



**HAL**  
open science

# Caractérisation acoustique de matériaux poreux inhomogènes : première approche du problème inverse dans le domaine temporel

Laurent de Ryck, Zine El Abiddine E.A. Fellah, Armand Wirgin, Walter Lauriks, Claude Depollier

## ► To cite this version:

Laurent de Ryck, Zine El Abiddine E.A. Fellah, Armand Wirgin, Walter Lauriks, Claude Depollier. Caractérisation acoustique de matériaux poreux inhomogènes : première approche du problème inverse dans le domaine temporel. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-00105816

**HAL Id: hal-00105816**

**<https://hal.science/hal-00105816>**

Submitted on 24 Aug 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Caractérisation acoustique de matériaux poreux inhomogènes : première approche du problème inverse dans le domaine temporel.

Laurent de Ryck, Zine El Abidine Fellah, Walter Lauriks, Armand Wirgin, Claude Depollier

Laboratorium voor Akoestiek en Termische Fysica  
Katholieke Universiteit Leuven  
200 D celestijnenlaan B-3001 Heverlee (Belgique)  
laurent.deryck@fys.kuleuven.ac.be

### Résumé :

La caractérisation acoustique de matériaux poreux inhomogènes peut se traduire par la reconstruction de paramètres dépendants des variables d'espace et de temps propres au matériau poreux étudié. On a donc à résoudre un problème inverse. Pour commencer notre étude, nous optons pour la reconstruction dans un cas sans pertes d'un seul paramètre, la tortuosité, dépendant de l'épaisseur du matériau. Nous utiliserons pour cela des méthodes temporelles, entre autres le "Wave Splitting". Cependant on a besoin d'informations qu'il faut récupérer des signaux incidents et réfléchis (Dans notre exemple ici, nous n'avons pas besoin de la transmission). Nous obtenons l'opérateur réflexion par déconvolution or cette opération est un problème mal posé et nécessite des méthodes de régularisation pour être traité. Nous avons réalisé une partie simulation, où l'opérateur réflexion s'obtient analytiquement et une partie expérimentale où la déconvolution tient un rôle clé.

### Abstract :

The acoustic characterization of inhomogeneous porous materials can be considered as an inverse problem to reconstruct some characteristic material parameters of porous medias with dependance in space and time. Our study deals with the reconstruction in a lossless case of only one parameter, the tortuosity, depending on one dimension (sample thickness). We chose time domain methods such as Wave Splitting. Nevertheless, we need information about scattering operators to make it working. From incident and reflected signals, only the reflection operator is needed in our case. We obtain it through a deconvolution. But deconvolution is an ill-posed problem and has to be solved following regularization methods. First, we do numerical simulations in which the reflection operator can be analytically known. Then, we try experimental measurement and take care of the deconvolution problem.

### Mots-clefs :

**problème inverse, wave splitting, déconvolution**

### Introduction

Le but de notre travail est de pouvoir reconstruire des paramètres de matériaux poreux inhomogènes, donc des paramètres dépendant de l'espace et/ou du temps. Premièrement, nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices. Nous considérerons des longueurs d'ondes grandes devant la taille des pores, considérés ouverts et un squelette parfaitement rigide. Avec de telles conditions, nous nous plaçons dans la théorie du fluide équivalent (ALLARD[1]) qui nous permet de traiter les poreux comme des fluides auxquels nous introduisons de nouveaux paramètres comme la *porosité*  $\phi$ , rapport du volume totale sur le volume de fluide contenu dans le poreux, la *tortuosité*  $\alpha$  qui traduit le fait que l'onde traverse des pores de différentes tailles non alignés et les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques traduisant des corrections sur les pertes visqueuses et les pertes par échanges de chaleur dues à la géométrie du matériau.

Dans le cas étudié ici à titre d'exemple, on néglige les pertes et nous ne considérerons dans un premier temps tous les paramètres constants à l'exception de la tortuosité, fonction de

l'épaisseur de l'échantillon, le problème étant choisi unidimensionnel. On s'intéresse désormais au problème inverse. Nous utilisons ici une méthode liée au domaine temporel. Plus ou moins intuitive physiquement mais efficace. Il s'agit de la méthode du "Wave Splitting" qui consiste à séparer le champ de pression total en deux composantes se propageant dans des directions opposées. Cette méthode est déjà utilisée pour des études similaires (CAO & HE [2]). A partir de cette méthode on peut écrire une équation différentielle partielle sur les opérateurs de réflexion et de transmission.

En premier lieu, nous étudierons un cas théorique, simulé en présentant les méthodes employées. Puis, nous tenterons de traiter des mesures expérimentales. Un nouveau problème est rencontré alors, celui de la déconvolution. En effet, la déconvolution est un problème mal posé et nous devons palier à ceci par des méthodes de régularisation. Ce qui sera traité dans un second point.

## 1 Reconstruction du profil de tortuosité dans un cas sans pertes. Problème inverse dans le domaine temporel.

Afin d'éprouver les méthodes temporelles présentées en introduction, nous commençons par étudier un cas simple, idéal, sans pertes. Nous ne cherchons à reconstruire que le profil de la tortuosité  $\alpha(x)$  car c'est le seul paramètre caractéristique qui apparaît dans l'équation de propagation sans pertes. Ensuite, l'onde est envoyée en incidence normale sur l'échantillon. Nous considérerons donc un cas unidimensionnel. Avec de telles conditions, nous n'avons besoin que du signal réfléchi pour résoudre le problème inverse.

Enfin, pour vérifier si nous pouvons détecter des variations de tortuosité à travers l'épaisseur du matériau, nous avons opté pour un modèle simple consistant en un multicouche de mousses de polyuréthane aux propriétés homogènes et connues.

### 1.1 Simulations sur un bicouche : L'opérateur réflexion $R(t)$ .

Pour commencer, nous allons simuler un bicouche aux propriétés réalistes. Nous pouvons trouver une expression analytique simple de l'opérateur réflexion  $R(t)$  quand le signal incident  $p^i(x, t)$  est une impulsion de Dirac  $\delta(t)$ . Cet opérateur est l'équivalent dans le domaine temporel du coefficient de réflexion. Par définition du signal réfléchi  $p^r(x, t)$ , celui-ci est obtenu par convolution de l'opérateur réflexion avec le signal incident. Dans notre cas, l'impulsion  $\delta(t)$  étant l'élément neutre de la convolution, nous avons égalité entre le signal réfléchi et l'opérateur réflexion à la condition que ces grandeurs soient normalisées par rapport au signal incident. Concernant la reconstruction de  $R(t)$ , il suffit de prendre en considération les conditions aux interfaces et de décomposer les ondes en ondes aller et retour, ainsi que dans les exemples de KRUEGER[3]. En toute logique,  $R(t)$  est composé de pics de Dirac coefficientés représentant les changements de valeurs des différents paramètres aux interfaces. La démarche de la méthode temporelle pour l'obtention de  $R(t)$  reste similaire à la recherche de la réponse impulsionnelle en réflexion par la méthode fréquentielle *via* la transformée de Fourier ou par une méthode impliquant la transformée de Laplace. Pour nos simulations, nous choisissons un bicouche de matériaux poreux aux caractéristiques regroupées dans le tableau 1.

Les impulsions de Dirac sont difficiles à inclure dans les calculs numériques, car nous devons effectuer des interpolations et la valeur maximale des pics est une information capitale. Nous choisissons alors une impulsion gaussienne normalisée comme approximation du Dirac, plus facile à inclure dans les calculs numériques et c'est une fonction continue facile à interpo-

	Couche 1	Couche 2
épaisseurs	$l_1 = 1\text{cm}$	$l_2 = 0,5\text{cm}$
tortuosités	$\alpha_1 = 1,1$	$\alpha_2 = 1,4$

TAB. 1 – Propriétés du bicouche utilisé pour les simulations. La porosité, paramètre qui apparaît dans les conditions aux interfaces, est considérée constante dans les deux couches.

ler. Nous obtenons alors l'opérateur réflexion normalisé de la figure 1.

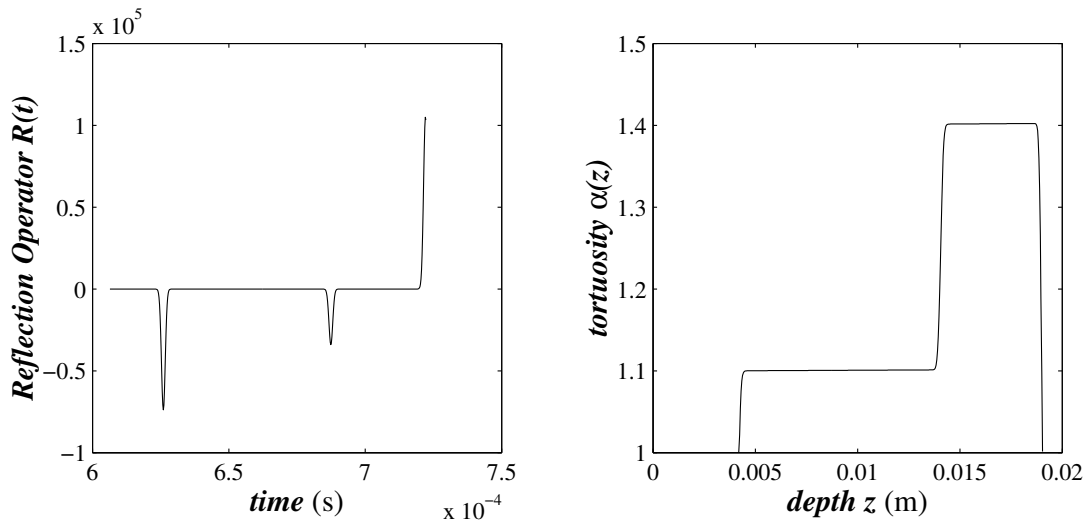


FIG. 1 – Opérateur réflexion pour un signal incident de type Gaussien et le profil de tortuosité reconstruit.

## 1.2 Simulations sur un bicouche : problème inverse et reconstruction du profil de tortuosité.

Pour le problème inverse, nous avons choisi une méthode temporelle qui est bien adapté dans ce genre d'études où certains coefficients de l'équation d'onde, équation différentielle de type hyperbolique, dépendent du ou des variables. Particulièrement quand le signal incident est une impulsion ou s'en rapproche.

Pour résoudre le problème inverse dans notre cas, nous n'avons besoin que de l'opérateur réflexion  $R(t)$ , et du temps  $\ell$  que met l'onde pour traverser toute l'épaisseur du matériau étudié. On cherche donc l'expression de  $R(t)$  pour  $t$  dans l'intervalle  $[0, \ell]$  et pour  $x$  variant de 0 à  $L = l_1 + l_2$ , l'épaisseur totale de l'échantillon. Pour se faire, nous pouvons utiliser la méthode de séparation d'onde, ou "Wave Splitting", qui consiste à séparer les ondes allant dans le sens des  $x$  croissants, notées  $p^+$  et celles allant dans le sens des  $x$  décroissants, notées  $p^-$ .

Pour mettre en pratique cette méthode, on utilise la définition suivante en écriture matricielle, bien plus pratique dans les calculs qu'impliquent le "Wave Splitting".

$$\begin{pmatrix} p \\ \partial_x p \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c^{-1}(x)\partial_t & c^{-1}(x)\partial_t \end{pmatrix} \quad (1)$$

où  $c(x)$  représente la vitesse de propagation dans l'échantillon.  $c(x)$  est proportionnel à  $1/\sqrt{\alpha(x)}$ . On réécrit aisément l'équation de propagation dans la base  $[p, \partial_x p]$  qui devient dans la base  $[p^+, p^-]$  :

$$\partial_x \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^{-1}(x)\partial_t & 0 \\ 0 & c^{-1}(x)\partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \frac{c'(x)}{c(x)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^+ \\ p^- \end{pmatrix} \quad (2)$$

où  $c'(x)$  désigne la dérivée de la vitesse par rapport à  $x$ .

On a réduit l'équation différentielle du second ordre en un système de deux équations différentielles couplées du premier ordre. Or, par définition de l'opérateur réflexion, ce dernier nous donne une relation simple entre  $p^+$  et  $p^-$ . Comme les pressions dépendent de  $x$  et  $t$ , l'idée est de construire un opérateur réflexion dépendant aussi de  $x$  :  $R(x, t)$  (*invariant imbedding*). Dans notre cas, ce dernier est l'opérateur réflexion de la sous-couche  $[x, L]$  et donc  $R(t) = R(0, t)$ . Par définition, on a alors :

$$p^-(x, t) = R *_t p^+(x, t) = \int_0^t R(x, t-s) p^+(x, s) ds \quad (3)$$

où  $*_t$  désigne la convolution par rapport à  $t$ . Cette relation nous permet de nous débarrasser de  $p^-$  dans la relation (2). Et d'obtenir ainsi une équation différentielle dont la solution est  $R(x, t)$ .

Maintenant, il suffit d'inverser cette dernière équation. Pour cela on va faire un changement de variables pour en avoir de nouvelles sans dimensions.

$$z = z(x) = \int_0^x \frac{dx'}{\ell c(x')} \quad (4)$$

$$s = t/\ell \quad (5)$$

où  $\ell = \frac{1}{c_0} \int_0^L \sqrt{\alpha(x)} dx$  le temps que met le front d'onde pour traverser l'échantillon. On a alors les équations suivantes :

$$\partial_z R(z, s) - 2\partial_s R(z, s) = -\frac{1}{2} A(z) \int_0^s R(z, s-s') R(z, s') ds' \quad (6)$$

$$R(z, 0) = -\frac{1}{4} A(z) \quad (7)$$

$$R(1, s) = 0 \quad (8)$$

avec  $A(z) = -\frac{d}{dz} \ln[c(x(z))]$ . A partir de cette grandeur et des équations précédentes, de proche en proche, on peut retrouver les valeurs de  $x(z)$  et  $\alpha(x)$  :

$$x(z) = c_0 \ell \int_0^z \left\{ \exp \left[ - \int_0^{z'} A(z'') dz'' \right] dz' \right\}, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (9)$$

$$\alpha(x(z)) = \exp \left\{ 2 \left( \int_0^z A(z') dz' \right) \right\}, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (10)$$

A partir de ces équations, nous avons obtenu pour les valeurs du tableau 1 le profil de tortuosité de la figure 1. Nous retrouvons parfaitement nos données initiales, les épaisseurs et les valeurs de tortuosité.

## 2 Cas de signaux réels, déconvolution

Afin de chercher à valider l'algorithme d'inversion, nous avons cherché à réaliser des mesures expérimentales. On a rencontré plusieurs problèmes.

Le premier est de pouvoir réaliser un multicouche où les couches sont en contact sans air ou colle entre et de manière homogène. De plus, il est souvent difficile de détecter la réflexion à la troisième et dernière interface couche2 - air pour un bicouche. Pour commencer, nous essaierons d'inverser sur une couche homogène simple.

Le second problème est de pouvoir déconvoluer les signaux réfléchis des signaux incidents pour obtenir l'opérateur réflexion. Cependant, la déconvolution est typiquement un problème mal posé qu'il faut régulariser. Nous pouvons le faire dans le domaine de Fourier classiquement en évitant d'avoir des points de valeur zéro dans la transformée du signal incident par un filtre de régularisation (cf. [2]). Nous pouvons aussi le faire dans le domaine temporel, la déconvolution étant numériquement équivalente à la résolution d'un système d'équation de type  $Ax = b$  où  $A$  est ici une matrice triangulaire inférieure et  $x$  et  $b$  des vecteurs dont le premier contient les inconnues. Le problème est mal posé lorsque  $A$  tend à être singulière ce qui est toujours le cas de la déconvolution. Comme la résolution de ce genre d'équation intéresse beaucoup de domaines et les mathématiques en général, il existe une vaste littérature et donc aussi différentes méthodes de régularisation. Celle retenue jusqu'à présent est la "Singular Value Decomposition" (SVD) avec régularisation de TIKHONOV. Ce choix a été retenu car nous avons un critère assez robuste - presque toujours infaillible - pour déterminer la valeur du paramètre de régularisation, noté  $\lambda$  par la méthode de la "L-curve". Cette dernière est une courbe en forme de L où le point faisant le coin correspond à la valeur optimale du paramètre recherché (cf. HANSEN [4]). Nous obtenons souvent des résultats comme ceux de la figure 2. Nous avons ici une seule couche d'épaisseur  $L = 1\text{cm}$  et de tortuosité  $\alpha = 1,04$ . Nous ne pouvons pas détecter la réflexion à la seconde interface. Ceci a dû être rendu plus délicat du fait qu'une autre difficulté s'est ajoutée ici : l'incidence oblique imposée par les transducteurs. Le programme d'inversion a alors considéré l'échantillon comme semi-infini.

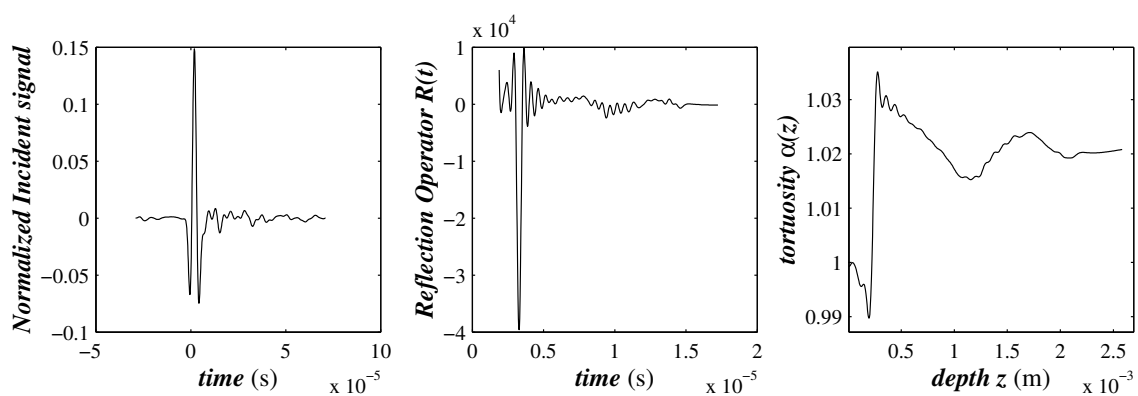


FIG. 2 – Signal incident expérimental. Opérateur réflexion obtenu par déconvolution suivant la méthode SVD régularisée. Profil de tortuosité correspondant.

### 3 Conclusion

Le cas simple étudié ici nous a permis de tester des méthodes d'inversion et de déconvolution qui pourront être appliqués à des cas plus complexes et proches de la réalité physique. En premier lieu, la simulation effectuée sur un bicouche virtuel donne bien les résultats attendus. En second lieu, nous nous sommes trouvés confrontés à la difficulté de réaliser expérimentalement un cas satisfaisant les hypothèses simplificatrices. De plus, les phénomènes de pertes, de dispersion et le bruit rendent difficile les traitements numériques, en particulier la déconvolution et par conséquent l'inversion. La méthode du Wave Splitting permet d'obtenir des équations analytiques qui permettent de construire un algorithme assez rapide et efficace que nous espérons fiable pour les cas plus complexes à venir. En effet, la prochaine étape est de modéliser un cas tenant compte des pertes viscothermiques dans lesquelles de nouveaux paramètres propres aux matériaux poreux, les longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques, vont apparaître. Et une nouvelle difficulté va s'ajouter car nous ne pourrions plus nous passer de l'opérateur transmission auquel le travail effectué sur l'opérateur réflexion pourra servir.

### Références

- [1] J.-F. ALLARD. *Propagation of sound in Porous Media : Modeling Sound Absorbing materials*. Chapman and Hall, London, 1993.
- [2] J. CAO and S. HE. "reconstruction of the velocity and density in a stratified acoustic half-space using a short-pulse point source". *J. Acoust. Soc. Am.*, 102(2) :815–824, 1997.
- [3] R.J. KRUEGER. "inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties". *J.Math.Phys.*, 23(3) :396–404, 1982.
- [4] P.C. HANSEN. *Regularisation Tools : A Matlab package for analysis and solution of ill-posed problems*. <http://www.imm.dtu.dk/~pch>, 2001.