



**HAL**  
open science

# Régularisation des équations intégrales de l'élastostatique et de l'élastodynamique

Huy Duong Bui, Benjamin Loret, Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Huy Duong Bui, Benjamin Loret, Marc Bonnet. Régularisation des équations intégrales de l'élastostatique et de l'élastodynamique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie II, 1985, 300, pp.633-636. hal-00092361

**HAL Id: hal-00092361**

**<https://hal.science/hal-00092361>**

Submitted on 11 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES SOLIDES. — Régularisation des équations intégrales de l'élastostatique et de l'élastodynamique. Note de Huy Duong Bui, Benjamin Loret et Marc Bonnet, présentée par Paul Germain.

On présente une nouvelle méthode de régularisation des équations intégrales singulières de surface valable en élastostatique et en élastodynamique stationnaire.

MECHANICS OF SOLIDS. — Regularization of singular integral equations in elastostatics and elastodynamics.

A new method is proposed for the regularization of singular boundary integral equations of elastostatics and steady-state elastodynamics.

1. INTRODUCTION. — La méthode des équations intégrales singulières de surface pour les problèmes d'élasticité tridimensionnelle statique ou dynamique stationnaire est connue depuis longtemps ([1], [2]). Une bibliographie assez fournie sur le sujet peut être trouvée dans [3]. La méthode utilisée jusqu'à présent considère l'équation intégrale vectorielle de surface  $\partial\Omega$  supposée régulière au sens de Liapunov plongée dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  dont le noyau est singulier comme  $r^{-2}(x, y)$  où  $r(x, y)$  est la distance euclidienne entre les points  $x$  et  $y$ . L'intégration sur la surface  $\partial\Omega$  doit donc s'effectuer au sens des valeurs principales; il en résulte d'importantes difficultés numériques dans la mise en œuvre pratique de la méthode.

Mikhlin [4] a proposé une méthode de régularisation consistant à transformer une équation intégrale singulière en une équation intégrale de Fredholm, de noyau sommable. Au lieu de résoudre le problème  $(I+A)u=b$  ( $I$ , identité;  $A$ , opérateur intégral singulier;  $b$ , quantité donnée;  $u$ , champ vectoriel inconnu), il s'agit de rechercher d'abord un opérateur intégral singulier  $B$  tel que l'équation intégrale  $(I+B) \circ (I+A)u=b+Bb$  soit régulière. Cette méthode est d'un grand intérêt théorique pour les questions d'unicité et d'existence des solutions; sa mise en œuvre numérique exige par contre deux intégrations singulières successives.

Une autre méthode de régularisation, donnée seulement pour le problème aux limites en contraintes, consiste à introduire la formulation variationnelle de l'équation intégrale singulière, à diminuer la singularité du noyau par intégrations par parties et à faire apparaître les gradients du champ vectoriel inconnu (cf. [7], [8]).

Dans cette Note nous proposons de nouvelles équations intégrales pour l'élastostatique et l'élastodynamique stationnaire faisant intervenir uniquement des fonctions sommables sur la frontière  $\partial\Omega$  [de noyau variant comme  $r^{-1}(x, y)$ ] adaptées aux applications numériques.

2. FORMULATION CLASSIQUE PAR ÉQUATIONS INTÉGRALES SINGULIÈRES. — En l'absence de force de volume, les équations intégrales de l'élastodynamique stationnaire s'écrivent :

$$(1) \quad c_{ki}(x)u_i(x) + \int_{\partial\Omega} \{ T_{ik}^\omega(x, y)u_i(y) - G_{ik}^\omega(x, y)t_i(y) \} dS_y = 0,$$

où  $\omega$  est la pulsation,  $u$  le vecteur déplacement,  $t$  le vecteur contrainte sur la surface  $\partial\Omega$  déduit du champ  $u$ .  $G^\omega(x, y)$  et  $T^\omega(x, y)$  désignent respectivement le déplacement fondamental (tenseur de Green) et la traction surfacique fondamentale associée [i. e.  $G_{ik}^\omega(x, y)$  représente la composante dans la direction  $i$  du déplacement au point  $y$  dû à une force vibratoire ponctuelle unitaire de direction  $k$  située en  $x$ ]. Pour  $x \in \Omega$ ,  $c_{ki}(x) = \delta_{ki}$

et pour  $x \in \partial\Omega$ , surface supposée différentiable,  $c_{ki}(x) = \delta_{ki}/2$  où  $\delta$  désigne le symbole de Kronecker. L'équation intégrale (1) est singulière pour  $x \in \partial\Omega$  : le noyau  $G^\omega(x, y)$  de singularité en  $r^{-1}(x, y)$  est sommable sur  $\partial\Omega$  mais le noyau  $T^\omega(x, y)$  est singulier comme  $r^{-2}(x, y)$  comme l'indiquent les expressions explicites (2) et (3) :

$$(2) \quad G_{ik}^\omega(x, y) = \frac{1}{\mu} \delta_{ik} F(k_T r) + \omega^{-2} \{ F(k_T r) - F(k_L r) \}_{, ik}$$

$$(3) \quad T_{ik}^\omega(x, y) = \{ (1 - 2k_T^2 k_L^{-2}) \delta_{ij} F(k_L r)_{,k} + \delta_{ik} F(k_T r)_{,j} + \delta_{ij} F(k_T r)_{,k} + 2k_T^{-2} [F(k_T r) - F(k_L r)]_{,ijk} \} n_j(y),$$

où  $r = r(x, y)$ , les différentiations sont effectuées par rapport à  $y$ ,  $F(kr) = \exp(ikr)/4\pi r$ ,  $k = \{k_L, k_T\}$ ,  $k_L = \omega/c_L$  et  $k_T = \omega/c_T$ ,  $c_L$  et  $c_T$  sont les célérités des ondes longitudinales et transversales respectivement,  $n(y)$  est la normale à  $\partial\Omega$  au point  $y$ .

C'est la forte singularité due au comportement de  $T^\omega$  qui est la source de difficultés dans les applications numériques.

Le déplacement fondamental statique  $G^0$  et la traction fondamentale  $T^0$  peuvent s'obtenir comme limite de  $G^\omega$  et de  $T^\omega$  lorsque  $\omega$  tend vers zéro. Leurs expressions sont classiques (cf. [3]). La formule (1) devient dans ce cas pour  $x \in \partial\Omega$  surface supposée désormais différentiable :

$$(4) \quad \frac{1}{2} u_k(x) + \int_{\partial\Omega} \{ T_{ik}^0(x, y) u_i(y) - G_{ik}^0(x, y) t_i(y) \} dS_y = 0.$$

3. FORMULATION RÉGULIÈRE POUR L'ÉLASTOSTATIQUE. — Elle repose sur l'identité suivante (cf. [5]) :

$$(5) \quad \frac{1}{2} \delta_{ki} + \int_{\partial\Omega} T_{ik}^0(x, y) dS_y = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Cette expression est obtenue à partir de (4) par imposition d'un mouvement de corps rigide (translation) pour lequel la traction associée  $t$  est identiquement nulle, ce mouvement étant arbitrairement choisi. L'opérateur nul défini par (5) est une propriété de l'élastostatique et de la géométrie du corps solide. Appliquant l'opérateur nul (5) au déplacement  $u(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$  :

$$(6) \quad \frac{1}{2} u_k(x) + \int_{\partial\Omega} T_{ik}^0(x, y) u_i(x) dS_y = 0$$

et retranchant (6) de (4), nous obtenons,  $x \in \partial\Omega$  :

$$(7) \quad \int_{\partial\Omega} T_{ik}^0(x, y) [u_i(y) - u_i(x)] dS_y - \int_{\partial\Omega} G_{ik}^0(x, y) t_i(y) dS_y = 0.$$

Pour la plupart des problèmes aux limites avec données suffisamment régulières, nous pouvons supposer la solution  $u$  continûment dérivable et la traction  $t$  non singulière. Les intégrandes qui apparaissent dans (7) sont alors sommables, avec singularités en  $r^{-1}(x, y)$ .

Il faut noter que la méthode de régularisation précédente ne s'applique *a priori* qu'à un corps de dimensions finies. Elle repose sur l'identité (5) valable uniquement pour le cas des solides bornés. Cette identité est utilisée dans [6] dans une procédure numérique permettant de calculer la contribution de l'intégrale singulière dans un élément fini.

Considérons maintenant le cas de deux corps particuliers de dimensions non bornées, le complémentaire dans  $\mathbb{R}^3$  d'un corps borné  $V$  (la normale à  $\partial V$  est intérieure à  $V$ ) et le

demi-espace limité par le plan noté également  $\partial V$ . L'opérateur nul correspondant au premier cas se déduit de (5) en changeant le sens de la normale i.e. en remplaçant  $T^0(x, y)$  par  $-T^0(x, y)$ . Pour le deuxième cas, l'opérateur nul est simplement

$$\int_{\partial V} T_{ik}^0(x, y) dS_y = 0.$$

Pour les trois cas étudiés, nous avons l'opérateur nul :

$$(8) \quad \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \delta_{ki} + \int_{\partial V} T_{ik}^0(x, y) dS_y = 0, \quad x \in \partial V$$

où  $\beta=0$  pour un domaine borné,  $\beta=1$  pour le complémentaire dans  $R^3$  d'un domaine borné,  $\beta=1/2$  pour le demi-espace. Appliquons (8) à  $u(x)$ ; il vient :

$$(9) \quad \left(\frac{1}{2} - \beta\right) u_k(x) + \int_{\partial V} T_{ik}^0(x, y) u_i(x) dS_y = 0, \quad x \in \partial V.$$

Retranchant (9) de (4), nous obtenons une équation analogue à (7) et ayant les mêmes propriétés de régularité valable pour les trois cas de solides borné et non bornés :

$$(10) \quad \beta u_k(x) + \int_{\partial V} T_{ik}^0(x, y) [u_i(y) - u_i(x)] dS_y - \int_{\partial V} G_{ik}^0(x, y) t_i(y) dS_y = 0$$

pour  $x \in \partial V$ . Il faut supposer que les champs  $u$  et  $t$  décroissent convenablement à l'infini pour que les contributions de ces termes à l'infini soient nulles.

4. FORMULATION RÉGULIÈRE POUR L'ÉLASTODYNAMIQUE. — On pourrait penser à une identité analogue à (5) avec  $T^\omega$  pour l'élastodynamique stationnaire. En réalité il n'y a pas d'équivalent; l'équation de Helmholtz n'a pas de solution de type translation rigide. Nous allons cependant utiliser de nouveau l'identité (5), pour le corps borné, en l'appliquant cette fois au champ dynamique  $u(x)$ , si bien que (6) est encore valable pour le champ  $u(x)$  dynamique.

Considérons l'intégrale de surface (1) pour  $x \in \partial \Omega$  à laquelle nous soustrayons (6) :

$$(11) \quad \int_{\partial \Omega} [T_{ik}^\omega(x, y) - T_{ik}^0(x, y)] u_i(y) dS_y + \int_{\partial \Omega} T_{ik}^0(x, y) [u_i(y) - u_i(x)] dS_y - \int_{\partial \Omega} G_{ik}^\omega(x, y) t_i(y) dS_y = 0.$$

Les deux dernières intégrales de (11) sont sommables pour les raisons indiquées précédemment. La première intégrale est également sommable car un développement par rapport aux termes en  $r^{-2}$  indique que la singularité de  $T^\omega$  est précisément, pour le terme en  $r^{-2}$ , donnée par  $T^0$ . Plus précisément :

$$(12) \quad T^\omega(x, y) = T^0(x, y) + \text{terme régulier.}$$

Le terme régulier tend vers zéro comme  $O(\omega^2)$  quand  $\omega$  tend vers zéro. La première intégrale de (11) est plus régulière que les deux autres. L'équation (11) constitue finalement la formulation régulière que nous proposons en élastodynamique stationnaire. On remarquera que le principe de régularisation en dynamique proposé utilise des propriétés statiques telles que (5) ou (8) si nous voulons établir une équation analogue à (10) pour un corps de dimensions non bornées.

Enfin la méthode de régularisation proposé ici s'applique également aux problèmes d'élasticité bidimensionnelle. Dans ce cas, les noyaux  $G^\omega$  et  $G^0$  ont des singularités en  $\text{Log } r$  tandis que  $T^\omega$  et  $T^0$  ont des singularités en  $r^{-1}$ . Les intégrales sont curvilignes.

Remise le 11 février 1985.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] C. SOMIGLIANA, *Sopra l'equilibro di un corpo elastico isotrope*, *Il Nuovo Cimento*, 1886, p. 17-19.
- [2] V. D. KUPRADZE, *Dynamic problems in elasticity*, North Holland, 1963.
- [3] C. A. BREBBIA, J. C. TELLES et L. C. WROBEL, *Boundary element techniques*, Springer Verlag, 1984.
- [4] S. G. MIKHLIN, *Singular integral equations*, *A.M.S.T.*, 1, 10, 1962, p. 84-197.
- [5] H. D. BUI, *Mécanique de la Rupture fragile*, Masson, 1978.
- [6] J. C. LACHAT et J. O. WATSON, *Int. J. Num. Engng.*, 10, 1976, p. 991-1005.
- [7] J. C. NEDELEC, *Integral equations with non integrable kernels*. *Integral equations*, Birkhauser Verlag, 5, 1982, p. 562-572.
- [8] A. BAMBERGER, *Approximation de la diffraction d'ondes élastiques. Une nouvelle approche*, Rapports internes 91, 96, 98, École Polytechnique, 1983.

H. D. B. et B. L. : *Laboratoire de Mécanique des Solides,*  
*École Polytechnique, 91128 Palaiseau;*

H. D. B. et M. B. : *Département M.M.N./I.M.A./D.E.R.,*  
*Électricité de France, 92140 Clamart.*