsi des isomorphismes canoniques $P_{(A,B)}^{\mathcal{I} \times \mathcal{J}} \simeq P_A^{\mathcal{I}} \boxtimes P_B^{\mathcal{J}}$; cette observation et ses conséquences, ainsi que les propriétés que nous rappelons ensuite, justifient la convention de notation suivante.

Notation C.21. Nous désignerons par $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \otimes \mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$, par abus, la catégorie $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$.

Proposition C.22 (Simples de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$). 1. Si \mathcal{I} et \mathcal{J} vérifient l'hypothèse C.14, pour tout objet simple S de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$, il existe un objet simple S_1 de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$, un objet simple S_2 de $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ et un épimorphisme $S_1 \boxtimes S_2 \rightarrow S$.

2. Soient S un objet simple de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ et S' un objet simple de $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ tel que le corps $\text{End}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)}(S')$ est réduit à \mathbb{k} . Alors $S \boxtimes S'$ est un objet simple de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$.

3. Soient S_1, S_2 deux objets simples de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)$ et S'_1, S'_2 deux objets simples de $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$. Si $S_1 \boxtimes S'_1 \simeq S_2 \boxtimes S'_2$, alors $S_1 \simeq S'_1$ et $S_2 \simeq S'_2$.

Corollaire C.23. Supposons que \mathcal{I} et \mathcal{J} vérifient l'hypothèse C.14 et que les corps d'endomorphismes des objets simples de $\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)$ sont réduits à \mathbb{k} .

Le produit tensoriel extérieur induit des isomorphismes de groupes abéliens

$$G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)) \simeq G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)) \otimes G_0^f(\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)),$$

$$K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{I} \times \mathcal{J}, \mathcal{E}_k)) \simeq K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k)) \otimes K_0(\mathbf{Fct}(\mathcal{J}, \mathcal{E}_k)).$$

Ces propriétés se démontrent de façon analogue à celles du produit tensoriel extérieur usuel en théorie des représentations — cf. [CR90], chapitre 1, § 10 E. Une démonstration des énoncés fonctoriels précédents est donnée dans [Djab].

C.6 Recollements

Nous terminons cet appendice avec quelques résultats communs destinés à définir et utiliser commodément le prolongement par zéro dans un cadre assez général. On les trouvera établis dans [Djab].

Définition C.24. Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine de \mathcal{I} . Nous dirons que \mathcal{C} est :

- une *sous-catégorie relativement connexe* de \mathcal{I} si pour tous objets A, B et X de \mathcal{I} tels que $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{hom}(A, X) \neq \emptyset$ et $\text{hom}(X, B) \neq \emptyset$, on a $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$;
- une *sous-catégorie complète à gauche* de \mathcal{I} si pour tout objet E de \mathcal{I} , E est objet de \mathcal{C} dès que $\text{hom}_{\mathcal{I}}(E, X) \neq \emptyset$ pour un objet X de \mathcal{C} ;
- une *sous-catégorie complète à droite* de \mathcal{I} si \mathcal{C}^{op} est une sous-catégorie complète à gauche de \mathcal{I}^{op} .

Proposition et définition C.25 (Prolongement par zéro). Soit \mathcal{C} une sous-catégorie pleine relativement connexe de \mathcal{I} . On note \mathcal{D} la sous-catégorie pleine de \mathcal{I} dont la classe d'objets est le complémentaire de celle de \mathcal{C} , et $\mathcal{R} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_k) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_k)$ le foncteur de restriction.

1. On définit un foncteur $\mathcal{P}_{\mathcal{I}, \mathcal{C}} : \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ (noté simplement \mathcal{P} lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) appelé prolongement par zéro en posant $\mathcal{P}(F)(E) = F(E)$ ($F \in \mathbf{Ob} \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$) si $E \in \mathbf{Ob} \mathcal{C}$, 0 si $E \in \mathbf{Ob} \mathcal{D}$; $\mathcal{P}(F)(t) = F(t)$ si t est une flèche de \mathcal{C} , 0 si c'est une autre flèche de \mathcal{I} ; et $\mathcal{P}(T)_E = T_E$ si T est une flèche de $\mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ et E un objet de \mathcal{C} , 0 sinon.
2. Supposons \mathcal{C} complète à gauche; \mathcal{D} est donc complète à droite.
 - (a) Le foncteur \mathcal{P} est adjoint à droite à \mathcal{R} .
 - (b) Le foncteur \mathcal{P} est adjoint à gauche au foncteur $\mathcal{N} : \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$ défini comme suit :
 - i. pour tout foncteur $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{k}}$ et tout objet X de \mathcal{C} ,

$$\mathcal{N}(F)(X) = \ker \left(F(X) \xrightarrow{\prod F(f)} \prod_{\substack{X \xrightarrow{f} Y \\ Y \in \mathbf{Ob} \mathcal{D}}} F(Y) \right);$$

- ii. si $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{k}}$ est un foncteur, pour toute flèche $X \xrightarrow{u} X'$ de \mathcal{C} , $\mathcal{N}(F)(u)$ est induite par $F(u)$;
- iii. si $T : F \rightarrow G$ est une flèche de $\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$, $\mathcal{N}(T)_X$ est induite par T_X pour tout objet X de \mathcal{C} .

On a un énoncé analogue dans le cas d'une sous-catégorie complète à droite.

Corollaire C.26. *On conserve les notations précédentes. Si la sous-catégorie \mathcal{C} de \mathcal{I} est complète à gauche, on a un diagramme de recollement*

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xleftarrow{\mathcal{P}} \xrightarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{N}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xleftarrow{\mathcal{R}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}})$$

Dans le cas où \mathcal{C} est complète à droite, on a un diagramme de recollement

$$\mathbf{Fct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{P}} \\ \xleftarrow{\mathcal{R}} \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \xrightarrow{\mathcal{R}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{I}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}) \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathcal{R}} \\ \xleftarrow{\mathcal{P}} \xrightarrow{\mathcal{R}} \\ \xrightarrow{\mathcal{P}} \end{array} \mathbf{Fct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}_{\mathbb{k}}).$$

Références

- [BB69] M. BARR & J. BECK – « Homology and standard constructions », in *Sem. on Triples and Categorical Homology Theory (ETH, Zürich, 1966/67)*, Springer, Berlin, 1969, p. 245–335.
- [Bet99] S. BETLEY – « Stable K -theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.
- [CR90] C. W. CURTIS & I. REINER – *Methods of representation theory. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1990, With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Djaa] A. DJAMENT – « Catégories de foncteurs en grassmanniennes et filtration de Krull », en préparation.

- [Djab] — , « Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne », Thèse, Université Paris 13, en préparation.
- [Dja06] — , « Foncteurs de division et structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie \mathcal{F} », arXiv :math.RT/0607595, 2006.
- [Dwy80] W. G. DWYER – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.
- [FFPS03] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI & L. SCHWARTZ – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO & A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [FLS94] V. FRANJOU, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 513–538.
- [Fra96] V. FRANJOU – « Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques », *J. Algebra* **179** (1996), no. 2, p. 501–522.
- [Gab62] P. GABRIEL – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.
- [GS05] G. GAUDENS & L. SCHWARTZ – « Un théorème d’annulation en cohomologie de Mac Lane », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), no. 2, p. 119–122.
- [HLS93] H.-W. HENN, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.
- [HLS95] — , « Localizations of unstable A -modules and equivariant mod p cohomology », *Math. Ann.* **301** (1995), no. 1, p. 23–68.
- [Jen72] C. U. JENSEN – *Les foncteurs dérivés de \varprojlim et leurs applications en théorie des modules*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254.
- [JP91] M. JIBLADZE & T. PIRASHVILI – « Cohomology of algebraic theories », *J. Algebra* **137** (1991), no. 2, p. 253–296.
- [Kuh94a] N. J. KUHN – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.
- [Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.
- [Kuh95] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III », *K-Theory* **9** (1995), no. 3, p. 273–303.
- [Kuh02] — , « A stratification of generic representation theory and generalized Schur algebras », *K-Theory* **26** (2002), no. 1, p. 15–49.

- [Lan92] J. LANNES – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, avec un appendice de Michel Zisman.
- [Lod98] J.-L. LODAY – *Cyclic homology*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili.
- [LZ87] J. LANNES & S. ZARATI – « Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation », *Math. Z.* **194** (1987), no. 1, p. 25–59.
- [LZ95] J. LANNES & S. ZARATI – « Théorie de Smith algébrique et classification des $H^*V\mathcal{U}$ -injectifs », *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), no. 2, p. 189–223.
- [ML57] S. MAC LANE – « Homologie des anneaux et des modules », in *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, Georges Thone, Liège, 1957, p. 55–80.
- [ML63] —, *Homology*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114, Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [ML71] —, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.
- [Pir97] L. PIRIOU – « Sous-objets de $\bar{I} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie des foncteurs entre \mathbf{F}_2 -espaces vectoriels », *J. Algebra* **194** (1997), no. 1, p. 53–78.
- [Pir02] T. PIRASHVILI – « Polynomial functors over finite fields (after Franjou, Friedlander, Henn, Lannes, Schwartz, Suslin) », *Astérisque* (2002), no. 276, p. 369–388, Séminaire Bourbaki, Vol. 1999/2000.
- [Pir03] —, « André-Quillen homology via functor homology », *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no. 6, p. 1687–1694 (electronic).
- [Pop73] N. POPESCU – *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, London, 1973, London Mathematical Society Monographs, No. 3.
- [Pow98a] G. M. L. POWELL – « The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$ », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), no. 3, p. 291–310, With an appendix by Lionel Schwartz.
- [Pow98b] —, « Polynomial filtrations and Lannes' T -functor », *K-Theory* **13** (1998), no. 3, p. 279–304.
- [Pow98c] —, « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.
- [Pow00a] —, « On Artinian objects in the category of functors between \mathbf{F}_2 -vector spaces », in *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000, p. 213–228.
- [Pow00b] —, « The structure of the tensor product of $\mathbf{F}_2[-]$ with a finite functor between \mathbf{F}_2 -vector spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 3, p. 781–805.

- [PR02] T. PIRASHVILI & B. RICHTER – « Hochschild and cyclic homology via functor homology », *K-Theory* **25** (2002), no. 1, p. 39–49.
- [PW92] T. PIRASHVILI & F. WALDHAUSEN – « Mac Lane homology and topological Hochschild homology », *J. Pure Appl. Algebra* **82** (1992), no. 1, p. 81–98.
- [Sch94] L. SCHWARTZ – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan’s fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [Ves05] C. VESPA – « La catégorie \mathcal{F}_{quad} des foncteurs de Mackey généralisés pour les formes quadratiques sur \mathbb{F}_2 », Thèse, Université Paris 13, 2005, <http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011892>.
- [Ves06] — , « The functor category \mathcal{F}_{quad} », arXiv :math.AT/0606484, 2006.