HAL
open science

Contrôle du chaos Hamiltonien et amélioration du confinement dans les plasmas de fusion magnétique

Cristel Chandre, Guido Ciraolo, Ricardo Lima, Michel Vittot

To cite this version:

Cristel Chandre, Guido Ciraolo, Ricardo Lima, Michel Vittot. Contrôle du chaos Hamiltonien et amélioration du confinement dans les plasmas de fusion magnétique. Bulletin de la FRUMAM, 2006, 6, pp.6. hal-00102384

HAL Id: hal-00102384

https://hal.science/hal-00102384v1

Submitted on 29 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle du chaos Hamiltonien et amélioration du confinement dans les plasmas de fusion magnétique

C. Chandre[1*], G. Ciraolo[1,2], R. Lima[1], M. Vittot[1]
[1] *Centre de Physique Théorique* [†], *CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France*
[2] *Association Euratom-CEA, DRFC/DSM/CEA, CEA Cadarache, F-13108 St. Paul-lez-Durance Cedex, France*

ccsd-00102384, version 1 - 29 Sep 2006

Les pertes d'énergie et de particules dues au transport anormal dans les appareils de confinement magnétique de type tokamak sont encore un sérieux obstacle pour la fusion thermonucléaire contrôlée [1]. Au niveau d'ITER, des changements aussi modestes soient-ils dans les propriétés de confinement peuvent changer de manière drastique le facteur d'amplification d'énergie. Les états de meilleur confinement trouvés empiriquement et la possibilité de réduire et/ou supprimer le chaos avec les perturbations paramétriques (essentiellement développées pour les systèmes dissipatifs), suggèrent d'étudier la possibilité d'une stratégie de contrôle du transport chaotique anormal par des perturbations appropriées agissant au niveau microscopique des mouvements des particules chargées.

Le transport anormal d'origine non collisionnelle est aujourd'hui attribué à la présence de fluctuations turbulentes du champ électrique dans les plasmas de fusion. Il y a plusieurs années, il a été montré que la modélisation $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ des mouvements du centre guide des particules tests chargées donne une explication naturelle de la diffusion à travers le champ magnétique de confinement $\mathbf{B}$ [2]. Ces particules tests qui peuvent être, par exemple, des électrons ou des impuretés (suffisamment diluées pour ne pas influencer le champ électrique), sont soumises à la force de Lorentz et l'équation du mouvement est

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right).$$

De cette équation, on montre que le composante transverse (au champ magnétique) de la vitesse a pour expression

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{B^2}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{B},$$

à des termes près qui sont négligeables dans le cas d'un fort champ magnétique (pression cinétique négligeable devant la pression magnétique, ce qui est le cas dans un tokamak en première approximation). Dans le cadre de cette approximation, appelée approximation du centre guide, les équations du mouvement des particules chargées en présence d'un champ magnétique toroïdal intense $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ et d'un champ électrique non stationnaire $\mathbf{E}(x,y,t) = -\nabla V(x,y,t)$ sont donc

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{B}\begin{pmatrix} -\partial_y V(x,y,t) \\ \partial_x V(x,y,t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Les coordonnées spatiales x et y jouent donc le rôle de variables canoniquement conjuguées et le potentiel électrostatique $V(x,y,t)$, *spatialement turbulent*, est le Hamiltonien du système.

Dans le cas des systèmes dissipatifs, une stratégie efficace pour le contrôle est la stabilisation des orbites périodiques instables où la dynamique est attirée. Contrôler le chaos dans les systèmes Hamiltoniens nécessite des stratégies bien différentes de celles envisagées pour les systèmes dissipatifs car il n'y a pas d'ensembles attractifs dans leur espace des phases.

Au sein de l'équipe de dynamique non-linéaire du CPT, une nouvelle stratégie pour contrôler le chaos dans les systèmes Hamiltoniens est développée. Ce problème nous a amené à développer une technique mathématique appropriée fondée sur les techniques KAM (en particulier, développements en série et inversions d'opérateurs). L'idée centrale et le sens du *contrôle* est de modifier de manière pertinente la dynamique du système à travers des petites perturbations telles que la structure originale du système soit conservée. Par exemple, on cherche des petites perturbations qui rendent le système intégrable ou plus proche de l'intégrabilité.

---

* Adresse électronique: `chandre@cpt.univ-mrs.fr`

† Unité Mixte de Recherche (UMR 6207) du CNRS, et des universités Aix-Marseille I, Aix-Marseille II et du Sud Toulon-Var. Laboratoire affilié à la FRUMAM (FR 2291).

Plus précisément, l'idée est de trouver une modification du potentiel électrostatique V qui augmente significativement le confinement des particules chargées. De plus, cette modification doit répondre à plusieurs contraintes et notamment elle ne doit introduire qu'un faible coût énergétique pour être envisageable expérimentalement. Le potentiel électrostatique contrôlé est donc

$$V_c(x,y,t) = V(x,y,t) + f(x,y,t),$$

où $\|f\| \ll \|V\|$.

Nous avons montré [3] qu'un terme de contrôle f possible est donné par

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \{\Gamma V\}^n (n\mathcal{R}+1)V, \tag{2}$$

où $\{\cdot\}$ désigne l'opérateur de Lie agissant comme le crochet de Poisson $\{H_1\}H_2 = \{H_1, H_2\}$. Les opérateurs linéaires Γ et $\mathcal{R}$ sont définis à partir de la partie intégrable du Hamiltonien autonome du système, noté H_0. L'opérateur Γ est un pseudo-inverse de $\{H_0\}$, c'est-à-dire qu'il vérifie

$$\{H_0\}^2\ \Gamma = \{H_0\},$$

et $\mathcal{R} = 1 - \{H_0\}\Gamma$ est le projecteur sur les modes non-résonants (car $\{H_0\}\Gamma = \Gamma\{H_0\}$).

Pour illustrer notre approche, on choisit le modèle suivant

$$V(\mathbf{x},t) = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \sin[\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \varphi_{\mathbf{k}} - \omega(\mathbf{k})t], \tag{3}$$

où les $V_{\mathbf{k}}$ décroissent comme une fonction donnée de $\mathbf{k}$, en accord avec les données expérimentales. Pour simplifier encore le modèle, on considère $\omega(\mathbf{k}) = \omega_0$ constant et les phases $\varphi_{\mathbf{k}}$ aléatoires, de manière à reproduire un champ turbulent. De plus, nous considérons pour $|V_{\mathbf{k}}|$ une loi de puissance en $\mathbf{k}$, afin de reproduire les caractéristiques spectrales obtenues expérimentalement [4]. La forme explicite du potentiel est donc [2]

$$V(x,y,t) = a \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\sin\left[2\pi(nx+my) + \varphi_{nm} - 2\pi t)\right]}{2\pi(n^2+m^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Dans la suite, on prendra $N = 25$. Nous étendons l'espace des phases (x,y) en (E,τ,x,y) où la nouvelle variable dynamique τ évolue comme $\tau(t) = t + \tau(0)$ et E est canoniquement conjuguée à τ. Si on absorbe la constante c/B de (1) dans l'amplitude a, on peut considérer des petits valeurs de a quand B est grand. Le Hamiltonien autonome du système est donc

$$\tilde{H}(E,\tau,x,y) = E + V(x,y,\tau). \tag{5}$$

Pour des petites valeurs de a, le Hamiltonien (5) a la forme $H = H_0 + V$, c'est-à-dire, un Hamiltonien intégrable H_0 plus une perturbation V. La moyenne temporelle de V étant nulle, on a $\mathcal{R}V = 0$. Le premier terme f_2 de la série (2) donnant le terme de contrôle f est donné par

$$f_2 = -\frac{1}{2}\{\Gamma V, V\}. \tag{6}$$

Dans le cas considéré, $H_0 = E$ et la fonction ΓV est donc une primitive de V par rapport au temps :

$$\Gamma V(x,y,t) = \frac{a}{(2\pi)^2} \sum_{m,n=1}^{N} \frac{\cos\left[2\pi(nx+my) + \varphi_{nm} - 2\pi t\right]}{(n^2+m^2)^{3/2}}, \tag{7}$$

et le calcul de f_2 donne

$$\begin{aligned} f_2(x,y,t) \ &= \ \frac{a^2}{8\pi} \sum_{n_1,m_1,n_2,m_2} \frac{n_2 m_1 - n_1 m_2}{(n_1^2+m_1^2)^{3/2}(n_2^2+m_2^2)^{3/2}} \\ &\quad \times \sin\big[2\pi\big[(n_1-n_2)x + (m_1-m_2)y\big] + \varphi_{n_1 m_1} - \varphi_{n_2 m_2}\big]. \end{aligned} \tag{8}$$

Les autres termes de la série se calculent explicitement par des crochets de Poisson successifs avec ΓV. Il est à noter qu'avec le terme de contrôle f, les particules tests sont stoppées et il n'y a plus de transport vers les

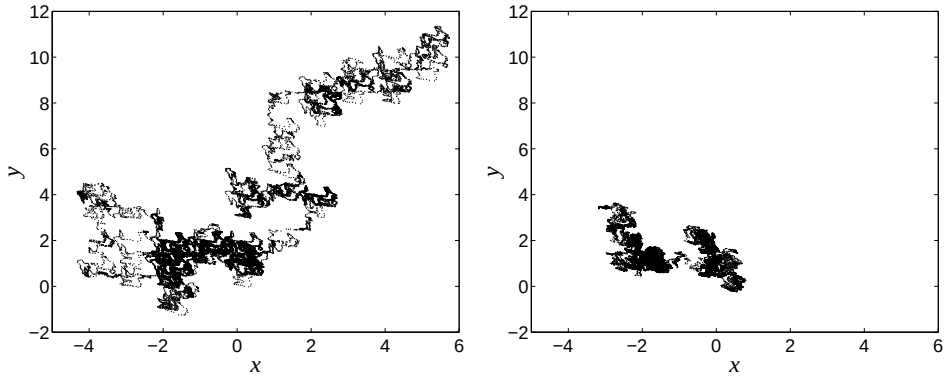

FIG. 1: Exemple d'une trajectoire obtenue pour le Hamiltonien (5) (à gauche) et pour le Hamiltonien (5) plus le terme de contrôle (8) (à droite) avec $a = 0.8$.

bords car $H + f$ est intégrable et canoniquement conjugué à $H_0 = E$. Par contre, ce terme de contrôle f ayant un spectre trop riche pour la mise en place expérimentale, il est envisagé une troncature de la série donnant f. Par exemple, le premier terme f_2, d'ordre $\|V\|^2$, est tel que le Hamiltonien donné par $H_c = H_0 + V + f_2$ est plus proche de l'intégrabilité que le Hamiltonien de départ $H_0 + V$, c'est-à-dire, tel que H_c est canoniquement conjugué à $H_0 + O(\|V\|^3)$. L'efficacité du terme de contrôle partiel f_2, qui est aussi un test de robustesse de la stratégie de contrôle envisagée, est vérifiée à l'aide de simulations numériques. Nous avons comparé les propriétés des trajectoires de particules obtenues avec le Hamiltonien (5) et avec le Hamiltonien contrôlé dont le terme de contrôle est donné par (8). La figure 1 montre deux trajectoires issues des mêmes conditions initiales calculées avec et sans le terme de contrôle. La particule reste confinée dans une région étroite dans le cas contrôlé, indiquant une réduction du transport vers les bords. Afin d'étudier qualitativement les propriétés de diffusion du système, le déplacement quadratique moyen

$$\langle r^2(t)\rangle = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0)\|^2, \tag{9}$$

d'un ensemble de $\mathcal{M}$ particules distribuées initialement uniformément au hasard dans le domaine $0 \leq x, y \leq 1$ pour $t = 0$ montre que le comportement est linéaire en fonction du temps. Le coefficient de diffusion est obtenu par

$$D = \lim_{t\to\infty} \frac{\langle r^2(t)\rangle}{t} \ .$$

Ce coefficient de diffusion D en fonction de a est représenté sur la figure 2 (en échelle log-lin). Une réduction significative de la diffusion est observée quand on ajoute le terme de contrôle. Comme attendu, l'action du terme de contrôle devient plus faible lorsque a augmente (ou de manière équivalente lorsque le champ magnétique B diminue) dans la direction de la phase très chaotique.

La mesure de l'amplitude relative du terme de contrôle f_2 par rapport au potentiel électrostatique (4),

$$\sqrt{\frac{\langle f_2^2\rangle - \langle f_2\rangle^2}{\langle V^2\rangle - \langle V\rangle^2}} \approx 0.01a, \tag{10}$$

montre que le terme de contrôle est une petite modification du potentiel électrostatique. Les principaux scénarios pour ITER sont fondés sur les barrières de transport (mode H, ITB, etc.). Ces barrières de transport sont souvent associées à un grand apport d'énergie. Cette stratégie de contrôle ouvre une voie d'investigation possible pour créer des barrières (ou réduire le transport turbulent) et améliorer le confinement magnétique à faible coût énergétique dans les appareils de fusion contrôlée tels que les tokamaks.

Il est à noter que cette nouvelle stratégie de contrôle des systèmes Hamiltoniens a été testée expérimentalement avec succès sur un Tube à Ondes Progessives [5], où 0.1% de l'énergie du système est suffisant pour réduire de manière significative la décohérence cinétique d'un faisceau d'électrons soumis à plusieurs ondes électrostatiques. Plus génréralement, ce travail a été étendu aux applications symplectiques, au cas de la réduction de la stochasticité des lignes de champ magnétique, du mélange et de l'advection chaotique dans les fluides incompressibles, et à l'ionisation d'atomes de Rydberg.

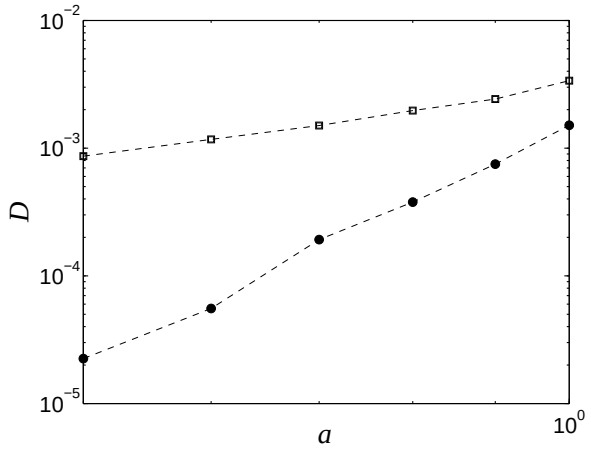

FIG. 2: Coefficient de diffusion D en fonction du paramètre a pour H donné par (5) (carrés) et donné par le Hamiltonien (5) avec le terme de contrôle (8) (cercles).

Remerciements: Ce travail s'effectue dans le cadre d'un contrat entre le CNRS et l'association Euratom-CEA (EUR 344-88-1 FUA F).

---

[1] W. Horton, *Drift waves and transport*, Rev. Mod. Phys. **71**, 735 (1999).
[2] M. Pettini, A. Vulpiani, J.H. Misguich, M. De Leener, J. Orban, R. Balescu, *Chaotic diffusion across a magnetic field in a model of electrostatic turbulent plasma*, Phys. Rev. A **38**, 344 (1988).
[3] M. Vittot, *Perturbation Theory and Control in Classical or Quantum Mechanics by an Inversion Formula*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 6337 (2004); G. Ciraolo, C. Chandre, R. Lima, M. Vittot, M. Pettini, C. Figarella, Ph. Ghendrih, *Control of Hamiltonian chaos as a possible tool to control anomalous transport in fusion plasmas*, Phys. Rev. E **69**, 056213 (2004).
[4] A.J. Wootton, H. Matsumoto, K. McGuire, W.A. Peebles, Ch.P. Ritz, P.W. Terry, S.J. Zweben, *Fluctuations and anomalous transport in tokamaks*, Phys. Fluids B **2**, 2879 (1990).
[5] C. Chandre, G. Ciraolo, F. Doveil, R. Lima, A. Macor, M. Vittot, *Channeling chaos by building barriers*, Phys. Rev. Lett. **94**, 074101 (2005).