HAL open science

Application de la théorie de Biot sur un tissu biologique

Naima Sebaa, Zine El Abiddine E.A. Fellah, Walter Lauriks, Claude Depollier

To cite this version:

Naima Sebaa, Zine El Abiddine E.A. Fellah, Walter Lauriks, Claude Depollier. Application de la théorie de Biot sur un tissu biologique. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. pp.1-6. hal-00105798

HAL Id: hal-00105798

https://hal.science/hal-00105798v1

Submitted on 24 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Application de la théorie de Biot sur un tissus biologique.

$N.Sebaa^{1,3}$, $Z.E.A.Fellah^{2}$, $W.Lauriks^{1}$ & $C.Depollier^{3}$

[1] Laboratorium voor Akoestiek en Thermische Fysica, Katholieke Universiteit Leuven,
Celestijnenlaan 200 D, B-3001 Heverlee, Belguim.
[2] Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS-UPR 7051, Marseille, France.
[3] Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine,UMR CNRS 6613, Le Mans, France.
Naima.Sebaa@fys.kuleuven.ac.be

Résumé :

L'os trabéculaire est un milieu complexe constitué d'un squelette rigide saturé par de la moelle osseuse et du sang. La théorie de Biot s'avére adaptée pour décrire le comportement des ondes acoustiques dans un tel milieu. La formulation temporelle de la théorie de Biot permet d'étudier l'influence des paramètres sur le comportement d'impulsions ultrasonores qui se propagent dans un échantillon poreux. Un programme d'inversion basé sur la minimisation de l'écart quadratique entre signaux transmis théorique et expérimental est réalisé pour évaluer les paramètres du modéle les plus sensibles. Dans ce but, plusieurs échantillons sont étudiés in vitro et on détermine les paramètres pour que signaux temporels transmis expérimentaux et théoriques se superposent au mieux.

Abstract :

In this paper direct and inverse scattering problems of ultrasonic pulses through cancellous bone are investigated. Reflection and transmission coefficients are derived for a slab of cancellous bone having an elastic frame using Biot's theory. The inverse problem for waves transmitted by cancellous bone is solved at normal incidence. Experimental results for slow and fast waves transmitted through cancellous bone samples are given and compared with theoretical predictions

Mots-clefs :

Théorie de Biot ; Os trabéculaire ; Problème inverse.

1 Introduction

L'ostéoporose est une maladie caractérisée par une faible masse osseuse, la détérioration micro architecturale du tissus osseux, une fragilité osseuse et par suite, une augmentation du risque de fracture. L'ostéoporose est donc une pathologie dégénérative du tissus osseux étroitement liée au cycle de vie du squelette. Elle résulte du déséquilibre entre résorption et formation osseuse. Elle atteint particuliérement l'os trabéculaire localisé principalement dans les vertèbres, le poignet et les extrémités des os longs, et se manifeste surtout chez la femme menopoausée où la diminution des estrogènes réduit la formation de l'os et augmente sa résorption. Le suivi médical de cette pathologie est actuellement l'objet d'une intense recherche. Plusieurs méthodes ont été développées : mesure de la densité minérale par rayon X, ultrasons,... Si les raons X permettent d'accéder à des images de la structure osseuse avec une bonne résolution, ils ont l'inconvéniant d'être ionisants, réduisant de ce fait la fréquence de leur utilisation. Les ultrasons quant à eux s'ils conduisent à des images ayant une résolution moins bonne sont sans danger pour le patient. Dans cette communication, on s'intéresse à la propagation des ondes acoustiques dans l'os trabéculaire considéré comme un milieux poreux saturé par un fluide. La théorie de Biot[1] developpée dans le cadre de la recherche pétrolière est bien adaptée pour

décrire le comportement des ondes acoustiques dans un tel milieu. Appliquée à l'os trabéculaire, elle a donné quelques résultats importants [2, 3, 4, 6]. Les ondes lente et rapide prédites par la théorie de Biot ont été identifiées dans l'os trabéculaire du bovin dans les années 90 par Hosokawa et Otani[4]. L'exposé est organisé comme suit : dans la partie 2 on rappelle le modèle de Biot et ces principaux résultats et on présente une modélisation temporelle de la diffusion(transmission et reflexion) des ondes acoustiques par un milieu poreux d'épaisseur finie. Dans la partie 3 on donne les éléments du problème inverse. La partie 4 est dédiée à l'application de notre modéle à des résultats expérimentaux.

2 Modèle

La théorie de Biot est la modélisation la plus générale de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu poreux saturé conduisant à des équations linéaires. Elles est basée sur l'hypothèse que le poreux est constitué de deux milieux continus : un solide (la structure solide) et un fluide en interaction. Cette hypothèse est vérifiée lorsque la longueur d'onde de la perturbation acoustique est grande devant la taille des inhomogeneités du poreux (rayon des pores). Dans la théorie de Biot, les déplacements du solide $(\vec{u})$ et du fluide $(\vec{U})$ obéissent aux equations :

$$\tilde{\rho}_{11}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+\tilde{\rho_{12}}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=P\nabla(\nabla.\vec{u})+Q\nabla(\nabla.\vec{U})-N\nabla\wedge(\nabla\wedge\vec{u}),$$
$$\tilde{\rho}_{12}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}+\tilde{\rho_{22}}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=Q\nabla(\nabla.\vec{u})+R\nabla(\nabla.\vec{U}). \quad (1)$$

Les coefficients P, Q et$R$ sont les coefficients élastiques de Biot et N est le module de cisaillement de la structure solide. P, Q et R sont des fonctions des modules d'incompressibilité des phases fluide et solide et de la porosité ϕ du milieux poreux :

$$P=\frac{(1-\phi)(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})K_s+\phi\frac{K_s}{K_f}K_b}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}}+\frac{4}{3}N,$$
$$Q=\frac{1-\phi-\frac{K_b}{k_s}\phi K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}},\quad R=\frac{\phi^2K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}}. \quad (2)$$

K_f, K_s et K_b sont respectivement les modules d'incompressibilité de la phase fluide dans le matériau poreux, de la phase solide et de la structure dans le vide. Ils dépendent des paramètres mécaniques classiques : les modules d'Young et les coefficients de Poisson du solide E_s, ν_s et du squelette E_b, ν_b tels que : $K_s=\frac{E_s}{3(1-2\nu_s)}$, $K_b=\frac{E_b}{3(1-2\nu_b)}$, $N=\frac{E_b}{2(1+\nu_b)}$.
Les densités massiques $\tilde{\rho}_{kl}$ sont définies par : $\tilde{\rho}_{kl}=\rho_{kl}+(-1)^{k+l}jg(\omega)$, avec $(j^2=-1)$ où $g(\omega)$ modélise les pertes visqueuses. Pour définir les densités ρ_{kl}, on introduit deux paramètres importants du milieu poreux que sont la tortuosité dynamique $\alpha(\omega)$ et la longueur caractéristique visqueuse Λ. A haute fréquence (où l'épaisseur de la couche limite visqueuse $\delta=(\frac{2\eta}{\omega\rho_f})^{\frac{1}{2}}$ est inférieure à la taille moyenne des pores), $\alpha(\omega)$ devient[5] :

$$\alpha(\omega)=\alpha_\infty(1+\frac{2}{\Lambda}\sqrt{\frac{\eta}{j\omega\rho_f}}),\quad \omega\to\infty \quad (3)$$

où α_∞ est la tortuosité du matériau. Ainsi, les densités ρ_{kl} sont données par : $\rho_{11}+\rho_{12}=(1-\phi)\rho_s$, $\rho_{12}+\rho_{22}=\phi\rho_f$ et $\rho_{12}=-\phi\rho_f(\alpha(\omega)-1)$.

Ondes de compression

Lorsqu'on considére une onde acoustique arrivant en incidence normale sur une interface fluide-poreux, seules les ondes longitudinales sont excitées. Dans ce cas on peut poser $\vec{u} = \nabla\tilde{\phi}_s$ et $\vec{U} = \nabla\tilde{\phi}_f$. En reportant dans les équations (1) on trouve alors :

$$\triangle\begin{pmatrix}\phi_s\\ \phi_f\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\phi_s\\ \phi_f\end{pmatrix}, \tag{4}$$

où M est une matrice, Δ le Laplacien et ϕ_s(resp ϕ_f) est la transformée de Fourier de $\tilde{\phi}_s$(resp ϕ_f). Les solutions de cette équation sont des superpositions d'onde rapide Φ_1 et d'onde lente Φ_2 dont les vitesses $V_{1,2}$ sont données par : $\lambda_{1,2} = \frac{\omega^2}{V_{1,2}^2} = \frac{tr(M)\pm\sqrt{tr^2(M)-4det(M)}}{2}$. Alors :

$$\begin{pmatrix}\Phi_s\\ \Phi_f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ \chi_1 & \chi_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}, \tag{5}$$

où les vecteurs $(1, \chi_1)$ et $(1, \chi_2)$ sont les vecteurs propres de la matrice M associés aux valeurs propres $\lambda_{1,2}$. Les fonctions Φ_1 et Φ_2 sont données par :

$$\Phi_1(x,\omega) = \bar{\Phi}_1(\omega)e^{-x\sqrt{\lambda_1(\omega)}} + \bar{\Phi}_1'(\omega)e^{x\sqrt{\lambda_1(\omega)}}, \tag{6}$$

$$\Phi_2(x,\omega) = \bar{\Phi}_2(\omega)e^{-x\sqrt{\lambda_2(\omega)}} + \bar{\Phi}_2'(\omega)e^{x\sqrt{\lambda_2(\omega)}}, \tag{7}$$

et les valeurs $\bar{\Phi}_i$ et $\bar{\Phi}_i'$ sont fixées par les conditions limites.

2.1 Opérateurs de transmission et de réflexion

Dans ce cas la modélisation temporelle, les coefficients de reflexion et transmission sont remplacés par des opérateurs. Leur détermination se fait compte tenu des conditions de continuités des contraintes et des déformations.

Pour la situation représentée sur la figure 1, on définit l'opérateur réflexion $R(t)$ à partir de la

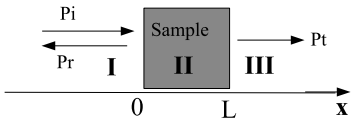

FIG. 1 – Représentation géométrique.

pression

$$p_1(x,t) = p^i(t - \frac{x}{c_0}) + p^r(t + \frac{x}{c_0}) = (\delta(t - \frac{x}{c_0}) + \tilde{R}(t) * \delta(t + \frac{x}{c_0})) * p^i(t), \quad x < 0, \tag{8}$$

et de l'équation d'Euler dans le milieu I

$$\rho_f\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}. \tag{9}$$

Dans le milieu III $(x > L)$, on définit l'opérateur transmission T(t) par :

$$p_3(x,t) = \tilde{T}(t) * p^i(t) * \delta(t - \frac{(x-L)}{c_0}), \tag{10}$$

La résolution des équations opérationnelles (8) et (10) se fait dans le domaine de Laplace. Les équations de conservation en $x = 0$ et $x = L$ des contraintes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma^f)(0^+,\omega) &= -\phi\mathcal{L}(P_1)(0^-,\omega), \quad \mathcal{L}(\sigma^s)(0^+,\omega) = (1-\phi)\mathcal{L}(P_1)(0^-,\omega), \\ \mathcal{L}(\sigma^f)(L^-,\omega) &= -\phi\mathcal{L}(P_3)(0^+,\omega), \quad \mathcal{L}(\sigma^s)(L^-,\omega) = (1-\phi)\mathcal{L}(P_3)(L^+,\omega). \end{aligned} \tag{11}$$

(où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de Laplace) et des débits

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V_1)(0^-,\omega) &= (1-\phi)\mathcal{L}(V_s)(0^+,\omega) + \phi\mathcal{L}(V_f)(0^+,\omega), \\ \mathcal{L}(V_3)(L^-,\omega) &= (1-\phi)\mathcal{L}(V_s)(L^+,\omega) + \phi\mathcal{L}(V_f)(L^+,\omega), \end{aligned} \tag{12}$$

conduisent aux expressions suivantes :

$$\mathcal{L}(R)(\omega) = \frac{(j\omega\rho_f c_0 F_4(\omega))^2 + 1 - (j\omega F_3(\omega))^2}{(j\omega F_3(\omega) - 1)^2 - (j\omega\rho_f c_0 F_4(\omega))^2}, \tag{13}$$

$$\mathcal{L}(T)(\omega) = \frac{2j\omega\rho_f c_0 F_4(\omega)}{(j\omega\rho_f c_0 F_4(\omega))^2 - (j\omega F_3(\omega) - 1)^2}. \tag{14}$$

avec
$F_3 = (F_1(\omega)cosh(L\sqrt{\lambda_1(\omega)})\rho_f c_0 + F_2(\omega)cosh(L\sqrt{\lambda_2(\omega)})$, $F_4 = F_1 + F_2$
et $F_1 = \frac{2(1+\phi(\chi_1(\omega)-1))\sqrt{\lambda_1(\omega)}\Psi_1}{\Psi sinh(L\sqrt{\lambda_1(\omega)})}$, $F_2 = \frac{2(1+\phi(\chi_2(\omega)-1))\sqrt{\lambda_2(\omega)}\Psi_2}{\Psi sinh(L\sqrt{\lambda_2(\omega)})}$.

Les coefficients $\Psi_1(\omega)$, $\Psi_2(\omega)$, $\Psi(\omega)$ sont donnés par : $\Psi_1(\omega) = \phi Z_2(\omega) - (1-\phi)Z_4(\omega))$, $\Psi_2(\omega) = (1-\phi)Z_3(\omega)) - \phi Z_1(\omega)$et
$\Psi(\omega) = 2(Z_1(\omega)Z_4(\omega) - Z_2(\omega)Z_3(\omega))$,
où $Z_1 = (P + Q\chi_1(\omega))\lambda_1(\omega)$, $Z_2 = (P + Q\chi_2(\omega))\lambda_2(\omega)$, $Z_3 = (Q + R\chi_1(\omega))\lambda_1(\omega)$ $Z_4 = (Q + R\chi_2(\omega))\lambda_2(\omega)$.

Les transformées de Laplace inverses des coefficients $R(\omega)$ et $T(\omega)$ donnent les expressions des opérateurs de réflexion et transmission $R(t)$ et $T(t)$ dans le domaine temporel[6].

3 Problème inverse

La résolution du problème inverse consiste à trouver les valeurs des paramètres décrivant le milieu poreux, à partir de données expérimentales, en l'occurence l'onde acoustique transmise à travers une épaisseur L du matériau. Dans le cadre de cette étude, on doit estimer d'une part les paramètres liés à la géométrié des pores du matériaux : porosité, tortuosité , longueur caractéristique visqueuse et d'autres part, les modules d'élasticité de la structure solide : module de young E_b et coefficient de Poisson ν_b, tous les autres paramètres étant fixés. Pour estimer la valeur de ces paramètres, l'estimation est faite au sens des moindres carrés sur la grandeur :

$$F = \sum_{t_i} [s_{theo}(t_i) - s_{exp}(t_i)]^2, \tag{15}$$

où s_{exp} est le signal expérimental et $s_{theo}(t)$ est le signal synthétique obtenue par convolution du signal incident $e(t)$ avec l'opérateur transmission : $s_{theo}(t) = T(t) * e(t)$.

4 Dispositif expérimental et résultat

La mesure se fait en transmission dans une cuve à eau. On dispose d'une paire de transducteurs Panametrics $A303S$ centrés à 1MHZ, utilisés en émetteur et récepteur. Le signal ultrasonore est délivré par un générateur d'impulsion $(HV : 5052PR)$. L'aquisition se fait à l'aide d'un oscilloscope numérique $Lecroy$ 9310. L'onde incidente est mesurée en absence de l'échantillon entre les transducteurs. La figure 1 montre le signal expérimental incident (ligne continue) et le signal transmis (ligne discontinue). Ce dernier est composé des ondes lente et rapide. La figure 3 représente les spectres de ces 2 signaux. Les résultats concernant d'une part 3 échantillons d'os(O1,O2,O3) d'autre part l'hydroxyapatite(Hy), sont résumés dans le tableau1 (Table1), les valeurs des paramètres fixés ont été prises comme suit : $K_f = 2.4GPa$, $\rho_f = 930Kgm^{-3}$, viscosité du fluide $\eta = 10^{-3}Kgms^{-1}$, $\rho_s = 1990Kgm^{-3}$, $E_s = 10GPa$, $\nu_s = 0.3$. La fonction de minimisation tracée par rapport à tous les paramètres sensibles en transmission, on choisit un couple de paramètres par exemple α_∞ et E_b. La figure 4 , représente la sensibilité de la fonction F pour le couple (α_∞, E_b). Enfin sur la figure 5 sont représentés les signaux transmis expérimental $s_{exp(t)}$ (ligne continue) et synthétique $s_{theo(t)}$ (ligne discontinue).

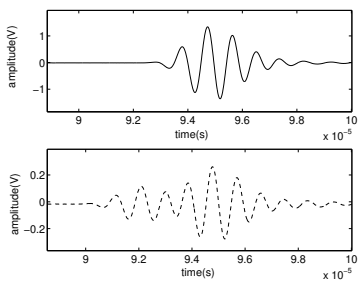

FIG. 2 –

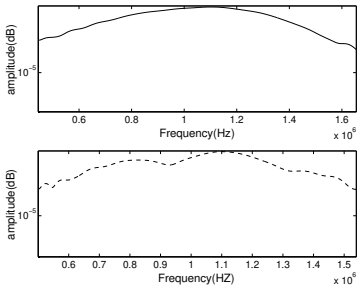

FIG. 3 –

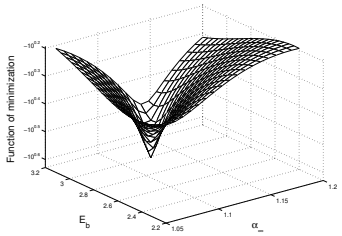

FIG. 4 –

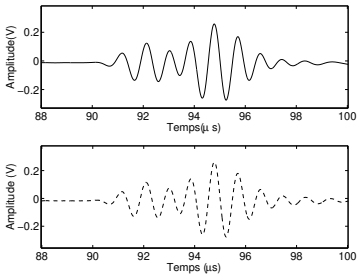

FIG. 5 –

	L (mm)	ϕ	α_∞	Λ (μm)	ν_b	E_b (GPa)
O1	10.2	0.72	1.1	14.97	0.22	3.1
O2	12	0.79	1.052	10.12	0.26	2.47
O3	11.2	0.64	1.017	10.44	0.3	3.73
Hy	12.5	0.90	1.13	8.07	0.31	2.16

TAB. 1 – Résultat de la minimisation.

5 Conclusion

Dans ce travail, on a montré que la théorie de Biot est bien adaptée pour modéliser la propagation des ondes acoustiques dans les tissus osseux. La version temporelle de cette théorie permet d'autres part d'estimer les paramètres physiques du milieu poreux qu'est l'os trabéculaire et conduit à des valeurs en accord avec mesures utilisant d'autres théoriques.

Références

[1] M. A. Biot, The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range, *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, 179-191, (1956).

[2] J.L. Wilson, Ultrasonic wave propagation in cancellous bone and cortical bone : prediction of some experimental results by Biot's theory *J. Acoust. Soc. Am.* **91**, 1106-1112 (1992).

[3] W. Lauriks, J. Thoen, I. Van Asbroeck, G. Lowet and G. Vanderperre, Propagation of ultrasonic pulses through trabecular bone, *J. Phys. Coll. (Paris)* **4**, 1255-1258 (1994).

[4] A. Hosokawa and T. Otani, Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone, *J. Acoust. Soc. Am.* **101**, 558-562 (1997).

[5] D.L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid.Mech.* **176**, 379-402 (1987).

[6] Z.E.A. Fellah, J.Y. Chapelon, S. Berger, W. Lauriks and C. Depollier, Ultrasonic wave propagation nin human cancellous bone : Application of Biot theory, *J. Acoust. Soc. Am.* **116**, 61-73 (2004).