



**HAL**  
open science

## Réduction d'un modèle physique de cuivre pour la synthèse sonore : approche par modes propres orthogonaux (Proper Orthogonal Decomposition)

Sergio Bellizzi, Kerem Ege, Christophe Vergez

► **To cite this version:**

Sergio Bellizzi, Kerem Ege, Christophe Vergez. Réduction d'un modèle physique de cuivre pour la synthèse sonore : approche par modes propres orthogonaux (Proper Orthogonal Decomposition). 8ème Congrès Français d'Acoustique, CFA 2006, Apr 2006, Tours, France. pp.869-872. hal-00093621

**HAL Id: hal-00093621**

**<https://hal.science/hal-00093621v1>**

Submitted on 28 Oct 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Réduction d'un modèle physique d'un cuivre pour la synthèse sonore : approche par modes propres orthogonaux (Proper Orthogonal Decomposition)

Sergio Bellizzi<sup>1</sup>, Kerem Ege<sup>2</sup>, Christophe Vergez<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique et Acoustique, CNRS, 13402 Marseille Cedex 20, France, courriel : bellizzi,vergez@lma.cnrs-mrs.fr

<sup>2</sup> École Généraliste d'Ingénieurs de Marseille, France, courriel : kerem.ege@egim-mrs.fr

## Résumé

La réduction de modèle, abordée selon l'approche de la décomposition en modes propres orthogonaux (POD) est appliquée à un modèle de cuivre. A partir d'un champ de référence produit par le modèle, on calcule une famille de fonctions orthogonales reproduisant de façon optimale, au sens de l'erreur quadratique moyenne, ce champ.

## Introduction

Ce travail s'inscrit dans le contexte de la modélisation des instruments à vent à des fins de synthèse sonore. La résolution des équations du modèle par projection modale est maintenant bien connue: les équations sont résolues après projection sur les modes spatiaux de la colonne d'air contenue dans l'instrument. La prise en compte de nombreux modes peut cependant s'avérer nécessaire, conduisant à un coût de calcul élevé pénalisant dans le cadre de la synthèse sonore en temps réel.

La réduction de modèle est abordée selon l'approche des modes propres orthogonaux (POM : Proper Orthogonal Mode). Cette technique permet, pour un champ de pression de référence, de déterminer une famille de fonctions orthogonales (POM) reproduisant de façon optimale (au sens de l'erreur quadratique moyenne) ce champ. L'article est découpé en trois sections : dans les deux premières sont rappelés les équations du modèle et les principes de la POD (Proper Orthogonal Decomposition), puis l'analyse des POMs obtenus à partir du modèle de cuivre est présentée dans la dernière.

## Modèles d'instruments cuivrés

La production d'un son de cuivre correspond à une auto-oscillation du système dynamique constitué des lèvres de l'instrumentiste et de la colonne d'air contenue dans l'instrument. En pratique, en expirant, l'instrumentiste déstabilise les lèvres qui jouent le rôle de valve modulant le débit d'air. La réponse acoustique de l'instrument s'interprète comme une boucle de rétroaction influençant en retour la dynamique de la valve. On considère dans cet article un modèle très simple de cuivre avec résonateur cylindrique. Les équations sont adimensionnées selon la démarche utilisée pour les instruments à anche par [4].

**Les lèvres** Les lèvres sont assimilées à un système à un degré de liberté dont la dynamique est décrite par :

$$\ddot{z}(t) + g_l \dot{z}(t) + \omega_l^2 z(t) = -\omega_l^2 \bar{p} \quad \text{avec} \quad (1)$$

- $z(t) = \frac{y(t)}{y_0} - \gamma$  la distance adimensionnée entre les deux lèvres, définie à partir de cette même quantité

dimensionnée  $y(t)$  et de sa valeur au repos  $y_0$ , et de la pression dans la bouche  $\gamma$  adimensionnée par la pression  $p_M = k_l y_0 / S_{eff}$  ( $k_l$  raideur des lèvres,  $S_{eff}$  surface des lèvres soumise aux forces de pression).

- $\omega_l$  et  $g_l$  la pulsation propre et l'amortissement des lèvres,  $\bar{p}$  la pression aux lèvres divisée par  $p_M$

**L'écoulement d'air entre les lèvres** Un jet est supposé se créer en sortie des lèvres, et la dissipation turbulente de son énergie cinétique dans l'embouchure est considérée totale et sans récupération de pression ([3]). Avec quelques hypothèses supplémentaires (conservation de la masse, vitesse de l'écoulement dans la bouche négligeable face à la vitesse du jet), on peut alors écrire (d'après [4]):

$$\bar{v} = \zeta(1 + z + \gamma) \text{sign}(\gamma - \bar{p}) \sqrt{|\gamma - \bar{p}|} \quad (2)$$

où le débit adimensionné  $\bar{v} = Z_c \nu / p_M$  ( $Z_c$  l'impédance caractéristique de l'instrument) et où le paramètre  $\zeta = Z_c l y_0 \sqrt{2/(\rho p_M)}$  caractérise l'embouchure avec  $l$  la largeur des lèvres et  $\rho$  la densité de l'air.

Lorsque les lèvres sont fermées, *i.e.*  $1 + z + \gamma < 0$ , le début est nul ( $\bar{v} = 0$ ), et le contact entre les deux lèvres est pris en compte par une raideur supplémentaire.

**L'acoustique du résonateur** La pression dans le jet (avant mélange turbulent) est supposée égale à la pression acoustique à l'entrée de l'instrument :  $\bar{p}(t) = p(0, t)$ . Le champ de pression adimensionné  $p(x, t)$  dans la colonne d'air est obtenu par sommation modale :

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) u_n(t) \quad (3)$$

où la famille  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  constitue une base de modes propres orthogonaux de la colonne d'air. Dans le cas d'un résonateur cylindrique fermé/ouvert,  $f_n(x) = \cos k_n(x)$ , avec  $k_n = \frac{n\pi}{2L}$  où  $n$  est un entier impair strictement positif et  $L$  la longueur du résonateur.

Les coordonnées modales  $u_n$  sont calculées par projection sur la base modale  $\{f_n\}$  de l'équation des ondes dans l'instrument avec terme source (rendant compte de l'injection de débit donnée par l'équation (2), cf. [5]). On obtient un système d'équations formé par les  $N$  équations<sup>1</sup> différentielles du second ordre en  $u_n$  :

$$\ddot{u}_n(t) + 2\alpha_n c \dot{u}_n(t) + (\omega_n^2 - \alpha_n^2 c^2) u_n(t) = \frac{2c}{L} \dot{v}(t) \quad (4)$$

où  $\omega_n$  est la pulsation de résonance et  $\alpha_n$  le coefficient d'atténuation pour le mode  $n$  considéré.

<sup>1</sup>En pratique en effet, la sommation (3) est tronquée à  $N$  modes.

**Modèle complet** Le modèle de cuivre est finalement constitué des équations (1), (2), (4) (puis (3) si on désire le champ spatial) qui sont résolues<sup>2</sup> numériquement sous Matlab. Dans ce modèle adimensionné, les paramètres liés au jeu de l'instrumentiste sont  $\gamma, \zeta, \omega_l, g_l, L$ .

## POD et réduction de modèle

La POD (Proper Orthogonal Decomposition) est une technique d'analyse de données multidimensionnelle pour extraire une structure cohérente (optimale en terme d'énergie) à partir de la donnée d'une série temporelle [1]. Plus généralement, ses fondements mathématiques reposent sur l'existence de bases orthogonales optimales de décomposition dans les espaces de Hilbert [6]. Appliquée au domaine des vibrations [2], elle permet de décomposer un champ vibratoire discret,  $U$ , de dimension  $N$  défini sur  $[0, T]$  sous la forme (séparation des variables):

$$U(t) = \sum_{k=1}^N \phi_k q_k(t) \quad (5)$$

où les  $\phi_k \in \mathbb{R}^N$  et les  $q_k$  sont des fonctions (ou composantes) réelles définies sur  $[0, T]$  tels que :

- $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$  constituent une base orthonormale de  $\mathbb{R}^N$  (c'est-à-dire  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$  où  $\langle \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien définissant la norme  $\|\cdot\|$ ).
- $q_k(t) = \langle \phi_k, U(t) \rangle$  avec  $\int_0^T q_i(t) q_j(t) dt = \lambda_i \delta_{ij}$ ;
- $\int_0^T \|U(t)\|^2 dt = \sum_{k=1}^N \lambda_k$ .

Comme détaillé dans [1], on peut montrer que les scalaires  $\lambda_k$  et les vecteurs  $\phi_k$  sont solution du problème aux valeurs propres :

$$R_U \phi_k = \lambda_k \phi_k \text{ où } R_U = \int_0^T U(t) U(t)^T dt.$$

La matrice,  $N \times N$ , de corrélation,  $R_U$ , étant symétrique positive, les valeurs propres sont réelles et positives et nous les supposons toujours classées par ordre décroissant:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ .

Les vecteurs  $\phi_k$  sont appelés les POMs (Proper Orthogonal Modes) ou modes POMs et les  $\lambda_k$  les POVs (Proper Orthogonal Values) associées.

La décomposition (5) satisfait la relation d'optimalité suivante: pour tout  $N_r$  tel que  $1 \leq N_r \leq N$ , la famille  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{N_r}$  vérifie

$$\int_0^T \left\| U(t) - \sum_{k=1}^{N_r} \phi_k q_k(t) \right\|^2 dt \leq \int_0^T \left\| U(t) - \sum_{k=1}^{N_r} \hat{\phi}_k \hat{q}_k(t) \right\|^2 dt \quad (6)$$

pour toutes familles  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_{N_r}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^N$ . On a alors la relation:

$$\int_0^T \left\| U(t) - \sum_{k=1}^{N_r} \phi_k q_k(t) \right\|^2 dt = \sum_{k=N_r+1}^N \lambda_k \quad (7)$$

<sup>2</sup>Les auteurs tiennent à remercier Fabrice Silva, qui nous a fourni des codes Matlab qu'il nous a suffi d'adapter.

Cette dernière relation fournit l'erreur de troncature associée à la projection sur la famille réduite constituée des  $N_r$  premiers POMs  $(\phi_1, \dots, \phi_{N_r})$  et le rapport :

$$\epsilon_{N_r} = \frac{\sum_{k=1}^{N_r} \lambda_k}{\sum_{k=1}^N \lambda_k}, \quad (8)$$

fournit le pourcentage de la norme quadratique du champ apporté par la projection sur la famille réduite.

En pratique, la POD est calculée à partir d'une trajectoire discrétisée du champ vibratoire  $U$  composée de  $M$  pas de temps  $(t_1, t_2, \dots, t_M)$  et la matrice de corrélation est calculée en prenant en compte la valeur moyenne de  $U$ ,  $\bar{U} = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M U(t_l)$ ,

$$C_U = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M (U(t_l) - \bar{U})(U(t_l) - \bar{U})^T = \frac{1}{M} \mathbf{U} \mathbf{U}^T$$

où  $\mathbf{U}$  est la matrice  $N \times M$  définie par

$$\mathbf{U} = [U(t_1) - \bar{U}, U(t_2) - \bar{U}, \dots, U(t_M) - \bar{U}]$$

Les POMs (et les POVs) solutions du problème aux valeurs propres  $C_U \phi_k = \lambda_k \phi_k$  et normalisés selon  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij}$  fournissent une décomposition optimale du champ (discret)  $\mathbf{U}$  sous la forme

$$U(t_l) = \bar{U} + \sum_{k=1}^N \phi_k q_k(t_l) \quad \forall t_l \in [t_1 \dots t_M] \quad (9)$$

où les  $q_k(t_l)$  définis par  $q_k(t_l) = \langle \phi_k, U(t_l) - \bar{U} \rangle$ , vérifient la propriété d'orthogonalité  $\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M q_i(t_l) q_j(t_l) = \lambda_i \delta_{ij}$ .

La méthode POM peut aussi être appliquée à des champs continus; par exemple, pour un champ scalaire  $u$  défini sur  $[0, L] \times [0, T]$ , la décomposition optimale

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) q_k(t) \quad (10)$$

est définie par les fonctions propres,  $\varphi_k$ , solution du problème aux valeurs propres

$$\int_0^L R_u(x, x') \varphi_k(x') dx' = \lambda_k \varphi_k(x)$$

où  $R_u$  est la fonction de corrélation spatiale définie par

$$R_u(x, x') = \int_0^T u(x, t) u(x', t) dt.$$

Les relations d'orthogonalité des fonctions  $\varphi_k$  et la relation d'optimalité sont vérifiées avec la norme associée au produit scalaire de  $L^2([0, L])$ .

## Applications

**Choix du champ de référence:** Les applications présentées dans cette section ont été réalisées à partir d'un champ de pression  $p(x, t)$  appelé dans la suite *champ de référence* et calculé à partir des équations (1), (2), (4) puis (3) avec les valeurs de paramètres

suivantes :  $\zeta = 0.45$ ,  $g_l = 20$ ,  $w_l = 821.84 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $L = 0.65\text{m}$ . L'évolution de  $\gamma$  est constituée d'un transitoire d'attaque de  $10^{-2}\text{s}$  suivi d'un plateau de niveau  $\gamma_m = 0.45$  de  $3.10^{-1}\text{s}$  et se termine par un transitoire d'extinction de  $10^{-1}\text{s}$ . La fréquence d'échantillonnage est  $Fe = 44100\text{Hz}$ , le nombre de modes retenu  $N = 8$ .

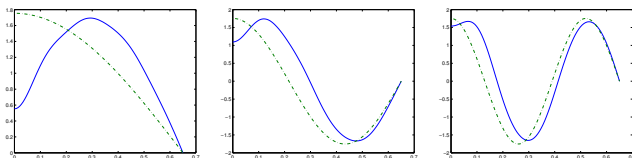
**Equivalence POM continu/discret :** Le champ à partir duquel sont estimés les POMs peut être indifféremment discret (cf. équation (5)) ou continu (cf. équation (10)). En particulier, l'analyse POD du champ de pression acoustique  $p(x, t)$  (équation (3)) peut être reliée à l'analyse POD du champ discret  $U(t) = [u_1(t) \dots u_N(t)]'$ . En effet il est facile de vérifier que les POMs, notées ici  $\varphi_k$ , associées au champ  $p$  sont reliées aux POMs, notées ici  $\phi_k$  du champ  $U$  par

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x) (\phi_k)_i \quad (11)$$

où  $(\phi_k)_i$  représente la  $i$ -ème composante du vecteur  $\phi_k$ . Cette relation repose essentiellement sur la propriété d'orthogonalité des fonctions  $f_i$  définissant le modèle de l'instrument. Dans la suite de ce paragraphe nous utiliserons l'une ou l'autre des représentations.

#### Comparaison entre POM et modes du résonateur:

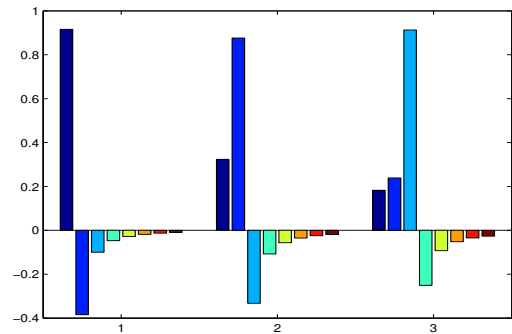
Afin de pouvoir comparer directement les POM spatiaux  $\{\phi_n\}$ , et les modes du résonateur  $\{f_n\}$ , il faut prendre en compte les normalisations de chaque famille de mode. Pour la famille  $\{f_n\}$ , on a  $\langle f_i, f_i \rangle = L/2$ . Or, les POMs vérifient par construction  $\langle \phi_i, \phi_i \rangle = 1$ . Ainsi, en Figure 1 sont comparés les premiers  $f_n$  (multipliés par  $\sqrt{2/L}$ ) et  $\phi_n$ . Les différences sont manifestes, d'autant plus que



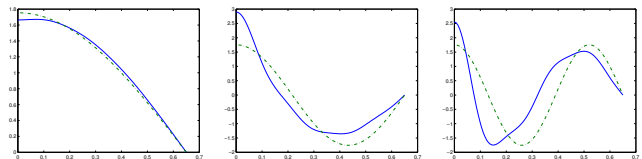
**Figure 1:** Comparaison successive des trois premiers POM spatiaux  $\phi_n$  (trait plein) et des trois premiers modes  $f_n$  du résonateur cylindrique (trait pointillé)

l'on se rapproche des lèvres.

On peut aussi comparer les POM discrets aux vecteurs de la base canonique afin de mettre en évidence que chaque POM traduit un couplage entre plusieurs  $f_n$ . Ceci est fait en Figure 2. Pour des valeurs de paramètres qui ne favorisent pas le couplage entre modes, les POMs spatiaux  $\phi_n$  tendent vers les modes du résonateur  $f_n$ . Ainsi pour un fort amortissement aux lèvres ( $g_l = 150$ ) pour lequel le modèle, bien que présentant toujours une solution auto-oscillante, est proche du seuil d'oscillation, les  $\phi_n$  et les  $f_n$  sont comparés en Figure 3. Au delà de  $n = 1$  les  $\phi_n$  et les  $f_n$  apparaissent certes différents, mais le pourcentage de la norme quadratique du champ apporté par  $\phi_1$  est de 99.58%. Aussi les modes supérieures ne sont-ils pas significatifs et leur détermination peut même être entachée d'erreurs numériques.

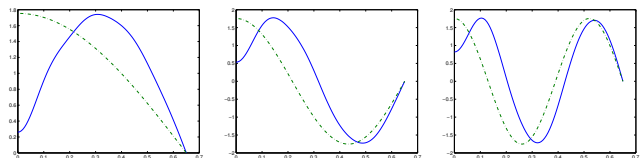


**Figure 2:** Décomposition des trois premiers POMs discrets sur la base canonique, permettant d'évaluer le couplage entre modes du résonateur pris en compte par chaque POM



**Figure 3:** Comparaison successive des trois premiers POM spatiaux  $\phi_n$  (trait plein) et des trois premiers modes  $f_n$  du résonateur (trait pointillé). Par rapport au champ de référence,  $g_l = 150$

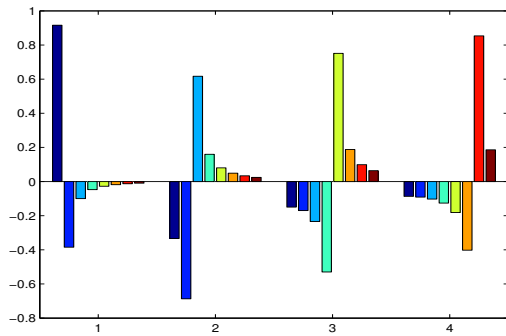
Au contraire, loin du seuil, les  $\phi_n$  et les  $f_n$  sont très différents (cf. Figure 4 pour  $\gamma_m = 2$  et  $\zeta = 2$  par rapport au champ de référence).



**Figure 4:** Comparaison successive des trois premiers POM spatiaux  $\phi_n$  (trait plein) et des trois premiers modes  $f_n$  du résonateur (trait pointillé). Par rapport au champ de référence,  $\gamma_m = 2$ ,  $\zeta = 2$

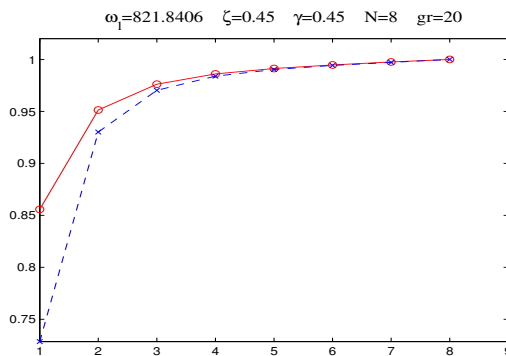
On peut également s'intéresser à l'évolution du premier POM pour les différents régimes du modèle de cuivre (synchronisation avec les différents modes du résonateur). Il apparaît sur la figure 5 que pour les différents régimes (obtenus en modifiant la valeur de la fréquence de résonance des lèvres  $\omega_l$ ), le premier POM (le plus énergétique) est toujours celui qui correspond le plus au mode du résonateur principalement impliqué dans l'auto-oscillation. Ainsi, lorsque  $\omega_l = 7\omega_1$  (cas le plus à droite sur la figure 5), c'est la septième coordonnée du premier POM discret qui est la plus énergétique.

**Reconstruction signal :** La quantité  $\epsilon_{N_r}$  définie par l'équation (8) permet d'évaluer le pourcentage de la norme quadratique du champ apporté par la projection sur la famille réduite (nombre de POMs pris en compte  $N_r < N$ ). Ce pourcentage est présenté en Figure 6 et est



**Figure 5:** Décomposition du premier POM discret sur la base canonique lorsque la pulsation de résonance des lèvres vaut successivement  $\omega_l = \omega_1, \omega_l = 3\omega_1, \omega_l = 5\omega_1, \omega_l = 7\omega_1$

comparé à la même quantité en utilisant la famille réduite des modes  $f_n$ . On peut remarquer que la projection sur



**Figure 6:** Pourcentage de la norme quadratique du champ apporté par la projection sur la famille réduite de modes ( $\phi_n$  en trait plein et  $\times$ ,  $f_n$  en trait pointillé et  $\times$ )

un seul POM apporte déjà 86% de l'énergie, contre 72% pour une projection sur un seul mode du résonateur. De même l'optimalité de la POD est clairement illustrée : pour atteindre un pourcentage d'énergie donné, il faut moins de modes  $\phi_n$  que de modes  $f_n$ .

La reconstruction approchée  $\tilde{U}_1(t)$  de la première composante  $U_1(t)$  du champ de référence avec le POM le plus énergétique est présentée en Figure 7. Pour cela on calcule

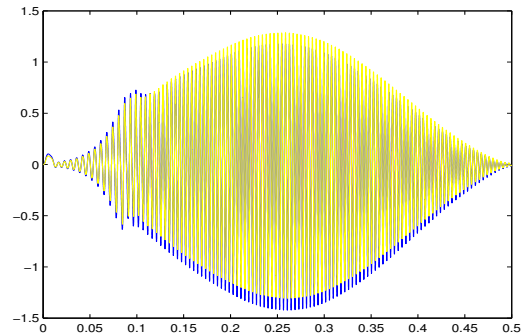
$$\tilde{U}_1(t) = \phi_1(1)q_1(t) \text{ avec } q_1(t) = \langle \phi_1, U(t) \rangle \quad (12)$$

Les courbes sont très proches. Des différences apparaissent lors de la reconstruction des autres composantes de  $U$ , mais ces composantes sont moins énergétiques.

## Conclusion

Nous avons illustré dans cet article l'intérêt de la POD comme outil d'analyse du fonctionnement d'un modèle physique. Il apparaît que :

- le premier POM (le plus énergétique) correspond toujours au mode du résonateur principalement impliqué dans l'auto-oscillation.



**Figure 7:** Comparaison entre la première composante  $U_1(t)$  du champ de référence discret  $U(t)$  et sa reconstruction approchée avec un unique POM  $\tilde{U}_1(t)$  (d'après (12))

- au fur et à mesure que l'on s'écarte du seuil d'oscillation, la forme du premier POM passe progressivement du mode du résonateur (fermé/ouvert) à un mode s'approchant de celui d'un résonateur ouvert/ouvert. Cela est sans doute à mettre en relation avec le débit de plus en plus grand injecté à l'entrée du résonateur.

La projection des équations du modèle sur une famille réduite de POMs constituera la prochaine étape de ce travail. Les premiers résultats révèlent que le seuil d'oscillation n'est pas préservé : un modèle réduit utilisant des POMs déterminés à partir d'un champ auto-oscillant ne présente pas systématiquement d'auto-oscillation pour des valeurs de paramètres identiques.

**Remerciements** ce travail s'inscrit dans le cadre du projet CONSONNES soutenu par l'Agence Nationale de la Recherche.

## References

- [1] L. Sirovitch, Turbulence and the dynamics of coherent structures, Part I: coherent structures. *Quarterly of Applied Mathematics* **45(3)** (1987), 561-571
- [2] G. Kerschen, J.C. Golinval, A. Vakakis, L. Bergman, The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview. *Nonlinear Dynamics* **41** (2005) 141-170.
- [3] A. Hirschberg, Aero-acoustics of wind instruments, *Mechanics of Musical Instruments* (Chap. 7), Springer Verlag, 1995.
- [4] J. Kergomard, Elementary considerations on reed-instrument oscillations, *Mechanics of Musical Instruments* (Chap. 6), Springer Verlag, 1995.
- [5] V. Debut, Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale, thèse (dir. J. Kergomard).
- [6] E. Kreysig, *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons, 1978.