



**HAL**  
open science

# Méthodes de Réduction de Modèle pour l'analyse de structures composites à matrice hyperélastique

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin

► **To cite this version:**

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin. Méthodes de Réduction de Modèle pour l'analyse de structures composites à matrice hyperélastique. 17e Congrès Français de Mécanique, Sep 2005, Troyes, France. hal-00106760

**HAL Id: hal-00106760**

**<https://hal.science/hal-00106760>**

Submitted on 5 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Méthodes de Réduction de Modèle pour l'analyse de structures composites à matrice hyperélastique

Stéphane Lejeunes , Adnane Boukamel & Bruno Cochelin

École Généraliste d'Ingénieurs de Marseille & Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique  
Technopôle de Château-Gombert, 38 rue Joliot-Curie F-13451 Marseille Cedex 20  
lejeunes@esim.fr

## Résumé :

*On propose, dans ce papier, une technique pour résoudre les problèmes d'équilibre de structures géométriquement complexes possédant des propriétés d'invariance selon une direction et dont le comportement présente des non-linéarités géométriques et matérielles. Basée sur une formulation en éléments finis, elle consiste à projeter sur une base polynomiale, bien choisie vis-à-vis des propriétés d'invariance, les champs inconnus permettant ainsi de réduire la dimension du problème à résoudre. Cette technique de réduction de modèle a été mise en œuvre pour la modélisation de comportement de structures constituées de matériaux hyperélastique quasi-incompressibles. Un élément fini réduit (3D-2D) est proposé et validé via une confrontation à un modèle de référence 3D.*

## Abstract :

*In this paper we present a model reduction technique, to find the equilibrium state of geometrically complex structure which have, invariant properties in a direction and non-linear material behavior at finite strain. Based on finite-elements formulation, this technique consists in the projection of the unknowns fields on a polynomial basis in the purpose to reduce the problem dimension. A finite-element is developed for the case of nearly-incompressible rubber-like materials. A reduced finite element (2D-3D) is proposed and validated through comparison with 3D model.*

## Mots-clefs :

**réduction de modèle ; hyperélasticité ; éléments-finis, élastomère ; incompressibilité.**

## 1 Introduction

Les pièces à matrice élastomérique sont de nos jours couramment employées dans de nombreux secteurs industriels (structures de révolution multi-couches ou structures élancées en composite à matrice élastomérique). Dans la plus part des cas, la conception de ces pièces, à géométrie complexe, nécessite une modélisation numérique affinée du comportement de ces structures. Cependant l'utilisation d'outils classiques de modélisation (éléments finis tridimensionnels), conduit souvent à une taille de modèles prohibitive. Le développement de modèles réduits, permettant de retranscrire le comportement de ce type de structures a fait l'objet de nombreux travaux, que l'on peut classer en deux catégories : les méthodes numériques de sous-structuration, par sous-domaines [1], ou multi-niveaux [2] et les techniques d'homogénéisation appliqués aux composites à matrice élastomériques [3]. Cependant la validité de la plupart de ces méthodes devient vite limitée dans le cas des non-linéarités géométriques et/ou matérielles, ainsi que le caractère quasi-incompressible que présente l'élastomère.

Nos travaux s'inscrivent dans une logique de réduction de modèles inspirée des méthodes éléments finis semi-analytique développées par Cheung au milieu des années 70, pour la modélisation des plaques élastiques. Ces dernières consistent à discrétiser seulement la section

transverse d'un solide prismatique et à choisir des fonctions de formes continues pour la direction longitudinale, ces méthodes ont depuis trouvées de nombreux domaines d'applications [4]. Nous proposons donc d'étendre ce type de réduction à des lois de comportement hyperélastiques quasi-incompressibles. Des travaux ont déjà été mené dans ce sens, notamment pour la modélisation des structures à symétrie de révolution sous chargement non symétrique [5].

Ce papier s'articule autour des points suivants : après une présentation de la formulation variationnelle adoptée pour la modélisation de matériaux hyperélastiques quasi-incompressibles, nous proposons, à titre d'exemple, une décomposition permettant la réduction 3D-2D, une présentation plus générale regroupant les réductions 3D-2D et 2D-1D a fait l'objet d'un article à paraître [6]. La mise en œuvre d'un élément fini réduit est ensuite introduite, suivie d'une validation par la confrontation des résultats du modèle réduit avec un modèle 3D de référence.

## 2 Formulation variationnelle du problème

### 2.1 Loi de comportement hyperélastique

En désignant par  $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ , le tenseur gradient décrivant le mouvement local et en notant  $J = \det \mathbf{F}$ , la transformation peut être décomposée en une partie compressible  $J^{1/3} \mathbf{I}$  et une partie incompressible  $\bar{\mathbf{F}}$ , soit :  $\mathbf{F} = (J^{1/3}) \bar{\mathbf{F}}$ .

Si on décompose l'énergie de déformation en une partie isochore et une partie volumique ;

$$\psi(\mathbf{F}) = \tilde{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{F}}) + \tilde{\psi}_{vol}(J) \quad (1)$$

la loi de comportement s'écrit, en utilisant le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{\Pi} = \bar{\mathbf{\Pi}} : \mathbb{P} + \tilde{\psi}'_{vol}(J) \text{Cof} \mathbf{F} \quad (2)$$

avec  $\bar{\mathbf{\Pi}} = \partial \tilde{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{F}}) / \partial \bar{\mathbf{F}}$  et  $\mathbb{P} = \partial \bar{\mathbf{F}} / \partial \mathbf{F}$  désignant un tenseur d'ordre 4.

### 2.2 Formulation en lagrangien perturbé

La résolution du problème d'équilibre hyperélastique se ramène au problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_0} \left( \tilde{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + \tilde{\psi}_{vol}(J(\mathbf{v})) \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{v}) \quad (3)$$

Or, en posant  $\tilde{\psi}_{vol}(J) = (1/2\alpha)G(J)^2$ , avec  $G(1) = 0$ , la fonctionnelle (3), s'interprète mathématiquement comme la formulation pénalisée du problème incompressible. La minimisation de cette fonctionnelle (avec une méthode d'intégration réduite selective) est équivalente à la recherche d'un point selle de la fonctionnelle en Lagrangien perturbé [7] :

$$\mathcal{L}_\alpha(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega_0} \left( \tilde{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{v})) + qG(J(\mathbf{v})) - \frac{\alpha}{2}q^2 \right) dV - \mathcal{W}_{ext}(\mathbf{v}) \quad (4)$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle (4) sont :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \left( \frac{\tilde{\psi}_{iso}(\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{u}))}{\partial \bar{\mathbf{F}}} + pG'(J(\mathbf{u})) \text{Cof} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \right) : \delta \mathbf{F} dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\partial \Omega_F} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \\ \int_{\Omega_0} (G(J(\mathbf{u})) - \alpha p) \delta p dV = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Dans la littérature, on peut trouver une multitude de formes de  $\tilde{\psi}_{iso}$  et de  $\hat{\psi}_{vol}$ . Pour ce travail, nous optons pour un modèle de Mooney-Rivlin avec une forme d'énergie volumétrique de Hartman [6].

### 3 Mise en œuvre de la technique de réduction de modèles

#### 3.1 Approximation des champs variables

L'idée de départ consiste à construire des éléments finis réduits, basés sur des fonctions de formes suffisamment riches pour approximer les champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de pression  $p$  sur une unité représentative de la structure dans une direction donnée. L'unité représentative (voir figure 1) est constituée d'une rangée d'éléments dans la direction à condenser.

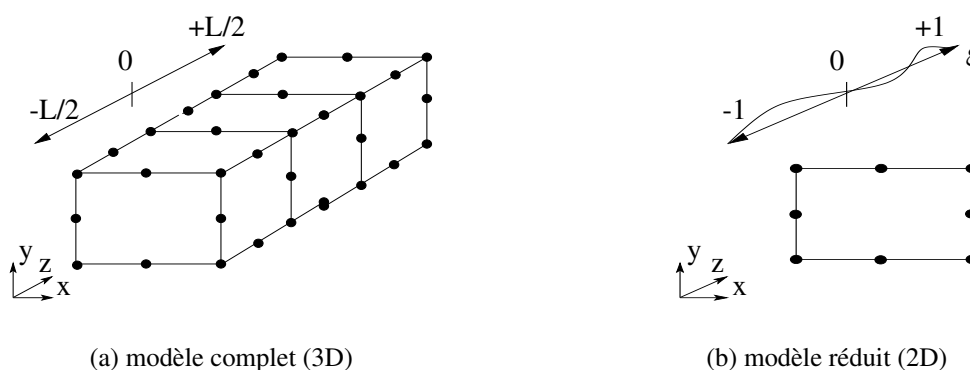


FIG. 1 – Réduction de modèle 3D-2D

Ainsi, dans le cas d'une réduction 3D-2D, on obtient avec le paramétrage  $\xi = 2Z/L$  :

$$\mathbf{u}(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^{n_u} \mathbf{u}^i(X, Y) T_i(\xi), \quad p(X, Y, Z) = \sum_{i=0}^{n_p} p^i(X, Y) T_i(\xi) \quad (6)$$

$n_u$  et  $n_p$  étant les ordres d'approximations des champs dans la base polynômiale  $\mathcal{T}$ .

Le choix de cette base de projection doit être guidé par le type de sollicitations à traiter et doit permettre de décrire l'évolution des grandeurs mécaniques suivant la direction condensée, (pour des sollicitations régulières de type traction, cisaillement ou flexion) en traduisant les effets de bords au voisinage des sections extrêmes. Ainsi, nous utilisons les polynômes de Lagrange d'ordre 1 (permettant d'imposer directement les conditions cinématiques de type translations et/ou rotations), enrichis par des fonction bulles, constituant une correction de l'évolution des grandeurs mécaniques dans la direction condensée. Soit de façon formelle, en utilisant les polynômes de Legendre  $L_n(\xi)$  :

$$T_0(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad T_1(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}, \quad T_n(\xi) = \frac{L_n(\xi) - L_{n-2}(\xi)}{\sqrt{2(2i - 1)}} \quad (7)$$

#### 3.2 Discrétisation par éléments finis

A partir de la décomposition des champs inconnues présenté avec les équations (6), on peut réaliser une approximation éléments-finis classique du déplacement et de la pression en utilisant

des fonctions de formes basés sur des polynômes de Lagrange. Par exemple, dans le cas d'une réduction 3D-2D, on a,

$$\mathbf{u}(X, Y, \hat{\xi}) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=1}^{l_u} N_u^j(X, Y) \mathbf{u}_j^i T_i(\xi), \quad p(X, Y, \hat{\xi}) = \sum_{i=0}^{n_p} \sum_{j=1}^{l_p} N_p^j(X, Y) p_j^i T_i(\xi) \quad (8)$$

$N_u^j$  et  $N_p^j$  sont les polynômes d'interpolations respectives du déplacement et de la pression. Ainsi, les degrés libertés pour les noeuds de déplacement sont les composantes  $\mathbf{u}_j^i$  du déplacement dans la base  $\mathcal{T}$ , alors que les composantes  $p_j^i$  de la pression constituent les ddls des noeuds de pression.

La linéarisation des équations d'Euler-Lagrange (5) à l'aide d'un schéma de Newton-Rapshon, nous conduit au système matriciel élémentaire suivant :

$$\langle \Delta u_e, \Delta p_e \rangle \begin{bmatrix} [k_t] & [g] \\ [g]^t & -[m_p] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta u_e\} \\ \{\Delta p_e\} \end{Bmatrix} = \langle \Delta u_e, \Delta p_e \rangle \begin{Bmatrix} \{f_{ext}\} - \{r\} \\ -\{i\} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Partant de cette formulation élémentaire, une bibliothèque d'éléments finis a été implémentée dans le code ZéBuLoN. Citons en particulier l'élément Q9P3 (quadrilatère à 9 noeuds de déplacement et 3 noeuds de pression).

#### 4 Validation

Afin de caractériser la qualité des solutions obtenus avec l'élément réduit, nous avons effectué des comparaisons avec un modèle de référence utilisant des éléments-finis 3D classiques. Le modèle de référence est basé sur la modélisation du comportement d'un barreau élastomérique, via des éléments finis hyperélastiques de type H20P4 (éléments hexaédriques quadratiques à pression linéaire). Nous avons réalisé sur ce modèle des simulations d'essais de traction, cisaillement ou de flexion en imposant des déplacements sur une section extrême et en encastrant l'autre extrémité (voir figure 2). Par ailleurs, une analyse de l'influence de la finesse du maillage sur la précision des résultats du modèle de référence, a permis d'en fixer la taille, soit 139 231 ddls.

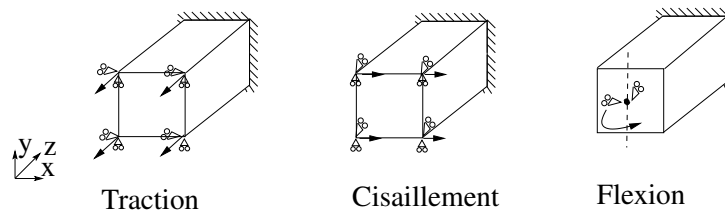


FIG. 2 – Type de sollicitations traitées

Pour la validation de la réponse globale, la confrontation s'effectue à partir des composantes du torseur résultant des réactions aux déplacements imposés. On utilise un modèle réduit 3D-2D à 25 éléments de type Q9P3 avec  $n_u = 12$  et  $n_p = 9$ , ce qui représente un système à 9 972 ddls. La figure 3(a) présente les résultats d'un test de traction où l'on impose un déplacement vertical tout en bloquant les déplacements transverses et les rotations sur une extrémité de la poutre, l'autre extrémité est encastrée. Les figures 3(a), 4 et 5 correspondent aux résultats d'un test de cisaillement et d'un test de flexion. Le bilan de ces tests traduit le bon accord entre le modèle réduit et complet, concernant le comportement global d'une structure type.

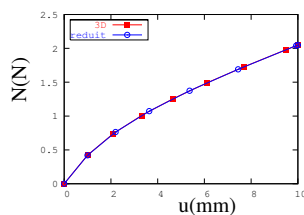
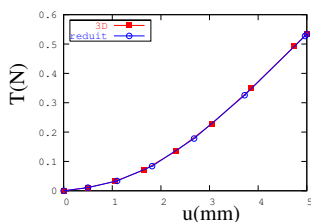
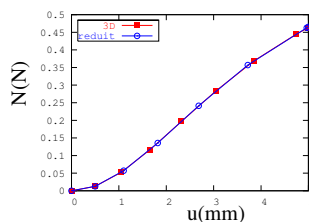


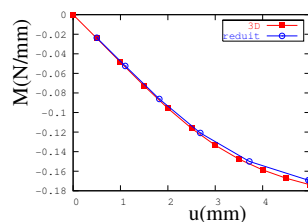
FIG. 3 – Test de traction



(a) résultante tangente

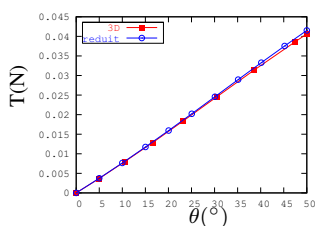


(b) résultante normale

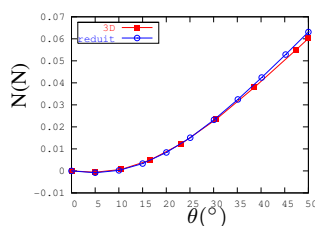


(c) moment résultant

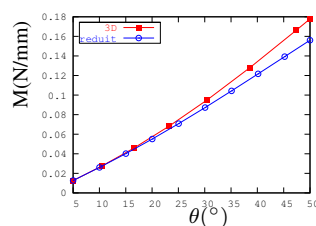
FIG. 4 – Test de cisaillement, poutre élastomérique (3D)



(a) résultante tangente



(b) résultante normale



(c) moment résultant

FIG. 5 – Test de flexion, poutre élastomérique (3D)

## 5 Application

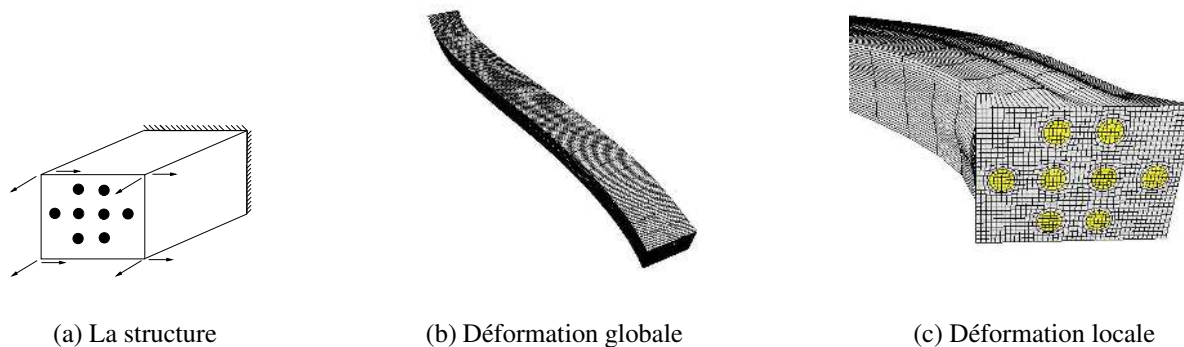


FIG. 6 – Essai de traction/cisaillement sur une poutre composite

A titre d'application, nous présentons l'exemple d'une structure élancée (800mm de longueur,  $60 \times 80\text{mm}^2$  de section), constituée de 8 barreaux cylindriques, linéairement élastique, noyés dans une matrice en élastomère hyperélastique quasi-incompressible. Cette structure est soumise, au niveau de sa section extrême, à un chargement de 40mm de traction, combiné à un cisaillement de 240mm (cf 6). Cette structure a été modélisée à l'aide d'éléments réduits Q9P3 pour l'élastomère et des éléments Q8 pour les barreaux, avec un développement polynomial tel que,  $n_u=10$  et  $n_p=8$ ; soit un modèle avec 43 110 ddls. Les figures 6, présente une vue globale ainsi qu'un zoom au voisinage du bord de la déformée de cette structure composite.

## 6 Conclusion

Nous avons proposé dans ce papier, une technique de réduction de modèles à comportement non-linéaire, permettant de traiter le cas de structures possédant une propriété d'invariance suivant une direction et dont l'analyse directe conduit généralement à un grand nombre de degrés de libertés ou un rapport d'élancement d'éléments pénalisant lors d'une modélisation éléments-finis classique. Ainsi, à l'aide d'une projection des champs inconnues sur une base polynômiale d'ordre suffisamment élevé, on peut condenser une direction géométrique et ainsi réduire la dimension du modèle. Une bibliothèque d'éléments réduits a ainsi été réalisée, pour résoudre des problèmes de structures à matrice hyperélastique quasi-incompressible. Cette technique permet de déterminer, avec un gain de 14 sur le nombre de ddls, la réponse globale de structures élancées, tout en déterminant de manière assez précise les états de contraintes et de déformation locales [6]. De plus, elle reste indépendante des lois de comportement mises en œuvre ce qui peut permettre l'utilisation de modèles de comportements plus complexes.

## Références

- [1] Françoise Léné and Christian Rey. Some strategies to compute elastomeric lamified composite structures. *Composite Structures*, 54 :231–241, 2001.
- [2] S. Meo, O. Debordes, and A. Boukamel. Assemblage de structures une à une invariante dans une direction. *Mécanique & Industries*, 3 :211–225, 2002.
- [3] H. Dumontet. *Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie Paris 6, 1990.
- [4] Y.K. Cheung and F.T.K. Au. Isoparametric spline finite strip for degenerate shells. *Thin-Walled Structures*, 21 :65–92, 1995.
- [5] A. Boukamel. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 1988.
- [6] S. Lejeunes, A. Boukamel, and B. Cochelin. Model reduction method for composites structures with hyperelastic matrix. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, A paraître.
- [7] D.S. Malkus and T.J.R. Hughes. Mixed finite element methods - reduced and selective integration techniques : a unification of concepts. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 15 :63–81, 1978.