HAL
open science

Contrôle du chaos Hamiltonien

Guido Ciraolo, Cristel Chandre, Ricardo Lima, Michel Vittot

To cite this version:

Guido Ciraolo, Cristel Chandre, Ricardo Lima, Michel Vittot. Contrôle du chaos Hamiltonien. Compte Rendus de la 7ème Rencontre du Non-Lineaire, édité par Y. Pomeau et R. Ribotta, 2004, France. hal-00103293

HAL Id: hal-00103293

https://hal.science/hal-00103293v1

Submitted on 4 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle du chaos Hamiltonien

G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot
Centre de Physique Théorique (FRUMAM),
CNRS, Luminy Case 907, 13288 Marseille CEDEX 09 France
ciraolo@cpt.univ-mrs.fr

Résumé

Nous montrons qu'un contrôle du chaos Hamiltonien est possible en utilisant des petites perturbations appropriées dont la forme peut être explicitement calculée [1]. En particulier, il est possible de reduire la diffusion chaotique d'un système Hamiltonien avec 1.5 degrés de liberté qui modélise la diffusion de particules chargées dans un champ électrique turbulent à travers le champ magnétique de confinement dans les dispositifs de fusion thermonucléaire contrôlée [2]. Bien qu'encore loin des applications expérimentales, ce résultat suggère qu'une stratégie pour contrôler le transport turbulent dans les plasmas magnétisés est envisageable [3]. La robustesse du contrôle est étudiée en termes de changements par rapport à la valeur optimale du contrôle (existence d'une région significative d'efficacité autour du contrôle optimal) [4].

ccsd-00103293, version 1 - 4 Oct 2006

1 Introduction

Les pertes d'énergie et de particules dues au transport anormal dans les appareils de confinement magnétique de type tokamak sont encore un sérieux obstacle pour la fusion thermonucléaire contrôlée [5]. Le transport anormal d'origine non collisionnelle est aujourd'hui attribué à la présence de fluctuations turbulentes du champ électrique dans les plasmas de fusion. Il y a plusieurs années, il a été montré que la modélisation $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ des mouvements du centre guide des particules tests chargées donne une explication naturelle de la diffusion à travers le champ magnétique de confinement $\mathbf{B}$ [6].

Les états de meilleur confinement trouvés empiriquement et la possibilité de réduire et/ou supprimer le chaos avec les perturbations paramétriques des systèmes dissipatifs, suggèrent d'étudier la possibilité d'une stratégie de contrôle du transport chaotique anormal par des perturbations appropriées agissant au niveau microscopique des mouvements des particules chargées. En revanche, les modèles mentionnés sont Hamiltoniens et contrôler le chaos dans ces modèles nécessite des stratégies bien différentes car il n'y a pas d'ensembles attractifs dans leur espace des phases.

Dans cet article, nous développons une stratégie pour contrôler le chaos dans les systèmes Hamiltoniens. L'idée centrale et le sens du *contrôle* est que l'on cherche à modifier de manière pertinente la dynamique du système à travers des petites perturbations telles que la structure originale du système est conservée.
Dans le cas des systèmes dissipatifs, une stratégie efficace pour le contrôle est la stabilisation des orbites périodiques instables où la dynamique est attirée. Pour les systèmes Hamiltoniens on cherche des petites perturbations qui rendent le système intégrable ou plus proche de l'intégrabilité.

Dans la suite, nous décrivons le modèle Hamiltonien à 1.5 degrés de liberté pour le mouvement $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ des particules chargées dans un champ électrique *spatialement turbulent.* En suite, nous présentons le problème du contrôle et nous calculons analytiquement le

terme du contrôle. Enfin nous vérifions numériquement l'efficacité de notre méthode de contrôle.

2 Le modèle

Dans l'approximation du centre guide, les équations du mouvement des particules chargées en présence d'un champ magnétique toroïdal intense et d'un champ électrique non stationnaire sont

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{B^2}\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{B} = \frac{c}{B}\begin{pmatrix} -\partial_y V(x,y,t) \\ \partial_x V(x,y,t) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

où V est le potentiel électrostatique, $\mathbf{E} = -\nabla V$, et $\mathbf{B} = B\mathbf{e_z}$. Pour définir un modèle, on choisit

$$V(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \sin[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \varphi_{\mathbf{k}} - \omega(\mathbf{k})t], \tag{2}$$

où $V_{\mathbf{k}}$ décroissent comme une fonction donnée de $\mathbf{k}$, en accord avec les données expérimentales. Pour simplifier encore le modèle, on considère $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0$ constant et les phases $\varphi_{\mathbf{k}}$ aléatoires, de manière à reproduire un champ turbulent. De plus nous considérons pour $|V_{\mathbf{k}}|$ une loi de puissance en $\mathbf{k}$, afin de reproduire les caractéristiques spectrales obtenues expérimentalement [7]. La forme explicite du potentiel est donc [6]

$$V(x,y,t) = a \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\sin\left[2\pi(nx+my) + \varphi_{nm} - 2\pi t)\right]}{2\pi(n^2+m^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Dans la suite on prendra $N = 25$. Les coordonnées spatiales x et y jouent le rôle de variables canoniquement conjuguées. Nous étendons l'espace des phases (x,y) en (E,τ,x,y) où la nouvelle variable dynamique τ évolue comme $\tau_t = \tau_0 + t$ et E est canoniquement conjuguée à τ. Si on absorbe la constante c/B de (1) dans l'amplitude a, on peut considérer des petits valeurs de a quand B est grand.

3 Le terme de contrôle

Le Hamiltonien autonome du système est donc

$$\tilde{H}(E,\tau,x,y) = E + V(x,y,\tau) \tag{4}$$

et les équations du mouvement sont

$$\dot{\tau} = 1, \quad \dot{x} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{5}$$

Pour des petites valeurs de a le Hamiltonien (4) a la forme $H = H_0 + \epsilon V$, c'est-à-dire, un Hamiltonien intégrable H_0 plus une petite perturbation ϵV. Pour simplifier, on suppose que la moyenne de V sur les angles est nulle. Le problème du contrôle dans les systèmes Hamiltoniens est de trouver une petite perturbation f telle que $H + f$ est intégrable. Dans ce papier, nous nous intéressons à trouver un terme de contrôle partiel f_2 d'ordre ϵ^2 tel que le Hamiltonien donné par $H_c = H_0 + \epsilon V + \epsilon^2 f_2$ est plus proche de l'intégrabilité, i.e.

tel que H_c est canoniquement conjugué à $H_0 + O(\epsilon^3)$. On développe une transformation de Lie sur H_c, générée par la fonction S:

$$H'_c = e^{\epsilon \hat{S}} H_c \equiv H_c + \epsilon\{S,H_c\} + \frac{\epsilon^2}{2}\{S,\{S,H_c\}\} + ..., \tag{6}$$

où $\{\cdot\ ,\cdot\}$ est le crochet de Poisson et l'action de l'opérateur $\hat{S}$ sur H est définie par $\hat{S}H = \{S,H\}$. Un développement en série de puissances par rapport à ϵ de H'_c donne

$$\begin{aligned} H'_c &= H_0 + \epsilon\left[\{S,H_0\} + V\right] \\ &\quad + \epsilon^2\left[f_2 + \{S,V\} + \frac{1}{2}\{S,\{S,H_0\}\}\right] + O(\epsilon^3)\ . \end{aligned} \tag{7}$$

La fonction génératrice S est choisie telle que

$$\{S,H_0\} + V = 0\ , \tag{8}$$

pourvu que cette équation ait une solution. Le terme de contrôle f_2 donné par l'annulation de terme d'ordre ϵ^2

$$f_2 = -\frac{1}{2}\{S,V\}, \tag{9}$$

satisfait la condition requise que H_c est canoniquement conjugué à H_0 à des termes d'ordre ϵ^3 près. Si on ajoute des termes d'ordre supérieur en ϵ dans le terme de contrôle, on peut construire f tel que $H_c = H + \epsilon^2 f$ est intégrable pour ϵ suffisamment petit [1].
Dans le cas que nous considérons, $H_0 = E$. L'équation (8) devient

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + V = 0\ , \tag{10}$$

et donc S est une primitive par rapport au temps de V. Nous choisissons S de moyenne temporelle nulle. Pour le modèle (3), la fonction génératrice S est

$$S(x,y,\tau) = \frac{a}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{m,n=1 \\ n^2+m^2 \leq N^2}}^{N} \frac{\cos\left[2\pi(nx+my) + \varphi_{nm} - 2\pi\tau\right]}{(n^2+m^2)^{3/2}}\ , \tag{11}$$

et le calcul de f_2 donne

$$\begin{aligned} f_2(x,y,\tau) &= \frac{a^2}{8\pi} \sum_{n_1,m_1,n_2,m_2} \frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{(n_1^2+m_1^2)^{3/2}(n_2^2+m_2^2)^{3/2}} \\ &\times \sin[2\pi[(n_1-n_2)x + (m_1-m_2)y] + \varphi_{n_1 m_1} - \varphi_{n_2 m_2}]\ . \end{aligned} \tag{12}$$

4 Etude numérique

Nous avons vérifié l'efficacité de notre méthode de contrôle à l'aide de simulations numériques. Nous avons comparé les propriétés des trajectoires de particules obtenues avec le Hamiltonien (4) et avec le Hamiltonien contrôlé dont le terme de contrôle est donné par (12). La figure 1 montre des sections de Poincaré de deux trajectoires avec

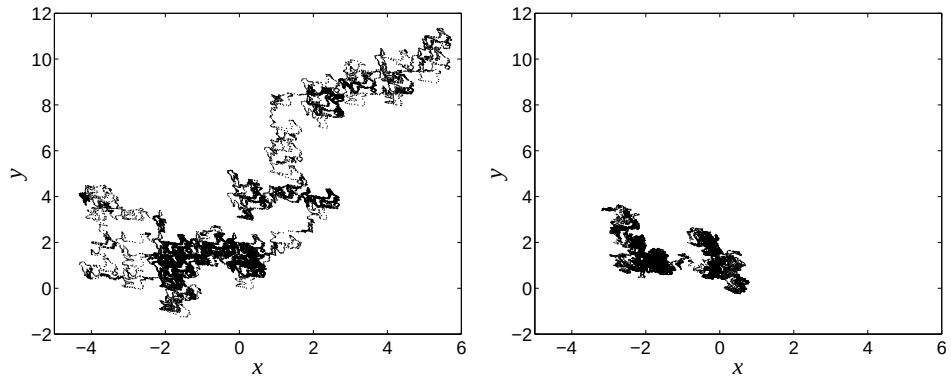

FIG. 1 – *Section de Poincaré d'une trajectoire obtenue à partir du le Hamiltonien (4) (a gauche) et pour le Hamiltonien (4) plus le terme de contrôle (12) (à droite) avec* $a = 0.8$.

les mêmes conditions initiales calculées avec et sans le terme de contrôle. Une réduction significative de la diffusion est observée avec le terme de contrôle. Afin d'étudier les propriétés de diffusion du système, nous avons considéré un ensemble de $\mathcal{M}$ particules distribuées uniformément au hasard dans le domaine $0 \leq x,y \leq 1$ pour $t = 0$. Nous avons calculé le déplacement quadratique moyen $\langle r^2(t)\rangle$ en fonction du temps

$$\langle r^2(t)\rangle = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)\|^2, \tag{13}$$

où $\mathbf{x}_i(t) = (x_i(t),y_i(t))$, $i = 1,\ldots,\mathcal{M}$ est la position de la i-ème particule au temps t obtenue par intégration des équations (5) avec condition initiale $\mathbf{x}_i(0)$. Sur la figure 2, nous représentons $\langle r^2(t)\rangle$ pour trois valeurs différentes de a Quand le comportement de $\langle r^2(t)\rangle$ est linéaire dans le temps, le coefficient de diffusion est obtenu par

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle r^2(t)\rangle}{t} \ .$$

Le coefficient de diffusion D en fonction de a est représenté sur la figure **??**. Une réduction significative de ce coefficient est observée quand on ajoute le terme de contrôle. Comme attendu, l'action du terme de contrôle devient plus faible lorsque a augmente dans la direction de la phase très chaotique.

On peut vérifier la robustesse du contrôle en remplaçant f_2 par $\delta \cdot f_2$ et en faisant varier le paramètre δ à partir de sa valeur de référence $\delta = 1$. La figure 3 montre que la diminution, ainsi que l'augmentation, de l'amplitude du terme de contrôle (qui est proportionnelle à $\delta \cdot a^2$) entraîne une perte d'efficacité dans la réduction du coefficient de diffusion. Le fait qu'un plus grand terme de contrôle (que celui qui est calculé) n'est pas plus efficace signifie que le terme de contrôle que nous avons determiné est très bien adapté et que le contrôle ainsi obtenu n'est pas un effet brutal.

On définit les pas horizontaux (respectivement verticaux) comme étant les distances couvertes par la particule tests entre deux changements de signe successifs de la composante horizontale (respectivement verticale) de la vitesse. L'effet du contôle est analysé en termes de distribution de probabilité (PDF) des pas. En suivant les trajectoires des particules tests pour un grand nombre de conditions initiales sans et avec contrôle, on représente sur la

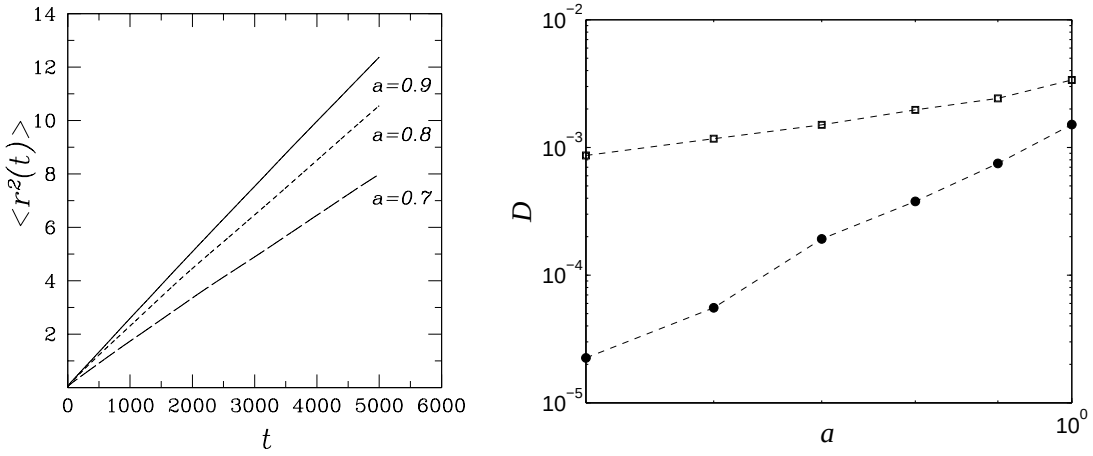

FIG. 2 – *Déplacement quadratique moyen $\langle r^2(t)\rangle$ en fonction du temps t obtenu avec le Hamiltonien (4) pour trois valeurs différentes de a (à gauche). A droite, on montre le coefficient de diffusion D en fonction du paramètre a pour H donné par (4) (carrés) et donné par le Hamiltonien (4) plus le terme de contrôle (12) (cercles).*

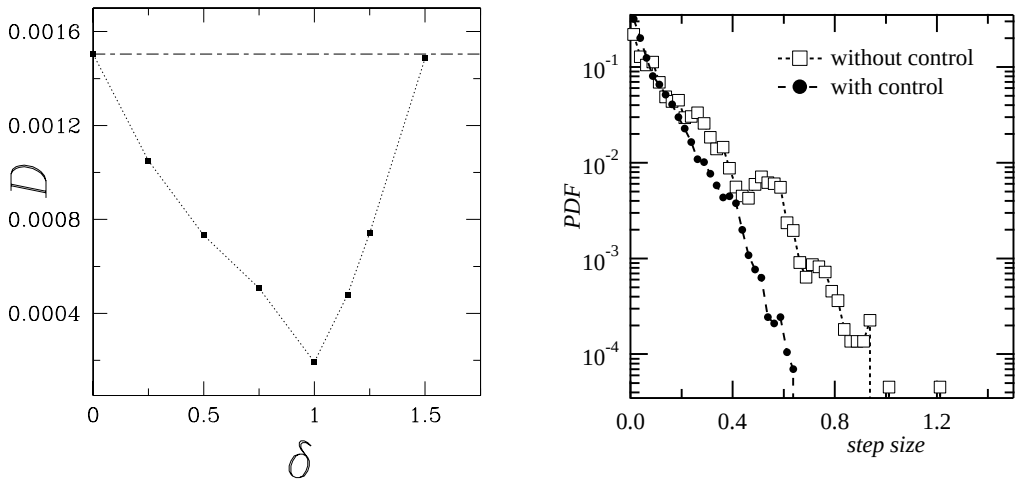

FIG. 3 – *Coefficient de diffusion D en fonction de l'amplitude δ du terme de contrôle (12) pour $a = 0.7$ (à gauche). Distribution de probabilité des pas horizontaux avec et sans contrôle (à droite).*

Figure 3 (à droite) les PDF des pas associés. On observe une réduction marquée de la probabilité de distribution des pas grands avec contrôle par rapport au cas sans contrôle. La procédure de contrôle réduit les pas grands (plus grands que 0.5).

Afin de mesurer l'amplitude relative du contrôle f_2 par rapport au Hamiltonien (4), nous avons calculé les valeurs moyennes:

$$\sqrt{\frac{\langle f_2^2\rangle - \langle f_2\rangle^2}{\langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2}} \approx 0.01a \tag{14}$$

Ceci signifie que le terme de contrôle est une petite modification du potentiel électrostatique.

5 Conclusion

Pour conclure, nous avons mis en place une nouvelle stratégie pour le contrôle de la diffusion chaotique pour la dynamique Hamiltonienne en utilisant la théorie de perturbation. Puisque la formule du terme de contrôle est explicite, nous sommes capables de comparer la dynamique avec et sans contrôle dans un modèle simplifié, décrivant le transport anormal dans les plasmas magnétisés.

Références

[1] M. Vittot, *Perturbation Theory and Control in Classical or Quantum Mechanics by an Inversion Formula*, J. Phys. A: Math. Gen., à paraître (2004).

[2] G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini, C. Figarella, Ph. Ghendrih, *Controlling chaotic transport in a Hamiltonian model of interest to magnetized plasmas*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 3589 (2004).

[3] Ph. Ghendrih, Y. Sarazin, G. Attuel, S. Benkadda, P. Beyer, G. Falchetto, C. Figarella, X. Garbet, V. Grandgirard, M. Ottaviani, *Theoretical analysis of the influence of external biasing on long range turbulent transport in the scrape-off layer*, Nuclear Fusion **43**, 1013 (2003).

[4] G.Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini, Charles Figarella, Philippe Ghendrih, *Control of Hamiltonian chaos as a possible tool to control anomalous transport in fusion plasmas*, Phys. Rev. E **69** (4) (2004).

[5] W. Horton, *Drift waves and transport*, Rev. Mod. Phys. **71**, 735 (1999).

[6] M. Pettini, A. Vulpiani, J.H. Misguich, M. De Leener, J. Orban, R. Balescu, *Chaotic diffusion across a magnetic field in a model of electrostatic turbulent plasma*, Phys. Rev. A **38**, 344 (1988).

[7] A.J. Wootton, H. Matsumoto, K. McGuire, W.A. Peebles, Ch.P. Ritz, P.W. Terry, S.J. Zweben, *Fluctuations and anomalous transport in tokamaks* Phys. Fluids B **2**, 2879 (1990).