

# Systèmes à commutation

## Reconnaissance du mode actif

Elom Domlan, José Ragot, Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, CNRS UMR 7039  
Institut National Polytechnique de Lorraine  
2, Avenue de la forêt de Haye. F 54516 Vandœuvre-Lès-Nancy Cedex,



Conférence Internationale Francophone d'Automatique, 2006

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

Valeurs numériques

$$\begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) = (-0.41 & 0.21 & -0.14) \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) = (-0.23 & -0.11 & 0.16) \end{cases}$$

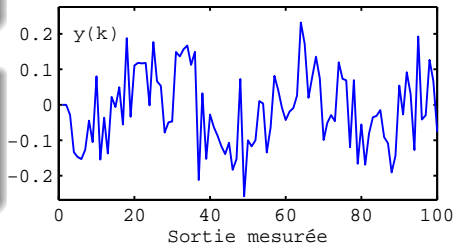
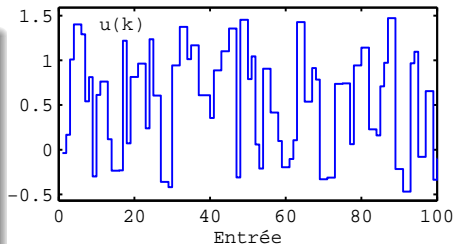


Figure : entrée et sortie

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

Valeurs numériques

$$\begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) = (-0.41 & 0.21 & -0.14) \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) = (-0.23 & -0.11 & 0.16) \end{cases}$$

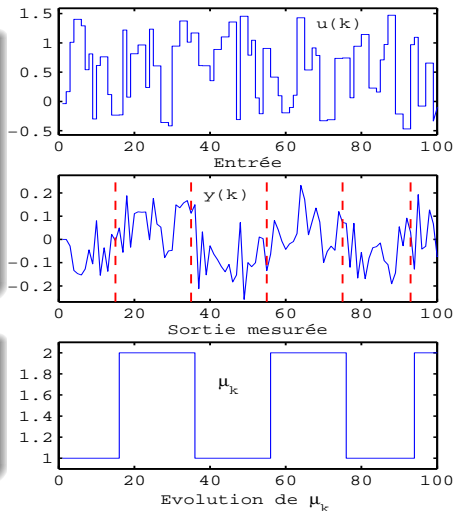


Figure : entrée, sortie et modes

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

Signaux résiduels

$$\begin{cases} r_1(k) = y(k) - ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) \Psi_k^T \\ r_2(k) = y(k) - ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) \Psi_k^T \end{cases}$$

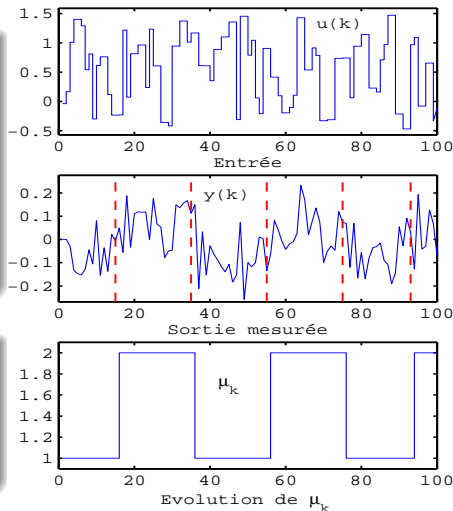


Figure : entrée, sortie et modes

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

Signaux résiduels

$$\begin{cases} r_1(k) = y(k) - ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) \Psi_k^T \\ r_2(k) = y(k) - ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) \Psi_k^T \end{cases}$$

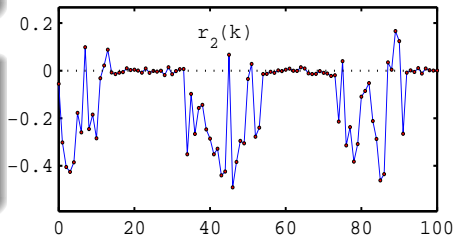
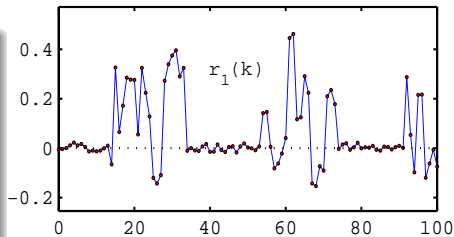


Figure : résidus

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

Logique de décision

$$\begin{cases} \|r_1(k)\| \leq \delta \Rightarrow \Theta_{\mu_k} = ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) \\ \|r_2(k)\| \leq \delta \Rightarrow \Theta_{\mu_k} = ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) \end{cases}$$

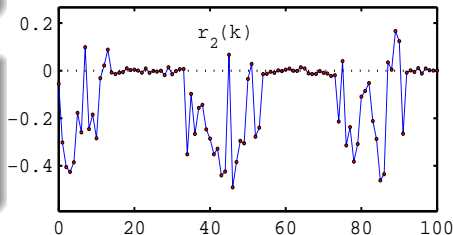
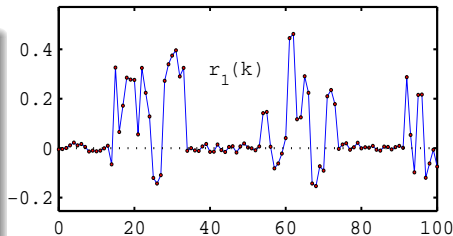


Figure : résidus

# Exemple introductif

Modèle de régression avec deux modes de fonctionnement

$$y(k) = \Theta_{\mu_k} \Psi_k^T + \varepsilon(k)$$

$$\Psi_k = ( y(k-1) \quad y(k-2) \quad u(k-1) )$$

$$\Theta_{\mu_k} = \begin{cases} ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) & \text{si } \mu_k = 1 \\ ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) & \text{si } \mu_k = 2 \end{cases}$$

Logique de décision

$$\begin{cases} \|r_1(k)\| \leq \delta \Rightarrow \Theta_{\mu_k} = ( a_{11} & a_{12} & b_{11} ) \\ \|r_2(k)\| \leq \delta \Rightarrow \Theta_{\mu_k} = ( a_{21} & a_{22} & b_{21} ) \end{cases}$$

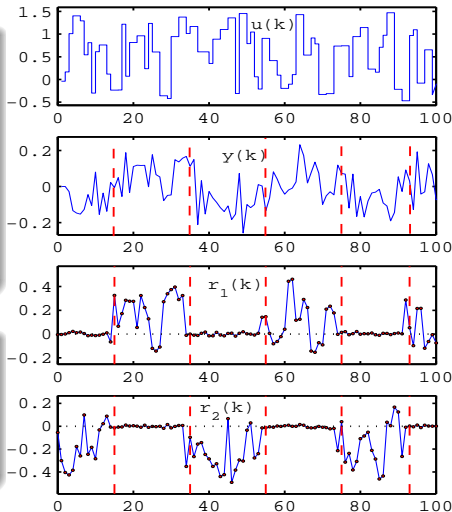


Figure : analyse des résidus



## Problèmes connexes

Nombre de modes
Paramètres des modèles
Structure du mécanisme de commutation
Paramètres du mécanisme de commutation
Séquence des modes

- 1 Positionnement du problème
- 2 Reconnaissance du mode actif
- 3 Problème de discernabilité
- 4 Exemple académique
- 5 Exemple académique
- 6 Conclusion et perspectives

## Connaissances a priori de :

- Signal d'entrée
- Signal de sortie
- Nombre de modes de fonctionnement
- Matrices caractérisant les divers modes de fonctionnement

## Connaissances a priori de :

- Signal d'entrée
- Signal de sortie
- Nombre de modes de fonctionnement
- Matrices caractérisant les divers modes de fonctionnement

## A déterminer

- Mode de fonctionnement courant
- Instants de commutation

## Modèle

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{\mu_k} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}u(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases}$$

$$u(\cdot) \in \mathbb{R}^p, \mathbf{y}(\cdot) \in \mathbb{R}^q, \mathbf{x}(\cdot) \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{A}_{\mu_k} \in \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_s\}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\mu_k \in \{1, 2, \dots, s\}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

## Modèle

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k} x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$u(\cdot) \in \mathbb{R}^p, y(\cdot) \in \mathbb{R}^q, x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$$

$$A_{\mu_k} \in \{A_1, A_2, \dots, A_s\}, s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$$\mu_k \in \{1, 2, \dots, s\}, s \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

## Definition (Chemin)

Un chemin  $\mu$  est une séquence finie de modes c'est-à-dire :

$$\mu = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_N), N \in \mathbb{N}^*.$$

## Definition (Chemin)

Un chemin  $\mu$  est une séquence finie de modes c'est-à-dire :

$$\mu = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_N), N \in \mathbb{N}^*.$$

## Notations

- $|\mu|$  : longueur du chemin  $\mu$   
 $\mu = (\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_N) \Rightarrow |\mu| = N.$
- $\Theta_N$  : ensemble des chemins de longueur  $N.$
- la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}_{\mu,N}$  :

$$\mathcal{O}_{\mu,N} = \begin{pmatrix} C \\ CA_{\mu_1} \\ \vdots \\ CA_{\mu_{N-1}} \dots A_{\mu_1} \end{pmatrix}$$



## Modèle

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k} x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

## Modèle

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k} x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ Y_{k-h,k} = O_{\mu,h} x(k-h) + T_{\mu,h} U_{k-h,k-1}$$

$$T_{\mu,h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & & \\ \vdots & & & \\ CA_{\mu_{k-1}} \dots A_{\mu_{k-h+1}} B & CA_{\mu_{k-1}} \dots A_{\mu_{k-h+2}} B & \dots & CB \end{pmatrix}$$

$$Y_{k-h,k} = ( y(k-h) \quad \dots \quad y(k) )^T \\ U_{k-h,k-1} = ( u(k-h) \quad \dots \quad u(k-1) )^T$$

$$Y_{k-h,k} = \mathcal{O}_{\mu,h} \mathbf{x}(k-h) + \mathcal{T}_{\mu,h} U_{k-h,k-1}$$

$$Y_{k-h,k} = \mathcal{O}_{\mu,h} \mathbf{x}(k-h) + \mathcal{T}_{\mu,h} \mathbf{U}_{k-h,k-1}$$

⇓

$$R_{\mu,h}(k) \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbf{x}(k-h) \end{pmatrix} = 0$$

$$R_{\mu,h}(k) = \begin{bmatrix} Y_{k-h,k} - \mathcal{T}_{\mu,h} \mathbf{U}_{k-h,k-1} & \mathcal{O}_{\mu,h} \end{bmatrix}$$

$$Y_{k-h,k} = \mathcal{O}_{\mu,h} \mathbf{x}(k-h) + \mathcal{T}_{\mu,h} \mathbf{U}_{k-h,k-1}$$

⇓

$$R_{\mu,h}(k) \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbf{x}(k-h) \end{pmatrix} = 0$$

$$R_{\mu,h}(k) = \begin{bmatrix} Y_{k-h,k} - \mathcal{T}_{\mu,h} \mathbf{U}_{k-h,k-1} & \mathcal{O}_{\mu,h} \end{bmatrix}$$

⇓

$$\begin{cases} Y_{k-h,k} = \mathcal{O}_{\mu,h} \mathbf{x}(k-h) + \mathcal{T}_{\mu,h} \mathbf{U}_{k-h,k-1} & \text{1}^{\text{ère}} \text{ forme} \\ R_{\mu,h}(k) \begin{pmatrix} -1 \\ \mathbf{x}(k-h) \end{pmatrix} = 0 & \text{2}^{\text{nd}} \text{e forme} \end{cases}$$

## Première approche

$$Y_{k-h,k} = O_{\mu,h} X(k-h) + T_{\mu,h} U_{k-h,k-1}$$

↓

$$r_{\mu,h}(k) = \Omega_{\mu,h}(Y_{k-h,k} - T_{\mu,h} U_{k-h,k-1})$$

avec  $\Omega_{\mu,h} O_{\mu,h} = 0$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow r_{\mu^*,h}(k) = 0$$

## Seconde approche

$$R_{\mu,h}(k) \begin{pmatrix} -1 \\ X(k-h) \end{pmatrix} = 0$$

↓

$$\text{rang}(R_{\mu,h}(k)) = \dim(x) = n$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \text{rang}(R_{\mu^*,h}(k)) = n$$

## Première approche

$$Y_{k-h,k} = \mathcal{O}_{\mu,h} \mathbf{x}(k-h) + T_{\mu,h} U_{k-h,k-1}$$

↓

$$r_{\mu,h}(k) = \Omega_{\mu,h} (Y_{k-h,k} - T_{\mu,h} U_{k-h,k-1})$$

avec  $\Omega_{\mu,h} \mathcal{O}_{\mu,h} = 0$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow r_{\mu^*,h}(k) = 0$$

## Seconde approche

$$R_{\mu,h}(k) \begin{pmatrix} -1 \\ x(k-h) \end{pmatrix} = 0$$

↓

$$\text{rang}(R_{\mu,h}(k)) = \dim(x) = n$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \text{rang}(R_{\mu^*,h}(k)) = n$$

## Première approche

$$Y_{k-h,k} = \mathcal{O}_{\mu,h} X(k-h) + T_{\mu,h} U_{k-h,k-1}$$

↓

$$r_{\mu,h}(k) = \Omega_{\mu,h}(Y_{k-h,k} - T_{\mu,h} U_{k-h,k-1})$$

avec  $\Omega_{\mu,h} \mathcal{O}_{\mu,h} = 0$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow r_{\mu^*,h}(k) = 0$$

## Seconde approche

$$R_{\mu,h}(k) \begin{pmatrix} -1 \\ X(k-h) \end{pmatrix} = 0$$

↓

$$\text{rang}(R_{\mu,h}(k)) = \dim(x) = n$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \text{rang}(R_{\mu^*,h}(k)) = n$$



## Algorithme

Etape 1.

Acquisition des mesures sur l'horizon  $[k - h, k]$

Pour  $i = 1, \dots, s^h$  :

Calcul des matrices  $\mathcal{O}_{\mu^i, h}$ ,  $\Omega_{\mu^i, h}$ ,  $T_{\mu^i, h}$

Etape 2.

A chaque instant  $k$

Pour  $i = 1, \dots, s^h$  :

Calculer :

- $r_{\mu^i, h}(k)$
- $\text{rang}(R_{\mu^i, h}(k))$

Reconnaissance du chemin actif  $\mu^*$

## Algorithme

Etape 1.

Acquisition des mesures sur l'horizon  $[k - h, k]$

Pour  $i = 1, \dots, s^h$  :

Calcul des matrices  $\mathcal{O}_{\mu^i, h}$ ,  $\Omega_{\mu^i, h}$ ,  $T_{\mu^i, h}$

Etape 2.

A chaque instant  $k$

Pour  $i = 1, \dots, s^h$  :

Calculer :

- $r_{\mu^i, h}(k)$
- $\text{rang}(R_{\mu^i, h}(k))$

Reconnaissance du chemin actif  $\mu^*$

# Reconnaissance du mode actif en présence de bruit

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k}x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + \varepsilon(k) \\ \forall k, |\varepsilon(k)| \leq \delta, \quad \delta > 0 \end{cases}$$
$$Y_{k-h,k} = O_{\mu,h}x(k-h) + T_{\mu,h}U_{k-h,k-1} + E_{k-h,k}$$

## Influence sur les résidus

$$\mu = \mu^* \Rightarrow r_{\mu^*,h}(k) = \Omega_{\mu,h}E_{k-h,k} \neq 0$$

↓

$$|\varepsilon(k)| \leq \delta \Rightarrow [r_{\mu,h}(k)]$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow 0 \in [r_{\mu,h}(k)]$$

## Influence sur le rang de $R_{\mu,h}(k)$

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \text{rang}(R_{\mu^*,h}(k)) \neq n$$

↓

$$\tau_{\mu,h} = \frac{\lambda_{\max}(R_{\mu,h})}{\lambda_{\min}(R_{\mu,h})}$$

$$\bar{\tau}_{\mu,h} = \frac{\tau_{\mu,h}}{\sum_{\mu \in \Theta_{h-1}} \tau_{\mu,h}}$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \bar{\tau}_{\mu^*,h} = \min_{\mu \in \Theta_h} (|1 - \bar{\tau}_{\mu,h}|)$$

# Reconnaissance du mode actif en présence de bruit

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k}x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + \varepsilon(k) \\ \forall k, |\varepsilon(k)| \leq \delta, \quad \delta > 0 \end{cases}$$
$$Y_{k-h,k} = O_{\mu,h}x(k-h) + T_{\mu,h}U_{k-h,k-1} + E_{k-h,k}$$

## Influence sur les résidus

$$\mu = \mu^* \Rightarrow r_{\mu^*,h}(k) = \Omega_{\mu,h}E_{k-h,k} \neq 0$$

↓

$$|\varepsilon(k)| \leq \delta \Rightarrow [r_{\mu,h}(k)]$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow 0 \in [r_{\mu,h}(k)]$$

## Influence sur le rang de $R_{\mu,h}(k)$

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \text{rang}(R_{\mu^*,h}(k)) \neq n$$

↓

$$\tau_{\mu,h} = \frac{\lambda_{\max}(R_{\mu,h})}{\lambda_{\min}(R_{\mu,h})}$$

$$\bar{\tau}_{\mu,h} = \frac{\tau_{\mu,h}}{\sum_{\mu \in \Theta_{h-1}} \tau_{\mu,h}}$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \bar{\tau}_{\mu^*,h} = \min_{\mu \in \Theta_h} (|1 - \bar{\tau}_{\mu,h}|)$$

# Reconnaissance du mode actif en présence de bruit

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k} x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + \varepsilon(k) \\ \forall k, |\varepsilon(k)| \leq \delta, \quad \delta > 0 \end{cases}$$
$$Y_{k-h,k} = O_{\mu,h} x(k-h) + T_{\mu,h} U_{k-h,k-1} + E_{k-h,k}$$

## Influence sur les résidus

$$\mu = \mu^* \Rightarrow r_{\mu^*,h}(k) = \Omega_{\mu,h} E_{k-h,k} \neq 0$$

↓

$$|\varepsilon(k)| \leq \delta \Rightarrow [r_{\mu,h}(k)]$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow 0 \in [r_{\mu,h}(k)]$$

## Influence sur le rang de $R_{\mu,h}(k)$

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \text{rang}(R_{\mu^*,h}(k)) \neq n$$

↓

$$\tau_{\mu,h} = \frac{\lambda_{\max}(R_{\mu,h})}{\lambda_{\min}(R_{\mu,h})}$$

$$\bar{\tau}_{\mu,h} = \frac{\tau_{\mu,h}}{\sum_{\mu \in \Theta_{h-1}} \tau_{\mu,h}}$$

↓

$$\mu = \mu^* \Rightarrow \bar{\tau}_{\mu^*,h} = \min_{\mu \in \Theta_h} (|1 - \bar{\tau}_{\mu,h}|)$$

# Discernabilité des chemins

Définition (chemins discernables : cas déterministe)

$\mu^1$  est discernable de  $\mu^2$  sur un horizon  $[k - h, k]$  si :

$$\begin{aligned} \mu^1 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) \neq 0 \end{cases} \\ \mu^2 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) \neq 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

# Discernabilité des chemins

Définition (chemins discernables : cas déterministe)

$\mu^1$  est discernable de  $\mu^2$  sur un horizon  $[k - h, k]$  si :

$$\begin{aligned} \mu^1 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) \neq 0 \end{cases} \\ \mu^2 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) \neq 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = \Omega_{\mu^1, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^1, h} U_{k-h, k-1} \right) \\ r_{\mu^2, h}(k) = \Omega_{\mu^2, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^2, h} U_{k-h, k-1} \right) \end{cases}$$

# Discernabilité des chemins

Définition (chemins discernables : cas déterministe)

$\mu^1$  est discernable de  $\mu^2$  sur un horizon  $[k - h, k]$  si :

$$\begin{aligned} \mu^1 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) \neq 0 \end{cases} \\ \mu^2 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) \neq 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = \Omega_{\mu^1, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^1, h} U_{k-h, k-1} \right) \\ r_{\mu^2, h}(k) = \Omega_{\mu^2, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^2, h} U_{k-h, k-1} \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mu^1 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = 0 \\ r_{\mu^2, h}(k) = \Omega_{\mu^2, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^2, h} U_{k-h, k-1} \right) \end{cases} \\ \mu^2 = \mu^* &\Rightarrow \begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = \Omega_{\mu^1, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^1, h} U_{k-h, k-1} \right) \\ r_{\mu^2, h}(k) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = \Omega_{\mu^1, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^1, h} U_{k-h, k-1} \right) \\ r_{\mu^2, h}(k) = \Omega_{\mu^2, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^2, h} U_{k-h, k-1} \right) \end{cases}$$

# Discernabilité des chemins

$$\begin{cases} r_{\mu^1, h}(k) = \Omega_{\mu^1, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^1, h} U_{k-h, k-1} \right) \\ r_{\mu^2, h}(k) = \Omega_{\mu^2, h} \left( Y_{k-h, k} - T_{\mu^2, h} U_{k-h, k-1} \right) \end{cases}$$

**Théorème (discernabilité des chemins : cas déterministe)**

$\mu^1$  est discernable de  $\mu^2$  sur un horizon  $[k - h, k]$ , si :

$$\begin{aligned} U_{k-h, k-1} &\notin \mathcal{N}_r \left( \Omega_{\mu^1, h} \left( T_{\mu^2, h} - T_{\mu^1, h} \right) \right) \\ U_{k-h, k-1} &\notin \mathcal{N}_r \left( \Omega_{\mu^2, h} \left( T_{\mu^1, h} - T_{\mu^2, h} \right) \right) \\ \mathbf{C} &\notin \mathcal{N}_l \left( A_i - A_j \right), i \neq j, i, j \in \mathbf{S}_{1,2} = \{1, \dots, s_{\mu^1, 2}\} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}_r$  : opérateur espace nul à droite

$\mathcal{N}_l$  : opérateur espace nul à gauche

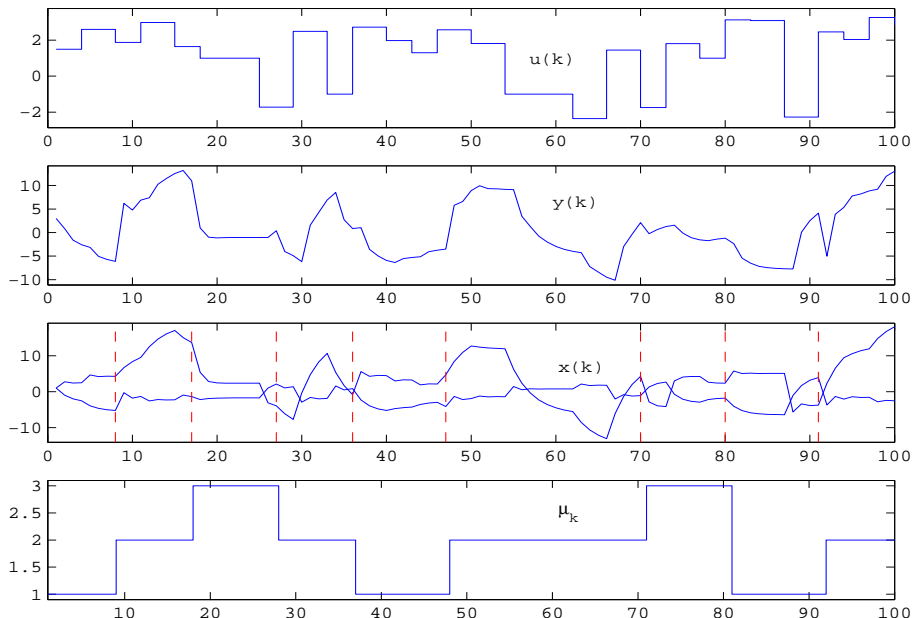
$\mathbf{S}_{1,2}$  : ensemble des modes intervenant dans  $\mu^1$  et  $\mu^2$ .

## Matrices caractérisant le système

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.211 & 0 \\ 0 & 0.521 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0.691 & 0 \\ 0 & -0.310 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 0.153 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# Exemple académique



# Exemple académique

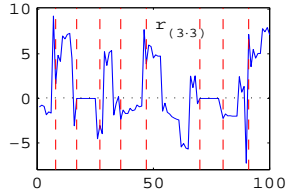
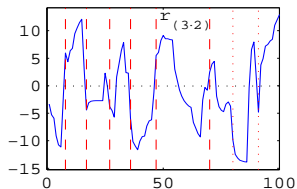
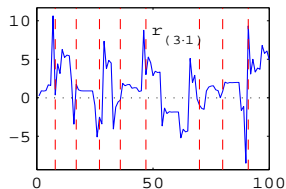
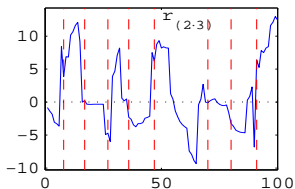
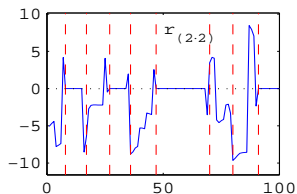
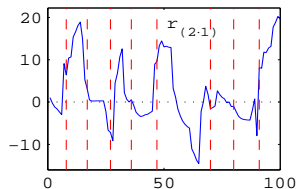
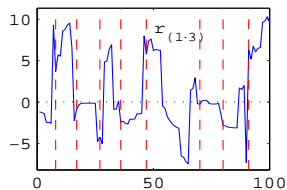
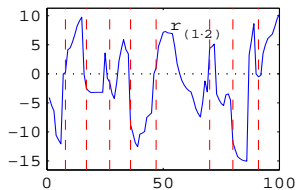
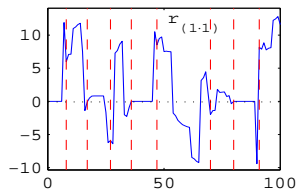
## Chemins de longueur 2 sur $[k - 2, k]$

N° du chemin	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu_1$	1	1	1	2	2	2	3	3	3
$\mu_2$	1	2	3	1	2	3	1	2	3

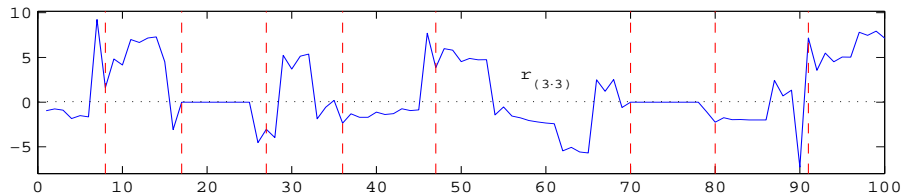
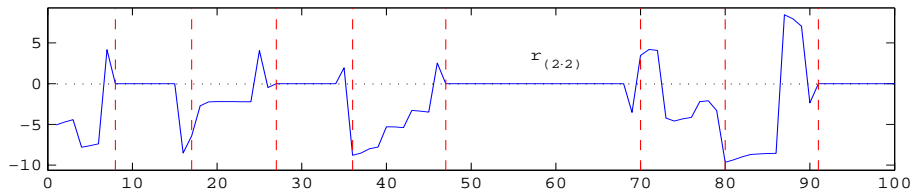
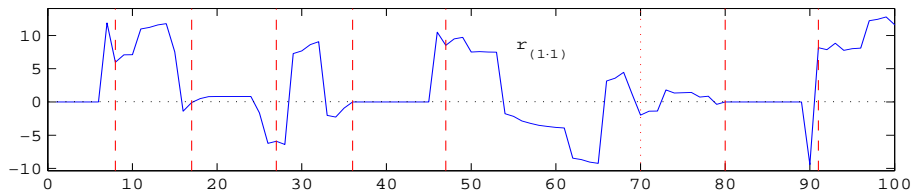
## Matrices d'observabilité

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{(1 \cdot 1),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_1 \\ CA_1 A_1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{(2 \cdot 1),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_1 \\ CA_2 A_1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{(3 \cdot 1),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_1 \\ CA_3 A_1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{(1 \cdot 2),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_2 \\ CA_1 A_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{(2 \cdot 2),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_2 \\ CA_2 A_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{(3 \cdot 2),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_2 \\ CA_3 A_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{(1 \cdot 3),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_3 \\ CA_1 A_3 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{(2 \cdot 3),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_3 \\ CA_2 A_3 \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{(3 \cdot 3),h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_1 \\ CA_3 A_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

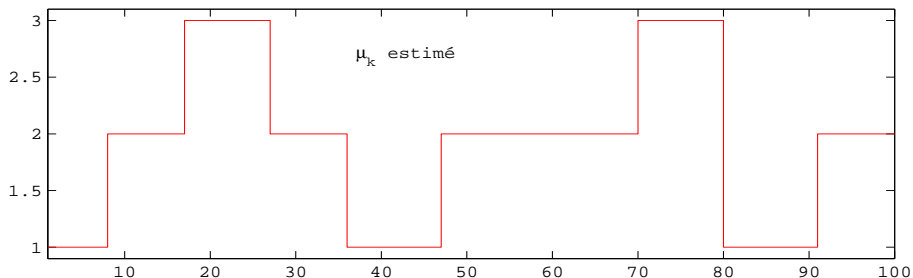
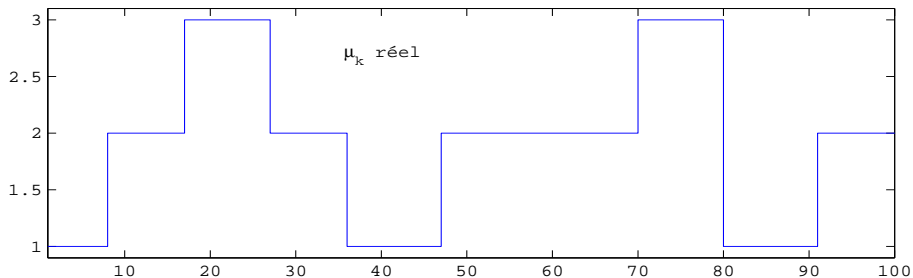
# Exemple académique



# Exemple académique

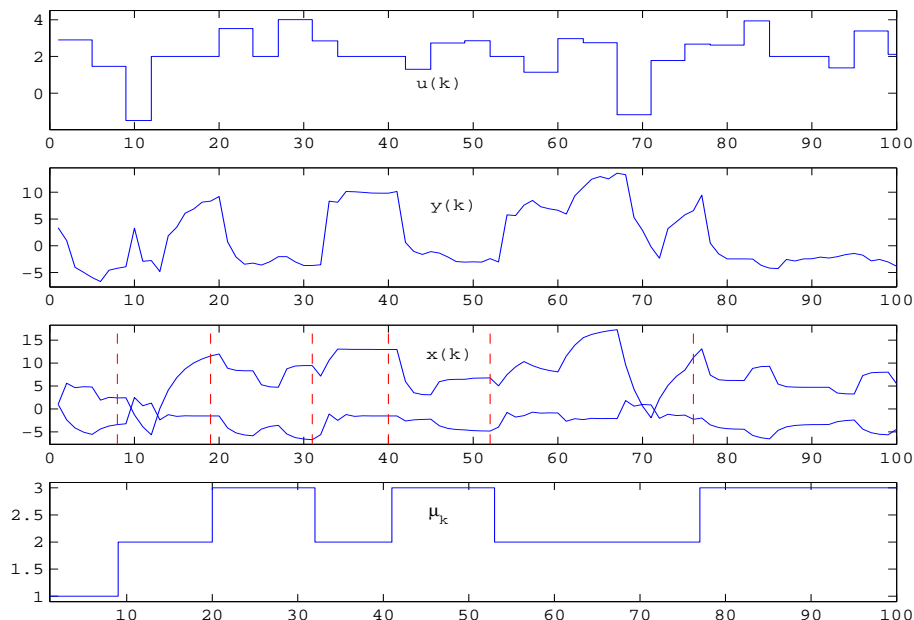


# Exemple académique

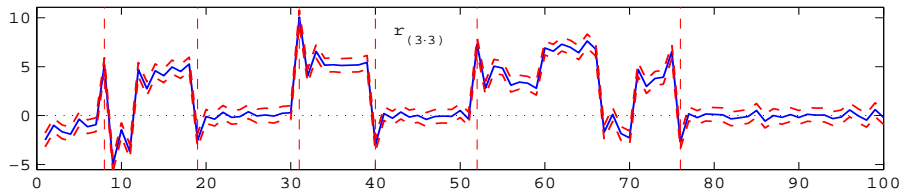
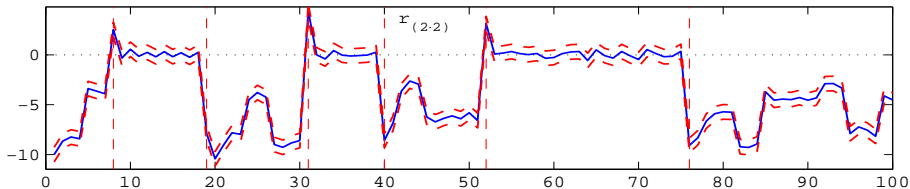
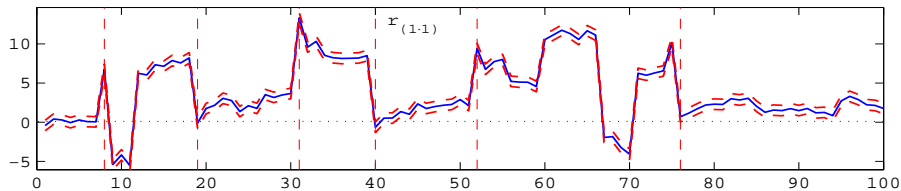




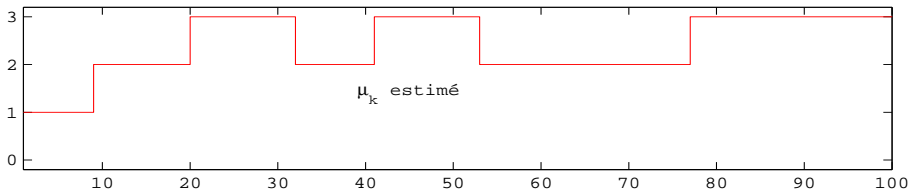
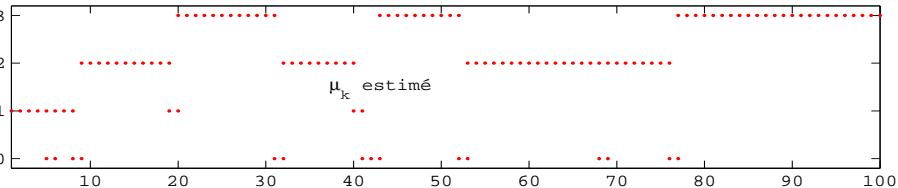
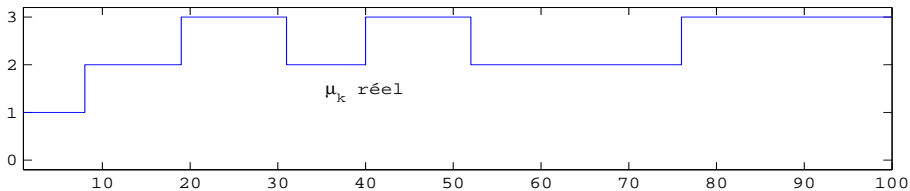
# Exemple académique



# Exemple académique



# Exemple académique



## Modèle à commutation avec structure de la loi de commutation

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k} x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_k = -1 \\ 2 & \text{si } \nu_k = 1 \end{cases}$$

$$\nu_k = \text{signe}(x\varphi_k)$$

$$\varphi_k = [ Y_{k-1, k-n_a} \quad U_{k-1, k-n_b} \quad 1 ]^T$$



$$\nu_k(x\varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

## Modèle à commutation avec structure de la loi de commutation

$$\begin{cases} x(k+1) = A_{\mu_k} x(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_k = -1 \\ 2 & \text{si } \nu_k = 1 \end{cases}$$

$$\nu_k = \text{signe}(\chi\varphi_k)$$

$$\varphi_k = [ Y_{k-1, k-n_a} \quad U_{k-1, k-n_b} \quad 1 ]^T$$

⇓

$$\nu_k(\chi\varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

# Identification du mécanisme de commutation

$$\varphi_k = ( y_{k-1} \quad u_{k-1} \quad 1 )^T \quad \chi = ( \alpha \quad \beta \quad 0 )$$

$$\nu_k (\chi \varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

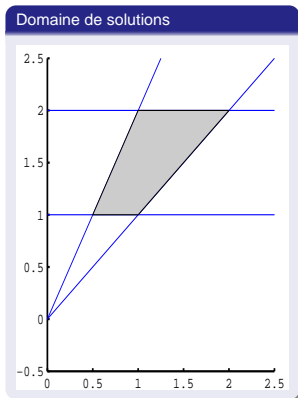
$u_{k-1}$	0	0	-1	-2
$y_{k-1}$	-1	-2	0	0
$\nu_k$	1	-1	1	-1

# Identification du mécanisme de commutation

$$\varphi_k = ( y_{k-1} \quad u_{k-1} \quad 1 )^T \quad \chi = ( \alpha \quad \beta \quad 0 )$$

$$\nu_k(\chi\varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

$u_{k-1}$	0	0	-1	-2
$y_{k-1}$	-1	-2	0	0
$\nu_k$	1	-1	1	-1



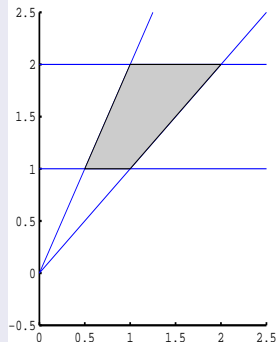
# Identification du mécanisme de commutation

$$\varphi_k = ( y_{k-1} \quad u_{k-1} \quad 1 )^T \quad \chi = ( \alpha \quad \beta \quad 0 )$$

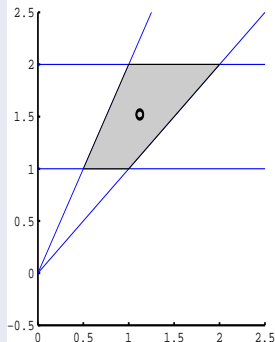
$$\nu_k(\chi\varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

$u_{k-1}$	0	0	-1	-2
$y_{k-1}$	-1	-2	0	0
$\nu_k$	1	-1	1	-1

Domaine de solutions



Solution particulière





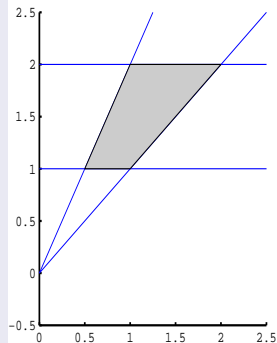
# Identification du mécanisme de commutation

$$\varphi_k = ( y_{k-1} \quad u_{k-1} \quad 1 )^T \quad \chi = ( \alpha \quad \beta \quad 0 )$$

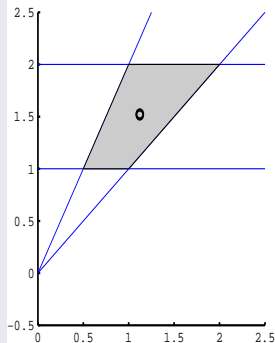
$$\nu_k(\chi\varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

$u_{k-1}$	0	0	-1	-2
$y_{k-1}$	-1	-2	0	0
$\nu_k$	1	-1	1	-1

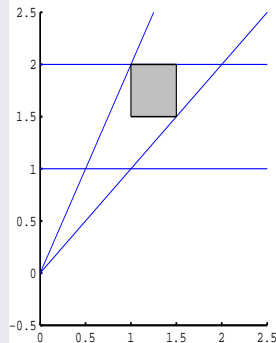
Domaine de solutions



Solution particulière



Domaine de solutions de forme simple



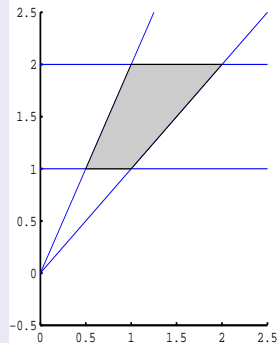
# Identification du mécanisme de commutation

$$\varphi_k = ( y_{k-1} \quad u_{k-1} \quad 1 )^T \quad \chi = ( \alpha \quad \beta \quad 0 )$$

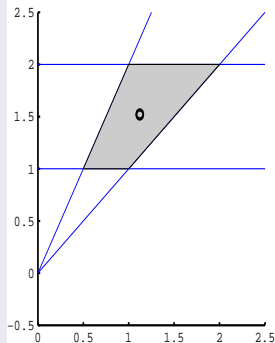
$$\nu_k(\chi\varphi_k) > 0, \quad k = 1, \dots, N$$

$u_{k-1}$	0	0	-1	-2
$y_{k-1}$	-1	-2	0	0
$\nu_k$	1	-1	1	-1

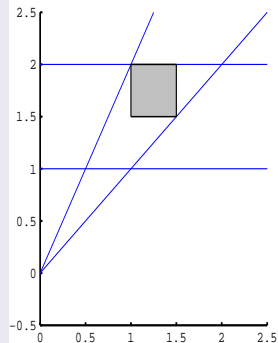
Domaine de solutions



Solution particulière



Domaine de solutions de forme simple



# Exemple académique

## Matrices caractérisant le système

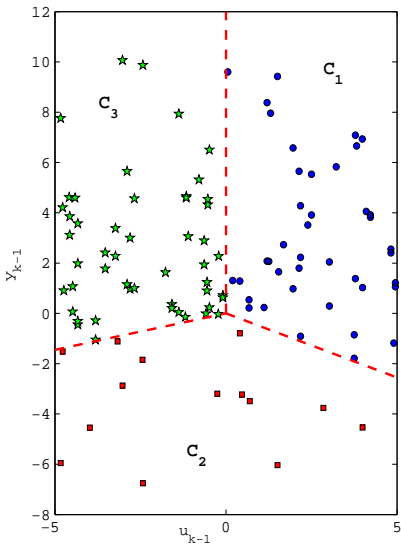
$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.211 & 0 \\ 0 & 0.521 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0.691 & 0 \\ 0 & -0.310 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 0.153 & 0 \\ 0 & 0.410 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}^T C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Mécanisme de commutation

$$\begin{cases} \mu_k = 1 & \text{si } \chi_1 \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} & 1 \end{bmatrix}^T < 0 \text{ et } \chi_2 \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} & 1 \end{bmatrix}^T > 0 \\ \mu_k = 2 & \text{si } \chi_1 \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} & 1 \end{bmatrix}^T > 0 \text{ et } \chi_3 \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} & 1 \end{bmatrix}^T < 0 \\ \mu_k = 3 & \text{si } \chi_3 \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} & 1 \end{bmatrix}^T > 0 \text{ et } \chi_2 \begin{bmatrix} y_{k-1} & u_{k-1} & 1 \end{bmatrix}^T < 0 \\ \chi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.51 & 0 \end{bmatrix} & \chi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \chi_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.29 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

## Paramètres bornés



$\chi_1$	$\chi_{10}$	$\chi_{r1}$
1	1.013	0.526
0.51	0.694	0.215
0	0.001	0.000

$\chi_2$	$\chi_{20}$	$\chi_{r2}$
0	0.013	0.180
1	1.052	0.381
0	0.011	0.021

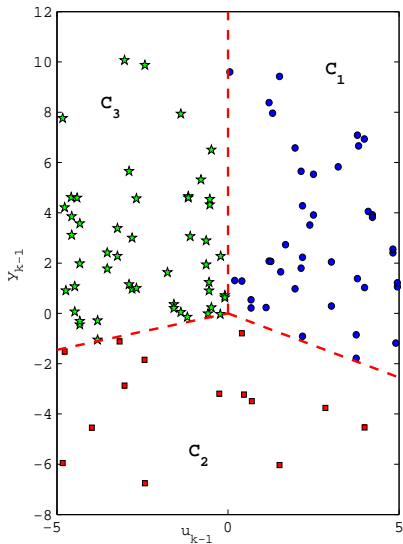
$\chi_3$	$\chi_{30}$	$\chi_{r3}$
1	1.112	0.281
-0.29	-0.326	0.197
0	0.007	0.001

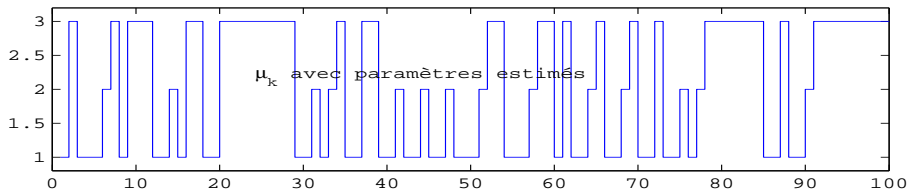
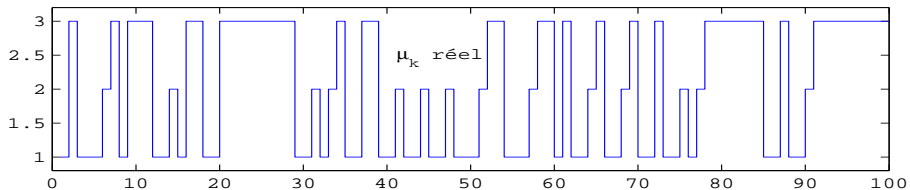
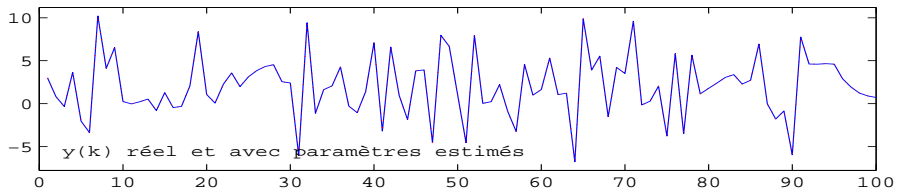
## Paramètres bornés

$\chi_1$	$\chi_{10}$	$\chi_{r1}$
1	1.013	0.526
0.51	0.694	0.215
0	0.001	0.000

$\chi_2$	$\chi_{20}$	$\chi_{r2}$
0	0.013	0.180
1	1.052	0.381
0	0.011	0.021

$\chi_3$	$\chi_{30}$	$\chi_{r3}$
1	1.112	0.281
-0.29	-0.326	0.197
0	0.007	0.001





- Recherche du mode actif
- Analyse de discernabilité
- Identification du mécanisme de commutation

- Discernabilité en présence de bruit
- Estimation d'état
- Fonctionnement en mode non supervisé

- Recherche du mode actif
  - Analyse de discernabilité
  - Identification du mécanisme de commutation
- 
- Discernabilité en présence de bruit
  - Estimation d'état
  - Fonctionnement en mode non supervisé