



**HAL**  
open science

## Quelques approximations du temps local brownien

Blandine Berard Bergery, Pierre P. Vallois

► **To cite this version:**

Blandine Berard Bergery, Pierre P. Vallois. Quelques approximations du temps local brownien. 2006.  
hal-00098326v1

**HAL Id: hal-00098326**

**<https://hal.science/hal-00098326v1>**

Preprint submitted on 25 Sep 2006 (v1), last revised 25 Apr 2007 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Quelques approximations du temps local brownien

Blandine Bérard Bergery<sup>a</sup>, Pierre Vallois<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Université Henri Poincaré, Institut de Mathématiques Elie Cartan, B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France*

---

## Résumé

On définit plusieurs approximations du processus des temps locaux  $(L_t^x)_{t \geq 0}$  au niveau  $x$  du mouvement brownien réel  $(X_t)$ . En particulier, on montre que  $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t (\mathbb{1}_{\{x < X_{s+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{x < X_s\}})(X_{s+\epsilon} - X_s) ds$  converge au sens ucp vers  $L_t^x$ , lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , et que cette convergence dans  $L^2(\Omega)$  est d'ordre  $\epsilon^\alpha$ , pour tout  $\alpha < \frac{1}{4}$ . On obtient aussi des approximations de certaines intégrales stochastiques browniennes.

## Abstract

### Some Brownian local time approximations

We give some approximations of the local time process  $(L_t^x)_{t \geq 0}$  at level  $x$  of the real Brownian motion  $(X_t)$ . We prove that  $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t (\mathbb{1}_{\{x < X_{s+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{x < X_s\}})(X_{s+\epsilon} - X_s) ds$  goes to  $L_t^x$  in the ucp sense as  $\epsilon \rightarrow 0$ , and that the rate of convergence in  $L^2(\Omega)$  is of order  $\epsilon^\alpha$ , for any  $\alpha < \frac{1}{4}$ . Moreover, approximations of some Brownian stochastic integrals are given.

**Mots-clés:** temps local, intégration stochastique par régularisation, variation quadratique, vitesse de convergence.  
**classification AMS:** 60G44, 60H05, 60H99, 60J55, 60J65.

---

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  un espace de probabilité vérifiant les conditions habituelles. Dans cette Note, le processus  $X$  est continu, et la convergence en probabilité, uniformément sur les compacts, sera notée ucp (voir [8]).

## 1. Définition des schémas d'approximation

**1.1.** Il existe déjà de nombreuses approximations du temps local de processus (voir [5], [13], [9], [1], [6], [7], [2], [3]). L'objectif de cette Note est de présenter de nouveaux schémas d'approximation du temps local du mouvement brownien standard réel et de certaines martingales browniennes.

---

*Email addresses:* [berardb@iecn.u-nancy.fr](mailto:berardb@iecn.u-nancy.fr) (Blandine Bérard Bergery), [Pierre.Vallois@iecn.u-nancy.fr](mailto:Pierre.Vallois@iecn.u-nancy.fr) (Pierre Vallois).

**1.2.** On se place dans le cadre de l'intégration par régularisation définie par Russo et Vallois ([12], [10], [11]). Signalons que, dans ce contexte, des résultats de convergence presque sûre et en loi ont été obtenus par Gradinaru et Nourdin [4].

La variation quadratique  $[X, Y]$  est la limite au sens ucp de  $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t (Y_{s+\epsilon} - Y_s)(X_{s+\epsilon} - X_s) ds$ , si cette limite existe.

On définit

$$J_\epsilon(t, y) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (\mathbb{1}_{\{y < X_{s+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{y < X_s\}}) (X_{s+\epsilon} - X_s) ds, \quad y \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (1)$$

Pour  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , on note  $F$  la primitive de  $f$  nulle en 0. Lorsque  $X$  admet une variation quadratique, il est montré (voir [10]) que  $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t (F(X_{s+\epsilon}) - F(X_s))(X_{s+\epsilon} - X_s) ds$  converge au sens ucp vers  $\int_0^t f(X_s) d[X, X]_s$ , quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . En utilisant :  $F(x) = \int_0^x f(u) du$ , il est aisé d'en déduire :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{ucp}) \int_{\mathbb{R}} f(y) J_\epsilon(t, y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(X_s) d[X, X]_s, \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}). \quad (2)$$

**1.3.** Lorsque  $X$  est une semi-martingale,  $[X, X]$  est égal à la variation quadratique usuelle et  $X$  a un processus des temps locaux  $(L_t^a)_{a \in \mathbb{R}, t \geq 0}$ . La formule de densité d'occupation permet d'écrire (2) sous la forme :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{ucp}) \int_{\mathbb{R}} f(y) J_\epsilon(t, y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) L_t^y dy, \quad f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).$$

Ce qui suggère de montrer la convergence de  $J_\epsilon(t, y)$  vers  $L_t^y$ , quand  $\epsilon$  tend vers 0. Pour simplifier les notations, on prend  $y = 0$  et on note simplement  $J_\epsilon(t) = J_\epsilon(t, 0)$ .

**1.4.** On décompose  $J_\epsilon(t)$  de deux manières différentes :

$$J_\epsilon(t) = - \underbrace{\frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}} (X_{s+\epsilon} - X_s) ds}_{I_\epsilon^1(t)} + \underbrace{\frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_{s+\epsilon}\}} (X_{s+\epsilon} - X_s) ds}_{I_\epsilon^2(t)}, \quad (3)$$

$$= I_\epsilon^3(t) + I_\epsilon^4(t) + I_\epsilon^5(t) + R_\epsilon(t), \quad (4)$$

$$\text{avec } I_\epsilon^3(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_{(u+\epsilon)\wedge t}^+ \mathbb{1}_{\{X_u \leq 0\}} du + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_{(u+\epsilon)\wedge t}^- \mathbb{1}_{\{X_u > 0\}} du, \quad (5)$$

$$I_\epsilon^4(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u^- \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} > 0\}} du, \quad I_\epsilon^5(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u^+ \mathbb{1}_{\{X_{(u+\epsilon)\wedge t} \leq 0\}} du, \quad (6)$$

$$R_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{(t-\epsilon)^+}^t (\mathbb{1}_{\{0 < X_{u+\epsilon}\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}})(X_{u+\epsilon} - X_u) - (\mathbb{1}_{\{0 < X_t\}} - \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}})(X_t - X_u) du. \quad (7)$$

**1.5.** On s'intéresse dans cette Note (c.f. les Sections 2 et 3) à la convergence ucp de  $I_\epsilon^1(t), \dots, I_\epsilon^5(t)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $X$  est le mouvement brownien. On obtient ainsi des approximations du temps local et de certaines intégrales stochastiques browniennes. Dans la dernière section, on donne une vitesse de convergence de  $J_\epsilon(t)$  vers  $L_t^0$  dans  $L^2(\Omega)$ .

## 2. Convergence de $I_\epsilon^1(t)$ et $I_\epsilon^2(t)$

**2.1.** On suppose que  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une semi-martingale. Il est montré ([12], Proposition 3.31) que si  $(Y_t)$  est adapté et si  $t \rightarrow Y_t$  admet des limites à gauche, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{ucp}) \frac{1}{\epsilon} \int_0^t Y_s (X_{s+\epsilon} - X_s) ds = \int_0^t Y_s dX_s. \quad (8)$$

Bien que  $s \rightarrow \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}}$  ne soit pas continu à gauche, on montre (voir le Théorème 2.1 plus bas) que (8) a lieu avec  $Y_s = \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}}$ , lorsque  $X$  est le mouvement brownien.

**2.2.** Signalons un résultat qui ne concerne pas directement l'approximation du temps local mais qui est très lié à notre étude. On suppose que  $(Y_t)$  est un processus adapté et localement Höldérien : pour tout  $T > 0$ , il existe  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $C_T$  une variable aléatoire finie presque sûrement telle que :  $|Y_s - Y_u| \leq C_T |u - s|^\alpha \quad \forall u, s \in [0, T]$ . Alors, lorsque  $(X_t)$  est une semi-martingale, la convergence (8) a lieu presque sûrement, uniformément pour  $t \in [0, T]$ .

**2.3.** Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un résultat de convergence ucp de  $I_\epsilon^1(t)$  et  $I_\epsilon^2(t)$ .

**Théorème 2.1** *On suppose que  $X$  est un mouvement brownien standard réel. Alors :*

- (i)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{ucp}) I_\epsilon^1(t) = \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}} dX_s.$
- (ii)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{ucp}) I_\epsilon^2(t) = X_t^+ + \frac{1}{2} L_t^0.$
- (iii)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\text{ucp}) J_\epsilon(t) = L_t^0.$

**2.4. Preuve.** 1) Notre approche est basée sur le théorème de Fubini stochastique (c.f [9]). On écrit

$$I_\epsilon^1(t) - \int_0^t \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}} dX_s = \tilde{I}_\epsilon^1(t) + \tilde{R}_\epsilon(t), \quad (9)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{I}_\epsilon^1(t) = \int_0^t \left( \frac{1}{\epsilon} \int_{(u-\epsilon)^+}^u \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}} ds - \mathbb{1}_{\{0 < X_u\}} \right) dX_u, \quad (10)$$

$$\tilde{R}_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \int_{(t-\epsilon)^+}^t (X_{s+\epsilon} - X_t) \mathbb{1}_{\{0 < X_s\}} ds. \quad (11)$$

Il est facile de montrer que  $\forall T > 0, \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{R}_\epsilon(t)|$  converge presque sûrement vers 0, quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Quant à  $\tilde{I}_\epsilon^1(t)$ , en utilisant l'inégalité de Doob, il n'est pas difficile d'établir :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E \left[ \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{I}_\epsilon^1(t)|^2 \right] = 0. \quad (12)$$

**2)** Pour étudier la convergence de  $I_\epsilon^2(t)$ , la difficulté provient du fait que  $(\mathbb{1}_{\{y < X_{s+\epsilon}\}})_{s \geq 0}$  n'est plus  $(\mathcal{F}_s)$ -adapté. L'approche précédente ne peut plus s'appliquer. L'idée consiste à renverser le sens du temps pour écrire l'intégrale "rétrograde"  $I_\epsilon^2(t)$  en une intégrale progressive. (c.f [12], Définition 2.1 pour plus de détails). Soit  $T > 0$ . On pose  $\tilde{X}_u = X_T - X_{T-u}; 0 \leq u \leq T$ .  $(\tilde{X}_u)_{0 \leq u \leq T}$  est un mouvement brownien. Notons  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$  sa filtration naturelle et  $(\mathcal{G}_t)$  la plus petite filtration contenant  $\sigma(X_T)$  et  $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ . Le point (ii) est obtenu en remarquant d'une part que  $\mathbb{1}_{\{0 < X_{s+\epsilon}\}} (X_{s+\epsilon} - X_s) = -\mathbb{1}_{\{\tilde{X}_{T-u} < X_T\}} (\tilde{X}_{u+\epsilon} - \tilde{X}_u)$ , avec  $u = T - s - \epsilon$ , et d'autre part que  $(\tilde{X}_u)_{0 \leq u \leq T}$  est une  $(\mathcal{G}_t)$  semi-martingale dont la décomposition est explicite (voir [14]).

**3)** On montre (iii) en utilisant la formule de Tanaka et les deux points précédents (i) et (ii).

### 3. Convergence de $I_\epsilon^3(t), I_\epsilon^4(t), I_\epsilon^5(t)$ vers une fraction du temps local

**3.1.** Dans cette section, on suppose que  $X$  est le mouvement brownien standard. On rappelle que  $I_\epsilon^3(t), I_\epsilon^4(t), I_\epsilon^5(t), R_\epsilon(t)$  sont définis par (5), (6) et (7). On montre facilement que  $R_\epsilon(t)$  converge presque sûrement vers 0, uniformément sur les compacts.

**Théorème 3.1** (i)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (ucp) I_\epsilon^3(t) = \frac{1}{2}L_t^0$ .

(ii)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (ucp) I_\epsilon^4(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (ucp) I_\epsilon^5(t) = \frac{1}{4}L_t^0$ .

**3.2.** Ce résultat est aussi vrai lorsque  $X_t = \int_0^t \sigma(s)dB_s$  où  $B$  est un mouvement brownien standard et  $\sigma$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$ , h"olderienne d'ordre  $\gamma > \frac{1}{4}$  et telle que  $|\sigma(s)| \geq a > 0$ .

**3.3. Preuve du Théorème 3.1. a)** D'après la formule de Tanaka,

$$X_{(u+\epsilon)\wedge t}^+ = X_u^+ + \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} \mathbb{1}_{\{X_s > 0\}} dX_s + \frac{1}{2}(L_{(u+\epsilon)\wedge t}^0 - L_u^0).$$

On a une formule similaire pour  $X_{(u+\epsilon)\wedge t}^-$ .  $I_\epsilon^3(t)$  est donc égal à

$$\frac{1}{\epsilon} \int_0^t \left( \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} (\mathbb{1}_{\{X_s > 0, X_u \leq 0\}} - \mathbb{1}_{\{X_s \leq 0, X_u > 0\}}) dX_s \right) du + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^t (L_{(u+\epsilon)\wedge t}^0 - L_u^0) du. \quad (13)$$

Pour la deuxième intégrale, on écrit  $L_{(u+\epsilon)\wedge t}^0 - L_u^0 = \int_u^{(u+\epsilon)\wedge t} dL_s^0$ . Une application du théorème de Fubini permet montrer la convergence vers  $\frac{1}{2}L_t^0$ . On montre la convergence vers 0 de la première intégrale de (13), en utilisant cette fois le théorème de Fubini stochastique.

**b)** Il est équivalent d'étudier la convergence de  $I_\epsilon^4(t)$  ou de  $I_\epsilon^5(t)$ . Pour  $I_\epsilon^5(t)$ , on est confronté au même problème que pour  $I_\epsilon^2(t)$ . On écrit  $I_\epsilon^5(t)$  comme la somme d'un terme qui converge presque sûrement vers 0, uniformément sur les compacts, et de :

$$\frac{1}{\epsilon} \int_0^{(t-\epsilon)^+} X_u^+ \left[ \mathbb{1}_{\{X_{u+\epsilon} \leq 0\}} - \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) \right] du + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u^+ \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) du, \quad (14)$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite. La formule de densité d'occupation et la propriété de Hölder de  $x \rightarrow L_t^x$  donnent la convergence de  $\frac{1}{\epsilon} \int_0^t X_u^+ \Phi\left(-\frac{X_u}{\sqrt{\epsilon}}\right) du$  vers  $\frac{1}{4}L_t^0$  dans  $L^2$ , uniformément sur les compacts. Pour la première intégrale de (14), à l'aide de la formule d'Itô, on écrit le terme entre crochet comme une intégrale stochastique; le théorème de Fubini permet de montrer la convergence vers 0 dans  $L^2$ , uniformément sur les compacts.

### 4. Vitesse de convergence de $J_\epsilon(t)$ dans $L^2(\Omega)$

On suppose que  $(X_t)$  est le mouvement brownien standard.

**Théorème 4.1** Pour tout  $T > 0$ ,  $\delta \in ]0, \frac{1}{4}[$ , il existe une constante  $K_\delta$  telle que :

$$\forall \epsilon \in ]0, 1], \quad \left\| \sup_{t \in [0, T]} |J_\epsilon(t) - L_t^0| \right\|_2 \leq K_\delta \epsilon^\delta.$$

On a des résultats similaires concernant  $I_\epsilon^1(t)$  et  $I_\epsilon^2(t)$ .

On déduit du lemme de Borel-Cantelli et du Théorème 4.1 que  $\sup_{t \in [0, T]} |J_{\epsilon_n}(t) - L_t^0|$  converge presque sûrement vers 0, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle positive décroissante tendant vers 0 et telle que  $\sum_{i=1}^n \sqrt{\epsilon_i}$  converge.

## Références

- [1] Jean-Marc Azaïs. Approximation des trajectoires et temps local des diffusions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 25(2) :175–194, 1989.
- [2] Martin T. Barlow, Edwin A. Perkins, and S. James Taylor. Two uniform intrinsic constructions for the local time of a class of Lévy processes. *Illinois J. Math.*, 30(1) :19–65, 1986.
- [3] Donald Geman and Joseph Horowitz. Occupation densities. *Ann. Probab.*, 8(1) :1–67, 1980.
- [4] Mihai Gradinaru and Ivan Nourdin. Approximation at first and second order of  $m$ -order integrals of the fractional Brownian motion and of certain semimartingales. *Electron. J. Probab.*, 8 :no. 18, 26 pp. (electronic), 2003.
- [5] Kiyosi Itô and Henry P. McKean, Jr. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125.
- [6] Jean Jacod. Rates of convergence to the local time of a diffusion. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 34(4) :505–544, 1998.
- [7] Ernesto Mordecki and Mario Wschebor. Approximation of the occupation measure of Lévy processes. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 340(8) :605–610, 2005.
- [8] Philip E. Protter. *Stochastic integration and differential equations*, volume 21 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004. Stochastic Modelling and Applied Probability.
- [9] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [10] Francesco Russo and Pierre Vallois. The generalized covariation process and Itô formula. *Stochastic Process. Appl.*, 59(1) :81–104, 1995.
- [11] Francesco Russo and Pierre Vallois. Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes. *Stochastics Stochastics Rep.*, 70(1-2) :1–40, 2000.
- [12] Pierre Vallois and Francesco Russo. Elements of stochastic calculus via regularisation. In *Séminaire de Probabilités, XXXX*, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin.
- [13] David Williams. Lévy’s downcrossing theorem. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 40(2) :157–158, 1977.
- [14] Marc Yor. *Some aspects of Brownian motion. Part II*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. Some recent martingale problems.