HAL
open science

Contrôle de la diffusion chaotique en hydrodynamique

Tounsia Benzekri, Cristel Chandre, Ricardo Lima, Michel Vittot

To cite this version:

Tounsia Benzekri, Cristel Chandre, Ricardo Lima, Michel Vittot. Contrôle de la diffusion chaotique en hydrodynamique. Compte-rendus de la 8e Rencontre du Non-Linéaire, Mar 2005, paris, France. pp.19-24. hal-00103580

HAL Id: hal-00103580

https://hal.science/hal-00103580v1

Submitted on 4 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle de la diffusion chaotique en hydrodynamique

T. Benzekri, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot
Centre de Physique Théorique[1]*, CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France*
benzekri@cpt.univ-mrs.fr

Résumé

Nous présentons une application d'une méthode du contrôle du chaos pour les systèmes Hamiltoniens à un modèle d'advection chaotique en hydrodynamique. Cette méthode permet de créer des barrières à la diffusion chaotique des particules en ajoutant un terme de contrôle petit et simple à la fonction de courant du système.

Abstract

We present an application of a method of the control of Hamiltonian chaos to a system of chaotic advection in hydrodynamics. The aim is to create barriers to diffusion of passive tracers by adding a small and simple control term to the stream function of the system.

ccsd-00103580, version 1 - 4 Oct 2006

1 Introduction

Nous nous intéressons au contrôle du chaos d'un problème d'advection chaotique dans un fluide bidimensionnel, incompressible et périodique par rapport au temps . Une expérience utilisant la technique magnéto-hydrodynamique montre que les trajectoires des particules pour des écoulements bidimensionnels et périodiques sont chaotiques. Il s'agit d'une expérience dans laquelle un courant électrique passe à travers une couche mince d'une solution électrolytique. Le courant interagit avec un champ magnétique alternatif produit par des aimants placés au-dessous du liquide. Une chaîne de vortex est alors observée. Une dépendance périodique en temps est imposée par une force extérieure qui oscille lentement de haut en bas, déplaçant le fluide latéralement c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire aux axes des rouleaux donnant lieu ainsi à l'advection chaotique. L'espace des phases, qui est ici l'espace réel, est caractérisé par des trajectoires régulières dans le centre des rouleaux et une région chaotique autour et entre les rouleaux. Un Hamiltonien décrivant ce phénomène a été proposé dans [4]. Une comparaison a été faite avec l'expérience pour valider ce modèle.
Nous utiliserons ce Hamiltonien comme le point de départ pour réduire le transport chaotique qui est donné par la fonction de courant:

$$\Psi(x,y,t) = \epsilon \sin(x + B \sin t) \sin y, \tag{1}$$

où ϵ est la vitesse maximale dans le fluide et B l'amplitude des oscillations latérales. Le terme $B \sin t$ est une simple modélisation des oscillations latérales des rouleaux.

1. Unité Mixte de Recherche (UMR 6207) du CNRS, et des universités Aix-Marseille I, Aix-Marseille II et du Sud Toulon-Var. Laboratoire affilié à la FRUMAM (FR 2291).

2 Contrôle localisé

La méthode de contrôle localisée a été largement décrite dans [3] où les résultats mathématiques rigoureux ont été prouvés. Nous exposons ici le résultat principal de ce papier. Pour un système Hamiltonien à L degrés de liberté écrit dans les variables action-angles, le Hamiltonien perturbé est donné par:

$$H(\mathbf{A},\theta) = \omega \cdot \mathbf{A} + V(\mathbf{A},\theta),$$

où $(\mathbf{A},\theta) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{T}^L$, ω est un vecteur de $\mathbb{R}^L$. Sans perte de généralité, nous considérons une région au voisinage de $\mathbf{A} = 0$ (par translation des actions) et, comme le Hamiltonien est presque intégrable, la perturbation V possède des parties constantes et linéaires dans les variables actions et est d'ordre ε, i.e.

$$V(\mathbf{A},\theta) = \varepsilon v(\theta) + \varepsilon \mathbf{w}(\theta) \cdot \mathbf{A} + Q(\mathbf{A},\theta), \tag{2}$$

où Q est d'ordre $O(\|\mathbf{A}\|^2)$. Notons que pour $\varepsilon = 0$, le Hamiltonien H a un tore invariant de vecteur fréquence ω en $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ pour tout Q non nécessairement petit. Le Hamiltonien contrôlé est de la forme:

$$H_c(\mathbf{A},\theta) = \omega \cdot \mathbf{A} + V(\mathbf{A},\theta) + f(\theta), \tag{3}$$

Notons que le terme de contrôle f que nous construisons dépend seulement des variables angles et est donné par

$$f(\theta) = V(\mathbf{0},\theta) - V\left(-\Gamma \partial_\theta V(\mathbf{0},\theta),\theta\right), \tag{4}$$

avec Γ un opérateur linéaire défini comme le pseudo-inverse de $\omega \cdot \partial_\theta$, i.e. agissant sur $V = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\theta\cdot\mathbf{k}}$ tel que

$$\Gamma V = \sum_{\omega\cdot\mathbf{k}\neq 0} \frac{V_{\mathbf{k}}}{i\omega\cdot\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\theta\cdot\mathbf{k}}.$$

Notez que f est d'ordre ε^2. On peut le voir à partir de l'Eq. (2) où f peut se réécrire comme $f(\theta) = \varepsilon^2 \mathbf{w}(\theta) \cdot \Gamma \partial_\theta v - Q\left(-\varepsilon \Gamma \partial_\theta v,\theta\right)$, avec Q quadratique dans les variables actions. Pour toute perturbation V, le Hamiltonien (3) a un tore invariant dont le vecteur fréquence est proche de ω. L'équation du tore construit en ajoutant f est:

$$\mathbf{A} = -\Gamma \partial_\theta V(\mathbf{0},\theta), \tag{5}$$

qui est d'ordre ε car $V(\mathbf{0},\theta)$ est d'ordre ε.
Dans la section suivante, nous verrons dans notre modèle que l'amplitude du terme de contrôle est petite comparée à la perturbation.

3 Application au modèle

Dans cette section, nous utilisons le contrôle localisé pour réduire le transport chaotique de particules passives localisées autour et entre les rouleaux de convections. Par cette méthode, nous créons ainsi des barrières isolées à la diffusion chaotique. Pour construire une barrière, nous sélectionnons une surface localisée autour de $x = x_0$. Par exemple, pour créer une barrière entre deux rouleaux nous pouvons choisir $x_0 = \pi$. Suivant les notations de la Sec. 2, nous réécrivons le Hamiltonien autonome sous la forme:

$$\begin{aligned} H(x,E,y,\tau) &= E + V(x,y,\tau), \\ &= E + \Psi(x_0,y,\tau) + \Psi(x,y,\tau) - \Psi(x_0,y,\tau), \\ &= E + \epsilon v(y,\tau) + \epsilon w(x,y,\tau)(x - x_0) + Q(x - x_0,E,y,\tau), \end{aligned} \tag{6}$$

avec $\epsilon v(y,\tau) = \Psi(x_0,y,\tau)$ et

$$\begin{aligned} \epsilon w(x - x_0,y,\tau) &= \partial_x \Psi(x_0,y,\tau), \\ Q(x - x_0,E,y,\tau) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(l+1)!} \partial_x^{l+1} \Psi(x_0,y,\tau)(x - x_0)^{l+1}, \end{aligned} \tag{7}$$

où $(\mathbf{A},\theta) = (x - x_0,E,y,\tau)$ et $\omega = (0,1)$ qui est dans ce cas un vecteur résonant.
Afin de calculer l'opérateur Γ, nous développons $\sin(B \sin \tau)$ et $\cos(B \sin \tau)$ en série de fonctions de Bessel:

$$\begin{aligned} \cos(B \sin \tau) &= \mathcal{J}_0(B) + 2 \sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_{2n}(B) \cos 2n\tau, \\ \sin(B \sin \tau) &= 2 \sum_{n \geq 0} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \sin(2n+1)\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

le potentiel V se réécrit alors:

$$\begin{aligned} V(x,y,\tau) &= \epsilon \sin y \sin x \left(\mathcal{J}_0(B) + 2 \sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_{2n}(B) \cos 2n\tau \right) \\ &\quad + 2\epsilon \sin y \cos x \left(\sum_{n \geq 1} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \sin(2n+1)\tau \right), \end{aligned}$$

et l'opérateur Γ appliqué à V est donné par:

$$\begin{aligned} \Gamma V(x,y,\tau) &= 2\epsilon \sin y \sin x \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \mathcal{J}_{2n}(B) \sin 2n\tau \right) \\ &\quad - 2\epsilon \sin y \cos x \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)} \mathcal{J}_{2n+1}(B) \cos(2n+1)\tau \right). \end{aligned}$$

Nous déduisons le terme de contrôle:

$$f(y,\tau) = \partial_x \Psi(x_0,y,\tau) \Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+1)!} \left(\partial_x^{l+1} \Psi(x_0,y,\tau) \right) \left(\Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau) \right)^{l+1}, \tag{9}$$

où nous avons remplacé $x - x_0$ par $-\Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau)$.
Comme Ψ ne dépend pas de E, nous calculerons seulement $\Gamma \partial_y \Psi(x_0,y,\tau)$:

$$-\Gamma \partial_y \Psi = 2\epsilon \cos x_0 \cos y \mathcal{S}_o(\tau) - 2\epsilon \sin x_0 \cos y \mathcal{S}_e(\tau), \tag{10}$$

où $\mathcal{S}_o$ et $\mathcal{S}_e$ sont définis par:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_o(\tau) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\mathcal{J}_{2n+1}(B)\cos(2n+1)\tau,\\ \mathcal{S}_e(\tau) &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\mathcal{J}_{2n}(B)\sin 2n\tau.\end{aligned}$$

Nous déduisons le terme de contrôle exacte :

$$\begin{aligned}f(y,\tau) &= \epsilon\sin(B\sin\tau+x_0)\sin y\\ &\quad -\epsilon\sin\left[2\epsilon\cos x_0\cos y\mathcal{S}_o(\tau)-2\epsilon\sin x_0\cos y\mathcal{S}_e(\tau)+x_0+B\sin\tau\right]\sin y. \quad (11)\end{aligned}$$

L'équation du tore invariant est

$$x = x_0 + 2\epsilon\cos y\left[\cos x_0\mathcal{S}_o(\tau)-\sin x_0\mathcal{S}_e(\tau)\right]. \quad (12)$$

Pour $\mid\epsilon\mid << 1$, le terme de contrôle localisé peut être simplifié en ne considérant que le premier terme du développement dans l'Eq.11. Le terme de contrôle simplifié est alors:

$$f_2(y,\tau) = -\epsilon^2\sin 2y\cos(B\sin\tau+x_0)\left[\cos x_0\mathcal{S}_o(\tau)-\sin x_0\mathcal{S}_e(\tau)\right]+O\left(\epsilon^3\right). \quad (13)$$

Pour B petit et $x_0=\pi$, si nous ne tenons compte que du premier terme de la série $\mathcal{S}_o$, nous obtenons un terme de contrôle simplifié donné par $f=f_s+O(B^2)$,

$$f_s = -\frac{\epsilon^2(\mathcal{J}_0(B)+1)\mathcal{J}_1(B)}{2}\sin 2y\cos\tau. \quad (14)$$

Les sections de Poincaré de la dynamique du Hamiltonien non contrôlé (1) et du Hamiltonien (1) avec le terme de contrôle simplifié (14), sont représentées sur la figure 1, pour $B=0.12\pi$ et sur la figure 2, pour $B=0.2\pi$. Le terme de contrôle crée un tore invariant, correspondant à la courbe représentée en gras dans les figures dont l'équation est donnée par (12). Nous constatons que le terme de contrôle réduit efficacement la diffusion chaotique d'une particule passive; il n'y a pas de particules advectées d'une cellule à l'autre. Par contre, pour $B=0.2\pi$, le contrôle est moins efficace; nous observons quelques particules qui passent d'une cellule à l'autre. Ceci est dû au fait que nous n'avons pas ajouté au Hamiltonien initial, le terme de contrôle exacte mais une approximation de ce terme. Le contrôle serait plus efficace, lorsque B croit, si nous tenons compte des termes d'ordre supérieurs f_n où $n\geq 3$.
Afin de voir plus précisément les effets de ce terme de contrôle, nous allons étudier les propriétés de transport de ce système. Pour cela nous calculons le déplacement quadratique moyen $< r^2(t) >$ d'une distribution de $\mathcal{M}$ particules (d'ordre 3000) en fonction du temps:

$$< r^2(t) >= \frac{1}{\mathcal{M}}\sum_{i=1}^{\mathcal{M}}\left\|\mathbf{x}_i(t)-\mathbf{x}_i(0)\right\|, \quad (15)$$

où $\mathbf{x}_i(t)$, $i=1,...,\mathcal{M}$ est la position de la ième particule au temps t obtenu par intégration des équations de Hamilton à partir de conditions initiales $\mathbf{x}_i(0)$. Nous remarquons sur la figure 3(a) que $< r^2(t) >$ croit linéairement avec le temps pour t suffisamment grand. Le coefficient de diffusion peut être déterminé par la pente du graphe de $< r^2(t) >$ par rapport à t:

$$D = \lim_{t\to\infty}\frac{< r^2(t) >}{t}. \quad (16)$$

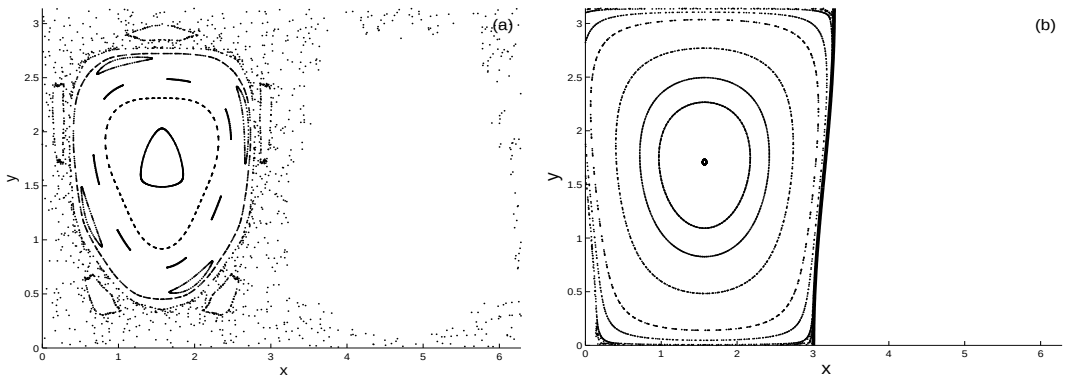

FIG. 1 – *Section de Poincaré pour la fonction de courant ψ donnée par l'Eq. (1) pour $\epsilon = 0.18$, $B = 0.12\pi$, (a) sans contrôle, (b) avec le terme de contrôle simplifié donné par l'Eq. (14)*

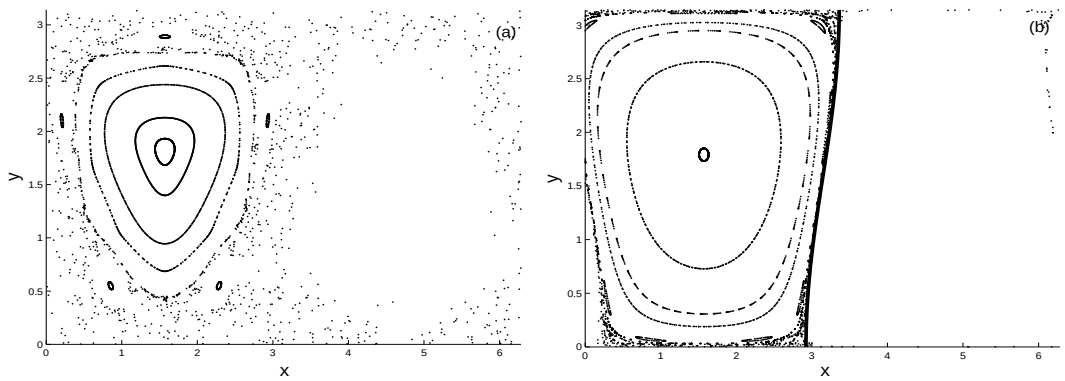

FIG. 2 – *Section de Poincaré pour la fonction de courant ψ donnée par l'Eq. (1) pour $\epsilon = 0.18$, $B = 0.2\pi$, (a) sans contrôle, (b) avec le terme de contrôle simplifié donné par l'Eq. (14)*

Figure 3(b) montre les valeurs de D en fonction de B avec et sans le terme de contrôle déterminé à partir du déplacement quadratique moyen pour $t > 1000$. Nous remarquons une réduction nette de la diffusion en présence du terme de contrôle.

4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce travail une première tentative d'appliquer en hydrodynamique une technique de contrôle du chaos fondée sur une petite modification de la fonction de courant. Nous avons calculé analytiquement le terme de contrôle permettant de réduire l'advection chaotique dans le problème original. Nous avons montré numériquement que la diffusion chaotique dans le fluide a été significativement réduite en prenant en compte seulement un terme de contrôle simplifié.

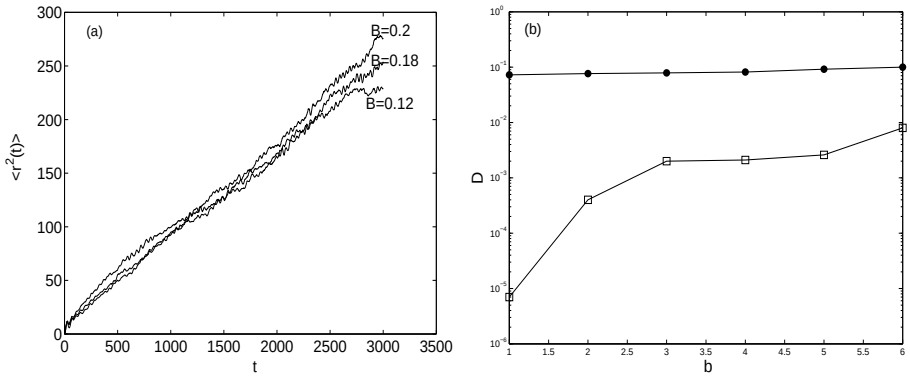

FIG. 3 – *Diffusion pour le Hamiltonien (1): (a) Déplacement quadratique moyen* $< r^2(t) >$ *en fonction de* t *pour trois valeurs de* B, $B = 0.12, 0.18, 0.2$*; (b) Coefficient de diffusion en fonction de* B *pour le Hamiltonien sans contrôle (cercle) et avec contrôle (14) (carré)*

Remerciements

Nous remercions A.Goullet pour les discutions fructueuses que nous avons eues.

Références

[1] C. Chandre, G. Ciraolo, F. Doveil, R. Lima, A. Macor, M. Vittot, "Channelling chaos by building barriers", Physical Review Letters to appear (2005)

[2] G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini and Ph. Ghendrih, "Tailoring phase space : a way to control Hamiltonian transport", Europhysics Letters to appear (2005)

[3] M. Vittot, C.Chandre, G.Ciraolo and R.Lima, "Localized Control for nonresonant Hamiltonian systems", Nonlinearity **18**, 423,(2003).

[4] T.H.Solomon, J.P.Gollub, "Chaotic particle transport in Rayleigh-Bénard convection", Phys.Rev. A **38**, 6280, (1988).

[5] T.H.Solomon and I.Mezic *Uniform, resonant chaotic mixing in fluid flows*, Nature, vol.425, no.6956, pp.376-80, 25 Sept. 2003.