



HAL
open science

Méthode de perturbation d'ordre élevé pour le couplage vibroacoustique en fluide lourd

Pierre-Olivier Mattei

► **To cite this version:**

Pierre-Olivier Mattei. Méthode de perturbation d'ordre élevé pour le couplage vibroacoustique en fluide lourd. 8ème Congrès Français d'Acoustique, 2006, Tours, 24-27 avril, France. pp.x-x. hal-00095374

HAL Id: hal-00095374

<https://hal.science/hal-00095374>

Submitted on 15 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthode de perturbation d'ordre élevé pour le couplage vibroacoustique en fluide lourd

Pierre-Olivier Mattei

¹ *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Marseille, France courriel : mattei@lma.cnrs-mrs.fr*

Résumé

On s'intéresse ici au problème du couplage structure fluide lourd. On montre comment une modification triviale des techniques classiques de perturbation conduit à une approximation simple et performante du spectre d'une structure couplée à un fluide de densité élevée. Une application numérique de la méthode est présentée sur l'exemple simple d'une plaque rectangulaire.

Introduction

Décrire précisément le couplage fluide structure rend les méthodes de calcul numériques totalement inefficaces. Ceci est dû au fait que l'opérateur qui décrit le couplage est non seulement dépendant de la fréquence mais aussi non local. En général, les méthodes numériques de calcul de structures *in vacuo* conduisent à des systèmes linéaires relativement simples à résoudre. Lorsque le couplage est pris en compte, la taille des systèmes linéaires augmente, les matrices deviennent pleines et dépendantes de la fréquence ; la résolution numérique de ces systèmes devient alors problématique. Il est souhaitable de disposer de techniques qui permettent de contourner ces difficultés.

Parmi les nombreuses solutions étudiées, les méthodes asymptotiques basées sur des développements en série de perturbation d'un petit paramètre sont particulièrement attractives. L'analyse peut être conduite sur des structures infinies [1] et sont particulièrement utiles pour déterminer des lois d'échelles pour tout les aspects de la vibroacoustique. Toutefois, ces approximations ne permettent pas d'obtenir des informations pratiques sur l'évolution du spectre de l'opérateur. En outre, plus une structure est fine, plus elle sera sensible au couplage avec le fluide environnant et il est indispensable de développer une méthode qui prenne en compte cette évidence physique. Pour ce faire, une méthode a priori valide pour un couplage faible (par exemple pour une structure en métal au contact d'air), consiste à introduire un petit paramètre défini comme le rapport entre la la masse volumique du fluide et masse surfacique de la structure. Par développement en série de perturbation [3, 6], on construit alors une solution approchée, généralement limitée à l'ordre un, du spectre de l'opérateur basée sur les modes propres *in vacuo*. La principale limitation de cette méthode vient du fait que cette méthode a un domaine de validité difficile à estimer.

On présente ici comment un développement en série de perturbation d'ordre élevé peut être simplement modifié pour permettre un calcul très précis des modes de

résonances et des modes propres d'une structure couplée à un fluide lourd à partir de la connaissance des modes propres dans la vide. Les modes de résonance correspondent aux oscillations libres du système et sont l'outil naturel pour étudier les effet d'amortissement par rayonnement acoustique. Dans la littérature, on retrouve ces modes sous de nombreuses dénominations. Les plus usuelles sont modes propres généralisés ou modes propres complexes. Cette dernière reflète la nature mathématique de ces modes : ils sont une généralisation des modes propres réels pour les systèmes mécaniques dans lesquels les divers opérateurs (masse, raideur et amortissement) dépendent de la fréquence et donnent naissance à des modes complexes. Ceci apparait lorsque l'on s'intéresse à l'amortissement matériel (par viscosité), structural (par les frontières) ou par rayonnement acoustique. Du fait de la dépendance en fréquence, le calcul de ces modes propres généralisés devient extrêmement difficile et il n'existe pas de méthode de calcul de ces modes.

1 Equations du problème

On considère ici une dépendance harmonique $\exp(-i\omega t)$, omise pour simplifier l'écriture. On considère un domaine infini Ω de frontière finie ou infinie $\partial\Omega$ qui contient un fluide au repos de masse volumique ρ_f et de célérité des ondes c_f . Une structure mince d'épaisseur h et de densité ρ_p occupe une surface finie Σ de $\partial\Omega$. M est un point de la structure et Q est un point du milieu infini. On nomme $U(M, \omega)$ le déplacement normal de la structure. \mathcal{O} est l'opérateur qui décrit le comportement élastique de la structure comme un bi-Laplacien pour l'équation des plaques de Kirchhoff ou l'opérateur de Donnell-Mushtari pour les coques minces. La pression acoustique $P(Q, \omega)$ est solution de l'équation de Helmholtz. On impose en outre une condition de Neumann sur Σ . $U(M, \omega)$ et $P(Q, \omega)$ satisfont :

$$\mathcal{O}U(M, \omega) - \rho_p h \omega^2 U(M, \omega) = F(M, \omega) - P(M, \omega)$$

$$\Delta P(Q, \omega) + \omega^2 / c_f^2 P(Q, \omega) = 0$$

Conditions aux limites pour $U(M, \omega)$

$$\partial_n P(Q, \omega) = 0 \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma$$

$$\lim_{M \in \Omega \rightarrow Q \in \Sigma} \partial_n P(Q, \omega) = -\rho_f \omega^2 U(M, \omega) \text{ sur } \Sigma.$$

Par représentation de Green, on peut se ramener à une seule équation intégrodifférentielle pour le déplacement. Soit $G(Q - Q', \omega)$ la fonction de Green du problème de Neumann pour l'équation de Helmholtz qui est connue analytiquement pour les plaques les coques bafflées. On

montre facilement que l'on a :

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}U(M, \omega) - \rho_p h \omega^2 (U(M, \omega) \\ & - \epsilon \int_{\Sigma} U(M', \omega) G(M - M', \omega) dM') = F(M, \omega) \\ & \text{Conditions aux limites pour } U(M, \omega) \end{aligned}$$

où $\epsilon = \rho_f / \rho_p h$ est un petit paramètre pour une structure en métal au contact d'air.

On introduit la formulation faible de cette équation [3]. On a alors trouver $U(M, \omega)$ satisfaisant aux conditions aux limites tel que pour tout $V(M, \omega)$ satisfaisant aux conditions aux limites, on ait

$$a(U, V) - \Lambda (\langle U, V \rangle - \epsilon \beta_{\omega}(U, V)) = \langle F, V \rangle$$

où $\Lambda = \rho_p h \omega^2$. $a(U, V)$ correspond à l'énergie potentielle élastique de la structure. $\langle U, V \rangle$ est le produit scalaire usuel $\langle U, V \rangle = \int_{\Sigma} U(M) V^*(M) dM$, $\rho_p h \omega^2 \langle U, V \rangle$ est l'énergie cinétique. $\beta_{\omega}(U, V) = \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} U(M) G(M - M', \omega) V^*(M') dM dM'$ est l'impédance de rayonnement. $\rho_p h \omega^2 \epsilon \beta_{\omega}(U, V)$ est l'énergie échangée avec le fluide.

les modes propres $\tilde{U}_m(M, \omega)$ et les valeurs propres $\tilde{\Lambda}_m(\omega)$ sont les solutions non nulles de

$$a(\tilde{U}_m, V) - \tilde{\Lambda}_m(\omega) (\langle \tilde{U}_m, V \rangle - \epsilon \beta_{\omega}(\tilde{U}_m, V)) = 0.$$

Les pulsations propres sont données par $\tilde{\omega}_m^2(\omega) = \tilde{\Lambda}_m(\omega) / \rho_p h$. Les modes de résonance $\tilde{U}_m(M)$ et les pulsations de résonances $\tilde{\omega}_m$ sont les solutions, indépendantes de la fréquence, de l'équation :

$$a(\tilde{U}_m, V) - \rho_p h \tilde{\omega}_m^2 (\langle \tilde{U}_m, V \rangle - \epsilon \beta_{\tilde{\omega}_m}(\tilde{U}_m, V)) = 0.$$

On montre simplement que les modes propres et les modes de résonances sont liés par les relations :

$$\tilde{U}_m(M) = \tilde{U}_m(M, \tilde{\omega}_m), \quad (1)$$

$$\tilde{\omega}_m^2 = \tilde{\omega}_m^2(\tilde{\omega}_m). \quad (2)$$

La principale difficulté est de calculer les fréquences de résonances, ce qui est en général très difficile. Néanmoins, les méthodes de perturbation permettent de facilement calculer les pulsations et mode propres. Les pulsations de résonances sont alors obtenues en résolvant l'équation (2). Chaque mode de résonance est ensuite facilement obtenu en calculant le mode propre à la fréquence de résonance correspondante par l'équation (1)

2 Méthode de perturbation d'ordre élevé

On développe les modes \tilde{U}_m et valeurs propres $\tilde{\Lambda}_m$ en série du petit paramètre ϵ :

$$\begin{aligned} \tilde{U}_m(M) &= \tilde{U}_m^{(0)}(M) + \epsilon \tilde{U}_m^{(1)}(M) + \dots + \epsilon^s \tilde{U}_m^{(s)}(M) + \dots \\ \tilde{\Lambda}_m &= \tilde{\Lambda}_m^{(0)} + \epsilon \tilde{\Lambda}_m^{(1)} + \dots + \epsilon^s \tilde{\Lambda}_m^{(s)} + \dots \end{aligned}$$

On montre que l'on a pour tout ordre s :

$$a(\tilde{U}_m^{(s)}, V) - \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \langle \tilde{U}_m^{(s)}, V \rangle = \sum_{l=1}^{l=s} \tilde{\Lambda}_m^{(l)} \langle \tilde{U}_m^{(s-l)}, V \rangle - \sum_{l=0}^{l=s-1} \tilde{\Lambda}_m^{(l)} \beta_{\omega}(\tilde{U}_m^{(s-l-1)}, V).$$

On obtient à l'ordre 0 l'équation des modes et valeurs propres dans le vide $a(\tilde{U}_m^{(0)}, V) - \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \langle \tilde{U}_m^{(0)}, V \rangle = 0$.

À l'ordre 1, on obtient $a(\tilde{U}_m^{(1)}, V) - \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \langle \tilde{U}_m^{(1)}, V \rangle = \tilde{\Lambda}_m^{(1)} \langle \tilde{U}_m^{(0)}, V \rangle - \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \Gamma_{\omega}(\tilde{U}_m^{(0)}, V)$. Pour qu'une solution de cette équation existe, le second membre doit satisfaire la condition de solvabilité $\tilde{\Lambda}_m^{(1)} \langle \tilde{U}_m^{(0)}, \tilde{U}_m^{(0)*} \rangle - \tilde{\Lambda}_m^{(0)} \beta_{\omega}(\tilde{U}_m^{(0)}, \tilde{U}_m^{(0)*}) = 0$. Si les modes propres $\tilde{U}_m^{(0)}(M)$ de la structure dans le vide sont normalisés, alors, il est facile d'obtenir $\tilde{\Lambda}_m^{(1)} = \beta_{\omega}^{mm} \tilde{\Lambda}_m^{(0)}$, où il a été noté pour alléger l'écriture $\beta_{\omega}^{mn} = \beta_{\omega}(\tilde{U}_m^{(0)}, \tilde{U}_n^{(0)*})$. On développe $\tilde{U}_m^{(1)}(M)$ en série de modes à l'ordre 0 $\tilde{U}_m^{(1)}(M) = \sum_n \alpha_m^{1n} \tilde{U}_n^{(0)}(M)$. De là, on tire si $j \neq m$ et des pour des valeurs propres simples $\alpha_m^{1j} = \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)} - \tilde{\Lambda}_j^{(0)}} \beta_{\omega}^{mj}$. Pour $m = j$, α_m^{1m} est indéterminé. On le calcule en normant les modes $\langle \tilde{U}_m^{(0)} + \epsilon \tilde{U}_m^{(01)}, \tilde{U}_m^{(0)} + \epsilon \tilde{U}_m^{(1)} \rangle = 1$. On montre alors que $\alpha_m^{1m} = 0$.

La solution à l'ordre s est obtenue de manière similaire en imposant au second membre d'être orthogonal au mode $\tilde{U}_m^{(0)}(M)$:

$$\sum_{l=1}^{l=s} \tilde{\Lambda}_m^{(l)} \langle \tilde{U}_m^{(s-l)}, \tilde{U}_m^{(0)} \rangle = \sum_{l=0}^{l=s-1} \tilde{\Lambda}_m^{(l)} \beta_{\omega}(\tilde{U}_m^{(s-l-1)}, \tilde{U}_m^{(0)}).$$

Alors, on montre que pour tout $s > 1$:

$$\tilde{\Lambda}_m^{(s)} = \sum_{l=0}^{l=s-1} \tilde{\Lambda}_m^{(l)} \beta_{\omega}(\tilde{U}_m^{(s-l-1)}, \tilde{U}_m^{(0)}) - \sum_{l=1}^{l=s-1} \tilde{\Lambda}_m^{(l)} \langle \tilde{U}_m^{(s-l)}, \tilde{U}_m^{(0)} \rangle.$$

Chaque développement à l'ordre s est développé en série des modes à l'ordre zéro $\tilde{U}_m^{(s)}(M) = \sum_n \alpha_m^{sn} \tilde{U}_n^{(0)}(M)$.

On obtient pour $s = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(2)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} &= (\beta_{\omega}^{mm})^2 + \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_{\omega}^{mp}, \\ \alpha_m^{2j} &= \frac{\tilde{\Lambda}_j^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_j^{(0)} - \tilde{\Lambda}_m^{(0)}} \alpha_m^{1j} \beta_{\omega}^{mj} \\ &\quad + \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)} - \tilde{\Lambda}_j^{(0)}} \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_{\omega}^{pj}, j \neq m, \\ \alpha_m^{2m} &= -\frac{1}{2} \sum_{p \neq m} (\alpha_m^{1p})^2. \end{aligned}$$

Pour $s = 3$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(3)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} &= (\beta_{\omega}^{mm})^3 + 2\beta_{\omega}^{mm} \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_{\omega}^{mp} + \sum_{p \neq m} \alpha_m^{2p} \beta_{\omega}^{mp}, \\ \alpha_m^{3j} &= \frac{\tilde{\Lambda}_j^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_j^{(0)} - \tilde{\Lambda}_m^{(0)}} \alpha_m^{1j} \left[(\beta_{\omega}^{mm})^2 + \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_{\omega}^{mp} \right] \\ &\quad + \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)} - \tilde{\Lambda}_j^{(0)}} \left\{ \beta_{\omega}^{mm} \left[\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_{\omega}^{pj} - \alpha_m^{2j} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p \neq m} \alpha_m^{2p} \beta_{\omega}^{pj} \right\}, j \neq m, \end{aligned}$$

$$\alpha_m^{3m} = - \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \alpha_m^{2p}.$$

Pour $s = 4$, on ne présente que les résultats pour les valeurs propres

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(4)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} &= (\beta_\omega^{mm})^4 + 3(\beta_\omega^{mm})^2 \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp} \\ &+ 2\beta_\omega^{mm} \sum_{p \neq m} \alpha_m^{2p} \beta_\omega^{mp} + \sum_{p \neq m} \alpha_m^{3p} \beta_\omega^{mp} \\ &+ \left(\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp} \right)^2 - \alpha_m^{2m} \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp}, \end{aligned}$$

Calculons le développement à l'ordre 4. On a :

$$\frac{\tilde{\Lambda}_m}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} = 1 + \sum_{s=1}^{s=4} \epsilon^s \frac{\tilde{\Lambda}_m^{(s)}}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} + \dots + \dots. \quad (3)$$

On réordonne les termes et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Lambda}_m}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} &= [1 + \epsilon \beta_\omega^{mm} + \epsilon^2 (\beta_\omega^{mm})^2 + \epsilon^3 (\beta_\omega^{mm})^3 \\ &+ \epsilon^4 (\beta_\omega^{mm})^4 + \dots] \\ &+ \epsilon^2 \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp} [1 + 2\epsilon \beta_\omega^{mm} + 3\epsilon^2 (\beta_\omega^{mm})^2 + \dots] \\ &+ \epsilon^3 \sum_{p \neq m} \alpha_m^{2p} \beta_\omega^{mp} [1 + 2\epsilon \beta_\omega^{mm} + \dots] \\ &+ \epsilon^4 \left\{ \sum_{p \neq m} \alpha_m^{3p} \beta_\omega^{mp} + \left(\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha_m^{2m} \sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Pour $\epsilon \beta_\omega^{mm} < 1$, on reconnaît les développements du $1/(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})$ et de ses puissances successives. En identifiant les développements avec les fonctions originelles, on a finalement le développement optimal :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\Lambda}_m}{\tilde{\Lambda}_m^{(0)}} &= \frac{1}{(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})} \\ &+ \epsilon^2 \frac{\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp}}{(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})^2} + \epsilon^3 \frac{\sum_{p \neq m} \alpha_m^{2p} \beta_\omega^{mp}}{(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})^2} \\ &+ \epsilon^4 \left\{ \frac{\sum_{p \neq m} \alpha_m^{3p} \beta_\omega^{mp}}{(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})^2} + \frac{\left(\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp} \right)^2}{(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})^3} \right. \\ &\quad \left. - \alpha_m^{2m} \frac{\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp}}{(1 - \epsilon \beta_\omega^{mm})^2} \right\} + \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Dans quelques cas particuliers, cette méthode conduit à des résultats exacts et peut être vue comme un prolongement analytique. En outre, ce résultat montre que la vraie condition de convergence n'est pas simplement $\epsilon < 1$ mais $\epsilon \beta_\omega^{mm} < 1$. Ceci rend l'analyse numérique presque impossible puisque la convergence de la série non seulement dépend de la fréquence mais en plus est différente pour chaque mode.

3 Exemple numérique

On présente ici un exemple de comparaison entre le calcul des résonances par la formule (4) tronquée à l'ordre un et par une approximation numérique des équations exactes pour un plaque rectangulaire $x \in]0, a[\times y \in]0, b[$. La résolution des équations exactes est basée sur une méthode de collocation-Chebyshev pour approcher les équations intégrales associées au problème [5]. Grossièrement, les deux inconnues du problème (déplacement et pression surfacique) sont les solutions de deux équations intégrales couplées. Ces fonctions sont approchées par des séries de polynômes orthogonaux de Chebyshev de première espèce. Une méthode de collocation-Galerkin conduit à la résolution d'un système linéaire d'équations simultanées à matrice pleine dont les coefficients complexes dépendent de la fréquence. Les zéros complexes du déterminant associé sont les fréquences de résonance et sont calculés par une méthode de Newton-Raphson.

Remarquons tout d'abord que l'indice des modes mn est double. Le spectre de résonance est calculé en résolvant pour chaque mode mn l'équation (2): $\hat{\omega}_{mn}^2 = \tilde{\omega}_{mn}^2(\hat{\omega}_{mn}) = \tilde{\Lambda}_{mn}(\hat{\omega}_{mn})/\rho_p h$, avec $\tilde{\Lambda}_{mn}(\omega) = \tilde{\Lambda}_{mn}^{(0)}/(1 - \epsilon \beta_\omega^{mnmn})$. On montre que deux pulsations satisfont cette relation $\hat{\omega}_{mn}$ et $-\hat{\omega}_{mn}^*$. Ces fréquences sont estimées en utilisant la relation (3) tronquée à l'ordre souhaité.

Les résultats obtenus par l'approximation optimale à l'ordre un $\tilde{\Lambda}_{mn} = \tilde{\Lambda}_{mn}^{(0)}/(1 - \epsilon \beta_\omega^{mnmn})$ pour une plaque en aluminium dans l'air sont d'une telle précision qu'il est difficile de les distinguer de la solution exacte. Afin de tester la validité de l'approximation, il est présenté l'évolution de la fréquence de résonance du mode ($m = 1, n = 1$) pour la figure 1 et du mode ($m = 1, n = 3$) pour la figure 2 pour une plaque en acier de $1m \times 0.7m$ au contact d'eau lorsque son épaisseur varie de 0,5cm à 20cm pour le mode ($m = 1, n = 1$) et à 10 cm pour le mode ($m = 1, n = 3$) (ce qui correspond à un "petit" paramètre ϵ qui varie entre 1 et 20). On remarque immédiatement sur les courbes que les résultats donnés par l'approximation optimale à l'ordre un sont d'une très grande précision et ce pour un temps de calcul sans commune mesure. On a un rapport 1000 en faveur de la méthode de perturbation pour les exemples présentés ici, mais en plus, pour des modes d'ordre élevé, le calcul de la solution exacte n'est pas envisageable du fait de l'encombrement mémoire.

Les résultats obtenus pour le mode ($m = 1, n = 3$) sont surprenants. Sur la figure 2, on observe deux courbes disjointes. La première issue de l'origine (quand l'épaisseur de la plaque tend vers zéro) est la branche inférieure (notée "lo" sur la courbe) et la seconde est la branche supérieure (notée "up" sur la courbe). Dans le cas traité ici, excepté pour les premiers modes ($m = 1, n = 1$), ($m = 2, n = 1$) et ($m = 1, n = 2$), tous les modes présentent ce phénomène. A priori, ce phénomène typiquement non linéaire, ne devrait pas apparaître puisqu'il n'a pas été introduit de non-linéarités comme celles listées dans [7], à savoir non-linéarité structurelle,

non-linéarité de propagation ou non-linéarité d'interface. Le phénomène observé ici a un lien très étroit avec le concept de mode non-linéaire en fréquence [2] pour lequel la non linéarité dépend des paramètres temporels plutôt que des paramètres géométriques (comme ceux qui apparaissent dans les milieux poreux). Cette non linéarité fréquentielle est lié à des problèmes qui s'écrivent sous la forme $\mathcal{M}(\omega)u = f$ où u est l'inconnue, f le terme source et $\mathcal{M}(\omega)$ est un opérateur qui dépend non linéairement de la fréquence comme il en apparaît dans les milieux poreux ou dans le cas de la vibroacoustique pour lequel le couplage dépend non linéairement de la fréquence. Bien évidemment, lorsque le couplage est faible (par exemple dans l'air), ce phénomène n'est pas mis en évidence.

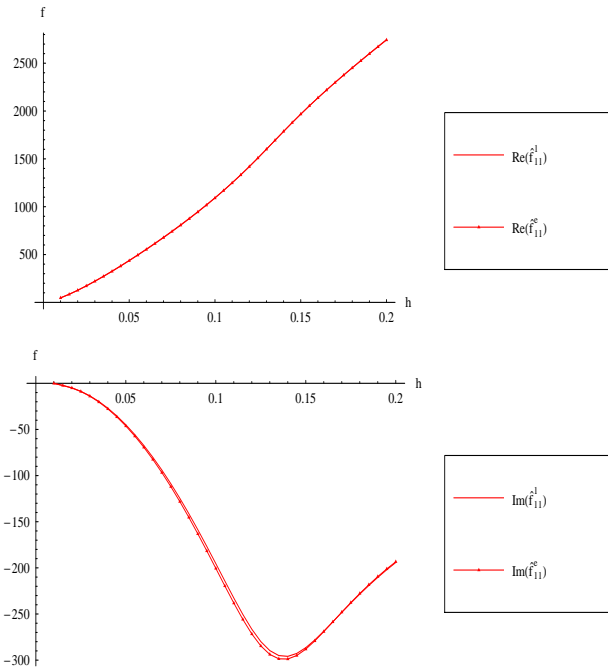


Figure 1: plaque en acier de $1m \times 0.7m$ dans l'eau. Variation avec l'épaisseur des parties réelle (haut) et imaginaire (bas) de la fréquence de résonance pour le mode ($m = 1, n = 1$). Comparaison entre les calculs exact et approché.

4 Conclusion

Le point principal qui émerge de cette étude est la remarquable efficacité de l'approximation optimale à l'ordre un. Une modification triviale des équations de perturbation permet d'obtenir des résultats d'une très grande précision. Au moins pour le cas présenté ici (plaque rectangulaire), il semble qu'il soit possible de prendre en compte le couplage (masse et amortissement ajoutés) d'une manière très simple avec une précision largement suffisante pour l'acousticien et pour un surcoût de calcul négligeable. Bien évidemment, cette méthode nécessite de connaître la fonction de Green associée, comme dans les cas particulier de structures bafflées. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut se contenter par exemple d'une approximation basée sur l'intégrale de Rayleigh, mais cela reste à confirmer. De nombreux points restent à étudier comme le fait de négliger le couplage intermodal

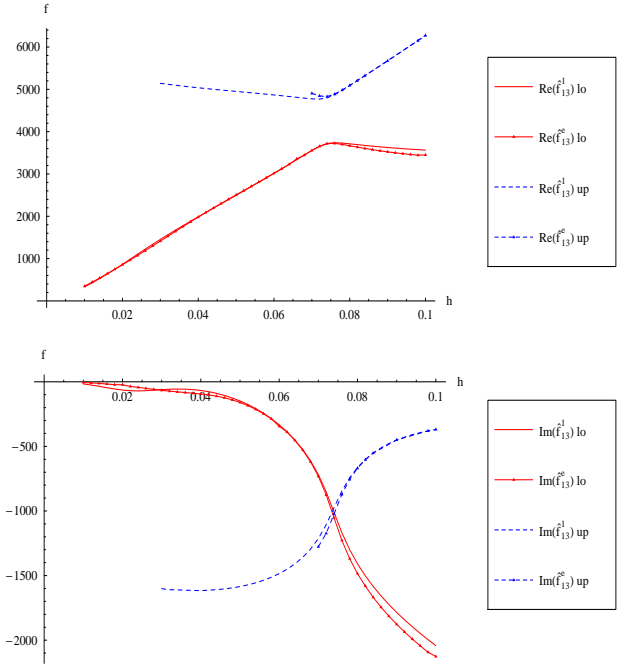


Figure 2: plaque en acier de $1m \times 0.7m$ dans l'eau. Variation avec l'épaisseur des parties réelle (haut) et imaginaire (bas) de la fréquence de résonance pour le mode ($m = 1, n = 3$). Comparaison entre les calculs exact et approché.

$\sum_{p \neq m} \alpha_m^{1p} \beta_\omega^{mp}$, comme la prise en compte de géométries différentes. Il est enfin nécessaire de mieux comprendre ces phénomènes de non-linéarité fréquentielle.

References

- [1] C.J. CHAPMAN and S.V. SOROKIN, 2005. *Journal of Sound and Vibration*. **281**: 719-741. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid-loading.
- [2] O. DAZEL, C.-H. LAMARQUE and O. F. SGARD 2004. *Proc. Euromech 457, S. Bellizzi et al (Eds) Press of the ENTPE, Lyon*. 65-68. Frequency non-linear modes.
- [3] P.J.T. FILIPPI, D. HABAUT, P.-O. MATTEI and C. MAURY, 2001. *Journal of Sound and Vibration, Phil Doak 80th Birthday Issue*, **239**(4):639-663. The role of the resonance modes in the response of a fluid-loaded structure.
- [4] R.A. MANGIAROTTY, 1963. *Journal of the Acoustical Society of America*. **35**(3): 369-377. Acoustic Radiation Damping of Vibrating Structure.
- [5] P.-O. MATTEI, 1996. *Journal of Sound and Vibration*. **196**(4): 407-427. A two-dimensional Tchebycheff collocation method for the study of the vibration of a baffled fluid-loaded rectangular plate.
- [6] A. H. NAYFEH, 1993. *Introduction to Perturbation Techniques*. John Wiley & Sons, Inc, New-York.
- [7] S.V. SOROKIN and S. G. KADYROV, 1999. *Journal of Sound and Vibration*. **222**(3): 425-4514. Modelling of non-linear oscillations of elastic structures in heavy loading conditions.