HAL
open science

Paquets d'Arthur pour les groupes classiques; point de vue combinatoire

Colette Moeglin

To cite this version:

Colette Moeglin. Paquets d'Arthur pour les groupes classiques; point de vue combinatoire. 2006. hal-00104018

HAL Id: hal-00104018

https://hal.science/hal-00104018

Preprint submitted on 5 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00104018, version 1 - 5 Oct 2006

Paquets d'Arthur pour les groupes classiques ; point de vue combinatoire

C. Mœglin
Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS Paris
moeglin@math.jussieu.fr

Le but de cet article est de terminer la description combinatoire des paquets d'Arthur pour des groupes classiques p-adiques. Les paquets sont associés à des morphismes, ψ, du groupe $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le groupe dual (au sens de Langlands) de G, continus et bornés sur W_F et algébriques sur les 2 copies de $SL(2,\mathbb{C})$. Quand G est un groupe symplectique ou orthogonal, le groupe dual a une représentation naturelle dans un groupe linéaire de la forme $GL(n^*,\mathbb{C})$; en composant ψ avec cette représentation naturelle, on trouve un morphisme à valeurs dans $GL(n^*,\mathbb{C})$. Grâce à la correspondance locale de Langlands, on sait associer à ψ une représentation irréductible unitaire de $GL(n^*,F)$ qui est tempérée exactement quand ψ est trivial sur la 2e copie de $SL(2,\mathbb{C})$. Notons $\pi_{GL}(\psi)$ cette représentation.

Cet article fait suite à [14] où l'on a donné une définition des représentations dans un paquet d'Arthur en supposant que le centralisateur du morphisme dans le L-groupe est un groupe fini et posé les définitions générales. Le point est ici d'étudier la réductibilité de certaines induites. On peut expliquer ce que nous avons en vue de la façon suivante ; prenons π_0 une composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable pour un groupe de même type que G ; fixons ρ une représentation cuspidale irréductible d'un groupe linéaire. On suppose que $\rho \simeq \rho^*$ et soient a, b des entiers. On définit $Sp(b, St(a,\rho))$ comme l'unique sous-module irréductible de l'induite :

$$St(\rho,a)||^{-(b-1)/2} \times \cdots \times St(\rho,a)|\,|^{(b-1)/2},$$

où $St(\rho,a)$ est la représentation de Steinberg associée à ρ et a et où $||$ est (comme dans tout ce travail) la valeur absolue du déterminant. Ici Sp est un diminutif de Speh analogue à St pour tenir compte du fait que l'importance d'un point de vue global de ces représentations avaient été mise en évidence par Birgit Speh. Ces représentations sont exactement les représentations des groupes linéaires associée à des représentations irréductibles (bornées, algébriques) de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ via la correspondance de Langlands maintenant démontrée (cf. [7], [8], [26]). On note $\rho \otimes [a] \otimes [b]$ la représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ correspondant à $Sp(b, St(\rho,a))$.

On veut décomposer l'induite $Sp(b, St(\rho,a)) \times \pi_0$; par unitarité on sait que cette induite est semi-simple et on veut montrer que sa longueur est inférieure ou égale à $inf(a,b)+1$ cette borne pouvant être atteinte. Prenant ensuite un facteur direct, on veut aussi montrer que si on réinduit avec plusieurs copies de $Sp(b, St(\rho,a))$ on garde alors l'irréductibilité.

Ne sachant rien sur π_0, on ne pourra pas faire grand chose, donc ce que l'on fait ici est de démontrer ces résultats pour π_0 dans un paquet d'Arthur tel que construit dans [14]. On s'attend à avoir l'irréductibilité de cette induite si $\rho \otimes [a] \otimes [b]$ ne se factorise pas par un groupe de même type que ${}^LG$ et ceci est démontré en 6. Dans le cas opposé, le résultat est démontré en 4.5. Signalons qu'une des difficultés annexes que l'on rencontre, est que l'on ne sait pas que les représentations que nous considérons sont unitaires et il faut donc aussi démontrer que les induites sont semi-simples. On note ψ_0 la représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ associée à π_0. La démonstration peut se résumer ainsi : en [14], on a décrit les représentations qui doivent être associées au morphisme $\rho \otimes [a] \otimes [b] \oplus \rho \otimes [a] \otimes [b] \oplus \psi_0$. Comme on a fixé π_0 dans le paquet associé à ψ_0, nous avons une limitation sur les paramètres pouvant intervenir et il faut démontrer que la somme des représentations associées à ces paramètres décompose effectivement l'induite. Ce n'est en fait pas difficile, si l'on admet

que π_0 est unitaire, c'est même assez facile. C'est donc un résultat assez précis qui est démontré ici, le seul ennui est que l'on ne sait toujours pas pour quels paramètres la représentation associée n'est pas la fausse représentation 0.

L'article commence par rappeler les définitions générales de [14] et par donner quelques propriétés générales des représentations dans les paquets d'Arthur : une paramétrisation de leur décomposition en composantes irréductibles et des propriétés de leurs modules de Jacquet. Puis on démontre la décomposition des induites. A la fin en 7, on donne le cas le plus général que je connais où la décomposition ne fait pas intervenir cette incertitude sur la nullité de certaines composantes. Je n'ai pas donné d'exemles où la longueur de l'induite est strictement comprise entre 1 et $inf(a,b)+1$; il y en a sûrement mais ils sont aussi sûrement techniquement pénibles à construire.

1 Paquets généraux

1.1 Blocs de Jordan

Les paquets de représentations tels que définis par Arthur sont associés à des morphismes, ψ, de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le L-groupe de G, continues, bornées sur W_F et algébrique sur les é copies de $SL(2,\mathbb{C})$. Pour classifier à conjugaison près, on prolonge ψ en une représentation grâce à l'inclusion naturelle du L-groupe dans le groupe linéaire correspondant à la représentation standard et on décompose cette représentation en composantes irréductibles.

Une représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ est la donnée d'une représentation irréductible, ρ de W_F dans un groupe linéaire dont on notera d_ρ le rang (si nécessaire) et de 2 entiers a, b qui donnent la dimension de 2 représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$, les représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$ étant uniquement caractérisées, à isomorphisme près, par leur dimension. On dit que la représentation irréductible (ρ, a, b) a la condition de parité si elle se factorise par un groupe de même type que ${}^LG$; pour cela, il faut d'abord que ρ soit autoduale, c'est-à-dire isomorphe à ρ^*, ce qui entraîne que ρ se factorise par un groupe orthogonal (on pose alors $\eta_\rho = +$) ou par un groupe symplectique (on pose alors $\eta_\rho = -$). Ensuite, il faut que $\eta_\rho(-1)^{a+b} = +1$ si ${}^LG$ est orthogonal et $+1$ si ${}^LG$ est symplectique.

A un tel triplet (ρ, a, b) on associe le quadruplet (ρ, A, B, ζ) où $A = (a+b)/2 - 1$, $B = |(a-b)/2|$ et ζ est le signe de $a - b$ quand ce nombre est non nul ; quand B est nul, on prend $\zeta = +$; ce choix influe sur la définition, il ne change pas le paquet dans son ensemble, ce paquet étant défini par une égalité de transfert qui "voit" ζ uniquement sous la forme d'un signe ; ceci est expliqué dans [18] par. 4 et 5 et en particulier 5.6. Ce choix change donc uniquement la paramétrisation à l'intérérieur des paquets et seulement dans certains cas mais qui sont les cas considérés ici. On garde la terminologie, (ρ, A, B, ζ) a la condition de parité si le triplet (ρ, a, b) qui lui correspond l'a ; ici cela se traduit par le fait que A, B sont entiers ou demi-entiers non entiers.

On a une classification de ces morphismes ψ, vus à conjugaison près, en donnant chaque composante isotypique avec sa multiplicité. On pose $Jord(\psi) := \{(\rho, A, B, \zeta)\}$ où l'on fait intervenir chaque (ρ, A, B, ζ) avec la multiplicité de la représentation associée dans la décomposition de ψ. On remarque que si (ρ, A, B, ζ) classifie une des composantes isotypiques de ψ mais n'a pas la condition de parité, deux cas sont possibles. Le premier cas est celui où $\rho \simeq \rho^*$; dans ce cas, la représentation irréductible se factorise par un groupe classique de type opposé à ${}^LG$ et la multiplicité avec laquelle cette représentation apparaît est nécessairement paire. L'autre cas est celui où $\rho \not\simeq \rho^*$ et dans ce cas la représentation irréductible correspondant à (ρ^*, A, B, ζ) intervient avec la même multiplicité que (ρ, A, B, ζ). La représentation associée à ψ se décompose donc en produit de représentations indexées par les $(\rho, A, B, \zeta) \cup (\rho^*, A, B, \zeta)$ où la représentation correspondante est la composante isotypique correspondant à (ρ, A, B, ζ) si $\rho \simeq \rho^*$ et la somme de cette composante isotypique avec celle correspondant à (ρ^*, A, B, ζ) sinon. Chacune de ces représentations est à valeurs dans un groupe de même type que ${}^LG$ et le centralisateur de ψ dans ${}^LG$ est un produit des centralisateurs de chacune de ces représentations. Pour calculer ce centralisateur, on distingue donc :

soit (ρ, A, B, ζ) ayant la condition de parité, alors le centralisateur correspondant est un groupe orthogonal de la forme $O(m, \mathbb{C})$ où m est la longueur de la représentation c'est-à-dire la multiplicité de (ρ, A, B, ζ) dans $Jord(\psi)$;

soit (ρ, A, B, ζ) avec $\rho \simeq \rho^*$ mais n'ayant pas la condition de parité ; alors le centralisateur correspondant est un groupe symplectique $Sp(2m, \mathbb{C})$ où $2m$ est la multiplicité de (ρ, A, B, ζ) dans $Jord(\psi)$;

soit (ρ, A, B, ζ) avec $\rho \not\simeq \rho^*$, alors le centralisateur correspondant est un groupe linéaire $GL(m, \mathbb{C})$ où m est la multiplicité de (ρ, A, B, ζ) dans $Jord(\psi)$.

Le caractère ϵ, dans tout ce papier, est un morphisme du centralisateur de ψ dans le L-groupe à valeurs dans $\{\pm 1\}$. Avec la description ci-dessus du centralisateur, on voit que ϵ est triviale sur les facteurs correspondant à (ρ, A, B, ζ) n'ayant pas la condition de parité. Et sur les facteurs correspondant à (ρ, A, B, ζ) ayant la condition de parité, ϵ a 2 possibilités, soit être trivial soit être le caractère signe ; il faut tenir compte du fait que ${}^LG$ peut avoir un centre ; la restriction de ϵ au centre de ${}^LG$ est déterminé par le groupe. Si G est un groupe symplectique cette restriction doit être triviale, au sens strict, ${}^LG$ est alors le groupe spécial ortogonal de dimension impair et c'est donc bien ce qu'il faut. Si G est un groupe orthogonal, on fixe la forme orthogonale, elle est a donc un invariant de Hasse qui vaut ± 1 et on demande que la restriction de ϵ au centre de ${}^LG$ soit trivial exactement si l'invariant de Hasse vaut $+1$; cela est fixé au début et n'intervient quasiment pas ; on pose $\eta_G = +1$ si G est un groupe symplectique ou si c'est un groupe orthogonal pour une forme orthogonale fixée d'invariant de Hasse $+1$ et -1 sinon ; il est clair que dans le cas des groupes orthogonaux sur un espace de dimension paire, on a fait un choix qui n'est pas dicté par le groupe, ou encore que les paramétrisations données dépendent de la forme orthogonale et pas seulement du groupe ; c'est assez naturel. On identifiera donc ϵ à une application de $Jord(\psi)$ dans $\{\pm 1\}$ qui vaut $+1$ sur tout (ρ, A, B, ζ) pour lequel ϵ restreint au facteur du centralisateur de ψ correspondant à (ρ, A, B, ζ) est trivial et -1 sinon et telle que

$$\prod_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} \epsilon(\rho, A, B, \zeta) = \eta_G$$

où dans le produit $Jord(\psi)$ est vu avec multiplicité.

Pour simplifier, on dira que ψ vérifie la condition de parité si tout élément (ρ, A, B, ζ) de $Jord(\psi)$ vérifie la condition de parité.

1.2 Notations

Soit (ρ, A, B, ζ) comme ci-dessus, on définit la représentation $S(\rho, A, B, \zeta)$, de la façon suivante. On considère le tableau :

$$\begin{array}{ccc} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta A & \cdots & -\zeta B \end{array}$$

Si $\zeta = +$ les lignes sont des segments décroissants et les colonnes des segments croissants tandis que si $\zeta = -$ c'est l'inverse. Dans un groupe linéaire convenable à chaque ligne correspond une induite par exemple pour la ℓ-ième ligne c'est l'induite :

$$\rho|\,|^{\zeta(B+\ell-1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\zeta(A-\ell+1)}$$

qui a un unique sous-module irréductible noté $< \rho|\,|^{\zeta(B+\ell-1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-\ell+1)} >$. On considère alors l'induite de tous ces sous-modules ; cette induite a elle aussi un unique sous-module irréductible d'après les résultats maintenant classiques de Zelevinsky et c'est ce sous-module irréductible que l'on note $S(\rho, A, B, \zeta)$. En d'autres termes dans la classification de Zelevinsky, $S(\rho, A, B, \zeta)$ est la représentation irréductible qui correspond aux multi-segments formés par les lignes du tableau. C'est aussi la même représentation que nous aurions obtenue en considérant les multi-segments formés par les colonnes du tableau.

Donnons tout de suite une définition voisine. Ici on fixe T un entier et on définit $S(\zeta, A, B, T)$ une représentation irréductible d'un groupe linéaire convenable. On a fait disparaître ρ de la notation car cette représentation sera fixée par le contexte. Et on considère le tableau :

$$\mathcal{C}(\zeta, A, B, T) := \begin{array}{ccc} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(A+T) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(B+1) & \cdots & \zeta(A+1) \end{array}$$

Et $S(\zeta, A, B, T)$ est la représentation irréductible basée sur ρ correspondant aux multi-segments formés par les lignes du tableau. On peut là aussi remplacer lignes par colonnes sans changer la définition.

On utilisera aussi constamment la notation $Jac_x\pi$; elle signifie ceci. Soit π une représentation très généralement irréductible mais pas toujours du groupe G et soit ρ une représentation irréductible fixée d'un groupe linéaire $GL(d_\rho, F)$, ce qui définit d_ρ. On suppose que l'indice de Witt de la forme dont G est le groupe d'automorphisme est supérieur à d_ρ ; ainsi G a un sous-groupe parabolique dont le Levi est isomorphe à $GL(d_\rho, F) \times G'$ où G' est un groupe de même type que G mais de rang plus petit. On considère le module de Jacquet de π le long du radical unipotent de ce parabolique dans le groupe de Grothendieck associé aux représentations lisses de longueur finie du groupe $GL(d_\rho, F) \times G'$ et on décompose en fonction du support cuspidal pour l'action de $GL(d_\rho, F)$. On ne garde (c'est-à-dire on projette) que les constituants irréductibles sur lesquels $GL(d_\rho, F)$ agit par $\rho|\,|^x$, ils sont donc de la forme $\rho|\,|^x \otimes \sigma'$ et $Jac_x\pi$ est par définition l'élément du groupe de Grothendieck associé aux représentations lisses de longueur finie de G', qui est la somme (avec multiplicité) de ces représentations σ'. On pose $Jac_x\pi = 0$ si l'indice de Witt de la forme est strictement inférieur à d_ρ par une convention évidente.

On peut donner la même définition pour G remplacer par un groupe linéaire général. Pour les groupes linéaires, il n'y a pas de raison de privilégier la gauche à la droite et on peut donc aussi définir $Jac_x^d\pi$ quand on utilise le Lévi $G' \times GL(d_\rho, F)$; on peut ainsi définir pour x, y fixé $Jac_x Jac_y^d\pi$ en composant les 2 applications et on a clairement $Jac_x Jac_y^d = Jac_y^d Jac_x$. On utilisera peu les définitions pour les groupes linéaires et uniquement dans le cas ci-dessous ; ici on suppose (comme en fait dans tout le travail que $\rho \simeq \rho^*$). Soit π et δ une représentation d'un groupe linéaire. On considère l'induite $\delta \times \pi$ comme représentation d'un groupe de même type que G, alors :

$$Jac_x\big(\delta \times \pi\big) = Jac_x\delta \times \pi \oplus Jac_{-x}^d\delta \times \pi \oplus \delta \times Jac_x\pi \tag{1}$$

qui résulte des formules de Bernstein-Zelevinsky.

On est amené à généraliser ces définitions à un ensemble $\mathcal{E} := \{x, \cdots, y\}$ totalement ordonné où on pose par définition

$$Jac_{x,\cdots,y} = Jac_y \circ \cdots \circ Jac_x$$

La formule (1) ci-dessus se généralise à un ensemble totalement ordonné $\mathcal{E}$ de façon un peu plus compliquée : on suppose que $\rho \simeq \rho^*$ pour simplifier les notations. Alors $Jac_{x\in\mathcal{E}}\big(\delta \times \pi\big)$ est la somme sur tous les découpages de $\mathcal{E}$ en trois sous-ensembles (dont certains peuvent être vides) $\mathcal{E} = \cup_{i\in[1,3]}\mathcal{E}_i$ dont chacun est totalement ordonné par restriction de l'ordre sur $\mathcal{E}$; et le terme correspondant à un tel découpage est :

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_1} Jac_{x\in -^t\mathcal{E}_2}^d(\delta) \times Jac_{x\in\mathcal{E}_3}\sigma,$$

où $-^t\mathcal{E}_2$ est l'ensemble des éléments de $-\mathcal{E}_2$ mais avec l'ordre renversé. C'est une application directe de (1).

1.3 Définition générale

On met ici un ordre total sur $Jord(\psi)$. Pour tout ρ, on ordonne totalement les quadruplets (ρ, A, B, ζ) ayant la condition de parité en considérant que $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho, A', B', \zeta')$ au moins si

soit $B > B'$, soit $B = B'$ et $A > A'$, soit $B = B', A = A'$ et $\zeta = +$.

Même sans tenir compte du fait qu'il peut y avoir plusieurs ρ, (ce qui n'a aucune importance), si $Jord(\psi)$ a de la multiplicité cela ne suffit pas pour définir un ordre total, il faut prolonger arbitrairement. Soit ψ, $\tilde{\psi}$ des morphismes pour des groupes de rang éventuellement différent ; on ordonne totalement $Jord(\psi)$ et $Jord(\tilde{\psi})$. On dit que $\tilde{\psi}$ domine ψ s'il existe une bijection, b, de $Jord(\tilde{\psi})$ sur $Jord(\psi)$ respectant l'ordre et vérifiant pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$, il existe $T_{(\rho,A,B,\zeta)}$ tel que $b^{-1}(\rho, A, B, \zeta) = (\rho, A+T_{\rho,A,B,\zeta}, B+T_{\rho,A,B,\zeta}, \zeta)$. Il n'est pas très agréable de fixer l'ordre sur $Jord(\tilde{\psi})$, il vaut mieux fixer b la bijection avec la condition précédente et tel qu'il existe un ordre sur $Jord(\tilde{\psi})$ respecté par b ; l'ordre est clairement uniquement déterminé par b. On finira par montrer que les définitions ne dépendent pas du choix de b.

On peut signaler que c'est dans le choix de "dominant" que la convention $\zeta = +$ si $B = 0$ intervient car $b^{-1}(\rho, A, B, \zeta)$ aura aussi $\zeta = +$ met $B + T_{\rho,A,B,\zeta} \neq 0$.

On remarque que si ψ vérifie la condition de parité, il existe $\tilde{\psi}$ dominant ψ et tel que $\tilde{\psi}$ est de restriction discrète à la diagonale, c'est-à-dire que la restriction de $\tilde{\psi}$ à $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$, où $SL(2, \mathbb{C})$ est plongé diagonalement dans $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ est sans multiplicité en tant que représentation de ce groupe.

1.4 Hypothèse

On suppose que ψ vérifie la condition de parité. On fixe $\tilde{\psi}$ dominant ψ et pour pouvoir construire les représentations associées à ψ on a besoin de savoir construire celles associées à $\tilde{\psi}$; l'hypothèse que nous ferons dans tout le papier sera donc que l'on sait construire ces représentations, c'est-à-dire que l'on considère le morphisme $\tilde{\psi} \circ \Delta$ de restriction de $\tilde{\psi}$ à W_F fois la diagonale de $SL(2, \mathbb{C})$. C'est un morphisme de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ dans un groupe dual analogue à celui de G mais de rang éventuellement plus grand. En composant avec la représentation naturelle de ce L-groupe, on voit $\tilde{\psi} \circ \Delta$ comme une représentation de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ nécessairement semi-simple ; toute sous-représentation irréductible est associé à une morphisme ψ' de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$ nécessairement dans le groupe dual d'un groupe de même type que G ; on suppose alors que l'on sait construire toutes les séries discrètes associées à ψ' pour tout choix de ψ', c'est-à-dire qu'à tout caractère, ϵ', du centralisateur de ψ', on sait associer une série discrète $\pi(\psi', \epsilon')$ irréductible avec les propriétés suivantes : on décompose ψ' en somme de représentations irréductibles. On rappelle qu'une composante irréductible est de la forme $\rho \otimes \sigma_a$ où ρ est une représentation irréductible de W_F autoduale et σ_a la représentation irréductible de $SL(2, \mathbb{C})$ de dimension a. Alors on note encore ρ la représentation cuspidale du groupe linéaire correspondant à ρ par la correspondance de Langlands locale et on note $St(\rho, a)$ la représentation de Steinberg associée à ρ et l'entier a. Pour ρ comme ci-dessus, on pose $\eta_\rho = +$ si le morphisme associé se factorise par un groupe orthogonal et $\eta_\rho = -1$ s'il se factorise par un groupe symplectique. On a déjà défini η_G en 1.1.

Les hypothèse que nous faisons sur l'ensemble des représentations $\pi(\psi', \epsilon')$ dont nous venons de supposer l'existence comme séries discrètes irréductibles est que

pour tout ϵ' et pour tout $\rho \simeq \rho^*$ une représentation cuspidale irréductible autoduale d'un groupe linéaire et tout entier a, l'induite $St(\rho, a) \times \pi(\psi', \epsilon')$ est irréductible si est seulement si soit $\eta_\rho(-1)^a \neq \eta_G$ soit $\rho \otimes \sigma_a$ est une composante irréductible de la représentation ψ'.

C'est comme cela que l'on a introduit les blocs de Jordan en [15] et on a démontré cette hypothèse pour les groupes unitaires (en suivant les idées d'Arthur) en [13] ; pour les groupes orthogonaux on renvoie à [12] et plus généralement on a discuté dans l'introduction de [14] l'état de ces hypothèses.

On a choisi dans ce travail de travailler avec les groupes orthogonaux et symplectiques pour avoir explicitement un L-groupe très commode. Les méthodes se généralisent au cas des groupes unitaires sans changement sauf dans les notations (cf [13]).

1.5 Construction

Ici on continue avec ψ ayant la propriété de parité (le cas général s'obtient à la fin cf 6). On fixe $\tilde{\psi}$ de restriction discrète à la diagonale, dominant ψ, à l'aide d'une bijection b. Pour tout caractère, ϵ, du centralisateur de ψ on déduit un caractère du centralisateur de $\tilde{\psi}$, noté $\tilde{\epsilon}$ tout simplement en posant

$$\tilde{\epsilon}(\tilde{\rho}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\zeta}) = \epsilon(b(\tilde{\rho}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\zeta})).$$

On rappelle qu'avec les notations ci-dessus on a défini $\mathcal{C}(\zeta, A, B, T_{\rho,A,B,\zeta})$ et on ordonne totalement cet ensemble en prenant d'abord les lignes puis les colonnes. Et si ψ est discret, on a posé :

$$\pi(\psi, \epsilon) := \circ_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{\rho,A,B,\zeta})} \pi(\tilde{\psi}, \epsilon),$$

où $\tilde{\psi}$ est un morphisme de restriction discrète à la diagonale dominant ψ et où (ρ, A, B, ζ) sont pris dans l'ordre croissant (on commence d'abord par calculer le Jac pour le plus petit) et où l'on a transporté ϵ par la bijection fixée entre $Jord(\psi)$ et $Jord(\tilde{\psi})$.

On a montré qu'avec cette définition $\pi(\psi, \epsilon)$ est bien défini, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de $\tilde{\psi}$. Dans cette définition, il n'y a aucune raison de se limiter aux caractères du centralisateur de ψ ; on peut directement partir de $\tilde{\epsilon}$ un caractère du centralisateur de $\tilde{\psi}$, on définit alors

$$\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon}) = \circ_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{\rho,A,B,\zeta})} \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}),$$

cette définition n'a de sens qu'une fois b fixé. L'indépendance démontrée en [14] se formule alors ainsi : soit $\tilde{\psi}'$, de restriction discrète à la diagonale, dominant aussi ψ avec une bijection b', on transporte $\tilde{\epsilon}$ en un caractère, $\tilde{\epsilon}'$ du centralisateur de $\tilde{\psi}'$ à l'aide de $b^{-1}b'$ et

$$\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon}) = \pi_{b'}(\psi, \tilde{\epsilon}').$$

D'ici peu, nous allons montrer que cette généralisation est fictive puisque les représentations apparemment supplémentaires sont en fait nulles.

On rappelle que l'on a une description précise de $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ puisque $\tilde{\psi}$ est de restriction discrète à la diagonale. Avec les notations ci-dessus :

$\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$ est une représentation semi-simple sans multiplicité dont les composantes irréductibles sont en bijection avec la donnée pour tout $(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta})$ d'un entier $\underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta})$ positif ou nul, inférieur ou égal à $(A - B + 1)/2$ et d'un signe $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta})$ vérifiant :

$$\prod_{C\in[B+\underline{\ell}(\rho,A,B,\zeta,T_{\rho,A,B,\zeta}),A-\underline{\ell}(\rho,A,B,\zeta,T_{\rho,A,B,\zeta})]} \left(\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta})(-1)^C\right) = \tilde{\epsilon}(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta}),$$

où un produit vide vaut $+1$.

La condition sur le signe, fixe la parité de $\underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta})$ si $A - B + 1$ est pair et fixe $\underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta, T_{\rho,A,B,\zeta})$ si $A - B$ est pair.

On suppose que ψ a la condition de parité ; on fixe $\tilde{\psi}$ et la bijection b de $Jord(\tilde{\psi})$ sur $Jord(\psi)$ et un caractère $\tilde{\epsilon}$ du centralisateur de $\tilde{\psi}$. On fixe des fonctions $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ de façon à fixer une composante irréductible de $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})$; et on pose,

$$\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\tilde{\ell}}, \underline{\tilde{\eta}}) :=$$

$$\circ_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} Jac_{\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{\rho,A,B,\zeta})} \left(\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}, \underline{\tilde{\ell}}, \underline{\tilde{\eta}})\right);$$

en anticipant les résultats ultérieurs, on montrera que ces modules de Jacquets sont nuls sauf si $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ proviennent de fonctions sur $Jord(\psi)$, au sens le plus naturel pour $\underline{\tilde{\ell}}$ et avec une petite torsion pour $\underline{\tilde{\eta}}$; mais cela imposera que $\tilde{\epsilon}$ est l'image réciproque d'un caractère du centralisateur de ψ. C'est ce qui permettra de définir indépendamment de b les représentations $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$. Pour le moment on sait que $\pi(\psi, \epsilon)$ est la somme des représentations $\pi_b(\psi, \epsilon, \underline{\tilde{\ell}}, \underline{\tilde{\eta}})$ pour un choix de b et les fonctions $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ définies sur $Jord(\tilde{\psi})$ variant.

2 Propriétés générales

2.1 Irréductibilité, énoncé

Proposition : *pour $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ fixés la représentation $\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\tilde{t}}, \underline{\tilde{\eta}})$ est soit nulle soit irréductible. De plus l'ensemble des représentations non nulles obtenues ainsi (pour ψ et b fixé) est sans multiplicité.*

Une conséquence immédiate de la proposition est que $\pi(\psi, \epsilon)$ est semi-simple sans multiplicité. On démontre cette proposition en même temps que le lemme ci-dessous dont on a besoin dans la démonstration et qui a son intérêt en soi.

2.2 Une propriété simple des modules de Jacquet

Lemme : *soit $x \in \mathbb{R}$ et soit m le cardinal de l'ensemble $\{(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi); \zeta B = x\}$ alors $Jac_{x,\cdots,x}\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon}) = 0$ dès que le nombre de x apparaissant est strictement supérieur à m.*

Le lemme et la proposition sont vraies si ψ est de restriction discrète à la diagonale (cf. [14], introduction). On reprend les notations $\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}$ et b qui servent à définir $\pi(\psi, \tilde{\epsilon})$, pour simplifier la notation on remplace $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ par ℓ et η écrits en indice ; ces fonctions n'interviennent pas dans la démonstration, elles permettent juste de travailler avec des représentations qui vont être irréductibles et la réciprocité de Frobenius est plus simple. On suppose comme on en a le droit que si $(\rho, A_i, B_i, \zeta_i) \in Jord(\tilde{\psi})$ pour $i = 1, 2$ distincts alors soit $A_1 << B_2$ soit $B_1 >> A_2$.

On a donc le lemme et la proposition pour $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$. On les démontre de proche en proche pour chaque module de Jacquet intermédiaire qui servent à la définition. On peut donc simplement considérer la situation suivante : ψ', ψ'' sont des morphismes (non nécessairement de restriction discrète à la diagonale) qui dominent ψ et tels que ψ' domine ψ'' à l'aide d'une bijection notée b' ; deplus il existe $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi')$ y intervenant avec multiplicité 1 et tel que $B' \geq 1$, b' est l'identité sur tous les éléments de $Jord(\psi')$ autre que (ρ, A', B', ζ') et vérifie $b'(\rho, A', B', \zeta') = (\rho, A' - 1, B' - 1, \zeta')$ et tous les éléments de $Jord(\psi')$ strictement plus grands que (ρ, A', B', ζ') sont de la forme $(\tilde{\rho}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\zeta})$ avec $\tilde{B} >> B'$ et les $\tilde{B}$ sont très différents les uns des autres. On admet le lemme et la proposition pour $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ et on les montre pour

$$\pi(\psi'', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} = Jac_{\zeta' B',\cdots,\zeta' A'}\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}.$$

Le résultat est trivialement vrai si $\pi(\psi'', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} = 0$; on suppose donc que l'on n'est pas dans ce cas de nullité. On fixe x comme dans l'énoncé du lemme et on note $m(\psi', x)$ le plus grand entier tel que $Jac_{x,\cdots,x}\pi(\psi', \tilde{\epsilon}) \neq 0$ où il y a $m(\psi', x)$-copies de x ; ce nombre dépend évidemment aussi de $\tilde{\epsilon}$ mais cela n'a pas d'importance ici, $\tilde{\epsilon}$ étant fixé et n'intervenant pas pour la borne de l'énoncé. On définit de même $m(\psi'', x)$ et on montre que :

$$m(\psi'', x) \begin{cases} \leq m(\psi', x) \text{ si } x \neq \zeta'(B' - 1) \\ \leq m(\psi', x) - 1 \text{ si } x = \zeta' B' \\ \leq m(\psi', x) + 1 \text{ si } x = \zeta'(B' - 1). \end{cases} .$$

Cela suffira pour prouver le lemme.

En suivant les définitions, on a $Jac_{x,\cdots,x}Jac_{\zeta'(B'),\cdots,\zeta' A'}(\pi(\psi', \tilde{\epsilon}) \neq 0$ pour $m(\psi'', x)$ copies de x. Par réciprocité de Frobenius, il existe une inclusion de la forme

$$\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta A} \times \rho|\,|^{x} \times \cdots \times \rho|\,|^{x} \times \tau$$

où τ est une représentation irréductible non nulle. Comme $Jac_y\pi(\psi', \tilde{\epsilon}) = 0$ pour tout $y \in [\zeta B, \zeta A]$ ce morphisme se factorise en

$$\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times \rho|\,|^{x} \times \cdots \times \rho|\,|^{x} \times \tau \qquad (*)$$

où $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} >$ est l'unique sous-module de l'induite évidente car cette représentation est le seul sous-quotient de cette induite à vérifier $Jac_y = 0$ pour tout y comme ci-dessus. Supposons maintenant que $x \neq \zeta(B'-1)$ et $x \neq \zeta(A'+1)$. Sous cette hypothèse

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times \rho|\,|^{x}$$

est une induite irréductible d'après les résultats de Zelevinsky et on peut donc échanger les facteurs. On trouve donc que $m(\psi', x) \geq m(\psi'', x)$ si $x \neq \zeta B'$ et $m(\psi', \zeta' B') \geq m(\psi'', \zeta' B') + 1$. Cela donne le lemme pour tout $x \neq \zeta'(B'-1)$ et $x \neq \zeta'(A'+1)$. Supposons que $x = \zeta(B'-1)$; les résultats de Zelevinsky montre que l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times \rho|\,|^{x}$$

est de longueur 2. Soit σ l'un de ces sous-quotients ; Zelevinsky montre aussi que $\sigma \times |\,|^{x}$ est irréductible. Ainsi, pour un bon choix de σ, (*) se factorise en un morphisme non nul

$$\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow \rho|\,|^{x} \times \cdots \rho|\,|^{x} \times \sigma \times \tau,$$

où il y a $m(\psi'', x) - 1$ copies de x. Le lemme est donc aussi démontré pour $x = \zeta'(B'-1)$. Il reste $x = \zeta'(A'+1)$. Ici on veut démontrer que $m(\psi'', \zeta'(A'+1)) = m(\psi', \zeta'(A'+1)) = 0$. Il faut donc démontrer que $Jac_{\zeta'(B'), \cdots, \zeta' A', \zeta'(A'+1)} \pi(\psi', \tilde{\epsilon}) = 0$. On suppose par l'absurde que ce module de Jacquet est non nul d'où une inclusion pour τ' une représentation convenable (réciprocité de Frobenius)

$$\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta' B'} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} \times \tau';$$

on sait déjà que $Jac_y \pi(\psi', \tilde{\epsilon}) = 0$ pour tout $y \in]\zeta' B', \zeta'(A'+1)]$ et le morphisme ci-dessus se factorise donc par le sous-module, $< \rho|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} > \times \tau'$ de l'induite $\rho|\,|^{\zeta' B'} \times \cdots \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} \times \tau'$. On se rappelle que l'on commence par un morphisme $\tilde{\psi}$ de restriction discrète à la diagonale et $\tilde{\psi}$ domine ψ' avec un bijection b' ; pour passer de $\tilde{\psi}$ à ψ' on a fait diminuer tous les blocs de Jordan plus petits que $(b')^{-1}(\rho, A', B', \zeta')$; on distingue 2 cas. Le premier est celui où $(b')^{-1}(\rho, A', B', \zeta') = (\rho, A', B', \zeta')$. Comme les blocs de Jordan de $\tilde{\psi}$ sont très différents les uns des autres par hypothèse de départ, il est à peu près immédiat que $Jac_{\zeta' B', \cdots, \zeta'(A'+1)} \pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \neq 0$ nécessite aussi que $Jac_{\zeta' B', \cdots, \zeta'(A'+1)} \pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \neq 0$. Et cela on sait que ce n'est pas possible car $\tilde{\psi}$ est de restriction discrète à la diagonale et il n'existe pas $(\rho, A''', B''', \zeta''')$ avec $A'+1 \in [B''', A''']$ (cf. [14], 3.4). Le 2e cas est donc celui où il existe ψ''' tel que $Jord(\psi''')$ se déduit de $Jord(\psi')$ en remplaçant (ρ, A', B', ζ') par $(\rho, A'+1, B'+1, \zeta')$ et par définition on a

$$\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} = Jac_{\zeta'(B'+1), \cdots, \zeta'(A'+1)} \pi(\psi''', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}.$$

On sait par récurrence que $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ et $\pi(\psi''', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ sont irréductibles d'où une inclusion par réciprocité de Frobenius

$$\pi(\psi''', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta'(B'+1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} \times \pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}.$$

En utilisant la propriété du module de Jacquet de $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$, on obtient un prolongement de cette inclusion en une inclusion

$$\pi(\psi''', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta'(B'+1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} \times < \rho|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} > \times \tau'.$$

Pour tout $x \in [\zeta'(B'+1), \zeta'(A'+1)]$, l'induite $\rho|\,|^{x} \times < \rho|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} >$ est irréductible et on peut donc mettre $< \rho|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta'(A'+1)} >$ en première place dans l'induction. D'où

$$Jac_{\zeta' B'} \pi(\psi''', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \neq 0;$$

or pout tout $(\rho, A''', B''', \zeta''') \in Jord(\psi''')$, $\zeta' B' \neq \zeta''' B'''$ et ceci est donc impossible. On a donc prouvé le lemme pour $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$.

Montrons maintenant la proposition. On suppose que $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ est non nul et on va montrer que cette représentation est irréductible et qu'elle détermine uniquement la représentation $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$, ceci prouvera la proposition de proche en proche.

Par réciprocité de Frobenius pour un quotient irréductible X bien choisi de $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$, il existe une inclusion

$$\pi(\psi'', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta' B'} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta' A'} \times X.$$

On calcule $Jac_{\zeta' B', \cdots, \zeta' A'}$ du membre de droite et on trouve X car $B' > 0$ et pour tout $x \in [\zeta' B', \zeta' A']$, $Jac_x X = 0$ puisque $Jac_x \pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta} = 0$ d'après le lemme que l'on vient de démontrer. Cela prouve que $X = \pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ et l'irréductibilité cherchée. Cette preuve montre aussi que si $\pi(\psi', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ est non nul, il détermine uniquement $\pi(\psi'', \tilde{\epsilon})_{\ell,\eta}$ puisque c'est l'unique sous-module irréductible de l'induite écrite. Et en remontant, on obtient le corollaire ci-dessous.

2.3 Une conséquence technique

Corollaire : *on suppose ici que $\pi(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \neq 0$ et qu'il existe $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ tel que d'une part $Jac_{\zeta B, \cdots, \zeta A} \pi(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \neq 0$ et d'autre part $\forall x \in]B, A]$, $\nexists (\rho, A', B', \zeta) \in Jord(\psi), x = \zeta B'$.*

Alors il existe une représentation irréductible τ tel que $\pi(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ soit un sous-module irréductible de l'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times \tau$.

La réciprocité de Frobenius donne l'existence de τ avec une inclusion

$$\pi(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \hookrightarrow \rho|\,|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta A} \times \tau.$$

Dans cette inclusion on peut remplacer l'induite $\rho|\,|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta A}$ par un sous-quotient irréductible τ'. Mais grâce à 2.2 et à l'hypothèse sur $Jord(\psi)$ on sait que $Jac_x \tau' = 0$ pour tout $x \in]\zeta B, \zeta A]$; nécéssairement τ' est la représentation $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} >$.

3 Décomposition des représentations définies

3.1 Un critère de nullité

On veut arriver à une description des composantes irréductibles (ou malheureusement 0) de $\pi(\psi, \epsilon)$ en utilisant des fonctions $\underline{\ell}$ et $\underline{\eta}$ définies directement sur $Jord(\psi)$ et ne dépendant pas du choix d'une bijection b. On a en vue le résultat suivant ; fixons $\tilde{\psi}$ dominant ψ à l'aide d'une bijection b ; soit $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ y intervenant avec multiplicité au moins 2. Pour $i = 1, 2$, soit $T_i \in \mathbb{N}$ tel que $(\rho, A+T_i, B+T_i, \zeta)$ soit des éléments de $Jord(\tilde{\psi})$ d'image par b une des copies de $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ et consécutifs pour l'ordre dans $Jord(\tilde{\psi})$; on fixe des fonctions $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ sur $Jord(\tilde{\psi})$ de façon à pouvoir définir $\pi_b(\psi, \epsilon, \underline{\tilde{\ell}}, \underline{\tilde{\eta}})$; ces fonctions définissent un caractère $\tilde{\epsilon}$ du centralisateur de $\tilde{\psi}$ (si le lecteur préfère, il fixe $\tilde{\epsilon}$ et impose des conditions aux fonctions). On pose, pour $i = 1, 2$, $\ell_i := \underline{\ell}(\rho, A + T_i, B + T_i, \zeta)$ et $\eta_i := \underline{\eta}(\rho, A + T_i, B + T_i, \zeta)$.

Lemme : *la représentation $\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\tilde{\ell}}, \underline{\tilde{\eta}})$ est nulle sauf éventuellement si $\ell_1 = \ell_2$ et $\eta_1 \eta_2 = (-1)^{A-B}$.*

Avant de démontrer le lemme remarquons ses conséquences sur la description des représentations $\pi(\psi, \epsilon)$.

3.2 Paramétrisation des composantes irréductibles

La première conséquence du lemme est que si la représentation $\pi(\psi, \tilde{\epsilon}, \underline{\tilde{\ell}}, \underline{\tilde{\eta}})$ est non nulle

$$\tilde{\epsilon}(\rho, A + T_1, B + T_1, \zeta) = \eta_1^{A-B+1} (-1)^{[(A-B+1)/2]+\ell_1}$$

$$= \eta_2^{A-B+1} (-1)^{(A-B)(A-B+1)} (-1)^{[(A-B+1)/2]+\ell_2} = \tilde{\epsilon}(\rho, A + T_2, B + T_2, \zeta).$$

Donc en particulier les représentations $\pi_b(\psi, \tilde{\epsilon})$ sont nulles sauf éventuellement si $\tilde{\epsilon}$ provient d'un caractère ϵ du centralisateur de ψ.

Montrons aussi comment ce lemme permet de définir $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ pour des fonctions $\underline{\ell}$ et $\underline{\eta}$ définies sur $Jord(\psi)$ et vérifiant, pour tout $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)$

$$\underline{\ell}(\rho,A,B,\zeta)\in[0,[(A-B+1)/2];\qquad \underline{\eta}(\rho,A,B,\zeta)^{A-B+1}(-1)^{[(A-B+1)/2]+\underline{\ell}(\rho,A,B,\zeta)}=\epsilon(\rho,A,B,\zeta).$$

On définira d'abord une fonction $\tilde{\underline{\ell}}$ sur $Jord(\tilde{\psi})$ en posant pour tout $(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\tilde{\psi})$, $\tilde{\underline{\ell}}(\rho',A',B',\zeta')=\underline{\ell}(b(\rho',A',B',\zeta'))$. Pour définir $\tilde{\underline{\eta}}(\rho',A',B',\zeta')$, il y a un choix à faire si $A-B+1$ est pair ; on peut envoyer $Jord(\psi)$ dans le même ensemble vu sans multiplicité et en composant b avec cette application on obtient une application non injective de $Jord(\psi')$ dans cet ensemble, noté b'. On voudrait poser $\tilde{\underline{\eta}}(\rho',A',B',\zeta')=\underline{\eta}(b'(\rho',A',B',\zeta'))$ mais la difficulté est que cette fonction ne vérifie pas l'alternance du lemme sur les fibres de b' si $A'-B'$ est impair ; il faut donc rétablir cette alternance en faisant un choix. Les fibres de b' sont totalement ordonnées par l'ordre mis sur $Jord(\tilde{\psi})$ et on demande l'égalité $\tilde{\underline{\eta}}(\rho',A',B',\zeta')=\underline{\eta}(b(\rho',A',B',\zeta'))$ pour tous les éléments en position impaire dans la fibre (en commençant par le plus petit) et l'égalité $\tilde{\underline{\eta}}(\rho',A',B',\zeta')=(-1)^{A'-B'}\underline{\eta}(b(\rho',A',B',\zeta'))$ pour tous les éléments en position paire. Et on pose :

$$\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})=\pi_b(\tilde{\psi},\epsilon,\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}}).$$

Le lemme montre que $\pi(\psi,\epsilon)$ est la somme sans multiplicité des représentations (irréductibles ou nulles) $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ que nous venons de définir.

3.3 Une réduction pour 3.1

On garde les notations de 3.2. On suppose que $T_1<T_2$ et on considère l'ensemble des nombres :

$$\mathcal{E}:=\begin{array}{ccc}\zeta(B+T_2), & \cdots, & \zeta(A+T_2)\\ \vdots, & \vdots, & \vdots\\ \zeta(B+T_1+1), & \cdots, & \zeta(A+T_1+1).\end{array}$$

Cet ensemble a déjà été introduit avec la notation plus compliquée $\mathcal{C}(\zeta,A+T_1,B+T_1,T_2-T_1)$. On ordonne $\mathcal{E}$ en prenant de gauche à droite puis de haut en bas et le but de cette sous-section est de montrer que le lemme de 3 résulte du résultat plus précis :

Lemme : *$Jac_{x\in\mathcal{E}}\pi_b(\tilde{\psi},\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}})$ est non nul exactement quand $\ell_1=\ell_2$ et $\eta_1=\eta_2(-1)^{A-B}$.*

On admet donc ce lemme et on démontre 3.1. On note $\psi_<$ le morphisme défini par :

$$Jord(\psi_<)=\{b(\rho',A',B',\zeta');(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\tilde{\psi}),(\rho',A',B',\zeta')<(\rho,A+T_1,B+T_1,\zeta)\}$$
$$\cup\{(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\tilde{\psi}),(\rho',A',B',\zeta')\geq(\rho,A+T_1,B+T_1,\zeta)\}.$$

On définit $\psi_\leq$ en posant

$$Jord(\psi_\leq)=\{b(\rho',A',B',\zeta');(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\tilde{\psi}),(\rho',A',B',\zeta')\leq(\rho,A+T_2,B+T_2,\zeta)\}$$
$$\cup\{(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\tilde{\psi}),(\rho',A',B',\zeta')>(\rho,A+T_2,B+T_2,\zeta)\}.$$

On a défini les ensembles $\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_i)$ pour $i=1,2$ et on a par définition

$$\pi_b(\psi_\leq,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}})=Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_2)}Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_1)}\pi_b(\psi_<,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}}).$$

Par définition $\pi_b(\psi,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}})$ est un module de Jacquet convenable de $\pi_b(\psi_\leq,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}})$ et il suffit donc de démontrer que $\pi_b(\psi_\leq,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}})=0$ si les conditions du lemme ne sont pas remplies. On utilise les représentations $S(\zeta,A,B,T_i)$ de 1.2 et on a (cf. 2.3) une inclusion

$$\pi_b(\psi_<,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}})\hookrightarrow S(\zeta,A,B,T_1)\times S(\zeta,A,B,T_2)\times\pi_b(\psi_\leq,\tilde{\epsilon},\tilde{\underline{\ell}},\tilde{\underline{\eta}}).$$

Le point ici est que l'induite $S(\zeta, A, B, T_2) \times S(\zeta, A, B, T_1)$ est irréductible ; ceci sera démontré en 8.1. On peut donc échanger les 2 termes de cette induite. On utilise ensuite le fait que

$$S(\zeta, A, B, T_2) \hookrightarrow S(\zeta, A+T_1, B+T_1, T_2-T_1) \times S(\zeta, A, B, T_1).$$

Cela montre l'existence d'une inclusion :

$$\pi_b(\psi_<, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}}) \hookrightarrow S(\zeta, A+T_1, B+T_1, T_2-T_1) \times S(\zeta, A, B, T_1) \times S(\zeta, A, B, T_1) \times \pi_b(\psi_\leq, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}}).$$

En particulier pour que $\pi_b(\psi_\leq, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}})$ soit non nul, il faut que

$$Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+T_1, B+T_1, T_2-T_1)} \pi_b(\psi_<, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}}) \tag{1}$$

soit non nul. On sait que $\pi_b(\psi_<, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}})$ est un module de Jacquet convenable de $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}})$. Mais comme T_1 est supposé grand, il n'y a pas de liaison entre l'ensemble $\mathcal{C}(\zeta, A+T_1, B+T_1, T_2-T_1)$ et l'ensemble qui sert à passer de $\pi(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}})$ à $\pi_b(\psi_<, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}})$. On peut donc commuter les opérations et la non nullité de (1) nécessite que $Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+T_1, B+T_1, T_2-T_1)} \pi_b(\tilde{\psi}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\underline{\ell}}, \tilde{\underline{\eta}}) \neq 0$. Maintenant, nous sommes dans la situation du lemme ci-dessus qui donne exactement la condition nécessaire de non nullité. Cela termine la réduction.

3.4 Preuve du critère de 3.3

On simplifie les notations ; on fixe ψ un morphisme de restriction discrète à la diagonale et $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$. Et on suppose qu'il existe un entier T tel que l'élément $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$ soit aussi dans $Jord(\psi)$ est soit exactement l'élément suivant (ρ, A, B, ζ). On fixe $\underline{\ell}$ et $\underline{\eta}$ de façon à définir la représentation irréductible $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$. On pose encore, $\ell_1 = \underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta)$ et $\ell_2 = \underline{\ell}(\rho, A+T, B+T, \zeta)$ et on définit de même η_i pour $i = 1, 2$ en remplaçant ℓ par η. Et on démontre

Lemme : *$Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A, B, T)} \pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \neq 0$ exactement quand $\ell_1 = \ell_2$ et $\eta_1 = \eta_2 (-1)^{A-B}$.*

La démonstration se fait par récurrence sur $A - B$. Le cas où $A = B$ est facile : ici nécessairement $\ell_1 = \ell_2 = 0$ et $\eta_1 = \epsilon(\rho, A, B, \zeta)$ tandis que $\eta_2 = \epsilon(\rho, A+T, B+T, \zeta)$. Le lemme s'exprime alors ainsi

$$Jac_{\zeta(B+T), \cdots, \zeta(B+1)} \pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \neq 0$$

exactement quand $\epsilon(\rho, A, B, \zeta) = \epsilon(\rho, A+T, B+T, \zeta)$. Si ψ est élémentaire c'est exactement la définition ; on est aussi dans la situation d'un morphisme élémentaire si pour tout $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$, $\underline{\ell}(\rho', A', B', \zeta') = 0$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et fixons $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ tel que $\underline{\ell}(\rho', A', B', \zeta') \neq 0$. Alors on sait que $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite :

$$< \rho'|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho'|\,|^{-\zeta' A'} > \times \pi(\psi', \epsilon, \underline{\ell}', \underline{\eta}),$$

où ψ' se déduit de ψ en remplaçant (ρ', A', B', ζ') par $(\rho', A'-1, B'+1, \zeta')$ et $\underline{\ell}'$ est $\underline{\ell}$ sauf $\underline{\ell}'(\rho', A'-1, B'+1, \zeta') = \underline{\ell}(\rho', A', B', \zeta') - 1$; les autres fonctions se déduisent naturellement. Comme ψ est supposé de restriction discrète à la diagonale, on a certainement soit $A' < B$ soit $B' > A+T = B+T$. Avec cela, on vérifie l'isomorphisme

$$< \rho'|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho'|\,|^{-\zeta' A'} > \times < \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \simeq$$
$$< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times < \rho'|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho'|\,|^{-\zeta' A'} >$$

dans le GL convenable : si $\zeta' = \zeta$, les segments associés ont même propriété de croissance et comme $B' \notin [B+T, B]$, ils ne sont pas liés et si $\zeta' = -\zeta$, tout élément de $[\zeta(B+T), \zeta(B+1)]$ vu comme segment réduit à un élément, n'est pas lié au segment $[\zeta' B', -\zeta' A']$. D'où le fait que l'on peut échanger les 2 représentations dans l'induite. Ceci entraîne l'équivalence :

$$Jac_{\zeta(B+T), \cdots, \zeta(B+1)} \pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \neq 0 \Leftrightarrow Jac_{\zeta(B+T), \cdots, \zeta(B+1)} \pi(\psi', \epsilon, \underline{\ell}', \underline{\eta}) \neq 0.$$

On se ramène ainsi au cas où ψ est élémentaire déjà traité.

On suppose donc maintenant que $A > B$. On note ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant les 2 blocs (ρ, A, B, ζ) et $(\rho, A+T, B+T, \zeta)$.

On suppose d'abord que $\ell_1 > 0$. On sait que $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ est l'unique sous-module irréductible de l'induite :

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1), (\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell_2, \eta_2)). \quad (1)$$

On calcule $Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A, B, T)}$ du terme de droite de (1). On le fait ligne par ligne c'est-à-dire que l'on considère pour $j \in [0, T]$ décroissant, l'ensemble $\mathcal{C}(\zeta, A+j, B+j, T-j)$ qui n'est autre que les $T-j$ premières lignes du tableau représentant $\mathcal{C}(\zeta, A, B, T)$. Pour $j = T$, l'ensemble que l'on vient de définir est vide. Et progressivement sur j décroissant de T à 0, on va montrer que $Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+j, B+j, T-j)}$ du terme de droite de (2) vaut :

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times$$
$$Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+j, B+j, T-j)} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, t_1 - 1, \eta_1), (\rho, A+T, B+T, \zeta, t_2, \eta_2)). \quad (2)_j$$

Pour $j = T$, il n'y a rien à démontrer. On l'admet pour $j \geq 1$ et on le démontre pour $j-1$; comme $j \geq 1$, par définition

$$Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+j, B+j, T-j)} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1), (\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell_2, \eta_2)) =$$
$$\pi(\psi', \epsilon', \underline{t}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1)(\rho, A+j, B+j, \zeta, \ell_2, \eta_2)).$$

On passe de j à $j-1$ en rajoutant la ligne $\zeta(B+j), \cdots, \zeta(A+j)$. Il faut donc calculer $Jac_{x \in [\zeta(B+j), \zeta(A+j)]}$ du résultat pour j pour obtenir $Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+j-1, B+j-1, T-j+1)}$.

On décompose donc l'intervalle $[\zeta(B+j), \zeta(A+j)]$ en trois sous-ensembles $\mathcal{E}_i$ pour $i \in [1, 3]$ tel que : $Jac_{x \in \mathcal{E}_1} Jac^d_{x \in -^t\mathcal{E}_2} < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \neq 0$ et

$$Jac_{x \in \mathcal{E}_3} \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1)(\rho, A+j, B+j, \zeta, \ell_2, \eta_2)) \neq 0.$$

L'élément $\zeta(A+j)$ ne peut être que dans $\mathcal{E}_3$ pour des raisons de support cuspidal. On note ζB_0 l' élément de $\mathcal{E}_3$ qui satisfait $[\zeta B_0, \zeta(A+j)] \in \mathcal{E}_3$ et $\zeta(B_0 - 1) \notin \mathcal{E}_3$; un tel élément existe nécessairement. Comme $\zeta(B_0 - 1) \notin \mathcal{E}_3$, la non nullité relative à $\mathcal{E}_3$ nécessite que

$$Jac_{x \in [\zeta(B_0), \zeta(A+j)]} \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1)(\rho, A+j, B+j, \zeta, \ell_2, \eta_2)) \neq 0.$$

D'après 2.2, il exite donc $(\rho, A'', B'', \zeta'') \in Jord(\psi') \cup \{(\rho, A-1, B+1, \zeta), (\rho, A+j, B+j, \zeta)\}$ tel que $\zeta B_0 = \zeta'' B''$. Comme $B_0 \in [B, A+T]$ et que l'on sait que ψ est de restriction discrète à la diagonale, $(\rho, A'', B'', \zeta'')$ ne peut être que $(\rho, B+1, A-1, \zeta)$ ou $(\rho, B+j, A+j, \zeta)$. Si $j = 1$, les 2 possibilités sont les mêmes et si $j > 1$, seul la deuxième est possible. Donc dans tous les cas, $B_0 = B + j$ et $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$. On a donc bien prouvé $(2)_j$ pour tout j.

On suppose maintenant que l'on a aussi $\ell_2 \neq 0$; on continue les calculs précédents en utilisant l'inclusion :

$$\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1)(\rho, A+T, B+T, \ell_2, \eta_2)) \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A+T)} >$$
$$\times \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1), (\rho, A+T-1, B+T+1, \zeta, \ell_2 - 1, \eta_2)). \quad (3)$$

On garde les notations précédentes et ici on démontre de proche en proche sur j décroissant que

$$Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A+j, B+j, T-j)}(3) = < \rho|\,|^{\zeta(B+j)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A+j)} > \times$$
$$\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1), (\rho, A-1+j, B+1+j, \zeta, \ell_2 - 1, \eta_2)). \quad (4)_j$$

On suppose cette expression connue pour $j \geq 1$ et on la démontre pour $j-1$, c'est à dire qu'il faut calculer $Jac_{x \in [\zeta(B+j), \zeta(A+j)]}$ du terme de droite $(4)_j$. On décompose encore $[\zeta(B+j), \zeta(A+j)]$ en 3 sous-ensembles $\mathcal{E}_i$ pour $i \in [1, 3]$ tel que :

$$Jac_{x \in \mathcal{E}_1} Jac^d_{x \in -^t\mathcal{E}_2} < \rho|\,|^{\zeta(B+j)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A+j)} > \neq 0$$

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_3}\pi(\psi',\epsilon',\underline{\ell}',\underline{\eta}',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\ell_1-1,\eta_1),(\rho,A-1+j,B+1+j,\zeta,\ell_2-1,\eta_2))\neq 0.$$

L'élément $\zeta(B+j)$ ne peut être dans $\mathcal{E}_3$ par les propriétés des blocs de Jordan de ψ' (cf. 2) ; ainsi il est dans $\mathcal{E}_1$ car il ne peut être le premier élément de $\mathcal{E}_2$; si $\mathcal{E}_1$ n'est pas réduit à $\zeta(B+j)$ il contient $\zeta(B+j-1)$; c'est impossible puisque cet élément n'est pas dans l'intervalle. Ainsi $\mathcal{E}_1=\{\zeta(B+j)\}$. L'ensemble $\mathcal{E}_2$ s'il n'est pas vide a comme premier élément $\zeta(A+j)$ et il sera donc alors nécessairement réduit à cet élément ; donc $\mathcal{E}_3$ contient au moins $[\zeta(B+j+1),\zeta(A+j-1)]$. Ainsi le module de Jacquet cherché est

$$Jac_{\zeta(A+j)}\Big(<\rho|\,|^{\zeta(B+j-1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+j)}>\times$$

$$Jac_{\zeta(B+j+1),\cdots,\zeta(A+j-1)}\pi(\psi',\epsilon',\underline{\ell}',\underline{\eta}',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\ell_1-1,\eta_1),(\rho,A-1+j,B+1+j,\zeta,\ell_2-1,\eta_2))\Big)$$

et la deuxième ligne n'est autre par définition que

$$\pi(\psi',\epsilon',\underline{\ell}',\underline{\eta}',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\ell_1-1,\eta_1),(\rho,A-2+j,B+j,\zeta,\ell_2-1,\eta_2)).$$

D'après 2.2, le $Jac_{\zeta(A+j)}$ de cette représentation est nulle et c'est donc $\mathcal{E}_2$ qui contient $\zeta(A+j)$. On obtient alors $(2)_{j-1}$, comme cherché.

Avec ces 2 étapes, on a montré que si $\ell_1\ell_2\neq 0$, $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ est soit nul soit est un sous-module de :

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$$

$$\times Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A-1,B+1,T)}\pi(\psi',\epsilon',\underline{t}',\underline{\eta}',(\rho,A-1,B+1,\zeta,t_1-1,\eta_1),(\rho,A+T-1,B+T+1,\zeta,t_2-1,\eta_2)).\quad(4)$$

On peut appliquer la proposition par récurrence pour savoir que (4) est non nul précisément quand $\ell_1-1=\ell_2-1$ et $\eta_1\eta_2=(-1)^{A-B+2}=(-1)^{A-B}$. Ce sont exactement les conditions nécessaires de l'énoncé pour la non nullité.

Reste à démontrer qu'elles sont suffisantes ; cela vient à remonter les constructions précédentes. On suppose donc que $\ell_1=\ell_2$ et que $\eta_1\eta_2=(-1)^{A-B}$. Par récurrence, on sait alors que

$$\pi(\psi',\epsilon',\underline{\ell}',\underline{\eta}',(\rho,A-1,B+1,\zeta,\ell_1-1,\eta_1),(\rho,A+T-1,B+T+1,\zeta,\ell_2-1,\eta_2))\hookrightarrow S(\zeta,A-1,B+1,T)\times\tau,$$

où τ est une représentation convenable, irréductible non nulle.

D'où par définition, l'inclusion de $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ dans

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{\zeta(B+T)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+T)}>\times S(\zeta,A-1,B+1,T)\times\tau.\quad(5)$$

Il faut rappeler que la représentation $S(\zeta,A-1,B+1,T)$ est associée au tableau :

$$\begin{array}{ccc}\zeta(B+T+1) & \cdots & \zeta(A+T-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \zeta(B+2) & \cdots & \zeta A\end{array}$$

Ce sont donc des formules standard qui prouvent l'irréductibilité de l'induite dans un GL convenable de

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times S(\rho,A-1,B+1,T)$$

et de $<\rho|\,|^{-\zeta(A+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+T)}>\times S(\rho,A-1,B+1,T)$. On utilise l'inclusion

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{\zeta(B+T)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+T)}>\hookrightarrow$$

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{\zeta(B+T)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{-\zeta(A+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+T)}>$$

$$\simeq<\rho|\,|^{\zeta(B+T)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{-\zeta(A+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+T)}>$$

$$\hookrightarrow<\rho|\,|^{\zeta(B+T)},\cdots,\rho|\,|^{\zeta(B+1)}>\times<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>\times$$

$$<\rho|\,|^{-\zeta(A+1)},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta(A+T)}>;$$

et l'inclusion (5) se prolonge en une inclusion dans l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times S(\rho, A-1, B+1, T)$$

$$\times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{-\zeta(A+1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A+T)} > \times \tau.$$

On a besoin de savoir que

$$< \rho|\,|^{-\zeta(A+1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A+T)} > \times \tau \simeq < \rho|\,|^{\zeta(A+T), \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)}} > \times \tau.$$

Pour cela il suffit de savoir que $\rho|\,|^x \times \tau \simeq \rho|\,|^{-x} \times \tau$ pour tout $x \in [(A+1), (A+T)]$. Or comme $Jac_x \tau = 0$, le terme de gauche a un unique sous-module irréductible et il intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de l'induite $\rho|\,|^x \times \tau$. De même $Jac_{-x}\tau = 0$ et il suffit donc de montrer que le sous-module irréductible du terme de gauche est le sous-module irréductible du terme de droite. Le plus simple ici est d'utiliser une description de τ comme sous-module de l'induite $S(\rho, A-1, B+1, \zeta) \times \pi(\psi', \epsilon')$ et donc de la proposition 4 par récurrence ; on peut donc admettre cela. Par hypothèse $\pi(\psi', \epsilon')$ s'obtient à partir d'un morphisme de restriction discrète. Dans le cas de restriction discrète à la diagonale, on a la propriété plus générale :

Soit $x > 0$ tel que $2x - 1$ ne soit pas un bloc de Jordan de la restriction à la diagonale d'un morphisme $\tilde{\psi}'$. Alors $\rho|\,|^x \times \pi(\tilde{\psi}', \tilde{\epsilon}')$ est irréductible pour tout choix de $\tilde{\epsilon}'$ (cf. [14], 6.4)

Par les propriétés standard dans les groupes linéaires, l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{\zeta(A+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} >$$

est irréductible (en effet pour tout $z \in [\zeta B, -\zeta A]$ et tout $z' \in [\zeta(A+T), \zeta(A+1)]$, $|z - z'| \geq |B - A - 1| > 1$).

On trouve ainsi une inclusion de $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ dans

$$< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times S(\rho, A-1, B+1, T) \times < \rho|\,|^{\zeta(A+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} >$$

$$\times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau.$$

On remplace encore l'induite $< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} >$ par son inclusion dans

$$< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} >$$

et on peut encore faire commuter comme ci-dessus pour obtenir une inclusion de $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ dans

$$< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times S(\rho, A-1, B+1, T) \times < \rho|\,|^{\zeta(A+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} > \tag{5}$$

$$\times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau.$$

La non nullité de $Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A, B, T)} \pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ vient de la réciprocité de Frobenius et de (5). D'où la non nullité annoncée dans l'énoncé.

On suppose maintenant que $\ell_2 = 0$ en gardant l'hypothèse que $\ell_1 \neq 0$. Montrons que le module de Jacquet cherché est 0. On revient au début de la démonstration précédente. On considère le sous-tableau de $\mathcal{C}$ formé des $T-1$ premières lignes et des $A-B-1$ premières colonnes ; ceci n'est autre que $\mathcal{C}(\zeta, A-1, B+1, T-1)$. D'autre part comme $\ell_2 = 0$, le bloc $(\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell_2, \eta_2)$ peut être remplacé par l'ensemble des blocs $\cup_{C \in [A+T, B+T]} (\rho, C, C, \zeta, \eta_2 (-1)^{C-B-T})$ et on peut donc remplacer $(\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell_2, \eta_2)$ par les 3 blocs $(\rho, A+T-2, B+T, \zeta, t=0, \eta_2)$, $(\rho, A+T, A+T, \zeta, \eta(-1)^{A-B})$, $(\rho, A+T-1, A+T-1, \zeta, \eta_2(-1)^{A-B-1})$. Raisonnons par l'absurde. Le calcul déjà fait montre que la non nullité cherchée nécessite aussi que

$$Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A-1, B+1, T-1)} \pi(\psi', \epsilon', (\rho, A-1, B+1, \zeta, \ell_1 - 1, \eta_1), (\rho, A+T-2, B+T, \zeta, \ell_2 = 0, \eta),$$

$$(\rho, A+T, A+T, \zeta, \eta_2(-1)^{A-B}), (\rho, A+T-1, A+T-1, \zeta, \eta_2(-1)^{A-B-1})) \neq 0.$$

Par récurrence cela force $\ell_1 - 1 = 0$ et la condition $\eta_2 = \eta_1(-1)^{A-B-2}$.

On définit le tableau :

$$\mathcal{T} := \begin{array}{ccccc} & & \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+1) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A+T-2) & \cdots & \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \\ \zeta(A+T-1) & \cdots & \zeta A & & \\ \zeta(A+T) & \cdots & \zeta(A+1). & & \end{array}$$

Il lui correspond une unique représentation irréductible du GL convenable, basée sur ρ que l'on note $\sigma_{\mathcal{T}}$. On veut montrer que $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ est alors un sous-module irréductible de

$$\sigma_{\mathcal{T}} \times \pi(\underline{\psi'}, (\rho, A-1, A-1, \zeta, \eta(-1)^{A-B-1}), (\rho, A, A, \zeta, \eta(-1)^{A-B})).$$

Si on admet cela, on peut conclure à la nullité de $Jac_{x \in \mathcal{C}(\zeta, A, B, T)} \pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ car ceci est déjà vrai pour l'induite ci-dessus : en effet, il suffit de remarquer que $Jac_{\zeta(B+T), \cdots, \zeta(B+1)}$ de cette induite est nul (on a pris la première colonne de $\mathcal{C}(\zeta, A, B, T)$) et ceci résulte des formules standards.

Il faut donc montrer cette inclusion. Comme on sait déjà que $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 0$ avec $\eta_1\eta_2 = (-1)^{A-B}$, on peut écrire $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ comme sous-module irréductible de l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \begin{pmatrix} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+1) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A+T-2) & \cdots & \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix}$$

$$\times \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell'}, \underline{\eta'}, (\rho, A+T-1, A+T-1, \zeta, -\eta), (\rho, A+T, A+T, \zeta, \eta)).$$

On peut remplacer la première ligne ci-dessus par le sous-module irréductible de l'induite écrite car sinon on aurait une inclusion dans

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-1)} > \times \begin{pmatrix} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+1) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A+T-2) & \cdots & \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix} \times$$

$$\rho|\,|^{-\zeta A} \times \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell'}, \underline{\eta'}, (\rho, A+T-1, A+T-1, \zeta, -\eta), (\rho, A+T, A+T, \zeta, \eta)).$$

Mais l'induite de cette deuxième ligne est isomorphe à

$$\rho|\,|^{\zeta A} \times \pi(\underline{\psi'}, (\rho, A+T-1, A+T-1, \zeta, -\eta), (\rho, A+T, A+T, \zeta, \eta))$$

et on vérifie alors que l'on aurait $Jac_{\zeta A} \pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \neq 0$. Ceci est impossible d'après 2.2. C'était le point clé. La suite résulte de l'inclusion :

$$\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell'}, \underline{\eta'}, (\rho, A+T-1, A+T-1, \zeta, -\eta), (\rho, A+T, A+T, \zeta, \eta)) \hookrightarrow$$

$$< \rho|\,|^{\zeta(A+T-1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta A} > \times < \rho|\,|^{\zeta(A+T)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} > \times$$

$$\pi(\underline{\psi'}, (\rho, A-1, A-1, \zeta, -\eta), (\rho, A, A, \zeta, \eta))$$

et des factorisations usuelles.

Considérons maintenant le cas où $\ell_1 = 0$. On regarde d'abord le cas où $\ell_2 \neq 0$. Ici,

$$\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta}) \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A+T)} > \times$$

$$\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A, B, \zeta, \ell_1 = 0, \eta_1), (\rho, A+T-1, B+T+1, \zeta, \ell_2 - 1, \eta_2)). \tag{6}$$

On calcule le module de Jacquet $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}$ de l'induite de droite et on trouve par des calculs analogues à ceux déjà faits :

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A-1,B+1,T)}\pi(\underline{\psi}', (\rho, A, B, \zeta, \ell_1, \eta_1), (\rho, A-1+T, B+1+T, \ell_2-1, \eta_2)).$$

Comme $\ell_1 = 0$, on peut remplacer $(\rho, A, B, \zeta, \ell_1, \eta_1)$ par $\cup_{C\in[B,A]}(\rho, C, C, \zeta, \eta_1(-1)^{C-B})$ et donc encore par $(\rho, B, B, \zeta, \eta_1), (\rho, B+1, B+1, \zeta, -\eta_1), (\rho, A, B+2, \zeta, \ell = 0, \eta_1)$. On remarque que $(\rho, A-1+T, B+1+T, \ell_2-1, \eta_2) = (\rho, A+(T-1), B+2+(T-1), t_2-1, \eta_2)$. Or $\mathcal{C}(\zeta, A, B+2, T-1)$ est précisément l'ensemble des $T-1$ premières lignes de $\mathcal{C}(\zeta, A-1, B+1, T)$. Par récurrence, on sait donc que pour que $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}$ du premier membre de (4) soit non nul, il faut nécessairement que $\ell_2 = 1$ et $\eta_2 = \eta_1(-1)^{A-B}$. Ayant cela, on montre l'existence d'une inclusion de $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ dans

$$\begin{pmatrix} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+2) & \cdots & -\zeta(A+1) & \cdots & -\zeta(A+T) \\ \zeta(B+T+1) & \cdots & \zeta(B+3) & \cdots & -\zeta A & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \zeta(A+T-1) & \cdots & \zeta(A+1) & \cdots & -\zeta(B+2) & & \end{pmatrix} \times$$

$$\pi(\underline{\psi}', (\rho, B, B, \zeta, \eta_1), (\rho, B+1, B+1, \zeta, -\eta_1)),$$

où la matrice signifie en fait la représentation associée par Zelevinky à cet ensemble de segments. Pour tout $x \in [-\zeta(A+2), -\zeta(A+T)]$ l'induite $\rho|\,|^x \times \pi(\underline{\psi}', (\rho, B, B, \zeta, \eta_1), (\rho, B+1, B+1, \zeta, -\eta_1))$ est irréductible. On peut remplacer l'inclusion ci-dessus par une inclusion dans l'induite :

$$\begin{pmatrix} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+2) & \cdots & -\zeta(A+1) \\ \zeta(B+T+1) & \cdots & \zeta(B+3) & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \zeta(A+T-1) & \cdots & \zeta(A+1) & \cdots & -\zeta(B+2) \\ \zeta(A+T) & \cdots & \zeta(A+2) & & \end{pmatrix} \times$$

$$\pi(\underline{\psi}', (\rho, B, B, \zeta, \eta_1), (\rho, B+1, B+1, \zeta, -\eta_1)).$$

La difficulté vient de ce que $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}$ de la représentation induite écrite n'est pas nulle. Il faut factoriser différemment ; on sort les 2 dernières colonnes de la matrice, c'est-à-dire que l'on écrit $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ comme sous-module irréductible de l'induite :

$$\begin{pmatrix} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+2) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \zeta(B+T+1) & \cdots & \zeta(B+3) & \cdots & -\zeta(A-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \zeta(A+T-1) & \cdots & \zeta(A+1) & \cdots & -\zeta(B) \\ \zeta(A+T) & \cdots & \zeta(A+2) & & \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\times < \rho|\,|^{-\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1)} > \times < \rho|\,|^{-\zeta(A+1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+2)} > \tag{8}$$

$$\times\pi(\underline{\psi}', (\rho, B, B, \zeta, \eta_1), (\rho, B+1, B+1, \zeta, -\eta_1)). \tag{8$'$}$$

On peut remplacer (8)$\times$ (8)' par un sous-quotient irréductible, τ''. Mais en utilisant 2.2, on sait que $Jac_x\tau'' = 0$ pour tout $x \in]\zeta B, \zeta(A+T)]$. On calcule d'abord $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,B+1,A+1,T-1)}$ de l'induite (7)$\times\tau''$ et on trouve l'induite

$$\begin{pmatrix} \zeta(B+1) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta A & \cdots & -\zeta B \end{pmatrix} \times \tau''$$

et quand on applique $Jac_{\zeta(B+1),\cdots,\zeta(A+1)}$ à ce résultat, on trouve 0. C'est ce que l'on voulait.

On est donc maintenant ramené au cas $\ell_1 = \ell_2 = 0$ et il faut montrer que la condition $\eta_1 = \eta_2(-1)^{A-B}$ est la condition nécessaire et suffisante pour que le module de Jacquet soit non nul. Ici $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ n'est autre que $\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', \cup_{C\in[B,A]}(\rho, C, C, \zeta, \eta_1(-1)^{C-B}), \cup_{C'\in[B,A]}(\rho, C'+T, C'+T, \zeta, \eta_2(-1)^{(C'-B)}))$. La non nullité du module de Jacquet cherché nécessite d'abord la non nullité du module de Jacquet relativement à la première colonne du tableau $\mathcal{C}(\zeta, A, B, T)$ c'est à dire $Jac_{\zeta(B+T),\cdots,\zeta(B+1)}$ et a fortiori la non nullité du $Jac_{\zeta(B+T),\cdots\zeta(A+1)}$ de cette représentation. Or par définition cette non nullité est exactement équivalente à ce que la valeur du caractère sur le bloc (ρ, A, A, ζ) soit la même que sur le bloc $(\rho, B+T, B+T, \zeta)$; c'est-à-dire précisément $\eta_1(-1)^{(A-B)} = \eta_2$. Quand cette égalité est vérifiée, on a une inclusion :

$$\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', \cup_{C\in[B,A]}(\rho, C, C, \zeta, \eta_1(-1)^{C-B}), \cup_{C'\in[B,A]}(\rho, C'+T, C'+T, \zeta, \eta_2(-1)^{(C'-B)})) \hookrightarrow$$
$$< \rho|\,|^{\zeta(B+T)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \cdots \times < \rho|\,|^{\zeta(B+T+\ell)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(A-\ell)} > \times \cdots \times < \rho|\,|^{\zeta(A+T)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \tag{9}$$
$$\times \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}').$$

Il est maintenant facile de conclure. Allons un peu plus loin. On peut remplacer l'induite dans (9) par un sous-quotient irréductible mais ce sous-quotient, σ, doit vérifier que si $Jac_x\sigma \neq 0$ alors $x = \zeta(B+T)$. Cela veut dire que l'on peut remplacer (9) par l'unique représentation basée sur ρ associée au tableau :

$$\begin{array}{ccc} \zeta(B+T) & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A+T) & \cdots & -\zeta B. \end{array}$$

En calculant $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}$, on trouve l'inclusion, pour $\eta = \pm$:

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,\zeta)}\pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}', (\rho, A, B, \zeta, 0, \eta), (\rho, A+T, B+T, \zeta, 0, \eta(-1)^{(A-B)})) \hookrightarrow S(\rho, A, B, \zeta)\times\pi(\underline{\psi}').$$

Remarque : On vient donc de construire 2 sous-modules irréductibles non nuls de l'induite de droite. L'objet du paragraphe 4 est de montrer que cette induite est semi-simple constitutée de tous les sous-modules irréductibles $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}(\pi(\underline{\psi}', (\rho, A, B, \zeta, \ell, \eta), (\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell, \eta(-1)^{(A-B)})))$ quand ℓ et η varient.

4 Induction

On fixe $\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}'$ permettant de définir, $\pi' := \pi(\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}')$ une représentation irréductible ou 0 d'un groupe de même type que G ; et on suppose ici que $\pi' \neq 0$. On fixe aussi un quadruplet (ρ, A, B, ζ) ayant la propriété de parité. On suppose que pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi')$ on a soit $A' < B$ soit $B' >> A$. On posera aussi $\underline{\psi}'$ pour l'ensemble des données $\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}'$.

Proposition : *L'induite $S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi'$ est semi-simple de longueur $A - B + 2$. Ses constituants sont l'ensemble des représentations*

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}(\pi(\underline{\psi}', (\rho, A, B, \zeta, \ell, \eta), (\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell, \eta(-1)^{(A-B)})))$$

quand ℓ varie dans $[0, [(A - B + 1)/2]]$ et $\eta = \pm$.

Si $A - B$ est impair, on peut alors avoir $\ell = (A - B + 1)/2$ et dans ce cas, il n'y a pas de η. Et on vérifie facilement que nous avons bien défini $A - B + 2$ paramètres : en effet si $A - B$ est pair, il y a $(A - B)/2 + 1$ valeurs de ℓ et pour chaque valeurs de ℓ, 2 valeurs de η, ce qui donne bien $A - B + 2$ paramètres. Tandis que si $A - B$ est impair, il y a $(A - B + 1)/2 + 1$ valeurs de ℓ et pour toute valeurs de ℓ sauf exactement 1, il y a 2 valeurs de η, pour l'autre η n'intervient pas ; on a donc $2(A - B + 1)/2 + 1 = A - B + 2$ paramètres.

Remarque : *On rappelle que (ρ, A, B, ζ) est associé à une représentation irréductible de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ qui est un produit tensoriel de la représentation ρ vue comme représentation de W_F et de 2 représentations de $SL(2,\mathbb{C})$ l'une de dimension, disons a, l'autre de dimension disons b. Dans cette interprétation $A - B + 2 = inf(a,b) + 1$.*

On pose $\sigma := S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi'$. Voici une description de la preuve.

1- On montrera ci-dessous (cf. 4.1) que les $A - B + 2$ représentations décrites dans l'énoncé sont des sous-quotients tous disctincts de σ.

2- On montrera que l'ensemble des sous-modules irréductibles de σ est un inclus dans l'ensemble des représentations décrites dans l'énoncé.

Donc si on sait que σ est semi-simple, la proposition est démontrée. Or on saurait que σ est semi-simple si l'on sait que π' est unitaire ; ce serait une hypothèse tout à fait raisonable, car π' est associée à un paramètre de restriction discrète à la diagonale, que l'on sait transférer ces représentations mises en paquet à un groupe linéaire convenable dès que l'on sait le faire pour les séries discrètes ; il faudrait encore une comparaison des formules de traces globales et on réaliserait ainsi π' comme composante locale d'une forme automorphe de carré intégrable ; ce sont les idées d'Arthur, cf. par exemple [2]. Toutefois, il manque encore les lemmes fondamentaux et les lemmes fondamentaux pondérés, nous allons donc nous passer de cette hypothèse. On connaît quand même l'unitarité si π' est une série discrète.

On donne donc une démonstration qui ne suppose pas l'unitarité de π'. On remplace l'unitarité par l'utilisation d'une dualité. En effet, on montrera que σ est autoduale pour une dualité que l'on précisera (essentiellement la contragrédiente) ; cela entraîne que tout sous-module irréductible de σ est isomorphe à un quotient irréductible de σ ; si un tel sous-module n'est pas facteur direct, il intervient donc avec multiplicité au moins 2. Ainsi il est équivalent de démontrer que σ est semi-simple et que toute représentation de l'énoncé intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible de σ. C'est cette 2e propriété que l'on ramène à son analogue quand ψ' est le paramètre d'un paquet de séries discrètes ; dans ce cas, on a l'unitarité, donc la semi-simplicité et donc la propriété sur les multiplicités.

4.1 Description de certains sous-quotients

On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des représentations

$$\tau_{\ell,\eta} := Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}(\pi(\underline{\psi}', (\rho, A, B, \zeta, \ell, \eta), (\rho, A+T, B+T, \zeta, \ell, \eta(-1)^{(A-B)}))),$$

quand ℓ et η varient. On garde les notations $\sigma, \pi', \underline{\psi}'$ introduites ci-dessus.

Lemme : *Toute représentation de $\mathcal{I}$ intervient comme sous-quotient de σ.*

On calcule $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\sigma$ et on trouve (comme semi-simplifié) la somme de l'induite, où le tableau écrit doit être vu comme la représentation associée :

$$\begin{pmatrix} \zeta(B+1) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \zeta A & \cdots & -\zeta B \end{pmatrix} \times \pi'$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix} \times \pi'.$$

Pour avoir ce résultat, il faut couper l'intervalle $[\zeta B, -\zeta A]$ en trois sous-ensembles $\mathcal{E}_i$, pour $i = 1, 2, 3$ tels que (en utilisant l'autodualité de $S(\rho, A, B, \zeta)$)

$$Jac_{x\in\mathcal{E}_1} S(\rho, A, B, \zeta) \neq 0; \qquad Jac_{x\in -{}^t\mathcal{E}_2} S(\rho, A, B, \zeta) \neq 0; \qquad Jac_{x\in\mathcal{E}_3}\pi' \neq 0.$$

On sait grâce à 2.2 que ζB n'est pas dans $\mathcal{E}_3$; d'après les formules standard si $\mathcal{E}_i \neq \emptyset$ que $i = 1$ ou 2 alors ζB est le premier élément de $\mathcal{E}_i$. Ainsi soit $\mathcal{E}_1$ soit $\mathcal{E}_2$ est vide et l'autre ensemble contient ζB. On sait aussi que $-\zeta A \notin \mathcal{E}_3$ (cf [14], 3.4) c'est donc un élément du $\mathcal{E}_i$ pour $i = 1$ ou 2 qui est non vide. Mais alors cet ensemble contient tout le segment $[\zeta B, -\zeta A]$ par les formules standard ; l'éventualité $\mathcal{E}_1 \neq \emptyset$ donne le premier terme et $\mathcal{E}_2 \neq \emptyset$ donne le deuxième terme. La même démonstration calcule

$$Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A} Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\sigma \tag{1}$$

et on trouve exactement 2 copies de $\sigma' := S(\rho, A-1, B+1, \zeta) \times \pi'$. On connaît, par récurrence sur $A - B$, la structure de cette représentation.

Puisque (1) est non nul, il existe un sous-quotient τ' de σ tel que

$$Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A} Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\tau' \neq 0.$$

La réciprocité de Frobenius entraîne alors l'existence d'une représentation irréductible τ'' et d'une inclusion de τ' dans l'induite

$$\rho|\,|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\zeta A} \times \rho|\,|^{\zeta B} \times \cdots \times \rho|\,|^{-\zeta A} \times \tau''.$$

Et par exactitude du foncteur de Jacquet τ'' est un sous-quotient irréductible de $S(\rho, A-1, B+1, \zeta) \times \pi'$ ainsi τ'' correspond à des données ℓ' et η quand on remplace (A, B) par $(A-1, B+1)$. On vérifie que l'inclusion ci-dessus se factorise par le sous-module

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau'', \tag{2}$$

simplement car pour tout $x \in]\zeta B, -\zeta A]$, $Jac_{x,\cdots,-\zeta A}\sigma = 0$ et donc aussi pour τ'. On a vu que (2) a un unique sous-module irréductible qui est l'élément de $\mathcal{I}$ correspondant à $\ell' + 1$ et η. Mais quand on calcule

$$Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A} Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\tau'$$

on trouve exactement τ'' avec multiplicité 2. Pour épuiser tous les sous-quotients, τ de σ vérifiant $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A} Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\tau \neq 0$, il faut donc intervenir toutes les valeurs de $\ell' \in [0, [(A-B+1)/2] - 1]$ et de η' possibles. On obtient donc tous les éléments de $\mathcal{I}$ tels que $\ell \geq 1$.

On a vu dans la remarque à la fin de 3.4 que les 2 représentations de $\mathcal{I}$ pour lesquelles $\ell = 0$ sont des sous-modules irréductibles de σ et cela termine la preuve du lemme.

4.2 Description de certains sous-modules

On garde la notation $\tau_{\ell,\eta}$ introduite dans 4.1. On note S_- l'unique sous-module irréductible associé à l'ensemble ordonné (de haut en bas) de segments basés sur ρ

$$\begin{array}{ccc} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta B \end{array}.$$

Et on a une inclusion de $S(\rho, A, B, \zeta)$ dans $S_- \times < \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} >$. On sait décomposer la représentation $< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi'$; en effet cette représentation est de longueur 3 exactement, contenant les 2 sous-modules irréductibles, $\pi(\underline{\psi}', (\rho, A, A, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon))$ pour $\epsilon = \pm 1$ et l'unique sous-module irréductible, π_u, de l'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi'$.. En effet, un tel résultat est connu si $A = B + 1$, dans ce cas, $\pi_u = \pi(\underline{\psi}', (\rho, B+1, B, \zeta, +))$ et on a décrit la décomposition de cet élément dans le groupe de Grothendieck dans [14] et c'est exactement ce que nous avons anoncé. Si $A > B + 1$, on démontre que pour tout sous-quotient irréductible de l'induite, τ, $Jac_{\zeta A}\tau \neq 0$; je ne vois pas d'autre démonstration que celle donnée en [14], c'est-à-dire se ramener au cas où π' est cuspidal. Le cas où π' est cuspidal est facile car $\rho|\,|^{\zeta A} \times \pi'$ est irréductible ; ceci permet alors de remplacer A par $A - 1$ et de conclure par récurrence.

On note π_d la somme des 2 sous-modules irréductibles définis ci-dessus et π_u le quotient irréductible déjà introduit. On a donc une suite exacte :

$$0 \to S_- \times \pi_d \to S_- \times < \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi' \to S_- \times \pi_u \to 0.$$

D'autre part σ est une sous-représentation de la représentation du milieu ; on note σ_d l'intersection de σ avec $S_- \times \pi_d$ et σ_u l'image de σ dans $S_- \times \pi_u$. On a donc la suite exacte :

$$0 \to \sigma_d \to \sigma \to \sigma_u \to 0.$$

Lemme : *Les sous-modules irréductibles de σ_d sont exactement les représentations $\tau_{\ell=0,\eta}$ pour $\eta = \pm 1$ et les sous-modules irréductibles de σ_u sont de la forme $\tau_{\ell,\eta}$ pour $\ell > 0$ chacune apparaissant au plus une fois.*

L'assertion concernant les sous-modules de σ_u est la plus simple. En effet un sous-module irréductibles de σ_u est aussi un sous-module irréductible de $S_- \times \pi_u$ et donc de

$$S_- \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi'.$$

On utilise le fait que la représentation $S_- \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} >$ est irréductible (cf. 8.2) et on peut donc échanger les facteurs. Ainsi tout sous-module irréductible de $S_- \times \pi_u$ est certainement un sous-module irréductible de l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times S(\rho, A-1, B+1, \zeta) \times \times \pi'.$$

On a déjà montré que ces sous-modules irréductibles sont exactement de la forme $\tau_{\ell,\eta}$ avec $\ell > 0$. Cela démontre, a fortiori, la 2e partie du lemme.

Montrons maintenant l'assertion concernant σ_d ; il suffit de démontrer que cette représentation a au plus 2 sous-modules irréductibles, ils seront alors nécessairement les représentations $\tau_{\ell=0,\eta}$ pour $\eta = \pm$ dont on a vu qu'elles n'étaient pas sous-modules de σ_u. On fixe $\epsilon = \pm$ et on note $\sigma_{d,\epsilon}$ l'intersection de σ_d avec $S_- \times \pi(\underline{\psi'}, (\rho, A, A, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon))$.

Il faut d'abord considérer le cas où $A = B + 1$. Ici on a simplement l'inclusion

$$\sigma_{d,\epsilon} \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1)} > \times \pi(\underline{\psi'}, (\rho, B+1, B+1, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon)).$$

On calcule par les formules standard, $Jac_{\zeta B, \cdots, -\zeta(B+1)}$ de l'induite de droite. On vérifie que pour tout x tel que $|x| \leq (B+1)$, on a

$$Jac_{x, \cdots, -\zeta(B+1)} \pi(\underline{\psi'}, (\rho, B+1, B+1, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon)) = 0;$$

Pour cela on revient à la définition comme sous-module irréductible de l'induite

$$< \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi';$$

Ceci entraîne qu'il faudrait une non nullité analogue (éventuellement en changeant x en x' vérifiant encore $|x'| \leq (B+1)$) pour π' ; ceci est exclu par [14], 3.4. Ceci entraîne que

$$Jac_{\zeta B, \cdots, -\zeta(B+1)} \Big(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta(B+1)} > \times \pi(\underline{\psi'}, (\rho, B+1, B+1, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon)) \Big)$$

$$= \pi(\underline{\psi'}, (\rho, B+1, B+1, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon)).$$

Cette induite a donc un unique sous-module irréductible et il en est donc de même de $\sigma_{d,\epsilon}$. Cela termine la preuve dans ce cas.

On suppose donc que $A > B + 1$. On a l'inclusion $\sigma_{d,\epsilon} \hookrightarrow$

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times S(\rho, A-1, B+1, \zeta) \times \pi(\underline{\psi'}, (\rho, A, A, \zeta, \epsilon), (\rho, B, B, \zeta, \epsilon)). \tag{1}$$

Puisque (A, B) est remplacé par $(A-1, B+1)$ en (1), on sait décomposer (1). La représentation (1) est une représentation semi-simple dont on note $\tau'_{\ell',\eta'}$ les différents composants de façon analogue aux $\tau_{\ell,\eta}$. On va montrer que l'inclusionde $\sigma_{d,\epsilon}$ est à valeurs dans $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau'_{\ell'=0,-\epsilon}$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et fixons ℓ', η' tel qu'il existe un morphisme non nul de $\sigma_{d,\epsilon}$ dans l'induite :

$$< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau'_{\ell',\eta'}.$$

Si $\ell' > 0$, alors $Jac_{\zeta(B+1),\zeta(B+1)}\tau'_{\ell',\eta'} \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe une représentation irréductible τ'' et une inclusion de $\tau'_{\ell',\eta'}$ dans l'induite $\rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \tau''$. Comme tout sous-quotient irréductible, λ, de l'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \rho|\,|^{\zeta(B+1)}$ vérifie $Jac_{\zeta(B+1)}\lambda \neq 0$, on aura un sous-quotient de $\sigma_{d,\epsilon}$ dont le $Jac_{\zeta(B+1)}$ n'est pas nul ; ceci est contradictoire avec le fait que $Jac_{\zeta(B+1)}\sigma = 0$. Supposons maitenant que $\eta' \neq -\epsilon$; en partant des définitions, on vérifie que

$$Jac_{\zeta A,\cdots,-\zeta(A-1)}\tau'_{\ell'=0,\epsilon} \neq 0.$$

Comme $A > (B+1)$, l'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \rho|\,|^{\zeta A}$ est irréductible et on trouverait un morphisme non nul de $\sigma_{d,\epsilon}$ dans une induite de la forme $\rho|\,|^{\zeta A} \times \tau'''$ où τ''' est quelconque. Par fonctorialité cela force encore $Jac_{\zeta A}\sigma_{d,\epsilon} \neq 0$ ce qui est contradictoire avec le fait que $Jac_{\zeta A}\sigma = 0$. On vient donc de démontrer l'inclusion $\sigma_{d,\epsilon} \hookrightarrow < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau'_{0,-\epsilon}$. Ensuite on conclut comme dans le cas où $A = B+1$ en montrant que $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}\Big(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau'_{\ell',\eta'}\Big) = \tau'_{0,-\epsilon}$. Cela termine la preuve du lemme.

4.3 Autodualité

Pour un groupe classique, la représentation duale d'une représentation irréductible peut se réaliser dans le même espace en tordant éventuellement par un automorphisme venant du groupe des similitudes, cet élément ne dépend que du groupe et non de la représentation. Soit π_0 une représentation irréductible d'un groupe classique et δ une représentation autoduale d'un produit de groupes linéaires. On considère l'induite $\delta \times \pi_0$ et sa duale ; cette duale se réalise dans le même espace en tordant éventuellement par un automorphisme comme ci-dessus qui ne dépend que du groupe de la représentation π_0. On a alors l'équivalence entre les 2 assertions suivantes :

(1) $\delta \times \pi_0$ est semi-simple sans multiplicité

(2) tout sous-module irréductible de $\delta \times \pi_0$ intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de $\delta \times \pi_0$.

En effet (1) entraîne évidemment (2) et la réciproque se prouve ainsi. Notons γ la similitude qui sert à entrelacer π_0 et sa duale et on voit cet élément dans le "gros" groupe de l'induite et cet élément normalise le parabolique qui sert à induire. Soit τ un sous-module irréductible de $\delta \times \pi_0$; alors ${}^\gamma\tau$ est un sous-module irréductible de $\delta \times {}^\gamma\pi_0$ mais par dualité σ^* est un quotient de $\delta \times \pi_0^*$, c'est -à-dire que ${}^\gamma\tau$ est un quotient de $\delta \times {}^\gamma\pi_0$. Ainsi ${}^\gamma\tau$ est isomorphe à un sous-module et à un quotient de cette induite et par dualité τ est aussi isomorphe à un sous-module et à un quotient de $\delta \times \pi_0$. Par multiplicité 1 comme sous-quotient, τ est donc facteur direct de $\delta \times \pi_0$. Ainsi la somme des sous-modules irréductibles de $\delta \times \pi_0$ est facteur direct de $\delta \times \pi_0$ et coïncide donc avec toute l'induite. D'où l'assertion.

4.4 Fin de la preuve de la semi-simplicité

En tenant comte de 4.3, il nous reste à démontrer que les représentations $\tau_{\ell,\eta}$ définies en 4.1, interviennent dans σ avec multiplicité 1 en tant que sous-quotient irréductible. On connaît le résultat si π' est unitaire donc en particulier si π' est une série discrète. On suppose d'abord que ψ' est un morphisme élémentaire.

Ce cas se ramène à celui des séries discrètes en appliquant une involution décrite dans [11]. On applique cette involution non pas à $\pi(\psi')$ mais à l'induite σ. Montrons que cette involution commute à

l'induction par $S(\rho, A, B, \zeta)$, ici il faut évidemment l'hypothèse que pour tout $C \in [B, A]$, $(\rho, 2C+1) \notin Jord(\psi' \circ \Delta)$ (sinon ce serait faux). Précisément, on a défini pour tout entier α une involution $inv_{<\alpha}$ dans le groupe le groupe de Grothendieck ; pour cela on note pour tout produit de groupes linéaires $proj_{<\alpha}$ la projection sur l'ensemble des représentations dont le support cuspidal ne fait intervenir que des éléments $\rho|\,|^x$ avec $|x| < (\alpha - 1)/2$ et on étend cette application à tout Lévi du groupe classique G en la faisant porter sur le produit des groupes linéaires intervenant dans le Levi. On a alors posé, en imitant les formules de [3] et [22] :

$$inv_{<\alpha}\pi := \sum_P (-1)^{(rg(G)-rg(P))} ind_P^G proj_{<\alpha}(res_P^G)\pi,$$

où la somme parcourt l'ensemble des paraboliques standard. On définit de la même façon $inv_{\leq\alpha}$ en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges. Par les définitions de [11], pour toute application ϵ' de $Jord(\psi')$ dans ± 1 :

$$\pi(\psi', \epsilon') = \prod_{\alpha \in Jord(\psi' \circ \Delta); \zeta(\alpha) = -} inv_{<\alpha} \circ inv_{\leq\alpha}\pi(\psi' \circ \Delta, \epsilon'),$$

où on a identifié $Jord(\psi')$ et $Jord(\psi' \circ \Delta)$ pour définir le 2e ϵ', en oubliant la fonction ζ. Or si $\alpha < 2B + 1$, il résulte pratiquement des définitions que $inv_{<\alpha}$ et $inv_{\leq\alpha}$ commute à l'induction par $S(\rho, A, B, \zeta)$ tout simplement parce que $Jac_x S(\rho, A, B, \zeta) \neq 0$ entraîne que $x = \zeta B$ et que $S(\rho, A, B, \zeta)$ est autoduale. Par contre, si $\alpha > 2A+1$ alors tout $\rho|\,|^x$ dans le support cuspidal de $S(\rho, A, B, \zeta)$ vérifie $|x| < (\alpha - 1)/2$ et on a montré en [11] (c'est en fait facile avec la définition) que

$$inv_{<\alpha}(S(\rho, A, B, \zeta) \times \tau) = inv(S(\rho, A, B, \zeta)) \times inv_{<\alpha}\tau,$$

pour toute représentation τ, où inv est l'involution d'Iwahori-Matsumoto. Ici $inv(S(\rho, A, B, \zeta)) = S(\rho, A, B, -\zeta)$. On a la même formule avec $inv_{\leq\alpha}$ et le produit $inv_{<\alpha} \circ inv_{\leq\alpha}$ commute donc avec l'induction par $S(\rho, A, B, \zeta)$. D'où le résultat de commutation annoncé, puisque pour tout $\alpha \in Jord(\psi')$ on a soit $\alpha > 2A + 1$ soit $\alpha < 2B + 1$.

Nous n'avons pas démontré que $inv_{\leq\alpha}$ envoie une représentation irréductible sur une représentation irréductible et c'est d'ailleurs faux, dans notre situation, si on prenait $\alpha \in [B, A[$. Toutefois on a démontré cette conservation de l'irréductibilité pour les représentations qui sont sous-quotients de $S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi(\psi, \epsilon)$ dès que $\alpha \geq A$ (cf. assertion de la preuve de [11], 4.1) à un signe près. On peut donc conclure si pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ avec nécessairement $A' = B'$, on a aussi $\zeta' = +$ dès que $B' < B$. On règle donc d'abord par récurrence le cas où ceci n'est pas réalisé ; on a à examiner 2 cas d'après les définitions de [11].

1e cas, il existe (ρ, A', B', ζ') avec $B' < B$ tel que soit $(\rho, A' - 1, B' - 1, \zeta') \notin Jord(\psi)$; alors $Jac_{\zeta' B'}\pi(\psi, \epsilon) = \pi(\psi', \epsilon)$ où $Jord(\psi')$ se déduit de $Jord(\psi)$ en remplaçant simplement (ρ, A', B', ζ') par $(\rho, A' - 1, B' - 1, \zeta')$ (qui disparaît si $B' = 1$)

2e cas, il existe (ρ, A', B', ζ') avec $B' < B$ tel que $(\rho, A' - 1, B' - 1, \zeta') \in Jord(\psi)$ et

$$Jac_{\zeta' B', \cdots, -\zeta'(B'-1)}\pi(\psi, \epsilon) = \pi(\psi', \epsilon),$$

où $Jord(\psi')$ se déduit de $Jord(\psi)$ en enlevant les 2 blocs (ρ, A', B', ζ') et $(\rho, A' - 1, B' - 1, \zeta')$.

On vérifie que les Jac considérés, appliqués à $S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi(\psi, \epsilon)$ n'agissent que sur $\pi(\psi, \epsilon)$ et n'annulent aucune des représentations $\tau_{\ell,\epsilon}$ qui nous intéressent. Ainsi si l'une de ces représentations intervenaient avec une multiplicité plus grande que 1 dans l'induite avec ψ cela entraînerait que l'induite avec ψ' aurait de la multiplicité elle aussi. On conclut alors facilement. On se ramène ainsi au cas, où il n'y a à considérer que des $inv_{<\alpha}$ pour $\alpha > A$ et $inv_{\leq\alpha}$ pour $\alpha \geq A$ où on sait que l'application considérée conserve l'irréductibilité des sous-quotients de notre induite.

On ramène maintenant le cas général au cas des morphismes élémentaires. Si $\underline{\ell'}$ qui fait partie des données définissant π' est identiquement nul, π' est une représentation dans un paquet associé à un

morphisme élémentaire et on a donc l'assertion. On suppose donc que $\underline{\ell}'$ n'est pas identiquement nul ; on a donc un élément $(\rho', A', B', \zeta') \in Jord(\psi')$ qui permet de construire une inclusion

$$\pi' \hookrightarrow < \rho'|\,|^{\zeta' B'}, \cdots, \rho'|\,|^{-\zeta' A'} > \times \pi''$$

où π'' est associé à des données analogues à celles définissant π' ; on change (ρ', A', B', ζ') en $(\rho', A' - 1, B' + 1, \zeta')$ et $\underline{\ell}'$ change uniquement sur cet élément. Par hypothèse, on sait que soit $B > A'$ soit $B' > A$. Pour éviter des problèmes de notations, on suppose que $\rho' = \rho$ (ce qui est de toute façon le cas le plus difficile, a priori). On vérifie sur la définition que $Jac_{\zeta' B', \cdots, -\zeta' A'} \tau_{\ell,\eta} \neq 0$ contient l'analogue,$\tau'_{\ell',\eta}$, de $\tau_{\ell,\eta}$ quand on remplace π' par π'' (en fait il y a égalité mais nous n'avons pas besoin d'un résultat aussi précis). De plus

$$Jac_{\zeta' B', \cdots, -\zeta' A'} \sigma = S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi''.$$

Par exactitude du foncteur de Jacquet, $\tau'_{\ell,\eta}$ intervient avec multiplicité au moins 2 comme sous-quotient de $S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi''$; ce qui est exclu. Cela termine la preuve.

4.5 Induction suite

On fixe des données $\underline{\psi'} := (\psi', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}')$ permettant de construire une représentation irréductible $\pi(\underline{\psi'})$. On fixe aussi (ρ, A, B, ζ) ayant la condition de parité et un entier a. Le but de ce paragraphe est de décrire la représentation induite :

$$\sigma_a := S(\rho, A, B, \zeta) \times \cdots \times S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi(\underline{\psi'}),$$

où il y a a copies de $S(\rho, A, B, \zeta)$.

On note ψ_a le morphisme qui se déduit de ψ' en ajoutant $2a$ copies de (ρ, A, B, ζ) à l'ensemble $Jord(\psi')$ et on fixe un morphisme $\tilde{\psi}_a$ dominant ψ_a. En particulier il existe des entiers T_i pour $i \in [1, 2a]$ tels que chaque $(\rho, A+T_i, B+T_i, \zeta) \in Jord(\tilde{\psi}_a)$ corresponde à une des copies de $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ ajoutée. Pour fixer les notations, on suppose que $T_1 < T_2 < \cdots < T_{2a}$. Toutefois, il continue d'y avoir une ambiguité si $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi')$ pour la lever, on suppose que dans ce cas l'élément de $Jord(\tilde{\psi}_a)$ qui correspond à ce bloc est de la forme $(\rho, A + T_0, B + T_0, \zeta)$ avec $T_0 < T_1$. Etant donné le théorème ci-dessus, il n'est pas utile de considérer le cas où (ρ, A, B, ζ) apparaît dans $Jord(\psi')$ avec une multiplicité plus grande que 1.

Pour $\ell \in [0, [(A - B + 1)/2]]$ et pour $\eta = \pm$ qui n'est défini que si $\ell < (A - B + 1)/2$, on prolonge $\underline{\ell}', \underline{\eta}'$ à $Jord(\tilde{\psi}_a)$ en $\underline{\ell}$, $\underline{\eta}$, en posant $\underline{\ell}(\rho, A + T_i, B + T_i, \zeta) = \ell$ pour tout $i \in [1, 2a]$ et $\underline{\eta}(\rho, A + T_i, B + T_i, \zeta) = \eta(-1)^{(i-1)(A-B)}$. Si $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi')$ on suppose que $\ell = \underline{\ell}'(\rho, A, B, \zeta)$ et que $\eta = \underline{\eta}(\rho, A, B, \zeta)$.

On pose alors $\pi(\psi_a, \epsilon, \underline{t}, \underline{\eta}) := Jac_{\mathcal{C}} \pi(\tilde{\psi}_a, \epsilon, \underline{t}, \underline{\eta})$, où $\mathcal{C}$ est un ensemble convenable comme en 1.3.

Théorème : *La représentation σ_a est semi-simple de longueur inférieure ou égale à $A - B + 2$; elle est la somme directe des représentations $\pi(\psi_a, \epsilon, \underline{t}, \underline{\eta})$ définies ci-dessus. Elle est en particulier irréductible si $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi')$.*

Pour faire la démonstration, on travaille dans le groupe de Grothendieck, on décrit donc le semi-simplifié de σ_a. En particulier on va montrer qu'il est sans multiplicité car constitué exactement des représentations décrites par l'énoncé (cf. 2.1) et cela suffit pour savoir que σ_a est semi-simple (cf 4.3).

On note $\tilde{\psi}'$ le morphisme qui se déduit de $\tilde{\psi}_a$ en enlevant les blocs $(\rho, A + T_i, B + T_i, \zeta)$ pour $i \in [1, 2a]$; il domine ψ' et $\underline{\ell}', \underline{\eta}'$ sont bien définis sur $Jord(\tilde{\psi}')$. On reprend la notation $\underline{\tilde{\psi}'}$ pour l'ensemble des données $\tilde{\psi}', \epsilon', \underline{\ell}', \underline{\eta}'$. Avant l'énoncé, on a défini certains prolongements de $\underline{\ell}'$ et $\underline{\eta}'$ à $Jord(\tilde{\psi}_a)$ parce que ce sont les seuls qui vont intervenir. Mais pour la preuve on a besoin de considérer tous les prolongements possibles, $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$. Grâce à 4 dont les hypothèses sont remplies :

$$\times_{j \in [1,a]} S(\rho, A + T_{2j-1}, B + T_{2j-1}, \zeta) \times \pi(\underline{\tilde{\psi}'}) =$$

$$\oplus_{\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}} Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}). \quad (1)$$

A droite n'intervient déjà que les prolongements qui vérifient

$$\forall j\in[1,a]\,\underline{\tilde{\ell}}(\rho,A+T_{2j},B+T_{2j},\zeta)=\underline{\tilde{\ell}}(\rho,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},\zeta)$$

et $\underline{\eta}(\rho,A+T_{2j},B+T_{2j},\zeta)=\underline{\eta}(\rho,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},\zeta)(-1)^{(A-B)}$ (cf. 3.2). On considère les éléments de $Jord(\psi')$ qui sont inférieurs ou égaux à (ρ,A,B,ζ) et $\mathcal{C}'_{\leq}$ les éléments qui font "passer" des blocs de $\tilde{\psi}'$ à ces blocs. On applique $Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}$ aux 2 membres de (1). Cette opération commute avec l'induction par les $S(\rho,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},\zeta)$ car $\mathcal{C}'_{\leq}$ ne contient aucun terme de la forme $\zeta(B+T_{2j-1})$; cette opération commute aussi au Jac du membre de droite parce que les éléments des $\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})$ sont très différents des éléments de $\mathcal{C}'_{\leq}$. D'où

$$\times_{j\in[1,a]}S(\rho,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},\zeta)\times Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\underline{\tilde{\psi}'})=$$

$$\oplus_{\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}} Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})} Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}). \quad (2)$$

On applique maintenant progressivement de $j=1$ à $j=a$, $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})}$ aux 2 membres de (2). On vérifie que le membre de gauche devient

$$S(\rho,A,B,\zeta)\times\cdots\times S(\rho,A,B,\zeta)\times Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\underline{\tilde{\psi}'})$$

avec la multiplicité 2^a. Il est plus difficile de décrire le terme de droite ; le résultat est que l'on obtient avec multiplicité, 2^a, les représentations $Jac_{x\in\cup_{i\in[1,2a]}\mathcal{C}(\rho,A,B,T_i)}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})$.
Admettons cela pour le moment et concluons. Cette assertion donne une égalité :

$$S(\rho,A,B,\zeta)\times\cdots\times S(\rho,A,B,\zeta)\times Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\underline{\tilde{\psi}'})=\oplus_{\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}}Jac_{x\in\cup_{i\in[1,2a]}\mathcal{C}(\rho,A,B,T_i)}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}). \quad (3)$$

ou encore pour tout $\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}$ tel que $Jac_{x\in\cup_{i\in[1,2a]}\mathcal{C}(\rho,A,B,T_i)}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})$ soit non nul, une inclusion :

$$Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})\hookrightarrow\times_{j\in[1,2a]}S(\zeta,A,B,T_j)\times Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\underline{\tilde{\psi}'})$$

Par irréductibilité de la représentation $\times_{j\in[1,2a]}S(\zeta,A,B,T_j)$, on peut permuter les facteurs. Fixons $i\in[1,a[$, on peut alors mettre en première place (à gauche) $S(\zeta,A,B,T_{2j+1})$ et en utilisant l'inclusion de $S(\zeta,A,B,T_{2j+1})$ dans $S(\zeta,A+T_{2j},B+T_{2j},T_{2j+1}-T_{2j})\times S(\zeta,A,B,T_{2j})$, on obtient

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j},B+T_{2j},T_{2j+1}-T_{2j})}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})\neq 0.$$

De 3, on en déduit que l'on a aussi

$$\underline{\tilde{\ell}}(\rho,A+T_{2j},B+T_{2j},\zeta)=\underline{\tilde{\ell}}(\rho,A+T_{2j+1},B+T_{2j+1},\zeta);$$

$$\underline{\tilde{\eta}}(\rho,A+T_{2j},B+T_{2j},\zeta)=\underline{\tilde{\eta}}(\rho,A+T_{2j+1},B+T_{2j+1},\zeta)(-1)^{A-B}.$$

Si $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi')$ on fait la même chose pour $j=0$ (cf. le début de la démonstration) pour obtenir les conditions de l'énoncé. On note encore $\mathcal{C}''$ les éléments qui font "passer" des blocs de $\tilde{\psi}_a$ strictement supérieurs à $(\rho,A+T_{2a},B+T_{2a},\zeta)$ à ceux de ψ' strictement supérieurs à (ρ,A,B,ζ). On applique $Jac_{x\in\mathcal{C}''}$ aux 2 membres de (3) ; à gauche, cette opération commute à l'induction et on obtient donc que les sous-quotients irréductibles de σ_a sont exactement les représentations décrites dans l'énoncé et avec multiplicité 1 ; on sait qu'elles sont non isomorphes (ou nulles) grâce à 2 et cela termine la preuve modulo l'assertion admise.

Démontrons cette assertion ; soit $\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}}$ tel que

$$Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})}Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})\neq 0.$$

Alors il existe une représentation irréductible π et une inclusion de $Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})$ dans

$$\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})\times\Big(\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A,B,T_{2j-1})\times S(\zeta,A,B,T_{2j-1})\Big)\times\pi.$$

On sait en plus que Jac_z de la représentation de gauche vaut 0 pour tout $z\in]\zeta B,\zeta(A+T_{2a})]$ sauf pour les valeurs $\zeta(B+T_j)$ avec $j\in[1,2a]$. On en déduit que l'inclusion se factorise par

$$\times_{i\in[1,2a]}S(\zeta,A,B,T_i)\times\pi. \tag{4}$$

Cela force $\pi=Jac_{x\in\cup_{i\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_i)}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})$. On peut facilement calculer

$$Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})}Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})}$$
$$\times_{i\in[1,a]}S(\zeta,A,B,T_i)\times\pi$$

et cela vaut 2^a fois π. On a donc démontré que l'on n'a pas plus que ce qui est annoncé mais il faut démontrer que l'on a bien toutes ces représentations.

On reprend la démonstration en sens inverse, c'est-à-dire que l'on suppose que

$$Jac_{x\in\cup_{i\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_i)}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})\neq 0.$$

On sait cf 2.1 que cette représentation est irréductible, on la note π est on a une inclusion comme dans (4). Puis on utilise encore

$$\times_{i\in[1,2a]}S(\zeta,A,B,T_i)\simeq\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A,B,T_{2j})\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A,B,T_{2j-1})$$

et pour $j\in[1,a]$

$$S(\zeta,A,B,T_{2j})\times_{k\in]j,a]}S(\zeta,A,B,T_{2k})\hookrightarrow$$
$$S(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})\times S(\zeta,A,B,T_{2j-1})\times_{k\in]j,a]}S(\zeta,A,B,T_{2k})$$
$$\simeq S(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})\times_{k\in]j,a]}S(\zeta,A,B,T_{2k})\times S(\zeta,A,B,T_{2j-1}).$$

Ainsi de proche en proche, on obtient une inclusion $\times_{i\in[1,2a]}S(\zeta,A,B,T_i)\hookrightarrow$

$$\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A,B,T_{2j-1})\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A,B,T_{2j-1}).$$

Et par irréductibilité, on peut permuter comme on veut les 2a derniers facteurs et on peut donc prolonger l'inclusion (4) en

$$\times_{j\in[1,a]}S(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})\times_{j\in[1,a]}\Big(S(\zeta,A,B,T_{2j-1})\times S(\zeta,A,B,T_{2j-1})\Big)\times\pi.$$

D'où le fait que π intervient dans

$$Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{2j-1})}Jac_{x\in\cup_{j\in[1,a]}\mathcal{C}(\zeta,A+T_{2j-1},B+T_{2j-1},T_{2j}-T_{2j-1})}Jac_{x\in\mathcal{C}'_{\leq}}\pi(\tilde{\psi},\underline{\tilde{\ell}},\underline{\tilde{\eta}})$$

avec multiplicité au moins 1. Mais comme elle ne peut intervenir que pour cette valeur de $\underline{\tilde{\ell}}$ et $\underline{\tilde{\eta}}$ elle intervient nécessairement avec multiplicité 2^a d'après la partie directe. Cela termine la preuve.

5 Paramétrisation et induction

Les définitions de 3 sont maintenant pleinement justifiées. On peut relier cela à l'induction de la façon suivante. Soit ψ tel que tout élément de $Jord(\psi)$ ait la condition de parité et notons ψ_0 le morphisme qui se déduit de ψ en posant

$$Jord(\psi_0) := \{(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi); (-1)^{mult_{Jord(\psi)}(\rho,A,B,\zeta)} = -1\}.$$

C'est un ensemble sans multiplicité. On fixe ϵ_0 un caractère du centralisateur de ψ_0, c'est-à-dire un morphisme de $Jord(\psi_0)$ dans ± 1.

Corollaire : $\oplus_{\epsilon;\epsilon_{|Jord(\psi_0)}=\epsilon_0}\pi(\psi,\epsilon) =$

$$\times_{(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)} \underbrace{S(\rho,A,B,\zeta)\times\cdots\times S(\rho,A,B,\zeta)}_{1/2(mult_{Jord(\psi)}(\rho,A,B,\zeta)-mult_{Jord(\psi_0)}(\rho,A,B,\zeta))} \times\pi(\psi_0,\epsilon_0).$$

C'est un corollaire immédiat de 4.5

6 Induction, le cas général

Ici on fixe ψ tel que tous les éléments de $Jord(\psi)$ ait la condition de parité. Pour tout choix d'application $\underline{\ell}$ et $\underline{\eta}$ compatible avec un caractère, ϵ du centralisateur de ψ (cf. 3), on définit $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ et pour simplifier on pose $\underline{\psi}$ cet ensemble de données $\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta}$.

Et on fixe une collection, $\mathcal{E}$, de quadruplets (ρ, A, B, ζ) dont aucun n'a la condition de parité.

Théorème : *L'induite* $\times_{(\rho,A,B,\zeta)\in\mathcal{E}}S(\rho,A,B,\zeta)\times\pi(\underline{\psi})$ *est irréductible.*

Pour simplifier les notations de la démonstration, on suppose que pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathcal{E}$, $\rho \simeq \rho^*$, ce qui est le cas le plus difficile. On fait une première réduction : on ordonne totalement les éléments de $\mathcal{E}$ de telle sorte que si $(\rho, A, B, \zeta), (\rho, A', B', \zeta') \in \mathcal{E}$ avec $B > B'$ alors le premier terme est strictement supérieur au deuxième. Il y a de nombreux choix, d'autant plus que $\mathcal{E}$ peut avoir de la multiplicité. Pour tout $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathcal{E}$ on fixe $T_{\rho,A,B,\zeta} \in \mathbb{N}$ de telle sorte que si $(\rho, A, B, \zeta) > (\rho', A', B,', \zeta')$ alors $B + T_{\rho,A,B,\zeta} > A' + T_{\rho',A',B',\zeta'}$. On suppose que l'on sait démontrer que

$$\sigma_T := \times_{(\rho,A,B,\zeta)\in\mathcal{E}}S(\rho, A + T_{\rho,A,B,\zeta}, B + T_{\rho,A,B,\zeta}, \zeta)\times\pi(\underline{\psi})$$

est irréductible et on va en déduire le théorème.

Fixons $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathcal{E}$ et posons :

$$\begin{aligned}\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)} &:= \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')\geq(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho', A' + T', B' + T', \zeta')\\ &\quad\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')<(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho', A', B', \zeta')\times\pi(\underline{\psi});\\ \sigma_{>(\rho,A,B,\zeta)} &:= \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')>(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho', A' + T', B' + T', \zeta')\\ &\quad\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')\leq(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho', A', B', \zeta')\times\pi(\underline{\psi}).\end{aligned}$$

On admet que $\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)}$ est irréductible et on démontre que $\sigma_{>(\rho,A,B,\zeta)}$ est aussi irréductible.

En effet, on calcule aisément :

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{\rho,A,B,\zeta})\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T_{\rho,A,B,\zeta})}\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)}.$$

Montrons plus généralement l'assertion suivante : soit τ une représentation (non nécessairement irréductible) et soit (ρ, A, B, ζ) $T \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus. On suppose que pour tout $x \in \mathcal{C}(\zeta, A, B, T)$, $Jac_x\tau = 0$ alors, dans le groupe de Grothendieck :

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}\Big(S(\rho, A + T, B + T, \zeta)\times\tau\Big) = S(\rho, A, B, \zeta)\times\tau\oplus S(\rho, A, B, \zeta)\times\tau.$$

En effet, on calcule d'abord $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}\Big(S(\rho,A+T,B+T,\zeta)\times\tau\Big)$. On commence par calculer $Jac_{x\in[\zeta(B+T),\zeta(A+T)]}$. Pour cela on décompose $[\zeta(B+T),\zeta(A+T)]$ en trois sous-ensembles $\mathcal{I}_j$ pour $j\in\{1,2,3\}$ vérifiant :

$$Jac_{x\in\mathcal{I}_1}Jac^d_{x\in-{}^t\mathcal{I}_2}S(\rho,A+T,B+T,\zeta)\neq 0;\qquad Jac_{x\in\mathcal{I}_3}\tau\neq 0.$$

Par l'hypothèse que l'on a faite $\mathcal{I}_3$ est nécessairement vide puisque qu'il est inclus dans $\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)$. Si $\mathcal{I}_1$ est non vide, il contient nécessairement $\zeta(B+T)$ et si $\mathcal{I}_2$ est non vide, $-{}^t\mathcal{I}_2$ contient nécessairement $-\zeta(B+T)$ c'est-à-dire que $\mathcal{I}_2$ contient $\zeta(B+T)$. Mais comme l'intervalle ne contient qu'une fois $\zeta(B+T)$, $\mathcal{I}_j$ est vide pour une valeur de $j=1,2$ et vaut $[\zeta(B+T),\zeta(A+T)]$ pour l'autre valeur. Dans le cas où c'est $\mathcal{I}_1$ qui est non vide, on enlève la première colonne du tableau définissant $S(\rho,A+T,B+T,\zeta)$ et dans le deuxième cas on enlève la dernière colonne. Donc

$$Jac_{x\in[\zeta(B+T),\zeta(A+T)}\Big(S(\rho,A+T,B+T,\zeta)\times\tau\Big)=$$

$$\begin{pmatrix}\zeta(B+T-1) & \cdots & -\zeta(A+T)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \zeta(A+T-1) & \cdots & -\zeta(B+T)\end{pmatrix}\times\tau\oplus\begin{pmatrix}\zeta(B+T) & \cdots & -\zeta(A+T-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \zeta(A+T) & \cdots & -\zeta(B+T-1)\end{pmatrix}\times\tau.$$

Dans le groupe de Grothendieck les 2 induites sont les mêmes. Ensuite on calcule le $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T-1)}$ de cette induite. Comme $\zeta(B+T)$ n'est plus dans l'ensemble $\mathcal{C}(\zeta,A,B,T-1)$ il n'y a plus qu'une possibilité enlever les $T-1$ premières colones quand l'induite est écrite sous la première forme (les $T-1$ dernières colonnes sous la deuxième forme). Finalement on trouve :

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}\Big(S(\rho,A+T,B+T,\zeta)\times\tau\Big)=$$

$$\begin{pmatrix}\zeta B & \cdots & -\zeta(A+T)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \zeta A & \cdots & -\zeta(B+T)\end{pmatrix}\times\tau\oplus\begin{pmatrix}\zeta(B+T) & \cdots & -\zeta A\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \zeta(A+T) & \cdots & -\zeta B\end{pmatrix}\times\tau.$$

Dans le groupe de Grothendieck les 2 induites sont les mêmes. Il reste encore à calculer $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}$, cela se fait de la même façon et finalement on trouve la représentation $S(\rho,A,B,T)\times\tau$ avec multiplicité 2.

On applique ce calcul, en prenant pour

$$\tau:=\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')>(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho',A'+T',B'+T',\zeta')$$

$$\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')<(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho',A',B',\zeta')\times\pi(\underline{\psi}).$$

Les hypothèses sont satisfaites, car $Jac_x\pi(\underline{\psi})\neq 0$ nécessite que x soit entier si les éléments de $\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)$ sont demi-entiers non entiers et vice et versa et

$$Jac_x\Big(\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')>(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho',A'+T',B'+T',\zeta')$$

$$\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E};(\rho',A',B',\zeta')<(\rho,A,B,\zeta)}S(\rho',A',B',\zeta')\Big)\neq 0$$

nécessite que $x=\zeta'(B'+T')$ avec $B'+T'>A+T$ ou $x=\zeta'B'$ avec $B'\leq B<(B+1)$. Or les éléments de $\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)$ sont de valeur absolue comprise entre $(B+1)$ et $(A+T)$. Il faut la même propriété avec Jac^d_{-x} mais c'est automatique, puisque la représentation est autoduale. Pour vraiment se ramener à notre calcul, il faut encore utiliser que les représentations $S(\rho_1,C_1,C_1',\zeta_1)\times S(\rho_2,C_2,C_2',\zeta_2)$ sont irréductibles et donc permutables (cf 8.1 pour ce résultat).

Finalement on trouve que $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}\sigma_{\geq(\rho,A,B,T)}$ vaut la représentation $\sigma_{>(\rho,A,B,T)}$ avec multiplicité 2. Il en existe donc un sous-quotient irréductible, noté σ', de $\sigma_{>(\rho,A,B,T)}$ tel que par réciprocité de Frobenius :

$$\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)} \hookrightarrow \times_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}\rho|\,|^x \times \sigma'.$$

Avec la propriété que $Jac_x\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}(\rho, A, B, \zeta)$ sauf éventuellement $x = \zeta(B+T)$, on voit que l'inclusion se factorise par :

$$\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)} \hookrightarrow S(\zeta, A, B, T) \times S(\zeta, A, B, T) \times \sigma'.$$

On vérifie sans problème que $Jac_x\sigma_{>(\rho,A,B,\zeta)} = 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}(\zeta, A, B, T)$ (on l'a essentiellement fait ci-dessus) et on vérifie essentiellement comme ci-dessus que

$$Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)\cup\mathcal{C}(\zeta,A,B,T)}S(\zeta, A, B, T) \times S(\zeta, A, B, T) \times \sigma'$$

vaut 2 fois σ'. Or ce module de Jacquet doit contenir celui de $\sigma_{\geq(\rho,A,B,\zeta)}$ et donc σ' doit coïncider avec $\sigma_{>(\rho,A,B,T)}$. D'où l'irréductibilité annoncée.

Dans la suite de la démonstration, on suppose donc que pour tout $(\rho, A, B, \zeta), (\rho', A', B', \zeta') \in \mathcal{E}$ on a soit $B > A'$ soit $B' > A$; on suppose même que ces nombres sont très disjoints. On se ramène aussi au cas où ψ est de restriction discrète à la diagonale comme dans la preuve de 4.5.

On va d'abord démontrer le théorème dans le cas où ψ est trivial sur la 2e copie de $SL(2, \mathbb{C})$. En particulier, il n'y a ici que ϵ et $\pi(\psi, \epsilon)$ est une série discrète. On a aussi supposé que la notion de mauvaise parité pour ρ autodudale fixé, traduit le fait que les induites :

$$< \rho|\,|^C, \cdots, \rho|\,|^{-C} > \times\pi(\psi', \epsilon) \tag{1}$$

sont irréductibles soit pour tout C entier (les entiers ont alors la mauvaise parité, il faut penser à la parité de $2C + 1$) soit pour tout C demi-entier non entier, ce sont alors les demi-entiers non entiers qui ont la mauvaise parité. Les résultats d'Harish-Chandra (cf. [23]) généralisent alors cette assertion quand on remplace le segment $[C, -C]$ par un ensemble fini de segments décroissants. On veut la même assertion pour un ensemble de segments, $\mathcal{E}$, de la forme $[\zeta C, -\zeta C]$ où $\zeta = +$ ou $-$; je n'ai pas trouvé d'argument élémentaire pour prouver cela. La démonstration que je propose consiste à utiliser l'application $inv_{<\alpha} \circ inv_{\leq\alpha}$ de [11] 4.1 pour se ramener au cas des segments tous décroissants ; pour réussir, il faut que l'on ne puisse pas avoir dans l'ensemble des segments à la fois un segment $[C, -C]$ et un segment $[-C, C]$; on a fait ce qu'il fallait ci-dessus pour se ramener au cas où cette éventualité ne se produit pas. Ensuite on ne peut pas invoquer directement l'assertion de [11] 4.1 pour savoir que cette application conserve l'irréductibilité (au signe près) des sous-quotients irréductibles de l'induite

$$\times_{[\zeta C,-\zeta C]\in\mathcal{E}} < \rho|\,|^{\zeta C}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times\pi(\psi, \epsilon).$$

Mais fort heureusement la démonstration s'applique telle quelle pour $inv_{\leq\alpha}$ quand on remarque que dans l'énoncé de l'assertion de loc. cite, on peut parfaitement remplacer $\pi(\psi, \epsilon)$ par

$$\times_{[\zeta C,-\zeta C]\in\mathcal{E};C>\alpha} < \rho|\,|^{\zeta C}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta C} > \times\pi(\psi, \epsilon).$$

Le parabolique qui intervient est exactement celui de la preuve donnée. Cela permet de se ramener au cas tempéré.

On suppose donc pour le moment que $\pi(\psi, \epsilon)$ est une série discrète. Fixons $(\rho, A, B, \zeta) \in \mathcal{E}$. On montre d'abord que l'induite :

$$\tau :=< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times\pi(\psi, \epsilon)$$

est irréductible. Pour cela on remarque d'abord qu'elle a un unique sous-module irréductible, τ_s : cela résulte des 2 faits suivants. D'une part pour tout $x \in [\zeta A, \zeta(B + 1)]$, $Jac_x\pi(\psi, \epsilon) = 0$, d'où

$$Jac_{\zeta A,\cdots,\zeta(B+1)}\tau =< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times\pi(\psi, \epsilon).$$

Et d'autre part, l'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi, \epsilon)$ est irréductible.
L'induite $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi, \epsilon)$ a aussi un unique sous-module irréductible car

$$Jac_{\zeta B, \cdots, -\zeta A} < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi, \epsilon) = \pi(\psi, \epsilon)$$

par réciprocité de Frobenius, on voit que τ a aussi un unique quotient irréductible τ_q. Il suffit donc de démontrer que $\tau_s \simeq \tau_q$ puisque chacun intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible de τ d'après les calculs de modules de Jacquet faits ci-dessus.

On considère $\tilde{\tau} :=< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi, \epsilon)$. C'est une représentation irréductible par hypothèse. On calcule le module de Jacquet, $Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}\tilde{\tau}$. On a une filtration :

$$0 \to < \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \otimes \Big(< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi, \epsilon) \Big) \to$$

$$Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}\tilde{\tau} \to < \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \otimes \Big(< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi, \epsilon) \Big) \to 0. \qquad (2)$$

Ici $< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \otimes \tau_s$ est quotient de la représentation la plus à droite ; d'où par réciprocité de Frobenius un homorphisme non nul :

$$\tilde{\tau} \to < \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times \tau_s. \qquad (3)$$

Par irréductibilité ce morphisme est une inclusion. On recalcule dans le groupe de Grothendieck $Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}$ du 2e membre de (3) ; on obtient la somme de τ_s avec $< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}\tau_s$. Or $Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}\tau_s$ est la représentation irréductible $< \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi, \epsilon)$. Ainsi, dans le groupe de Grothendieck, $Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}\tilde{\tau}$ est au plus la somme de τ_s et de

$$< \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(B+1)} > \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi, \epsilon).$$

On suppose que $\tau_s \not\simeq \tau_q$ et on calcule la multiplicité de τ_q dans $Jac_{\zeta A, \cdots, \zeta(B+1)}\tilde{\tau}$ avec l'inclusion (3). D'après ce que l'on vient d'écrire ; cette multiplicité est inférieure ou égal à 1. Par contre dans la suite exacte écrite en (2), elle est 2 ; d'où la contradiction qui donne $\tau_s \simeq \tau_q$ et l'irréductibilité.

On revient à $\mathcal{E}$ et on écrit $\mathcal{E}' := \mathcal{E} - \{(\rho, A, B, \zeta)\}$. On rappelle, car on l'utilisera librement que pour tout $(\rho, A', B', \zeta'), (\rho, A'', B'', \zeta'') \in \mathcal{E}$ l'induite $S(\rho, A', B', \zeta') \times S(\rho, A'', B'', \zeta'')$ est irréductible. On suppose que $A > B$, sinon on change d'élément et si pour tout élément dans $\mathcal{E}$, $A = B$, on a déjà montré le résultat.

Soit τ un sous-module irréductible de $\times_{(\rho', A', B', \zeta') \in \mathcal{E}} S(\rho', A', B', \zeta') \times \pi(\psi, \epsilon)$. On a la suite de morphismes :

$$\tau \hookrightarrow \times_{(\rho', A', B', \zeta') \in \mathcal{E}'} S(\rho', A', B', \zeta') \times S(\rho, A, B, \zeta) \times \pi(\psi, \epsilon) \hookrightarrow$$

$$\times_{(\rho', A', B', \zeta') \in \mathcal{E}'} S(\rho', A', B', \zeta') \times \begin{pmatrix} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix} \times < \rho|\,|^{\zeta A}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta B} > \times \pi(\psi, \epsilon)$$

d'après l'irréductibilité qui vient d'être démontrée

$$\simeq \times_{(\rho', A', B', \zeta') \in \mathcal{E}'} S(\rho', A', B', \zeta') \times \begin{pmatrix} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix} \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \pi(\psi, \epsilon)$$

d'après 8.2

$$\simeq \times_{(\rho', A', B', \zeta') \in \mathcal{E}'} S(\rho', A', B', \zeta') \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \begin{pmatrix} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix} \times \pi(\psi, \epsilon)$$

$$\hookrightarrow \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \times <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$$
$$\times \begin{pmatrix} \zeta(B+1) & \cdots & -\zeta(A-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{pmatrix} \times \pi(\psi,\epsilon)$$
$$= \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \times <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$$
$$\times S(\rho,A-1,B+1,\zeta) \times \pi(\psi,\epsilon).$$

On peut encore faire commuter $<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$ au dessus de chaque $S(\rho',A',B',\zeta')$ car les segments qui définissent $S(\rho',A',B',\zeta')$ sont soit inclus dans le segment $[\zeta B,-\zeta A]$ (dans le cas où $A'<B$) soit contiennent ce segment (cas où $A<B'$). Donc finalement on a :

$$\sigma \hookrightarrow <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \times <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times$$
$$S(\rho,A-1,B+1,\zeta) \times \pi(\psi,\epsilon). \tag{1}$$

Par récurrence sur $\sum_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}}(A'-B')$ on admet que la représentation

$$\times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times S(\rho,A-1,B+1,\zeta) \times \pi(\psi,\epsilon)$$

est irréductible. On montre que l'induite de droite dans (1) a un unique sous-module irréductible et qu'il intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient de cette induite : pour cela on calcule $Jac_{x\in[\zeta B,-\zeta A]\cup[\zeta B,-\zeta A]}$ de cette induite. Il faut le faire en 2 temps, d'abord calculer $Jac_{x\in[\zeta B,-\zeta A]}$; on décompose ce segment en 5 sous-ensembles $\mathcal{I}_j$ pour $j\in[1,5]$ tels que

$$Jac_{x\in\mathcal{I}_1} Jac^d_{x\in -{}^t\mathcal{I}_2} <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \neq 0$$
$$Jac_{x\in\mathcal{I}_3} Jac^d_{x\in -{}^t\mathcal{I}_4} <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \neq 0$$
$$Jac_{x\in\mathcal{I}_5} \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times S(\rho,A-1,B+1,\zeta) \times \pi(\psi,\epsilon) \neq 0.$$

On cherche quel ensemble peut contenir $-\zeta A$; certainement ni $\mathcal{I}_2$ ni $\mathcal{I}_4$ tout simplement car ζA n'est pas dans le support cuspidal de la représentation $<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$. Il ne peut pas non plus être dans $\mathcal{I}_5$ car il faudrait qu'il existe $(\rho,A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'$ avec $\zeta' B'\in[\zeta B,-\zeta A]$ et $-\zeta A\in[\zeta' A',-\zeta' A']$. Or la première condition entraîne $B'\leq A$ et nos hypothèses forcent alors $A'<B$; la 2e condition devient alors impossible à réaliser.

Soit maintenant $j=1$ ou 3 tel que $\mathcal{I}_j$ contienne $-\zeta A$, nécessairement pour cette valeur de j, $\mathcal{I}_j=[\zeta B,-\zeta A]$ et le module de Jacquet cherché est, pour ce choix, l'induite :

$$<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}> \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times S(\rho,A-1,B+1,\zeta) \times \pi(\psi,\epsilon).$$

Quand on applique encore $Jac_{x\in[\zeta B,-\zeta A]}$ à ce résultat, l'argument que l'on vient de donner montre qu'on obtient $\tau' := \times_{(\rho',A',B',\zeta')\in\mathcal{E}'} S(\rho',A',B',\zeta') \times S(\rho,A-1,B+1,\zeta) \times \pi(\psi,\epsilon)$. Le module de Jacquet de l'induite de (1) cherché est donc τ' avec multiplicité 2.

Comme l'induite dans le groupe linéaire convenable $<\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,-\zeta A> \times <\rho|\,|^{\zeta B},\cdots,\rho|\,|^{-\zeta A}>$ est irréductible, il est automatique que $Jac_{x\in[\zeta B,-\zeta A]\cup[\zeta B,-\zeta A]}\tau$ contienne au moins τ' avec multiplicité 2. Ainsi τ est l'unique sous-module irréductible de l'induite de droite de (1) et par exactitude du foncteur de Jacquet, y intervient au plus avec multiplicité 1 comme sous-quotient. D'où nos assertions et le fait que τ est complètement déterminée par τ'. Ainsi σ a un unique sous-module irréductible et comme σ aussi est un sous-module de l'induite de droite de (1), τ y intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible. Cela prouve l'irréductibilité de σ, argument que nous avons déjà utilisé : σ étant autodual tout sous-module irréductible de σ qui intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible est nécessairement facteur direct. Comme σ n'a qu'un seul sous-module irréductible et que ce sous-module intervient avec multiplicité un comme sous-quotient irréductible de σ, σ est irréductible.

Ensuite on passe du cas des séries discrètes au cas général comme expliqué dans la preuve de 4.4.

7 Conclusion

Soit ψ un morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ soumis aux propriétés de 1.3. Soit ϵ un caractère du centralisateur de ψ comme dans 1.3. On a construit dans les paragraphes précédents, une représentation semi-simple sans multiplicité, $\pi(\psi,\epsilon)$ qui a le mauvais gout de pouvoir être nulle mais dont on sait, grâce à [18] par 4, que, modulo les propriétés de transfert de fonction conjecturées mais pas encore connues, le caractère

$$\sum_{\epsilon} \epsilon(\psi(1,1,\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}))\, tr\, \pi(\psi,\epsilon)$$

se transfère en le caractère de la représentation du GL(n,F) convenable définie par ψ.

Il me semble plus naturelle de décomposer ψ en représentations irréductibles de la forme $\rho\otimes[a]\otimes[b]$, où ρ est une représentation irréductible de W_F et a,b sont des entiers donnant chacun la dimension de la représentation de $SL(2,\mathbb{C})$ écrite entre crochets. Avec ces notations, $Jord(\psi)$ est l'ensemble des triplets (ρ,a,b) ; c'est un ensemble avec multiplicité. On dit que (ρ,a,b) a la bonne parité si la représentation $\rho\otimes[a]\otimes[b]$ est à valeurs dans un groupe de même type que ${}^LG$ et on note $Jord(\psi)_p$ le sous-ensemble de $Jord(\psi)$ formé des triplets ayant bonne parité ; c'est encore un ensemble avec multiplicité. Et ϵ s'identifie à une fonction de $Jord(\psi)$ (vu sans multiplicité) dans $\{\pm 1\}$ qui vaut 1 sur tous les triplets n'ayant pas la bonne parité. Pour décomposer $\pi(\psi,\epsilon)$, on a utilisé des fonctions annexes, $\underline{\ell}$ de $Jord(\psi)$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall(\rho,a,b)\in Jord(\psi)_p,\quad \underline{\ell}(\rho,a,b)\in[0,[inf(a,b)/2]]$$

et une fonction $\underline{\eta}$ définie elle aussi sur $Jord(\psi)_p$ est à valeurs dans $\{\pm 1\}$ vérifiant

$$\forall(\rho,a,b)\in Jord(\psi)\quad \underline{\eta}(\rho,a,b)^{inf(a,b)}(-1)^{[inf(a,b)/2]+\underline{\ell}(\rho,a,b)}=\epsilon(\rho,a,b).$$

A de telles données, on a associé une sous-représentation irréductible ou nulle de $\pi(\psi,\epsilon)$ notée $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$. Il n'y a qu'un seul cas, où je peux démontrer que ces représentations sont toutes non nulles ; on note ψ_0 le morphisme analogue à ψ mais tel que $Jord(\psi_0)$ soit sans multiplicité et coïncide avec $Jord(\psi)_p$ aux multiplicité près. L'hypothèse est que ψ_0 soit un morphisme de restriction discrète à la diaogonale. Dans ce cas, on a :

Théorème : *on suppose que ψ_0 définie ci-dessus est de restriction discrète à la diagonale, alors les représentations $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ sont toutes non nulles pour les données ci-dessus et décomposent la représentation $\pi(\psi,\epsilon)$.*

Etant donné les propriétés d'irréductibilité déjà démontrées pour les induites et 5, il faut prouver le théorème dans le cas où $\psi=\psi_p$ et les multiplicités dans $Jord(\psi_p)$ sont inférieures ou égale à 2. On note $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $Jord(\psi)$ formé des éléments dont la multiplicité est exactement 2 et on considère $\mathcal{E}$ comme ensemble sans multiplicité. On note aussi ψ' le morphisme qui se déduit de ψ en enlevant les éléments de $\mathcal{E}$ de $Jord(\psi)$. On reprend les notations habituelles pour $Jord(\psi)$; on fixe des fonctions $\underline{\ell}',\underline{\eta}'$ telles que $\pi(\psi',\epsilon',\underline{\ell}',\underline{\eta}')$ soit l'une des composantes irréductibles de $\pi(\psi',\epsilon')$. On doit démontrer que l'induite

$$\times_{(\rho,A,B,\zeta)\in\mathcal{E}} S(\rho,A,B,\zeta)\times\pi(\psi',\epsilon',\underline{\ell}',\underline{\eta}')$$

est de longueur exactement $\sum_{(\rho,A,B,\zeta)\in\mathcal{E}}(A-B+2)$. On fait la démonstration par induction sur le nombre d'élément de $\mathcal{E}$; on note (ρ,A,B,ζ) l'élément de $\mathcal{E}$ tel que B soit maximum pour cette propriété d'appartenance. Avec l'hypothèse de récurrence appliqué à $\mathcal{E}-\{(\rho,A,B,\zeta)\}$ et 4, on a cette assertion à condition que pour tout $(\rho,A',B',\zeta')\in Jord(\psi)$ vérifiant $B'>B$ alors $B'>>A$. Il faut donc passer de $B'>>A$ à $B'>A$. Cela va être conséquence du résultat plus général suivant

Assertion 1 : *soit $\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta}$ permettant de définir une représentation $\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})$ dont on suppose qu'elle est non nulle. Soit $(\rho,A,B,\zeta)\in Jord(\psi)$ y intervenant avec multiplicité 1 et tel que pour tout $(\rho,A',B',\zeta')\in Jord(\psi)$ un élément différent, soit $B'>A+1$ soit $A'<B-1$. Alors*

$$Jac_{\zeta_B,\cdots,\zeta_A}\pi(\psi,\epsilon,\underline{\ell},\underline{\eta})\neq 0.$$

Il faut remarquer que les hypothèses de cette assertion entraîne que (ρ, A, B, ζ) intervient avec multiplicité 1 dans $Jord(\psi)$.

On fait une récurrence sur $\sum_{(\rho',A',B',\zeta')\in Jord(\psi)} A' - B'$. Le cas des morphismes élémentaires est connus (cf. [11]) et on n'a d'ailleurs besoin que de l'hypothèse $B' > A$ et non $B' > A+1$. Avant de passer au cas général, on généralise un autre résultat du cas discret

Assertion 2 : *soit ψ ayant les propriétés du théorème et soit $\underline{\ell}$ comme dans cet énoncé. On suppose qu'il existe $(\rho, A, B, \zeta) \in Jord(\psi)$ tel que $\underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta) > 0$. On note m la multiplicité de (ρ, A, B, ζ) dans $Jord(\psi)$. Alors $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}$ appliqué m fois à $\pi(\psi, \epsilon, \underline{\ell}, \underline{\eta})$ est une représentation irréductible non nulle. On obtient exactement $\pi(\psi', \epsilon, \underline{\ell}', \underline{\eta})$, où ψ' se déduit de ψ en remplaçant chaque copie de (ρ, A, B, ζ) par $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ et $\underline{\ell}'$ ne diffère de $\underline{\ell}$ que sur $(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ où cette fonction vaut $\underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta) - 1$.*

On fixe une des copies de (ρ, A, B, ζ) dans $Jord(\psi)$; si pour tout élément, (ρ, A', B', ζ') de $Jord(\psi)$ strictement plus grand que cette copie fixée pour l'ordre mis sur $Jord(\psi)$, on a $B' >> A$, il suffit d'appliquer la définition (si (ρ, A, B, ζ) intervient avec multiplicité, on renvoie à 3.4 et si cette multiplicité est plus grande que 2 à l'irréductibilité 5 et 6). Pour la situation générale, une part d'une situation comme ci-dessus et on calcule des $Jac_{x\in\mathcal{C}(\zeta',A',B',T')}$; mais pour tout élément x dans un tel ensemble $\mathcal{C}(\zeta', A', B', T')$, on a sûrement

$$|x| \geq B' + 1 \geq A + 2.$$

Il y a donc une commutation entre cette opération et $Jac_{\zeta B,\cdots,-\zeta A}$. D'où l'assertion 2.

Revenons à la preuve de l'assertion 1. Grâce à l'assertion 2, on se ramène au cas où $\underline{\ell}(\rho, A', B', \zeta') = 0$ pour tout $(\rho, A', B', \zeta') \in Jord(\psi)$ différent de (ρ, A, B, ζ). La récurrence porte donc uniquement sur $A - B$ et si $A = B$, on a déjà vue cette assertion. On suppose donc que $A > B$. Et on suppose d'abord que $\underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta) = 0$; on est directement ramené au cas d'un morphisme élémentaire. On suppose maintenant que $\underline{\ell}(\rho, A, B, \zeta) > 0$

8 Appendice

8.1 Un résultat d'irréductibilité

On rappelle et redémontre (pour la commoditié du lecteur) un résultat de [19]. Pour cela on a besoin d'adapter les notations. Soient (ρ, A, B, ζ) comme dans les paragraphes précédents. On fixe T un entier et on considère le tableau :

$$\begin{array}{ccc} \zeta(B+T) & \cdots & \zeta(B+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A+T) & \cdots & \zeta(A+1) \end{array}$$

On a associé une représentation d'un groupe linéaire convenable $S(\zeta, A, B, T)$, à ce tableau.

Proposition : *Soit $\{T_1, \cdots, T_\ell\}$ une collection d'entiers ; l'induite $\times_{i\in[1,\ell]} S(\zeta, A, B, T_i)$ est irréductible comme représentation d'un groupe linéaire convenable.*

Soit σ un sous-quotient irréductible de cette induite c'est une représentation d'un groupe linéaire $GL(N)$ pour N convenable. Pour $\mathcal{C}$ un ensemble totalement ordonné on garde la notation déjà utilisée $Jac^d_{x\in\mathcal{C}}\sigma$ pour représenter la projection du module de Jacquet de σ le long du parabolique standard de Levi $GL(N - |\mathcal{C}|d_\rho) \times GL(d_\rho) \times \cdots \times GL(d_\rho)$ où il y a $|\mathcal{C}|$-copies $GL(d_\rho)$, sur le support cuspidal des copies $GL(d_\rho)$ qui est précisément $\otimes_{x\in\mathcal{C}}\rho|\,|^x$ avec l'ordre de $\mathcal{C}$. On prend l'expression ζ plus petit pour dire le plus petit si $\zeta = +$ et le plus grand si $\zeta = -$. Le ζ plus petit élément du support cuspidal de σ est $\zeta(B+1)$ et il intervient avec multiplicité ℓ dans le support cuspidal de l'induite de l'énoncé et donc aussi de σ. Il existe donc des éléments Y_i pour $i = 1, \cdots, \ell$ tels que $[\zeta(B+1), Y_i]$ soit un segment et en notant $\mathcal{C}$ l'ensemble totalement ordonné $\cup_{i\in[\ell,1]}[\zeta(B+1), Y_i]$ on ait

$$Jac^d_{x\in\mathcal{C}}\sigma \neq 0. \tag{1}$$

On fixe Y_1 ζ-minimal avec cette propriété puis Y_2 ζ-minimal, etc... On va montrer que $Y_i = \zeta(A+1)$ pour tout $i = 1, \cdots, \ell$. Pour x fixé, on a $Jac_x^d S(\zeta, A, B, T) = 0$ quelque soit T sauf pour $x = \zeta(A+1)$. La non nullité de (1) entraîne à fortiori que $Jac_{Y_1}^d \sigma \neq 0$ et comme ce module de Jacquet est un sous-quotient du module de Jacquet de toute l'induite, il existe $i \in [1, \ell]$ tel que $Jac_{Y_1}^d S(\zeta, A, B, T) \neq 0$. D'où déjà $Y_1 = \zeta(A+1)$. On calcule maintenant Y_2 : on vérifie par réciprocité de Frobenius qu'il existe une représentation σ' et une inclusion

$$\sigma \hookrightarrow \sigma' \times \rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{Y_2} \times \rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta(A+1)}.$$

On peut remplacer $\rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{\zeta(A+1)}$ par $< \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} >$ car sinon il existerait $x \in [\zeta(B+1), \zeta(A+1)[$ tel que $Jac_x^d \sigma \neq 0$. Par minimalité de Y_2 on peut aussi remplacer $\rho|\,|^{\zeta(B+1)} \times \cdots \times \rho|\,|^{Y_2}$ par $< \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{Y_2} >$. La représentation induite

$$< \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{Y_2} > \times < \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} >$$

est irréductible car les segments ont même propriété de croissance et même premier terme. Cette irréductibilité permet d'échanger les 2 facteurs et prouve que $Jac_{Y_2}^d \sigma \neq 0$; d'où comme ci-dessus $Y_2 = \zeta(A+1)$ et l'argument s'applique de proche en proche pour prouver que $Y_i = \zeta(A+1)$ pour tout $i \in [1, \ell]$.

On note ici $\mathcal{C}$ l'union de ℓ-copies de $[\zeta(B+1), \zeta(A+1)]$ et c le cardinal de cet ensemble ; ici l'ensemble n'est plus ordonné.

On calcule le module de Jacquet de σ relativement au parabolique standard de Levi $GL(N - cd_\rho) \times GL(cd_\rho)$ et on prend encore la projection de ce module de Jacquet sur l'ensemble des repésentations pourlesquelles $GL(cd_\rho)$ agit par une représentation dont le support cuspidal est formé des représentations $\rho|\,|^x$ où x parcourt $\mathcal{C}$. On note $Jac_{[\mathcal{C}]}\sigma$ ce module de Jacquet. Par exactitude du foncteur de Jacquet, ceci est un sous-quotient de son analogue quand on remplace σ par toute l'induite $\tau := \times_{i \in [1,\ell]} S(\zeta, A, B, T_i)$. On pose $\tau' := \times_{i \in [1,\ell]} S(\zeta, A+1, B+1, T_i - 1)$, c'est-à-dire que l'on enlève les dernières lignes de chaque tableau définissant τ. On vérifie par les formules standard que

$$Jac_{[\mathcal{C}]}\tau = \tau' \otimes \big(< \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} > \times \cdots \times < \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} > \big),$$

où il y a ℓ copies cachées dans les $\cdots$. Un argument par récurrence dit que τ' est irréductible ce qui entraîne l'irréductibilité du module de $Jac_{[\mathcal{C}]}\tau$; en particulier $Jac_{[\mathcal{C}]}\tau = Jac_{[\mathcal{C}]}\sigma$. On peut aussi calculer $Jac_{[\mathcal{C}]}\tau''$ où

$$\tau'' := \tau' \times < \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} > \times \cdots \times < \rho|\,|^{\zeta(B+1)}, \cdots, \rho|\,|^{\zeta(A+1)} > .$$

C'est très facile car si x est tel que $Jac_x^d \tau' \neq 0$ alors $x = \zeta(A+2)$; or $\zeta(A+2) \notin \mathcal{C}$. Ainsi, on a aussi $Jac_{[\mathcal{C}]}\tau'' = Jac_{[\mathcal{C}]}\sigma$. On en déduit que τ'' a un unique sous-module irréductible qui intervient avec multiplicité 1 comme sous-quotient irréductible et qui est nécessairement σ. Cela détermine uniquement σ et prouve que σ intervient a fortiori avec multiplicité 1 dans τ. Donc $\tau = \sigma$. Cela termine la preuve de l'irréductibilité.

8.2 Un deuxième résultat d'irréductibilité

On reprend la notation S_- de 4 pour la représentation basée sur ρ et associée au tableau

$$\begin{array}{ccc} \zeta B & \cdots & -\zeta A \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta(A-1) & \cdots & -\zeta(B+1) \end{array}$$

Lemme : *La représentation $S_- \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} >$ est irréductible.*

Soit τ un sous-quotient irréductible de cette induite ; le support cuspidal de τ contient avec multiplicité 2 la représentation $\rho|\,|^{-\zeta A}$; comme dans la preuve ci-dessus, il existe x_1, x_2 tels que pour $i = 1, 2$, $x_i + \zeta A \in \mathbb{Z}$ et il existe une représentation irréductible τ' avec une inclusion :

$$\tau \hookrightarrow < \rho|\,|^{x_1}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times < \rho|\,|^{x_2}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} > \times \tau'.$$

Et on ne peut encore avoir que $x_1 = x_2 = \zeta B$ car nécessairement $Jac_{x_i}\tau \neq 0$ pour $i = 1, 2$ et par exactitude du foncteur de Jacquet, aussi $Jac_{x_i}(S_- \times < \rho|\,|^{\zeta B}, \cdots, \rho|\,|^{-\zeta A} >) \neq 0$. Dans ce cas, il n'y a que la possibilité $\tau' = S(\rho, A-1, B+1, \zeta)$ par un calcul facile et τ est uniquement déterminé. Cela montre l'unicité de τ et l'irréductibilité.

Références

[1] Arthur J. : *Unipotent automorphic representations : conjectures* in Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque 171-172, 1989, pp. 13-72

[2] Arthur J. : *An introduction to the trace formula* prépublication

[3] Aubert A.-M. : *Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif p-adique,* TAMS, 347, 1995, pp. 2179-2189 avec l'erratum publié dans TAMS, 348, 1996, pp. 4687-4690

[4] Bernstein I. N., Zelevinsky A. V. : *Induced Representations of Reductive p-adic groups 1* Ann de l'ENS, 10, 1977, pp. 147-185

[5] Debacker S., Reeder M. : *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability* prépublication 2004

[6] Gan W.T., Gurevich N. : *Non-tempered Arthur Packets of G_2*in Automorphic Representations, L-Functions and Applications : Progress and Prospects, W de G, OSU math. res. inst. pub. 11, 2005, pp.129-156

[7] Harris, M. ; Taylor, R. : *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties,*Annals of Math Studies, 151, Princeton Univ. Press, 2001

[8] Henniart, G. : *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour GL_n sur un corps p-adique,*Invent. Math., 139, 2000, pp. 439-455

[9] Kazhdan D., Varshavsky Y. : *Endoscopic decomposition of characters of certain cuspidal representations,* ERA, 2004

[10] Laumon G., Ngo B. -C. : *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires,* arXiv AG/ 0404454

[11] Moeglin C. : *Sur certains paquets d'Arthur et involution d'Aubert-Schneider-Stuhler généralisée,* representation theory, volume 10, 2006, pp. 86-129

[12] Moeglin C. : *Classification des séries discrètes pour certains groupes classiques p-adiques,* prépublication, 2006

[13] Moeglin C. : *Classification et Changement de base pour les séries discrètes des groupes unitaires p-adiques,* prépublication, 2006

[14] Mœglin C. : *Paquets d'Arthur discrets pour les groupes classiques,* prépublication

[15] Mœglin C. : *Classification des séries discrètes : paramètres de Langlands et exhaustivité,* JEMS, 4, 143-200, 2002

[16] Mœglin C., Tadic M. : *Construction of discrete series for classical p-adic groups,* journal de l'AMS, volume 15, 2002, pp 715-786

[17] Mœglin C., Waldspurger J.-L. : *Paquets stables de représentations tempérées et de réduction unipotente pour $SO(2n+1)$,* Inventiones, 152, , 2003, 461-623

[18] Mœglin C., Waldspurger J.-L. : *Sur le transfert des traces d'un groupe classique p-adique à un groupe linéaire tordu* prépublication 2006, à paraître dans Selecta Math.

[19] Mœglin C., Waldspurger J.-L. : *Spectre résiduel de GL(n),* Ann de l'ENS, 22, 1989, pp. 605-674

[20] Ngo B. -C. : *Fibration de Hitchin et endoscopie,* Inventiones, 164, 2006, pp. 399-453

[21] Silberger A. : *Special representations of reductive p-adic groups are not integrable,* Ann. of Math., 111, 1980, pp. 571-587.

[22] Schneider M., Stuhler U. : *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building* Publ. Math. IHES 85, 1997, pp. 97-191

[23] Waldspurger J.-L. : *La formule de Plancherel d'après Harish-Chandra,* JIMJ, vol2, fasc 2, 2003

[24] Waldspurger J.-L. : *Le groupe GL_N tordu sur un corps p-adique, 1e et 2e partie,* prépublication 2005, à paraître au Duke math.

[25] Waldspurger J. -L. : *Endoscopie et Changement de caractéristique,* JIMJ, 5.3, 2006, pp. 423-525

[26] Zelevinsky A. V. : *Induced Representations of Reductive p-adic groups II,* Ann de l'ENS, 13, 1980, pp. 165-210