HAL open science

Contrôler l'interaction onde-particules

Romain Bachelard, Cristel Chandre, Xavier Leoncini, Michel Vittot, Andrea Antoniazzi, Duccio Fanelli

To cite this version:

Romain Bachelard, Cristel Chandre, Xavier Leoncini, Michel Vittot, Andrea Antoniazzi, et al.. Contrôler l'interaction onde-particules. 9e Rencontre du Nonlinéaire, Mar 2006, France. pp.19-24. hal-00102386

HAL Id: hal-00102386

https://hal.science/hal-00102386

Submitted on 29 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôler l'interaction onde-particules

R. Bachelard[1], C. Chandre[1], X. Leoncini[1,2], M. Vittot[1], A. Antoniazzi[3] & D. Fanelli[3]

[1] Centre de Physique Théorique, CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France
[2] Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires, CNRS-Université de Provence, Centre de St Jérôme, F-13397 Marseille, France
[3] Dipartimento di Energetica and CSDC, Università di Firenze, INFN, via S. Marta, 3, 50139 Firenze, Italy
bachelard@cpt.univ-mrs.fr

Résumé. L'interaction entre une onde et un faisceau de particules chargées peut être décrite dans le cadre Hamiltonien, dans lequel une structure cohérente de particules, appelée *macro-particule*, est responsable des oscillations de l'intensité de l'onde. On rencontre notamment ce comportement dans les Lasers à Electrons Libres ou dans les Tubes à Ondes Progressives. Dans cet article, nous proposons une méthode de contrôle afin d'influencer la macro-particule grâce à une petite perturbation du Hamiltonien. Nous montrons que l'élargissement de la macro-particule est associée à la reconstruction de tores invariants.

Abstract. The interaction between a wave and a bunch of charged particles can be cast in a Hamiltonian form for which there is a coherent structure of particles, called macro-particle, responsible for the oscillations of the intensity of the wave. This is encountered in a Free Electron Laser or a Travelling Wave Tube. In this article, we apply a control technique to influence the macro-particle by a slight modification of the Hamiltonian. We show that the enlargement of the macro-particle is associated with the recreation of invariant tori.

ccsd-00102386, version 1 - 29 Sep 2006

1 Introduction

L'interaction auto-cohérente entre une onde électromagnétiques (ou un ensemble d'ondes) et un faisceau de particules chargées est omniprésente dans la physique atomique, la physique des accélérateurs et la physique des plasmas. Elle est au coeur du fonctionnement de nombreux appareils, dont le Laser à Electrons Libres (LEL), utilisé pour générer une lumière fortement cohérente et puissante, dont la longueur d'onde est réglable. A la différence des lasers classiques, l'effet laser est obtenu grâce à un faisceau d'électrons ultra-relativistes. Le mécanisme responsable de l'émission cohérente des électrons repose sur leur interaction avec une onde, à travers un ondulateur par exemple. Grâce au champ magnétostatique généré par ce dernier, les électrons suivent des trajectoires sinusoïdales, le long desquelles ils émettent une radiation synchrotron. L'onde initialement introduite dans le laser est alors amplifiée le long de l'ondulateur jusqu'à ce que l'effet laser soit atteint.

L'évolution conjointe de l'onde générée et du faisceau de N électrons a été décrite, de manière simplifiée, dans le formalisme Hamiltonien par Bonifacio *et al* [1] (dans le cadre d'un LEL Simple-Passage). Ce Hamiltonien à $N+1$ degrés de liberté présente une partie cinétique, associée aux particules, ainsi qu'un terme potentiel, représentant l'interaction auto-cohérente entre les particules et l'onde. Les interactions directes entre particules sont donc négligées, même si ces dernières interagissent par le biais de l'onde.

La théorie prévoit une instabilité exponentielle, suivie d'un régime saturé, caractérisé par de larges oscillations de l'amplitude de l'onde. Un examen asymptotique de l'espace des phases permet de mettre en évidence un paquet de particules piégées dans la résonance de l'onde, qui évoluent de manière cohérente dans l'espace, à la manière d'une *macro-particule*. Les autres particules sont quasiment uniformément distribuées entre deux frontières oscillantes, et circulent à travers un domaine appelé *mer chaotique*.

Cette observation permet de décrire par un Hamiltonien simplifié la dynamique saturée du laser. Dans cette description, seuls quatre degrés de liberté sont pris en compte, respectivement associés à l'onde, la macro-particule, ainsi qu'aux deux frontières oscillantes qui délimitent la mer chaotique [3].

Or la macro-particule tourne autour d'un point fixe, et cette dynamique particulaire est à l'origine des oscillations de l'intensité. On peut donc supposer qu'une réduction importante de ces oscillations peut être obtenue en élaborant une stratégie de contrôle vis-à-vis de la macro-particule. En particulier, il s'agit

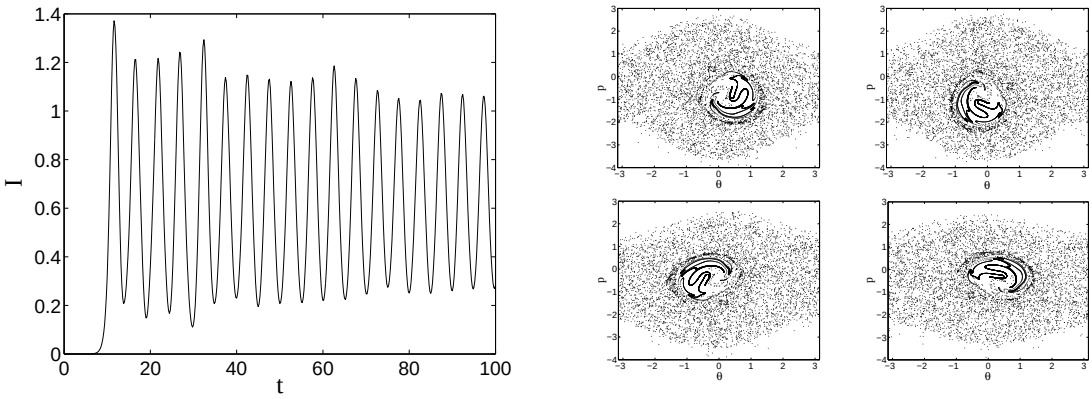

Fig. 1 –. *A gauche : intensité normalisée de l'onde issue du LEL, simulée à partir du Hamiltonien (1). A droite :* $N = 10000$ *électrons dans l'espace des phases, à* $t = 400$, 401.25, 402.5 *et* 403.75.

de confiner spatialement cet agrégat. Ajoutons que la structure de macro-particule est fortement liée au facteur de *bunching*, un facteur d'importance primordiale dans la dynamique du LEL [3].

Il a été montré [9] qu'une onde-test, de fréquence voisine de celle de l'onde, avait pour effet de détruire la macro-particule, oeuvrant au dépiégeage des particules. Les conséquences de cette stratégie ont été observées sur un Tube à Ondes Progressives [6], notamment l'amortissement des oscillations, toutefois accompagnée par une baisse systématique de la valeur moyenne de l'intensité.

Dans cet article, nous nous concentrons sur la macro-particule, entité née de l'interaction entre l'onde et les particules. Nous développons une technique afin d'influencer - sinon de contrôler - son évolution, ouvrant la perspective, à terme, de stabiliser l'intensité du laser. A cette fin, nous étudions la dynamique d'une particule-test et calculons un *terme de contrôle* approprié, de faible amplitude, qui agit comme une perturbation de la dynamique. Celui-ci a pour effet de générer un élargissement de la macro-particule. On observe aussi une régularisation de la dynamique, ainsi qu'en témoignent les tores invariants apparus autour du coeur de particules piégées.

L'article est organisé de la manière suivante : dans la section 2, nous introduisons le modèle de particule-test et précisons rapidement son obtention à partir du Hamiltonien initial à N particules. Dans la section 3, nous présentons le contrôle de la dynamique d'une particule-test, à travers la reconstruction de tores invariants de sa dynamique. Enfin, nous discutons les possibles implications de la présente analyse.

2 Le modèle de particule-test

La dynamique de l'interaction d'une onde avec N particules peut être décrite par le Hamiltonien [1] :

$$H_N = \sum_{i=1}^{N} [\frac{p_i^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I}{N}} \cos(\theta_i + \phi)], \tag{1}$$

où les (θ_i, p_i) sont la position et l'impulsion du i-ème électron, tandis que (ϕ, I) représente la phase et l'intensité de l'onde.

Dans le modèle de particule-test, les variables conjuguées (ϕ, I) sont remplacées par deux fonctions du temps $\phi(t)$ et $I(t)$, obtenues à partir de simulations de la dynamique complète à N particules. En d'autres termes, nous négligeons formellement la rétroaction des électrons sur le champ.

Le Hamiltonien à N particules (1) s'écrit alors comme la somme de N Hamiltoniens découplés

$$\tilde{H_N} = \sum_{i=1}^{N} H_{1p}(\theta_i, p_i, t), \tag{2}$$

avec

$$H_{1p}(\theta,p,t) = \frac{p^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I(t)}{N}}\cos(\theta + \phi(t)). \tag{3}$$

La dynamique du LEL peut alors être étudiée à travers l'évolution d'une particule-test, dont le Hamiltonien H_{1p} ne possède que deux degrés de liberté. Les fonctions $I(t)$ and $\phi(t)$ interviennent alors comme des paramètres externes, et sont choisies ici conformément à leur comportements asymptotiques dans la dynamique auto-cohérente, grâce à une méthode d'analyse en fréquence [7]. Ainsi, dans le référentiel de l'onde, le terme d'interaction s'écrit :

$$2\sqrt{\frac{I(t)}{N}}e^{i\phi(t)} \approx F - \epsilon\sum_{k=1}^{K} W_k e^{i\omega_k t} = F - \epsilon W(t). \tag{4}$$

3 Contrôle de la dynamique d'une particule-test

La méthode de contrôle Hamiltonien présentée ici s'applique aux systèmes proches de l'intégrabilité. Le Hamiltonien s'écrit alors $H = H_0 + V$, où H_0 est intégrable, et V une perturbation d'ordre ϵ (par rapport à H_0). Les résultats utilisés ici ont été prouvés rigoureusement dans [4,10]. En pratique, on peut montrer qu'il existe un *terme de contrôle* f approprié, d'ordre ϵ^2, tel que le Hamiltonien $H_0 + V + f$ possède un tore invariant à une fréquence choisie ω_0. Dans notre cas, la perturbation correspond aux fluctuations de l'intensité. Le terme d'interaction de (3) peut s'écrire

$$2\sqrt{\frac{I(t)}{N}}\cos(\theta - \phi(t)) = F\cos\theta - \epsilon Re(e^{i\theta}W(t)). \tag{5}$$

Ainsi, notre Hamiltonien intégrable correspond à un pendule :

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - F\cos\theta, \tag{6}$$

tandis que la perturbation V, dépendante du temps, s'identifie à

$$V(t,\theta) = \epsilon Re(e^{i\theta}W(t)). \tag{7}$$

Le Hamiltonien (6) est développé en séries, dans ses variables action-angle (φ,J) (voir [8]), au voisinage de $J = J_0$, qui correspond à l'action à laquelle on cherche à reconstruire le tore invariant.

$$H_0(J) = E_0 + \omega_0(J - J_0) + \delta(J - J_0)^2 + O((J - J_0)^3). \tag{8}$$

De même, la fonction de θ de la perturbation V définie en (7) est développée comme suit :

$$e^{i\theta} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=-L}^{L}\alpha_{m,n}(J - J_0)^m e^{in\varphi} + h.o.t. \tag{9}$$

Le terme de contrôle s'écrit alors [10] :

$$f(\varphi,t) = V(J_0,\varphi,t) - V(J_0 - \Gamma\partial_\varphi V(J_0,\varphi,t),\varphi,t), \tag{10}$$

où Γ est un opérateur linéaire qui agit sur un élément de la base de Fourier selon

$$\Gamma e^{i(\omega t + n\varphi)} = \frac{e^{i(\omega t + n\varphi)}}{i(\omega + n\omega_0)}. \tag{11}$$

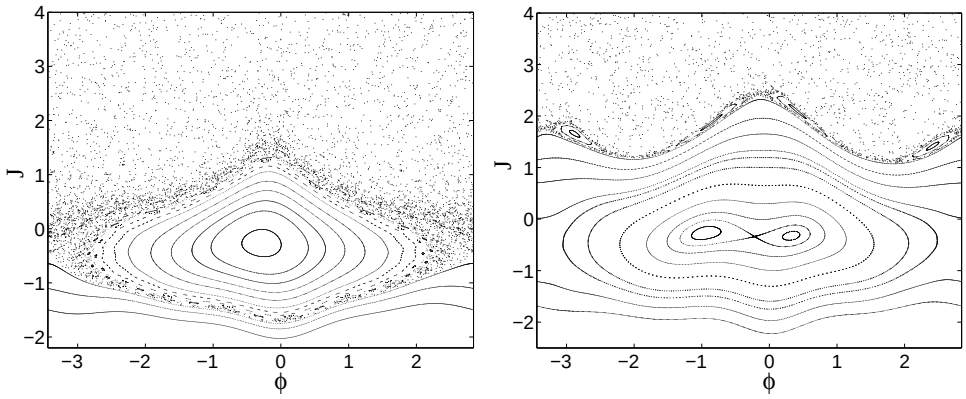

Fig. 2 –. *Sections de Poincaré d'une particule-test de Hamiltonien $H_0(J) + V(J,\varphi,t)$ (à gauche) et $H_0(J) + V(J,\varphi,t) + f(\varphi,t)$ (à droite), dans les variables action-angle du pendule.*

Au second ordre en ϵ (qui est le principal terme), le terme de contrôle s'écrit

$$f(\varphi,t) = \epsilon^2 w(\varphi,t)\Gamma\partial_\varphi v(\varphi,t) - \epsilon^2\delta(\Gamma\partial_\varphi v(\varphi,t))^2, \tag{12}$$

avec

$$\Gamma\partial_\varphi v(\varphi,t) = \sum_{k,n} \frac{n\alpha_{0,n}W_k}{\omega_0 n + \omega_k} e^{i(n\varphi+\omega_k t)}, \tag{13}$$

et

$$w(\varphi,t) = \sum_{k,n} \alpha_{1,n} W_k e^{i(n\varphi+\omega_k t)}. \tag{14}$$

Numériquement, nous ne considérons que deux modes de Fourier pour $W(t)$ (i.e. $K = 2$), et onze modes pour la partie dépendante de θ (i.e. $L = 5$). L'amplitude de la perturbation est d'ordre $\epsilon = 1/5$. Le développement en série est effectué autour de $J_0 \approx 1.33$ (ce qui correspond à une énergie $E_0 = 0$).

Dans les variables action-angle, la régularisation de la dynamique apparaît clairement (voir Fig.2). Le terme de contrôle a permis de reconstruire non seulement le tore KAM prédit par la théorie, mais aussi un ensemble infini de tores invariants autour (l'existence de cet ensemble provient de la nature robuste du tore d'action J_0 et découle du théorème KAM).

Notons que la transformation exacte entre les variables initiales (θ,p) et les variables action-angle (φ,J) comporte une singularité au niveau des séparatrices du pendule. Afin d'implémenter le contrôle sur tout l'espace des phases, et car seul son effet au voisinage de $J = J_0$ importe, nous utilisons un changement de variables simplifié, mais régulier, qui représente une très bonne approximation (à 4% près) de l'original dans la zone de contrôle $J = J_0$ (voir Fig.3) :

$$\tan\varphi = \frac{\theta}{p}. \tag{15}$$

Dans les variables originales (θ,p) variables, notre terme de contrôle s'écrit donc :

$$\tilde{f}(\theta,p,t) = f(\arctan\frac{\theta}{p},t), \tag{16}$$

et sa régularité est celle de la fonction $(\theta,p) \mapsto \arctan\frac{\theta}{p}$. Ainsi, la dynamique controllée d'une particule-test est décrite par le Hamiltonien :

$$H_c(\theta,p,t) = H_{1p}(\theta,p,t) + \tilde{f}(\theta,p,t) \tag{17}$$

Dans ces variables (voir Fig.4), le contrôle permet à nouveau de reconstruire un ensemble de tores invariants autour de la macro-particule, dans le modèle de la particule-test. En d'autres termes, on observe un élargissement de la macro-particule.

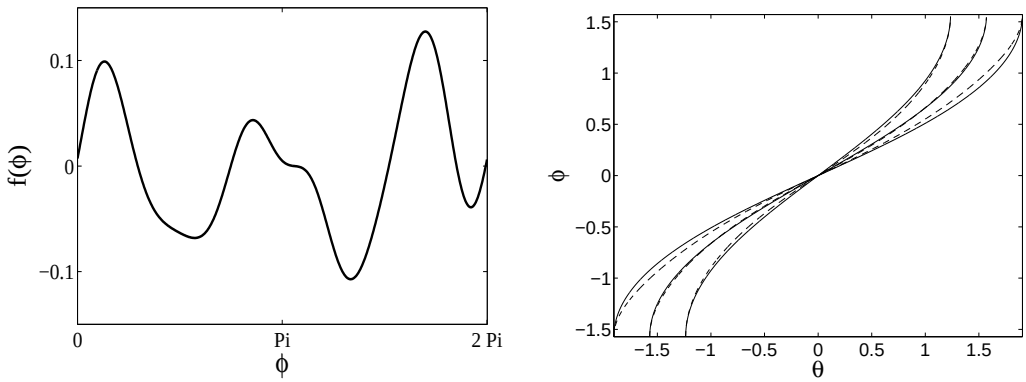

Fig. 3 –. *A gauche : terme de contrôle $f(\phi)$. A droite : comparaison des changements de variables exact et simplifié : φ est tracé en temps que fonction de θ, à énergie constante (donc à action J constante). Le trait continu correspond au changement de variables exact, le pointillé au changement simplifié. Les courbes correspondent, de gauche à droite, à $E = 0.5$, 0 (zone de contrôle) et -0.5.*

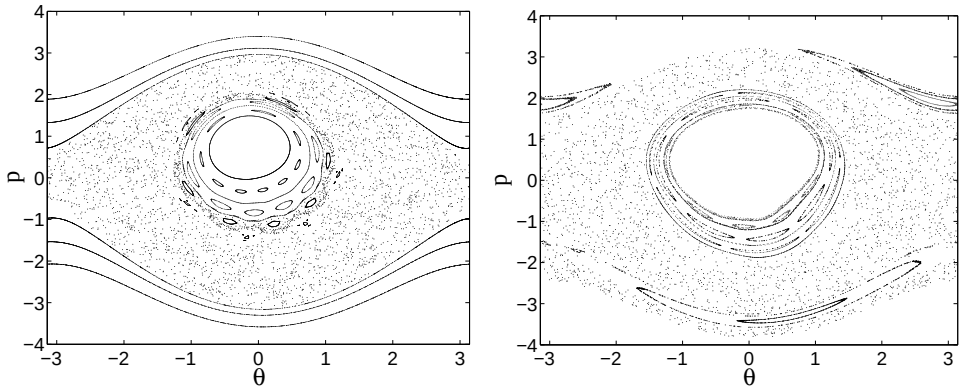

Fig. 4 –. *Sections de Poincaré d'une particule-test de Hamiltonien $H_{1p}(\theta,p,t)$ (à gauche) et $H_{1p}(\theta,p,t) + \tilde{f}(\theta,p,t)$ (à droite).*

Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une étude du régime saturé du LEL Simple-Passage à travers la dynamique d'une particule-test. En particulier, nous avons montré qu'il était possible d'augmenter la taille de la macro-particule à l'aide d'une petite perturbation du système, auquel est donc associé un faible coût en énergie. L'idée principale est de reconstruire des tores invariants de la dynamique en des endroits précis : cette méthode est parfaitement générique et pourrait être utilisée pour fixer la taille de la macro-particule, afin d'améliorer le facteur de "bunching". De même, en limitant le domaine de l'espace des phases parcouru par la macro-particule, il serait possible de stabiliser l'intensité du laser. Deux pistes s'ouvrent dorénavant pour cette méthode : La première est d'implémenter le contrôle décrit ci-dessus dans le cadre de la dynamique auto-cohérente à N particules, afin de voir quels bénéfices en retirerait l'onde. La seconde serait d'appliquer cette méthode de contrôle à la description Hamiltonienne réduite de [2,3]. Soulignons que l'efficacité expérimentale de la méthode de contrôle a été vérifiée expérimentalement sur un Tube à Ondes Progressives [5], en l'absence de rétroaction avec l'onde.

Références

1. R. Bonifacio *et al.*, Physics of the high-gain FEL and superradiance. *Rivista del Nuovo Cimento*, **3**, 1-69

(1990).

2. J.L. Tennyson, J.D. Meiss, et P.J. Morrison, Self-Consistent Chaos in the Beam-Plasma Instability, *Physica D*, **71**, 1-17 (1994).
3. A. Antoniazzi, Y. Elskens, D. Fanelli et S. Ruffo, Statistical mechanics and Vlasov equation allows for a simplified Hamiltonian description of Single-Pass Free Electron Laser saturated dynamics, *Europ. Phys. J. B.*, in press (2006).
4. M. Vittot, Perturbation theory and control in classical or quantum mechanics by an inversion formula, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **37**, 6337-6357 (2004).
5. C. Chandre, G. Ciraolo, F. Doveil, R. Lima, A. Macor et M. Vittot, Channeling chaos by building barriers, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 074101 (2005).
6. G. Dimonte, J.H. Malmberg, Destruction of Trapped-Particle Ocillations, *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 401-404 (1977).
7. J. Laskar, Introduction to Frequency Map Analysis, *Proc. of NATO ASI Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom*, (C. Simò Ed, Kluwer), 134-150 (1999).
8. A.J. Lichtenberg, et M.A. Libermann, *Regular and Stochastic Motion* Springer, New York (1983).
9. G.R. Smith, et N.R. Pereira, Phase-locked particle motion in a large-amplitude plasma wave, *Phys. Fluids*, **21**, 2253-2262 (1978).
10. M. Vittot, C. Chandre, G. Ciraolo et R. Lima, Localized control for non-resonant Hamiltonian systems, *Nonlinearity*, **18**, 423-440 (2005).