



HAL
open science

Approche LMI pour la synthèse des filtres H-infinis non biaisés

Harouna Souley Ali, Mohamed Darouach, Michel Zasadzinski

► **To cite this version:**

Harouna Souley Ali, Mohamed Darouach, Michel Zasadzinski. Approche LMI pour la synthèse des filtres H-infinis non biaisés. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, May 2006, Bordeaux, France. pp.CDROM. hal-00098038

HAL Id: hal-00098038

<https://hal.science/hal-00098038>

Submitted on 23 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche LMI pour la synthèse des filtres \mathcal{H}_∞ non biaisés

Harouna SOULEY ALI, Mohamed DAROUACH, Michel ZASADZINSKI

Université Henri Poincaré – Nancy I
CRAN UMR 7039 – CNRS

IUT de Longwy, 186 rue de Lorraine, 54400 Cosnes et Romain, France

Harouna.Souley@iut-longwy.uhp-nancy.fr, Mohamed.Darouach@iut-longwy.uhp-nancy.fr
Michel.Zasadzinski@iut-longwy.uhp-nancy.fr

Résumé— Cet article traite du filtrage fonctionnel non biaisé des systèmes linéaires en généralisant les résultats présentés dans [1], [2], [3]. La condition nécessaire et suffisante d'existence d'un filtre fonctionnel non biaisé est donnée. Lorsque cette condition est satisfaite, les matrices du filtre sont paramétrées à travers un gain unique sans aucune restriction sur la forme de la fonctionnelle à estimer. De plus, l'introduction d'un nouveau paramètre permet d'avoir des degrés de libertés supplémentaires conduisant à un filtre moins contraint que celui proposé dans [2], [3]. La synthèse de ce filtre est réalisée à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

Mots-clés— Filtrage fonctionnel non biaisé d'ordre réduit, Critère \mathcal{H}_∞ , Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

I. INTRODUCTION

Le filtrage fonctionnel d'ordre réduit trouve son intérêt dans le fait qu'il permet d'estimer une partie ou une combinaison linéaire de l'état d'un système (appelée fonctionnelle) sans avoir à estimer l'état entier : la dimension de l'état du filtre est la même que celle de la fonctionnelle. Ce type de filtre présente plusieurs avantages par rapport au filtre d'ordre plein, notamment pour le temps de calcul et pour les systèmes de grande dimension.

Un des points importants dans le problème de filtrage que nous considérons est la non dépendance explicite de la dynamique de l'erreur d'observation vis-à-vis de l'état du système : cette propriété est appelée non biais [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. La condition de non biais conduit à la résolution d'une équation de Sylvester [1], [2], [3], [6], [7]. La condition nécessaire et suffisante d'existence du filtre non biaisé proposé est alors déduite de cette équation. La résolution de celle-ci permet de paramétrer toutes les matrices du filtre à travers un gain unique.

Généralement le problème de filtrage dans le cas de bruits gaussiens se résout par le filtre de Kalman ; ce dernier nécessite des informations statistiques sur les bruits. Dans le cas où on ne dispose pas de connaissances statistiques sur les perturbations, on utilise un filtre \mathcal{H}_∞ qui exige seulement que les perturbations soient à énergie finie.

Le filtrage \mathcal{H}_∞ a pour objectif la synthèse d'un filtre afin que l'erreur d'estimation soit stable et que la norme \mathcal{H}_∞ du transfert entre les perturbations et celle-ci soit inférieure à une valeur donnée. La méthode de Lyapunov permet de traduire ce double objectif sous forme de LMI [8]. L'intérêt des LMI vient du fait que ces dernières peuvent être réso-

lues par la programmation convexe. Les matrices du filtre sont enfin construites à partir des solutions trouvées.

II. POSITION DU PROBLÈME

Considérons le système suivant

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad (1a)$$

$$y = Cx + Dw \quad (1b)$$

$$z = Lx \quad (1c)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ constitue la mesure et $z(t) \in \mathbb{R}^r$ est une combinaison linéaire de l'état avec $r \leq n$. Le vecteur $w(t) \in \mathbb{R}^m$ représente les perturbations. Les matrices A, B, C, D et L sont constantes.

Il est à noter que contrairement à [2], nous ne supposons pas que la matrice L est de rang plein lignes.

Notre objectif est d'estimer le vecteur $z(t)$ à partir des mesures $y(t)$. Pour cela, nous proposons de construire un filtre de la forme :

$$\dot{\eta} = N\eta + Ky \quad (2a)$$

$$\hat{z} = \eta + Ey \quad (2b)$$

où $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$ (avec $r \leq n$) est l'état du filtre et les matrices N, K et E sont à déterminer. Ainsi, le problème à résoudre peut se formuler comme suit :

Problème 1. Déterminer les matrices N, K et E du filtre (2) afin que

(i) le filtre (2) soit non biaisé, c'est-à-dire que l'erreur d'estimation, $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$, soit indépendante de l'état $x(t)$ du système (1) [1], [3], [4], [5], [6],

(ii) l'erreur de filtrage $e(t)$ vérifie

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w\|_{\mathcal{L}_2}} < \gamma, \quad \|w\|_{\mathcal{L}_2} = \left(\int_0^\infty w^T w dt \right)^{\frac{1}{2}} \neq 0, \quad (3)$$

pour des conditions initiales nulles, où $\gamma > 0$ est le niveau d'atténuation \mathcal{H}_∞ entre $w(t)$ et $e(t)$. \square

L'erreur d'observation est donnée par

$$e = z - \hat{z} = Lx - \eta - Ey = Lx - \eta - ECx - EDw = \Psi x - \eta - EDw = \varepsilon - EDw \quad (4)$$

avec $\gamma > 0$ si la condition (13) est satisfaite et si

$$\begin{bmatrix} \Upsilon & P(\bar{B}_1 - \bar{Z}\bar{B}_2) & I_r \\ (\bar{B}_1 - \bar{Z}\bar{B}_2)^T P & -\gamma^2 I_m & -D^T E_1^T \\ I_r & -E_1 D & -I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

où $P = P^T > 0$ et $\Upsilon = (N_1 + \bar{Z}\bar{N}_2)^T P + P(N_1 + \bar{Z}\bar{N}_2)$.

Démonstration. Si la condition (13) n'est pas vérifiée, alors les matrices N , J et E données par (22) ne sont pas solution de l'équation de Sylvester (10) et le filtre obtenu serait alors biaisé.

Soit la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon \text{ avec } P = P^T > 0. \quad (26)$$

D'une part, la dérivée de $V(\varepsilon)$ donne

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= 2\varepsilon^T P \dot{\varepsilon} = 2\varepsilon^T P(\bar{A}\varepsilon + \bar{B}w) \\ &= \varepsilon^T (\bar{A}^T P + P\bar{A})\varepsilon + 2\varepsilon^T P\bar{B}w \end{aligned} \quad (27)$$

donc

$$\dot{V}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \varepsilon^T & w^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\bar{B} \\ \bar{B}^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ w \end{bmatrix}. \quad (28)$$

D'autre part, sachant que $e = \bar{C}\varepsilon + \bar{D}w$, nous avons

$$e^T e - \gamma^2 w^T w = \begin{bmatrix} \varepsilon^T \\ w^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{C}^T \bar{C} & \bar{C}^T \bar{D} \\ \bar{D}^T \bar{C} & \bar{D}^T \bar{D} - \gamma^2 I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ w \end{bmatrix}. \quad (29)$$

En utilisant le fait que $V(0) = 0$ et $V(\infty) \geq 0$, nous obtenons l'inégalité suivante

$$J_{ew} \leq \int_0^\infty \left(e^T e - \gamma^2 w^T w + \dot{V}(\varepsilon) \right) dt \quad (30)$$

où J_{ew} désigne l'indice de performance \mathcal{H}_∞ donné par (24) et qui est équivalent à (3).

D'après les développements précédents, l'inégalité (30) est équivalente à

$$\begin{aligned} J_{ew} &\leq \int_0^\infty \begin{bmatrix} \varepsilon^T & w^T \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} + \bar{C}^T \bar{C} & P\bar{B} + \bar{C}^T \bar{D} \\ \bar{B}^T P + \bar{D}^T \bar{C} & \bar{D}^T \bar{D} - \gamma^2 I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ w \end{bmatrix} dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Enfin, en utilisant le lemme de Schur [8], si la relation

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T P + P\bar{A} & P\bar{B} & \bar{C}^T \\ \bar{B}^T P & -\gamma^2 I_m & \bar{D}^T \\ \bar{C} & \bar{D} & -I_r \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

est vérifiée avec $P = P^T > 0$, alors l'atténuation \mathcal{H}_∞ l'est aussi, c'est-à-dire $J_{ew} < 0$, et l'erreur d'estimation est stable, c'est-à-dire $\dot{V}(\varepsilon) < 0$. \square

En utilisant le lemme 1, le filtre \mathcal{H}_∞ non biaisé est obtenu en posant $\bar{Z} = P^{-1}Y$ dans le théorème suivant.

Théorème 1. *Il existe un filtre \mathcal{H}_∞ non biaisé donné par (2) tel que l'erreur d'observation satisfasse la contrainte de*

norme \mathcal{H}_∞ définie par $J_{ew} < 0$ dans la relation (24) si la condition (13) est satisfaite et s'il existe des matrices $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$, Y et un réel $\gamma > 0$ tels que

$$\begin{bmatrix} \Gamma(1,1) & \Gamma(1,2) & I_r \\ \Gamma(1,2)^T & -\gamma^2 I_m & -D^T E_1^T \\ I_r & -E_1 D & -I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

avec

$$\Gamma(1,1) = N_1^T P + \bar{N}_2^T Y^T + P N_1 + Y \bar{N}_2, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(1,2) &= P((L - E_1 C)B - (J_1 + N_1 E_1)D) \\ &\quad - Y(\bar{E}_2 C B + (\bar{J}_2 + \bar{N}_2 E_1)D). \end{aligned} \quad (35)$$

Démonstration. Il suffit de poser $Y = P\bar{Z}$ dans l'inégalité (25) pour obtenir la LMI (33). \square

Les matrices N , K et E du filtre (2) sont obtenues avec les relations (8) et (22) en utilisant le gain $\bar{Z} = P^{-1}Y$.

Remarque 2. Dans [2], [3], la contrainte (19) est remplacée par

$$ED = 0, \quad (36)$$

ce qui implique que la solution de l'équation (10) doit aussi satisfaire (36), et donc que la condition (13) devient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & LA \\ \mathcal{D} & \mathcal{C} \end{bmatrix} = \text{rang} [\mathcal{D} \quad \mathcal{C}] \quad (37)$$

avec $\mathcal{D}^T = [0 \quad 0 \quad D^T]$.

La condition (13) est plus générale que (37) car, si (37) est vérifiée, alors (13) est vraie, mais la réciproque est fautive. De plus, la condition (13) est la condition de non biais donnée dans [6] pour la synthèse d'un observateur fonctionnel d'ordre réduit lorsque $w(t) = 0$. \square

V. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle approche pour la synthèse de filtres \mathcal{H}_∞ , non biaisés et d'ordre réduit, pour une fonctionnelle quelconque. La synthèse du filtre s'obtient via la résolution d'une LMI basée sur un paramétrage des solutions de la contrainte de non biais. La condition de non biais proposée est plus générale que celles qui sont données dans la littérature.

RÉFÉRENCES

- [1] J.T. Watson et K.M. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. *Syst. & Contr. Letters*, 35 :111–118, 1998.
- [2] M. Darouach, M. Zasadzinski, et H. Souley Ali. Robust reduced order unbiased filtering via LMI. *Proc. European Contr. Conf.*, Porto, Portugal, 2001.
- [3] M. Zasadzinski, H. Souley Ali, et M. Darouach. Robust reduced order unbiased filtering for uncertain systems. *Int. J. Contr.*, 79 :93–106, 2006.
- [4] H. Kim, C.S. Sims, et K.M. Nagpal. Reduced order filtering in an \mathcal{H}_∞ setting. *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Chicago, USA, 1992.
- [5] K.M. Nagpal, R.E. Helmick, et C.S. Sims. Reduced-order estimation, Part I : filtering. *Int. J. Contr.*, 45 :1867–1888, 1987.
- [6] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 45 :940–943, 2000.
- [7] M. Darouach. On the optimal unbiased functional filtering. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 45 :1374–1379, 2000.
- [8] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, et V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [9] P. Lancaster et M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, Orlando, USA, 2nd edition, 1985.