



HAL
open science

Doppler Spectrum Estimation by Ramanujan Fourier Transforms.

Mohand Lagha, Messaoud Bensebti

► **To cite this version:**

Mohand Lagha, Messaoud Bensebti. Doppler Spectrum Estimation by Ramanujan Fourier Transforms.. 2006. hal-00107169v1

HAL Id: hal-00107169

<https://hal.science/hal-00107169v1>

Preprint submitted on 18 Oct 2006 (v1), last revised 1 Feb 2009 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation du Spectre Doppler par la Transformée de Ramanujan Fourier.

Mohand LAGHA¹ – Messaoud BENSEBTI²

¹Aeronautic Department of BLIDA University

²Electronic Department of BLIDA University

University SAAD DAHLEB of BLIDA

B.P. 270 Road of SOUMAA – BLIDA

ALGERIA

¹e-mail : lmohand@yahoo.fr, ²e-mail : m_bensebti@hotmail.com

Résumé : L'estimation classique du spectre Doppler d'un signal radar météorologique, peut se faire par deux méthodes, une méthode temporelle basée sur l'autocorrélation du signal reçu, ou une méthode basée sur l'estimation de la densité spectrale de puissance de Fourier. On introduit un nouveau outil de traitement du signal se basant sur les sommes de Ramanujan $c_q(n)$, adapté à l'analyse de séquences arithmétiques avec plusieurs résonances p/q . Ces sommes sont quasi périodiques suivant le temps n des résonances et apériodique suivant l'ordre q des résonances. De nouveaux résultats seront fournis par l'utilisation de la transformée Ramanujan Fourier (RFT) pour l'estimation du spectre Doppler d'un signal radar météorologique.

Mots clés : Traitement du Signal, Radar Pulse Doppler Météorologique, Séries arithmétiques ou Temporelles, Estimation Spectrale, Transformée Ramanujan.

I. INTRODUCTION

Dans le domaine du traitement du signal on utilise essentiellement des transformées ou des méthodes afin de passer d'un espace à un autre (temps vers fréquence) ou autre, pour ainsi mieux estimer et analyser le contenu informationnel du signal. La transformée de Fourier Discrète DFT et sa transformée rapide FFT étaient jusque là les meilleurs outils utilisés pour des signaux périodiques ou quasi périodiques, mais elle n'est pas vraiment adéquate pour l'analyse des signaux aléatoires apériodiques. Ceci n'est pas un fait nouveau, c'est pourquoi de multiples méthodes ont été développées pour l'analyse de séries temporelles comme les sections de Poincaré, la méthode des ondellettes, ou encore le modèle autorégressif à moyenne mobile ARMA en ne citant que celles-ci.

Dans le contexte de l'estimation des paramètres spectraux d'un signal radar météorologique, il y a eu le développement dans un premier temps d'un algorithme appelé Pulse Pair PP se basant sur le calcul de l'autocorrélation des séries temporelles complexes $Z(I,Q)$ contenant les voies en phase I et en quadrature de phase Q du signal radar reçu, et ce avec un ou deux rangs de développement des moments spectraux en série de Mc-Lauren et ce dans un souci de réduction du temps de calcul. Puis avec l'avancée dans le domaine des calculateurs et de l'informatique on a introduit la transformée de Fourier, puis le modèle AR, et ARMA, pour ainsi travailler dans le domaine spectral afin d'analyser mieux les phénomènes météorologiques détectés.

L'intérêt de l'analyse spectrale des signaux radar météorologiques réside dans le fait qu'on peut détecter et estimer des phénomènes dangereux sévères, tels que les tornades, les averses de pluie, ou encore les micro rafales de vent appelé aussi windshear. Ceci permettra

d'éviter à temps les désagréments et les catastrophes engendrés par ces turbulences météorologiques, et également de faire des prévisions à courte durée.

L'objectif principal de cet article est l'introduction et l'étude de l'utilisation des sommes Ramanujan afin d'estimer l'étendue spectrale de signaux radar pulse Doppler utilisé en météorologie.

La motivation qui nous a amenés à utiliser la méthode de Ramanujan dans le domaine de l'estimation spectrale des signaux radar Doppler météorologique, est le récent intérêt grandissant des chercheurs à l'introduire comme nouveaux outil de traitement du signal[9][10]. C'est une méthode utilisée par Ramanujan pour la première fois, comme moyen pour représenter des séries arithmétiques par des sommes de rang infini. De plus les coefficient de cette transformée c_q proviennent de l'utilisation de fonctions arithmétiques de la théorie des nombres. Ajouter à cela que ces coefficients possèdent la propriété d'orthogonalité et ceci les rend intéressantes à utiliser comme moyen de traitement du signal.

On abordera l'estimation des moments d'ordre zéro, un et deux (puissance, vitesse, et la largeur spectrale) pour un signal radar pulse Doppler météorologique (section II), en traitant les deux domaines d'estimation, le premier temporel PP basé sur l'estimation des autocorrélations et le second domaine, qui est spectral basé sur l'estimation des densités spectrales de puissances PSD en utilisant la transformée de Fourier Discrète. On introduira la notion des sommes de Ramanujan et la transformée de Ramanujan-Fourier présentée comme nouveau outil de traitement du signal de séquences arithmétiques basé dans la théorie des nombres premiers (section III). La simulation se fera sur des données réelles prise par un radar pulse Doppler WSR-88D et des discussions des estimations faites sur le spectre Doppler par plusieurs estimateurs (section IV).

II. ESTIMATION DES MOMENTS SPECTRAUX

Le radar pulsé doppler délivre les tensions en sortie, I en phase et Q en quadrature de phase qui forment l'écho complexe $Z(I,Q)$. La densité spectrale de puissance est donnée par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{ZZ}(\tau)$ [1], [2]

$$S_z(f) = \mathfrak{F}\{R_{ZZ}(\tau)\} \quad (1)$$

Le spectre Doppler reçu aura la forme représentée sous la figure 1.

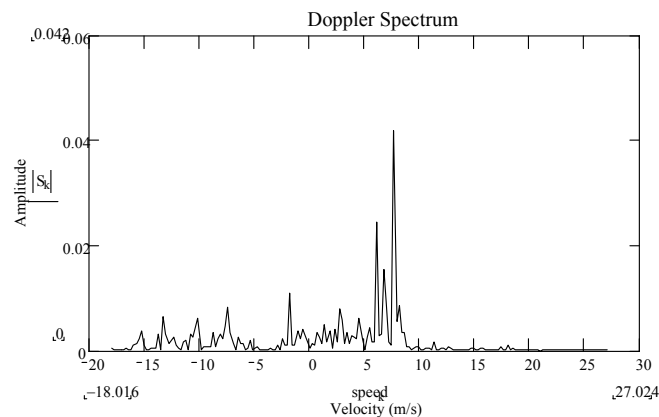


Fig.1 Spectre Doppler reçu pour une cellule de distance

Le spectre Doppler reçu représente la densité spectrale de puissance du signal reçu pour un volume de détection. Par ailleurs la puissance totale de l'écho, sans prendre en compte la puissance du bruit est donnée par la fonction du moment d'ordre zéro [1], [2]:

$$P = \int S(v) dv \quad (2)$$

La vitesse moyenne ou le moment normalisé d'ordre un est donné [2]:

$$\bar{v} = \frac{1}{P} \int v S(v) dv \quad (3)$$

La largeur spectrale de la vitesse moyenne du spectre Doppler est donnée par la racine carrée du moment central de second ordre normalisé [2]:

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{P} \int (v - \bar{v})^2 S(v) dv \quad (4)$$

Le spectre Doppler $S(f)$ peut s'écrire en fonction de la vitesse comme $S(v)$ en utilisant la relation entre la vitesse et la fréquence Doppler avec λ est la longueur d'onde du signal émis : [3]

$$v = \left(\frac{\lambda}{2} \right) f \quad (5)$$

De la même manière, on peut écrire la relation entre la largeur spectrale de la vitesse moyenne et la déviation standard du spectre Doppler par [1], [2]:

$$w = \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sigma_f \quad (6)$$

II.1 ESTIMATION TEMPORELLE

L'algorithme Pulse Pair est un estimateur de la puissance du spectre Doppler, de la vitesse moyenne du vent et de sa variance. Il est basé sur l'estimation de l'autocovariance des signaux radar complexes $Z(kT_s)$.

Si les signaux considérés sont statistiquement indépendants, alors la fonction d'autocovariance peut s'écrire, [1] :

$$R_{ZZ}(T_s) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Z^*(kT_s) Z((k+1)T_s) \quad (7)$$

Avec :

$$Z(kT_s) = I(kT_s) + jQ(kT_s) \quad (8)$$

Où M est le nombre d'impulsions et T_s le temps entre impulsions.

Le moment d'ordre zéro est estimé par [1],[6], [7]:

$$\hat{P} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M |Z(kT_S)|^2 - N \quad (9)$$

où N la puissance du bruit blanc présent dans les échos radar I & Q.

La vitesse moyenne du vent et de sa variance sont donnée par les estimateurs [1],[3],[6], [7]:

$$\hat{v}_{PP} = \frac{\lambda}{4\pi T_S} \cdot \arg[R_{ZZ}(T_S)] \quad (10)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 T_S^2} \left[1 - \frac{R_{ZZ}(T_S)}{R_{ZZ}(0) - N} \right] \quad (11)$$

La largeur spectrale w_v de la vitesse moyenne du vent est obtenue directement par la racine carrée de la variance.

II.2 ESTIMATION SPECTRALE

Une autre alternative d'estimation de la vitesse moyenne \hat{v}_{pp} , de la variance σ_v^2 , et de la largeur du spectre \hat{w}_{pp} Doppler reçu peut être formulée par l'estimation de la densité spectrale de puissance via la transformée de Fourier discrète [5], [7], [11] comme :

$$\hat{V}_{FT} = \frac{\lambda}{2\hat{P}T_S} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} S_Z(k) \cdot \left(\frac{k}{M-1} \right) \quad (12)$$

et :

$$\hat{W}_{FT}^2 = \frac{\lambda^2}{4\hat{P}T_S^2} \sum_{k=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} S_Z(k) \cdot \left(\frac{k}{M-1} + 2 \frac{\hat{V}_{FT}T_S}{\lambda} \right)^2 \quad (13)$$

Avec $S_Z(k)$ la densité spectrale de puissance.

Ces valeurs estimées sont indexées (FT) pour en référer à la méthode de Fourier.

Cette estimation spectrale est normalisée par la puissance totale moyenne \hat{P} qui est traitée comme probabilité sur toute la largeur de bande de travail [4].

Le domaine d'implémentation temporel pour l'estimation PP a l'avantage de devenir beaucoup plus significatif que les méthodes qui requièrent l'utilisation de la transformée de Fourier discrète du point de vue nombre d'opérations, [6], [7].

Le spectre météorologique réfléchi sur le Radar ne va pas probablement violer ces hypothèses, mais la présence du mode clutter renversée (changement de direction) peut biaiser l'estimation spectrale moyenne [6].

La DFT peut être calculée en utilisant un algorithme DFT rapide (FFT). Toutefois, la DFT possède deux inconvénients inhérents à son approche. Le premier est que la résolution en fréquence est limitée par l'inverse de la largeur des échantillons enregistrés. Le second inconvénient implique l'utilisation d'échantillons limités en longueur pour la représentation de signaux d'étendues infinies. En considérant que les séquences seront nulles en dehors de l'intervalle fini, cela sous-entend un fenêtrage des données (signaux) qui sera imposé. Il est équivalent à la multiplication des données par une fenêtre rectangulaire d'amplitude unité. Dans le domaine fréquentiel le résultat est similaire à une convolution d'un spectre avec une fonction *sinc* [6][7].

Ce phénomène est connu sous le nom de pertes spectrales parce que l'énergie du signal ne sera pas représentée dans tout le domaine des fréquences [12][13].

Ces limitations de la DFT seront spécialement problématiques pour des séquences de courte durée, qui sont utilisées dans les Radars à effet Doppler aéroportés [7]. Ceci n'est pas le cas dans notre étude, car pour nos besoins de simulation on va adopter un Radar pulse Doppler fixe terrestre.

III. La transformée de Ramanujan Fourier

Nous introduisons dans ce qui suit la notion des sommes de Ramanujan $c_q(n)$. Elle sont définies comme étant la somme des puissances des racines primitives de l'unité [9].

$$c_q(n) = \sum_{p=1}^q \exp(2i\pi \frac{p}{q} n) \quad (14)$$

$$(p, q) = 1$$

où $(p, q) = 1$ signifie que p et q sont co-premiers.

On peut observer que les coefficients $c_q(n)$ sont des sommes sur l'ensemble des caractères $e_p(n)$.
avec:

$$e_p(n) = \exp(2i\pi \frac{p}{q} n) \quad (15)$$

Les sommes introduites par Ramanujan joueront un rôle de base pour la projection de séquences arithmétiques $x(n)$.

$$x(n) = \sum_{q=1}^{\infty} x_q c_q(n) \quad (16)$$

Sur cette équation on peut facilement observer que pour cette série infinie avec $q \rightarrow \infty$ on peut aboutir à la série de Fourier [9], [10], de plus la transformée de Fourier discrète prend une valeur finie q . La fonction arithmétique $\sigma(n)$ somme des diviseurs de n , peut s'écrire

avec les coefficients RFT comme $\sigma_q = \frac{\pi^2 n}{6 q^2}$, donc

$$\sigma(n) = \frac{\pi^2 n}{6} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{(-1)^n}{2^2} + \frac{2 \cos(2n\pi/3)}{3^2} \\ + \frac{2 \cos(n\pi/2)}{4^2} + \dots \end{array} \right\} \quad (17)$$

Pour les fonction $x(n)$ ayant une valeur moyenne on

$$A_v(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^t x(n) \quad (18)$$

On peut obtenir la formule d'inversion [9]

$$x_q = \frac{1}{\phi(q)} A_v(x(n)c_q(n)) \quad (19)$$

De [9] on peut donner une formule plus générale. Dans tout ce qui suit les coefficients indexés x_q dénoteront la transformée Ramanujan-Fourier ou bien RFT. Il s'en suit qu'il y a une propriété multiplicative des sommes (coefficients) Ramanujan :

$$c_{qq'}(n) = c_q(n)c_{q'}(n) \text{ si } (q, q') = 1 \quad (20)$$

Et la propriété d'orthogonalité est

$$\sum_{n=1}^q c_q^2(n) = q\phi(q) \quad (21)$$

On va évaluer les coefficients Ramanujan en utilisant des fonctions de la théorie des nombres. Soit (q, n) le plus grand commun des diviseurs de q et n . on utilisant la décomposition en nombre premiers d'un nombre on peut écrire q et n comme :

$$q = \prod_i q_i^{\alpha_i} \text{ (} q_i \text{ premier)} \quad (22)$$

$$n = \prod_k n_k^{\beta_k} \text{ (} n_k \text{ premier)} \quad (23)$$

On peut écrire le nombre $\phi(q)$ des fractions irréductibles du dénominateur q , appelé également la fonction Euler totient, comme.

$$\phi(q) = q \prod_i \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \quad (24)$$

La fonction de mobius $\mu(n)$ est définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ contient des carrés } \beta_k > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts} \end{cases} \quad (25)$$

De [9] les sommes de Ramanujan sont évaluées par

$$c_q(n) = \mu\left(\frac{q}{(q,n)}\right) \frac{\phi(q)}{\phi\left(\frac{q}{(q,n)}\right)} \quad (26)$$

Il faut noter que les séquences $c_q(n)$ sont périodiques.

En considérant le problème du calcul de la vitesse moyenne du vent et de sa largeur spectrale par la méthode Ramanujan-Fourier, on peut utiliser le calcul de la densité spectrale de puissance dérivée par la transformée de Fourier discrète [12], [13].

$$\hat{f}_i = \frac{\sum_i f_i S_{RFT}(f_i)}{\sum_i S_{RFT}(f_i)} \quad (27)$$

Et

$$\hat{w}^2 = \frac{\sum_i (f_i - \hat{f}) S_{RFT}(f_i)}{\sum_i S_{RFT}(f_i)} \quad (28)$$

Ou

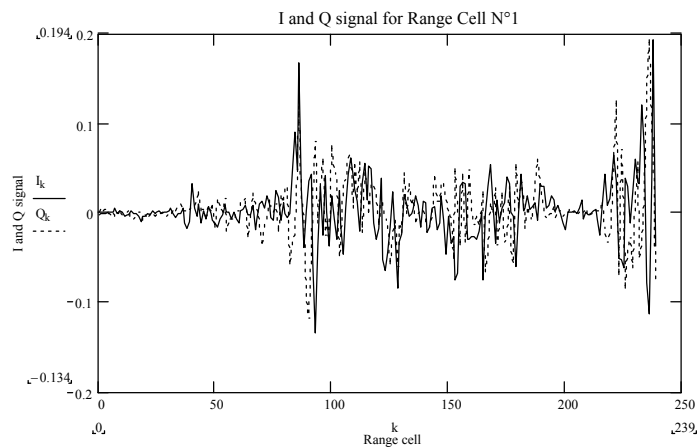
$$\hat{v} = \frac{\lambda}{2} \hat{f} \quad (29)$$

Avec \hat{v} et \hat{w} sont respectivement la vitesse moyenne estimée et sa largeur spectrale, et $S_{RFT}(f_i)$ est spectre Ramanujan de la série complexe $Z(I,Q)$.

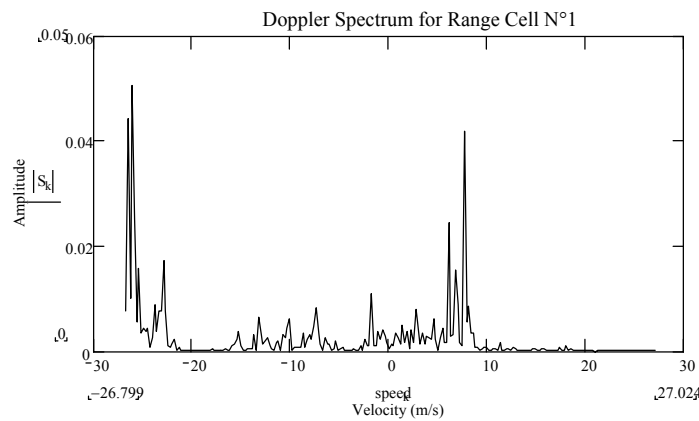
IV. Simulations et Discussions

Les données utilisées sont prises par un radar pulse Doppler WSR-88D à l'état de Tennessee en juillet 1997, elles contiennent les données I, Q, Azimut, Elévation, Prt, Temps (temps UNIX).

Nous donnons dans la figure 3(a) et (b), la représentation des séries complexes I et Q ainsi que leur spectre doppler, pour la cellule de distance n°1.



(a)



(b)

Fig.2 : (a) séries temporelles I et Q; (b) spectre Doppler

Les estimations de vitesses moyennes et des déviations spectrales faites par les trois méthodes sont mentionnées dans les figures 4 et 5.

L'algorithme d'estimation temporelle pulse pair est un algorithme simple à programmer qui ne considère que les autocorrelations des signaux complexes $Z(iT_s)$ des échos radar reçus. C'est un algorithme rapide car son temps d'estimation est bas comparativement à celui des méthodes spectrales FFT, ARMA et il converge dès la première itération [6], [7], voir la figure 4.

L'estimation faite par cette méthode pour l'estimation de la vitesse moyenne du spectre Doppler du vent, est très proche de la vitesse réelle [6].

De plus les estimations Ramanujan produite par la transformée Ramanujan Fourier pour le calcul de la PSD sont Presque similaires à celles fournis par l'algorithme pp. Les résultats ne divergent pas et les valeurs estimées oscillent autour de la vitesse radiale réelle. L'avantage

de cette méthode par rapport aux autres (PP, et FFT) est que son temps de calcul est réduit car on ne travail que sur des échantillons réduits voir le spectre Ramanujan Figure 3.

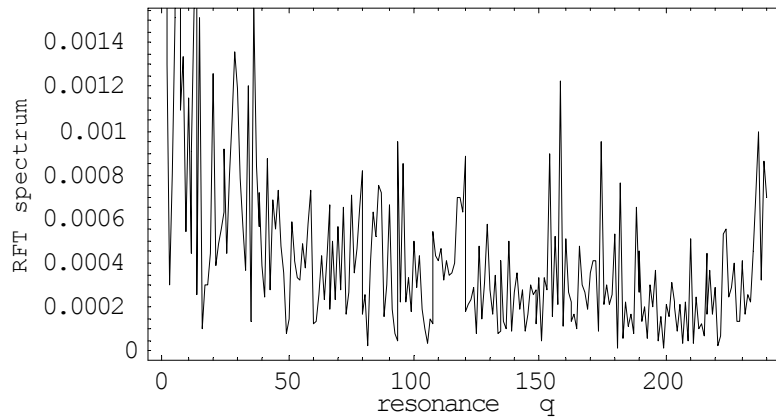


Fig. 3 : Spectre Ramanujan pour la cellule de distance N°1

Donc on peut facilement réduire le temps d'estimation des paramètres météorologiques (vitesses, déviation,..) et de prévision des différents phénomènes par l'utilisation de l'algorithme Ramanujan Fourier.

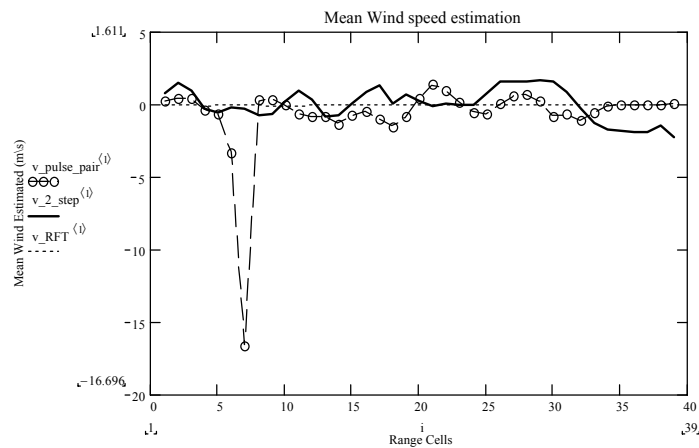


Fig.4 : Vitesse moyenne du vent estimée par les trois estimateurs

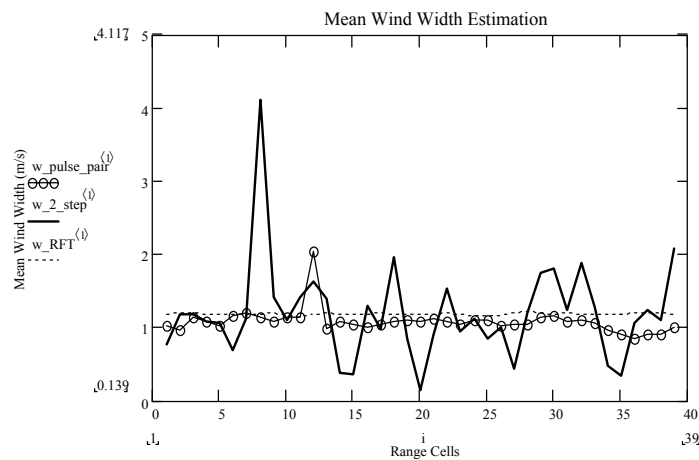


Fig.5 : Largeur spectrale de la vitesse moyenne du vent estimée par les trois estimateurs

RECONNAISSANCE

Nous remercions M. PLANAT du Laboratoire de Physique et Métrologie CNRS- université de Franche-Comté France, pour avoir considérablement contribué à l'élaboration de ce travail.

V. CONCLUSION

L'utilisation de la transformée Ramanujan est très utile pour l'identification des spectres de basse amplitude, c'est une transformée basée sur la théorie des nombres premiers mises en jeu par les fonctions de Moebius ou de Mangoldt.

Sur le plan des calculs cette nouvelle technique employée (RFT) est rapide, comparativement à la méthode de la transformée de Fourier Discrète car les calculs ne se font que sur les échantillons en respectant la fonction Moebius qui elle prend que des résonances coprime $(p,q)=1$. On peut aussi considéré qu'un nombre réduit d'échantillons car l'estimation se fera au voisinage de la fréquence zéro.

L'estimation des spectres et surtout après filtrage sur les échantillons I et Q (série complexe Z) des données météorologiques, s'avère très utile car avec la transformée de Ramanujan on peut distinguer facilement les modes météorologiques de bas niveau, comme les vents de basse intensité, les pluies de faible intensité.

L'application d'autre notions de la théorie des nombres, ou même des mathématiques au domaine du traitement du signal radar météorologique peut contribuer à avoir d'autres résultats et explorer encore ce domaine vaste et passionnant.

RÉFÉRENCES

- [1] R. J. Serafin, "Meteorological Radar," Chap 23, *Radar Handbook, McGraw-Hill Book Company*, 2nd ed, 1990, pp.1-33.
- [2] R. J. Keeler and R. E. Passarelli, "Signal Processing for Atmospheric Radars," Chap 20a, *Radar in Meteorology, AMS book, Atlas*, 1990, pp.199-229.
- [3] D. S. Zrnic' and J.T. Lee, "Pulsed Doppler Radar Detects Weather Hazards to Aviation," *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No 2, Feb. 1982, pp. 183-190.
- [4] R. D. Palmer, "Signal Processing Project", Department of Electrical Engineering University of Nebraska-Lincoln, Spring 2002, ELEC 484/884.
- [5] Chornoboy, E. S., "Optimal mean velocity estimation for Doppler weather radars," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens*, vol. 31, 1993, pp. 575-586.
- [6] M. LAGHA, M. Bensebti, "Performance Comparison of Pulse Pair and 2-Step Prediction Approach to the Doppler Estimation," IEEE International Symposium on Industrial Electronics, July 9-13, 2006, ETS - Downtown Montréal, Canada.
- [7] M. LAGHA, H. M. BENTEFTIFA and S. BOUKRAA "Contribution to the spectral estimate of the mean speed and variance of a windshear at low altitude," 1st International Symposium on Electromagnetism, Satellites and Cryptography IEEE-ISESC'05, 19-21 June 2005, Jijel-Algeria.

- [8] Saman S. Abeysekera, "Performance of Pulse-Pair Method of Doppler Estimation," *IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 34, no. 2 Apr 1998, pp. 520-531.
- [9] M. Planat, H. Rosu, and S. Perrine, "Ramanujan sums for signal processing of low-frequency noise," *Phys. Rev. E*, vol. 66, p. 51128, 2002.
- [10] Saed Samadi, M. Omair Ahmad, and M. N. S. Swamy, "Ramanujan Sums and Discrete Fourier Transforms," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 4, pp. 293-296, April 2005.
- [11] Monakov, A.A.; Blagoveshchensky, D.V., "A Method of Spectral Moment Estimation," *IEEE Trans. Geosci and Remote Sens*, vol. 37, no. 2, March 1999, pp. 805-810.
- [12] Melnikov, Valery M., Zrnić, Dusan S., "Estimates of Large Spectrum Width from Autocovariances," *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, vol. 21, Issue 06, 2004, pp. 969-974.
- [13] Jonggil Lee, "Doppler Moment Estimation in a weather radar," *International Journal of Electronics*, Vol. 89, No 7, Jul 2002, pp. 583 - 592.