



**HAL**  
open science

# Equations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire

Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Marc Bonnet. Equations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie II, 1994, 318, pp.429-434. hal-00092365

**HAL Id: hal-00092365**

**<https://hal.science/hal-00092365>**

Submitted on 9 Aug 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mécanique des solides/*Mechanics of Solids*

## Équations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire

Marc BONNET

**Résumé** – La formulation variationnelle par équations intégrales de frontière pour l'équilibre d'une fissure en milieu infini tridimensionnel et sous chargement symétrique permet d'exprimer *en termes d'intégrales de frontière* les dérivées première et seconde de l'énergie potentielle élastique par rapport à des extensions du front. Le problème en vitesse d'extension est alors traitable numériquement par éléments finis de frontière. Un exemple numérique est donné.

### A Galerkin boundary integral formulation for the elastostatic crack extension problem

**Abstract** – A Galerkin-type symmetric boundary integral formulation for the equilibrium of a symmetrically loaded crack embedded in a three-dimensional infinite elastic domains leads to expressions in terms of boundary integrals and fields only for the first and second derivatives of the elastic potential energy with respect to a crack front advance. Then the governing problem for the velocity of crack front advance is open to a boundary element numerical solution. A numerical example is given.

**Abridged English Version** – A crack  $\Gamma$  of arbitrary shape, embedded in a three-dimensional infinite isotropic elastic domain  $\Omega$  (shear modulus  $\mu$ , Poisson ratio  $\nu$ ) is symmetrically loaded by tractions  $\pm \mathbf{T}$ . The crack opening displacement  $\phi$  at equilibrium minimizes the elastic potential energy  $E(\psi; \mathbf{T}, \Gamma)$  (1) associated with the system, or equivalently (Nedelec, 1982) solves the Galerkin boundary integral equation (GBIE) [(2)-(3)-(4)]. We consider an incremental crack growth  $\Gamma(t) = \Gamma + \theta t$  induced by a load increment  $\mathbf{T}'$ , where  $t$  is a small time-like parameter and the transformation velocity  $\theta \in \Theta = \{\theta \in C^0(\Gamma) \mid \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \theta \cdot \mathbf{n} = 0\}$  is defined on  $\Gamma$  ("updated-lagrangian" description). Using the usual Griffith criterion (6), stability and the actual growth velocity  $\mu$  are governed by inequality (7) (Nguyen *et al.*, 1989), which involves second derivatives  $P_{,\Gamma\Gamma}$ ,  $P_{,\Gamma\mathbf{T}}$  w.r.t. crack and load increments of the equilibrium value  $P(\mathbf{T}, \Gamma)$  of  $E(\phi; \mathbf{T}, \Gamma)$ .

Expressions for the derivatives  $P_{,\Gamma}$ ,  $P_{,\Gamma\Gamma}$ ,  $P_{,\Gamma\mathbf{T}}$  using  $\Gamma$  as the geometrical support of all governing operators are sought, so that the energy approach for the crack growth is amenable to a boundary-only treatment. This approach relies upon analytical lagrangian differentiation of expression (1) of  $P$  and of the GBIE (2) using formula (5). Thus evaluations of derivatives of  $P$  using finite differences are avoided, all computations being done on the current configuration  $\Gamma$ ; moreover lagrangian differentiation does not increase crack front singularities. Our objective is fulfilled thanks to the following results. Firstly, the time derivative  $\phi'$  with  $\Gamma$  fixed and the material derivative  $\overset{*}{\phi}$  of  $\phi$  under constant loading are respectively governed by GBIEs (10) and (11)-(12). Then, the energy release rate  $G(s)$  solves the variational equation (13), r.h.s. is (minus) the first domain derivative  $P_{,\Gamma}$  of  $P$ . Finally, the second derivatives  $P_{,\Gamma\Gamma}$ ,  $P_{,\Gamma\mathbf{T}}$  are given equations [(15)-(16)-(17)], in which  $\mathcal{V}$  denotes the material derivative associated to the actual velocity  $\mu$  and under constant loading. Moreover, the quadratic  $Q(\theta, \theta)$  (9) which plays a key role in discussing the existence and uniqueness of solution  $\mu$  to (7) for given  $\mathbf{T}'$ , is symmetric. Although stated for simplicity for the isolated crack in infinite space, these results still hold without modification for a bounded elastic solid (external boundary  $S$ ) with multiple

Note présentée par Huy Duong Bui.

cracks  $\Gamma'$  with tractions prescribed everywhere on  $\Gamma = \Gamma' \cup S$ . They may be extended to mixed boundary conditions using the GBIE given in Bonnet (1993).

These results have been numerically implemented for plane cracks of arbitrary shape. For a circular crack of radius  $a$  located in the  $(Oy_1 y_2)$  plane loaded by two symmetrical point-forces  $\pm P e_3$  applied at point  $(0, 0, \pm h)$ , the known analytical expression of  $G(\alpha)$ ,  $\alpha = h/a$  (Tada *et al.*, 1973) shows that the circular growth is stable for  $\alpha < \alpha_m$  ( $\alpha_m = (h/a)_m \approx 2.27589$  for  $\nu = 0.3$ ) and unstable otherwise. Hence  $Q(\theta, \theta)$  has been numerically computed for  $a/h \in [0.4, 0.5]$  with a 0.0005 step and three crack meshes  $\mathcal{M}(8, 2)$ ,  $\mathcal{M}(12, 3)$  and  $\mathcal{M}(16, 5)$  [ $\mathcal{M}(n, p)$  being made of  $p$  rings of  $n$  9-noded quadrilateral elements each]:  $Q$  is a  $2n \times 2n$  symmetric matrix. The numerical values obtained for  $\alpha_m$  (loss of positive-definiteness for  $Q$  for  $\alpha < \alpha_m$ ) indicate that the numerical computation of  $Q$  is very accurate.

INTRODUCTION. — Un milieu infini tridimensionnel  $\Omega$  élastique isotrope rapporté à un repère cartésien orthonormé  $(e_1, e_2, e_3)$  (module de cisaillement  $\mu$ , coefficient de Poisson  $\nu$ ), contient une fissure  $\Gamma$  de lèvres  $\Gamma^\pm$ , chargée symétriquement par des tractions  $\pm \mathbf{T}$ , dans le cadre des petites perturbations; les forces de volume sont nulles. Désignons par  $\mathbf{n}$  (resp.  $\nu$ ) la normale unitaire à  $\Gamma$  orientée de  $\Gamma^-$  vers  $\Gamma^+$  (resp. à  $\partial\Gamma$ , situé dans le plan tangent à  $\Gamma$  et sortant de  $\Gamma$ ). L'ouverture de fissure  $\phi$  (saut à travers  $\Gamma$  du déplacement  $\mathbf{u}$ ) réalisant l'équilibre élastique du système minimise par rapport aux champs d'ouverture admissibles  $\psi$  l'énergie potentielle  $E(\psi; \mathbf{T}, \Gamma)$  :

$$(1) \quad \begin{cases} E(\psi; \mathbf{T}, \Gamma) = \frac{1}{2} B(\psi, \psi) - \langle \psi, \mathbf{T} \rangle_\Gamma \\ \text{avec } \langle \psi, \mathbf{T} \rangle_\Gamma = \int_\Gamma \psi_i(\mathbf{x}) T_i(\mathbf{x}) dS_x \end{cases}$$

et est donc solution du problème :

$$(2) \quad \forall \psi \in \mathcal{V} = \{ \psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3, \psi|_{\partial\Gamma} = \mathbf{0}, B(\psi, \psi) < \infty \}, \quad B(\phi, \psi) = \langle \psi, \mathbf{T} \rangle_\Gamma$$

Nous considérons ici la formulation de (2), due à Nedelec (1982), comme une *équation intégrale variationnelle* : l'énergie de déformation  $(1/2)B(\psi, \psi)$  y est exprimée en termes d'intégrales sur  $\Gamma$  uniquement :

$$(3) \quad B(\psi, \psi) = \int_\Gamma \int_\Gamma B_{ikqs}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) e_{jfq} n_j(\mathbf{x}) \psi_{i,f}(\mathbf{x}) e_{lhs} n_l(\mathbf{y}) \psi_{k,h}(\mathbf{y}) dS_x dS_y$$

$$(4) \quad \begin{cases} B_{ikqs}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = -\frac{\mu}{8\pi} \left( \delta_{pr} \delta_{qs} + \delta_{ps} \delta_{qr} + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{pq} \delta_{rs} \right) e_{iep} e_{kgr} r_{,eg} \\ r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \quad r_{,i} = (y_i - x_i)/r, \quad r_{,ij} = (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j})/r \end{cases}$$

Bui (1977) et Bonnemay (1979) ont donné les équations correspondantes pour une fissure plane.

On envisage une extension de la fissure, induite par un accroissement du chargement, en régime quasi statique. Introduisant un paramètre cinématique  $t$  petit, une perturbation de  $\Gamma$  est représentée par  $\Gamma(t) = \Gamma + \theta t$ ,  $\theta$  étant une « vitesse » initiale astreinte à vérifier la condition  $\theta \in \Theta = \{ \theta \in C^0(\Gamma), \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \theta \cdot \mathbf{n} = 0 \}$ . Toute grandeur dans ce changement

de domaine est suivie de manière lagrangienne actualisée :  $\Gamma$  est considéré comme configuration de référence. Soit  $\overset{*}{f} = f_{,t} + \vec{\nabla} f \cdot \theta$  la dérivée lagrangienne du champ  $f$ , alors la dérivée lagrangienne de l'intégrale de surface  $I(t)$  en  $t = 0$  est donnée par :

$$(5) \quad I(t) = \int_{\Gamma(t)} f dS, \quad \overset{*}{I} = \frac{dI}{dt} = \int_{\Gamma} \left( \overset{*}{f} + f \operatorname{div}_S \theta \right) dS$$

De plus, la singularité en front de fissure de  $\vec{\nabla} \overset{*}{\phi}$  est égale à celle de  $\vec{\nabla} \phi$ ; ce qui motive notre choix, inspirée par la « méthode  $\theta$  » (Mialon, 1988; Suo, 1990).

RAPPEL DE LA FORMULATION ÉNERGÉTIQUE DU PROBLÈME D'EXTENSION. – Supposons que la vitesse d'extension réelle  $\mu \in \Theta$  vérifie en tout point  $s$  du front le critère de propagation :

$$(6) \quad \mu \in \Theta_c = \{ \mu \in \Theta \mid G(s) < G_c \Rightarrow (\mu \cdot \nu)(s) = 0 \\ G(s) = G_c \Rightarrow (\mu \cdot \nu)(s) \geq 0 \}$$

où  $G(s)$  est le taux de restitution d'énergie. Elle est alors régie d'après Nguyen *et al.* (1989) et Pradeilles-Duval (1982) par l'inégalité variationnelle :

$$(7) \quad \mu \in \Theta_c, \quad \forall \theta \in \Theta_c, \quad \Psi_{,\Gamma}(\Gamma, \theta - \mu) \cdot \mu + (\theta - \mu) \cdot (P_{,\Gamma\Gamma} \cdot \mu + P_{,\Gamma T} T') \geq 0,$$

où  $\Psi$  est le potentiel de dissipation par extension du front et  $P(T, \Gamma)$  la valeur de  $E(\phi; T, \Gamma)$  à l'équilibre :

$$(8) \quad \begin{cases} \Psi(\Gamma, \theta) = \int_{\Gamma} G_c(\theta \cdot \nu) ds, & \Psi_{,\Gamma}(\Gamma, \theta) \cdot \mu = - \int_{\Gamma} G_c(\theta \cdot \nu) (\mu \cdot \nu) \frac{ds}{R} \\ P(T, \Gamma) = -\frac{1}{2} \langle \phi, T \rangle_{\Gamma} \end{cases}$$

( $R$  : rayon de courbure algébrique). Le caractère unique et stable de la solution  $\mu$  pour la configuration actuelle est déterminé (Nguyen *et al.*, 1989; Pradeilles-Duval, 1982) par le caractère défini positif pour  $\theta \in \Theta$  de la forme quadratique  $Q(\theta, \theta)$  :

$$(9) \quad Q(\theta, \theta) = \Psi_{,\Gamma}(\Gamma, \theta) \cdot \theta + \theta \cdot P_{,\Gamma\Gamma} \cdot \theta$$

Cette Note se propose principalement de donner des expressions *en termes d'intégrales sur  $\Gamma$  uniquement* des dérivées première  $P_{,\Gamma}$  et secondes  $P_{,\Gamma\Gamma}$ ,  $P_{,\Gamma T}$  à  $t = 0$  de l'énergie potentielle à l'équilibre.

DÉRIVÉES PREMIÈRES DE  $\phi$ . – Notons  $\overset{*}{\cdot}$  la dérivation lagrangienne dans la vitesse d'extension  $\theta$  et à *chargement constant* (soit pour  $\overset{*}{T} = \vec{\nabla} T \cdot \theta$ ),  $(\cdot)'$  la dérivée  $\partial(\cdot)/\partial t$  en l'absence de toute variation du domaine. Les dérivées  $\phi'$  et  $\phi$  sont respectivement gouvernées par les formulations variationnelles :

$$(10) \quad (\forall \psi \in \mathcal{V}) \quad \mathcal{B}(\phi', \psi) = \langle \psi, T' \rangle_{\Gamma}$$

$$(11) \quad (\forall \psi \in \mathcal{V}) \quad \mathcal{B}(\overset{*}{\phi}, \psi) = -\langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, T \rangle_{\Gamma} - \mathcal{D}(\phi, \psi; \theta)$$

$$(12) \quad \mathcal{D}(\phi, \phi; \theta) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} e_{jfq} n_j(\mathbf{x}) \phi_{i,f}(\mathbf{x}) e_{lhs} n_l(\mathbf{y}) \phi_{k,h}(\mathbf{y}) \\ \times \{ [\theta_m(\mathbf{y}) - \theta_m(\mathbf{x})] B_{ikqs,m}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + B_{ikqv}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \theta_{v,s}(\mathbf{y}) \\ + B_{ikvs}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \theta_{v,q}(\mathbf{x}) \} dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}$$

Le résultat [(11)-(12)] est établi par dérivation de l'équation variationnelle (2) dans une extension de fissure de vitesse  $\theta$  au moyen de (5); suivant Mialon (1988), on a posé  $\psi^* = \mathbf{0}$  pour la fonction-test, l'espace  $\mathcal{V}(t)$  associé à  $\Gamma(t)$  pouvant être mis en bijection avec  $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}$  par transport :  $\psi \in \mathcal{V} \rightarrow \psi_t(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} + \theta t) \in \mathcal{V}(t)$ .

DÉRIVÉE PREMIÈRE DE P ET TAUX DE RESTITUTION D'ÉNERGIE. – Premier résultat de ce travail, l'équation variationnelle gouvernant le taux de restitution d'énergie G est :

$$(13) \quad (\forall \theta \in \Theta) \quad \int_{\partial\Gamma} G(s) (\theta \cdot \nu(s)) ds = -\theta \cdot P_{,\Gamma}(\mathbf{T}, \Gamma) \\ = -\langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, \mathbf{T} \rangle_{\Gamma} - \frac{1}{2} \mathcal{D}(\phi, \phi; \theta)$$

Elle est bien exprimée en termes de champs et d'intégrales (simples ou doubles) sur  $\Gamma$  uniquement, ce qui était notre objectif. Pour l'obtenir, on dérive (8) au moyen de (5) :

$$(14) \quad \frac{d}{dt} P(\mathbf{T}, \Gamma) = P_{,\Gamma}(\mathbf{T}, \Gamma) \cdot \theta = \frac{1}{2} [\langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, \mathbf{T} \rangle_{\Gamma} - \langle \dot{\phi}^*, \mathbf{T} \rangle_{\Gamma}]$$

Comme  $\phi \in \mathcal{V}$ ,  $\dot{\phi}^* \in \mathcal{V}$ , on particularise la fonction-test  $\psi$  dans les équations (2) et (11) par  $\psi = \dot{\phi}^*$  et  $\psi = \phi$  respectivement, d'où :

$$\langle \dot{\phi}^*, \mathbf{T} \rangle_{\Gamma} = \mathcal{B}(\phi, \dot{\phi}^*), \quad \mathcal{B}(\dot{\phi}^*, \phi) = -\mathcal{D}(\phi, \phi; \theta) - \langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, \mathbf{T} \rangle_{\Gamma}$$

Le résultat (13) découle alors de la symétrie de  $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ .

DÉRIVÉES SECONDES DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE. – Notant  $\nu$  la dérivation lagrangienne dans la vitesse d'extension  $\mu$  et à *chargement constant*, les dérivées  $\theta \cdot P_{,\Gamma\Gamma}(\mathbf{T}, \Gamma) \cdot \mu$ ,  $\theta \cdot P_{,\Gamma\Gamma}(\mathbf{T}, \Gamma) \mathbf{T}'$  sont données par :

$$(15) \quad \theta \cdot P_{,\Gamma\Gamma}(\mathbf{T}, \Gamma) \mathbf{T}' = \langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, \mathbf{T}' \rangle_{\Gamma} - \langle \dot{\phi}^*, \mathbf{T}' \rangle_{\Gamma}$$

$$(16) \quad \theta \cdot P_{,\Gamma\Gamma}(\mathbf{T}, \Gamma) \cdot \mu = \frac{1}{2} \mathcal{C}(\phi, \phi; \theta, \mu) - \mathcal{B}(\dot{\phi}^*, \dot{\phi}^{\nu}) \\ + \langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, (\mathbf{T} \operatorname{div}_{\mathbf{S}} \mu + \vec{\nabla} \mathbf{T} \cdot \mu) \rangle_{\Gamma} - \langle \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \mu \cdot \theta, \mathbf{T} \rangle_{\Gamma}$$

$$(17) \quad \mathcal{C}(\phi, \phi; \theta, \mu) = - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} e_{jfq} n_j(\mathbf{x}) \phi_{i,f}(\mathbf{x}) e_{lhs} n_l(\mathbf{y}) \phi_{k,h}(\mathbf{y}) \\ \times \{ [\theta_m(\mathbf{y}) - \theta_m(\mathbf{x})] [\mu_n(\mathbf{y}) - \mu_n(\mathbf{x})] B_{ikqs,mn}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ + [\mu_n(\mathbf{y}) - \mu_n(\mathbf{x})] [\theta_{m,s}(\mathbf{y}) B_{ikqm,n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \theta_{m,q}(\mathbf{y}) B_{ikms,n}(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \\ + [\theta_n(\mathbf{y}) - \theta_n(\mathbf{x})] [\mu_{m,s}(\mathbf{y}) B_{ikqm,n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mu_{m,q}(\mathbf{y}) B_{ikms,n}(\mathbf{y} - \mathbf{x})] \\ + B_{ikmn}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\mu_{m,s}(\mathbf{y}) \theta_{n,q}(\mathbf{x}) + \mu_{m,q}(\mathbf{x}) \theta_{n,s}(\mathbf{y})] \} dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}$$

Le résultat [(15)-(16)-(17)] isole les contributions respectives à la variation de  $G$  de l'évolution du front et du changement, et exprime le problème (7) en termes de champs et d'intégrales (simples ou doubles) sur  $\Gamma$  uniquement. Elles mènent à une forme quadratique  $Q(\theta, \theta)$  symétrique. En effet, la symétrie de  $\mathcal{B}(\phi, \psi)$  par rapport à  $\phi, \psi$  entraîne celle de  $\mathcal{B}(\overset{*}{\phi}, \overset{v}{\phi})$  par rapport à  $\theta, \mu$ , celle de  $\mathcal{C}(\phi, \phi; \theta, \mu)$  est apparente dans l'expression (17). La symétrie en  $\theta, \mu$  de l'expression (16) est prouvée dans Bonnet (1993).

L'obtention de (15)-(16)-(17) repose sur la dérivation au moyen de (5) de l'expression (13) dans une vitesse d'extension  $\mu \in \Theta$  et une vitesse de variation du chargement  $T'$ ; on pose  $\overset{v}{\theta} = 0$  en raison du rôle de *fonction-test* joué par  $\theta$  dans l'inéquation variationnelle (7). On a alors :

$$(18) \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, T \rangle_{\Gamma} = \langle [\nabla(\overset{v}{\phi} + \phi') - \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \mu] \cdot \theta, T \rangle_{\Gamma} \\ + \langle \vec{\nabla} \phi \cdot \theta, (\vec{\nabla} T \cdot \mu + T' + T \operatorname{div}_S \mu) \rangle_{\Gamma}$$

$$(19) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{D}(\phi, \phi; \theta) = 2\mathcal{D}(\phi, (\overset{v}{\phi} + \phi'); \theta) + \mathcal{C}(\phi, \phi; \theta, \mu)$$

L'écriture de (11) avec  $\psi = \overset{v}{\phi}$  et le report dans (19) de la relation obtenue donne :

$$(20) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{D}(\phi, \phi; \theta) = -\mathcal{B}(\overset{*}{\phi}, \overset{v}{\phi}) \\ - \langle \vec{\nabla} \overset{v}{\phi} \cdot \theta, T \rangle_{\Gamma} + \frac{1}{2} \mathcal{C}(\phi, \phi; \theta, \mu) + \mathcal{D}(\phi, \phi'; \theta)$$

Ensuite, on remarque en prenant (11) avec  $\psi = \phi'$  puis (10) pour  $\psi = \overset{*}{\phi}$  que :

$$(21) \quad \langle \vec{\nabla} \phi' \cdot \theta, T \rangle_{\Gamma} + \mathcal{D}(\phi, \phi'; \theta) = -\langle \overset{*}{\phi}, T' \rangle_{\Gamma}$$

Enfin on additionne (18), (20) et reporte (21) dans le résultat, ce qui conduit aux expressions (15) et (16).

COMMENTAIRES. — Les équations (11)-(12), (13) et (16)-(15)-(17), principaux résultats de cette Note, permettent avec la formulation (2) de traiter numériquement l'ensemble du problème par éléments finis de frontière. Présentées par commodité pour une fissure en milieu infini, elles s'étendent sans modification à un solide multifissuré ( $\Gamma'$  étant l'union des fissures), avec tractions prescrites sur la frontière extérieure  $S$ , prenant  $\Gamma \equiv S \cup \Gamma'$ ; d'autre part la formulation variationnelle développée dans [2] permet leur extension aux conditions aux limites mixtes. Les expressions obtenues ne mettent pas en évidence la dépendance connue (Mialon, 1988; Pradeilles-Duval, 1992) des dérivées de  $P$  en vitesses normales  $(\theta \cdot \nu)|_{\partial\Gamma}$  seulement. Dans les applications, il faut donc construire des champs  $\theta, \mu$  pilotés par leur trace normale sur  $\partial\Gamma$  et prolongés arbitrairement sur  $\Gamma$ . Enfin, les formes bilinéaires  $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$  ne dépendent effectivement que de la trace de  $\phi, \psi$  sur  $\Gamma$  : l'introduction d'un paramétrage local de  $\Gamma$   $(\xi_1, \xi_2) \in \Delta \rightarrow \mathbf{y}(\xi_1, \xi_2) \in \Gamma$  de base naturelle  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  permet de montrer que :

$$(22) \quad e_{abc} n_a(\mathbf{y}) \phi_{b,c}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_c dS \mathbf{y} = (\phi_{,\xi_1} \mathbf{a}_2 - \phi_{,\xi_2} \mathbf{a}_1) d\xi_1 d\xi_2$$

Le calcul effectif des intégrales élémentaires utilise (22) appliquée au paramétrage d'un élément de frontière.

EXEMPLE NUMÉRIQUE. – Nous avons effectué la mise en œuvre numérique de ces résultats pour des fissures planes de forme quelconque. Par exemple, pour une fissure circulaire de rayon  $a$  située dans le plan  $(Oy_1 y_2)$ , soumise aux points  $(0, 0, \pm h)$  à deux forces ponctuelles opposées  $\pm P e_3$ , l'expression connue de  $G(\alpha)$  ( $\alpha = h/a$ ) [10] permet de montrer que :

$$\frac{dG}{d\alpha} > 0 (\alpha > \alpha_m) \quad \text{et} \quad \frac{dG}{d\alpha} < 0 (0 < \alpha < \alpha_m)$$

$$\text{avec} \quad \alpha_m^2 = \frac{\sqrt{16\nu^2 - 72\nu + 105} - 2\nu + 9}{2(2 - \nu)}$$

Par conséquent, une éventuelle propagation du front, conservant la forme circulaire, sera stable pour  $\alpha < \alpha_m$ , instable sinon. Le caractère défini positif de la forme quadratique  $Q(\theta, \theta)$  définie en (9), pour  $h/a \in [2, 2.5]$ , a été testée sur des maillages  $\mathcal{M}(n, p)$  constitués de  $p$  couronnes de chacune  $n$  éléments quadrangulaires à 9 nœuds, et pour  $h/a$  variant par pas de 0,0005. La forme quadratique  $Q$  discrète porte sur  $2n$  valeurs nodales de  $(\theta \cdot \nu)$  (matrice symétrique  $2n \times 2n$ ), le programme ignorant le caractère axisymétrique de l'exemple. Pour les trois maillages  $\mathcal{M}(8, 2)$ ,  $\mathcal{M}(12, 3)$ ,  $\mathcal{M}(16, 3)$ , on obtient respectivement les encadrements  $2,2670 \leq \alpha_m^{-1} \leq 2,2675$ ,  $2,2680 \leq \alpha_m^{-1} \leq 2,2685$  et  $2,2770 \leq \alpha_m^{-1} \leq 2,2775$ , à comparer avec la valeur exacte  $\alpha_m = (h/a)_m \approx 2,27589$  pour  $\nu = 0,3$ . Ces résultats attestent de la grande précision atteinte sur la construction numérique de  $Q$ .

Note remise le 27 décembre 1993, acceptée le 19 janvier 1994.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- P. BONNEMAY, Équations intégrales pour l'élasticité plane, *Thèse DDI*, Université Paris-VI, 1979.
- M. BONNET, A regularized galerkin symmetric BIE formulation for mixed 3D elastic boundary value problems, *Bound. El. Abstr. and Newsl.*, 4, 1993, p. 109-113.
- M. BONNET, Formulation par équations intégrales variationnelles du problème en vitesse de propagation de fissures en milieu élastique linéaire. Actes, *Journée de travail sur les discontinuités mobiles*, LMS, Palaiseau, 4 mai 1993.
- H. D. BUI, An integral Equation Method for Solving the Problem of a Plane Crack of Arbitrary Shape, *J. Mech. Phys. Solids*, 25, 1977, p. 29-39.
- P. MIALON, Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode  $\theta$ , *Bull. EDFIDER*, série C, 3, 1988.
- J. C. NEDELEC, Integral equations with non integrable kernels, *Int. Eqs. and Operator Th.*, 5, 1982, p. 562-572.
- Q. S. NGUYEN, R. M. PRADEILLES-DUVAL et C. STOLZ, Sur une loi de propagation régularisante en rupture et endommagement fragile, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 309, série II, 1989, p. 1515-1520.
- R. M. PRADEILLES-DUVAL, Évolution de systèmes avec surfaces de discontinuité mobiles : applications au délaminage, *Thèse*, École Polytechnique, décembre 1992.
- X. Z. SUO, Analyse mathématique et numérique de la propagation des fissures par le modèle des multi-couronnes, *Thèse*, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1990.
- H. TADA, P. PARIS et G. IRWIN, *The stress analysis of crack handbook*, Del. Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, USA, 1973.