



**HAL**  
open science

## **Systèmes à commutation : diagnostic de fonctionnement et identification de la loi de commutation.**

Elom Ayih Domlan, José Ragot, Didier Maquin

### ► **To cite this version:**

Elom Ayih Domlan, José Ragot, Didier Maquin. Systèmes à commutation : diagnostic de fonctionnement et identification de la loi de commutation.. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, May 2006, Bordeaux, France. pp.CDROM. hal-00092093

**HAL Id: hal-00092093**

**<https://hal.science/hal-00092093>**

Submitted on 8 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Systemes à Commutation : Diagnostic de Fonctionnement et Identification de la Loi de Commutation

Elom DOMLAN, José RAGOT, Didier MAQUIN

Institut National Polytechnique de Lorraine  
Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039 CNRS–UHP–INPL  
2, avenue de la forêt de Haye  
54516 Vandœuvre-lès-Nancy, France

{elom-ayih.domlan, jose.ragot, didier.maquin}@ensem.inpl-nancy.fr

*Résumé*— Les systèmes à commutation constituent une classe particulière de systèmes hybrides. Ils sont décrits par plusieurs modèles de fonctionnement et chaque modèle, définissant un mode du système, est actif sous certaines conditions opératoires particulières. Lorsque la loi de commutation régissant le passage d’un modèle de fonctionnement à l’autre est parfaitement connue, il est aisé de manipuler de tels systèmes car le mode actif peut être connu à chaque instant. Par contre, dans la situation où aucune information n’est disponible sur l’évolution de la loi de commutation, il est plus ardu de procéder au diagnostic ou encore de synthétiser une loi de commande sur ces systèmes. Cet article traite de la reconnaissance du mode actif sur la base d’observations de l’entrée et de la sortie du système. L’identification des paramètres de la loi de commutation, lorsque celle-ci est décrite par un modèle de régression, est également considérée.

*Mots-clés*— système à commutation, diagnostic, reconnaissance de mode de fonctionnement, identification.

## I. INTRODUCTION

De façon générale, la modélisation de systèmes complexes conduit à l’obtention de modèles non-linéaires dont la dynamique est influencée à la fois par des événements discrets et des dynamiques continus. Le plus souvent, le principe de « simplicité » conduit à une démarche de modélisation s’appuyant sur l’utilisation d’un ensemble de modèles de structures simples (par exemple linéaires), chaque modèle décrivant le comportement du système dans une zone de fonctionnement particulière. Dans ce cadre, les multi-modèles et les modèles hybrides ont prouvé leur efficacité quant à la représentation de tels processus.

Les multi-modèles [1], [2] reposent sur la stratégie du « diviser pour régner ». Ainsi, un système complexe peut être modélisé par interpolation d’un ensemble de modèles locaux plus simples, souvent linéaires, valides dans des zones de fonctionnement particulières. Le système est alors complètement représenté par la donnée d’un ensemble de modèles locaux, leur région de validité et le mécanisme d’interpolation.

Quant aux modèles hybrides [3], [4], [5], ils caractérisent des processus physiques régis par des équations différentielles continues et des variables discrètes. Le processus est également décrit par plusieurs modes de fonctionnement et la commutation d’un mode de fonctionnement à un autre

est régi par l’évolution de variables internes, par exemple un des états du système, ou par une loi externe.

Que ce soient les multi-modèles ou les modèles hybrides, le comportement global obtenu pour le système complexe modélisé est fortement lié à la nature de la procédure gérant la transition d’un mode de fonctionnement à l’autre. Dans la situation où la transition est abrupte, on obtient une classe particulière mais importante de systèmes à savoir la classe des systèmes linéaires par morceaux ou encore celle des systèmes à commutation. Cette classe de modèles est largement utilisée, car les outils d’analyse et de commande pour les systèmes linéaires [6] sont très développés et aussi parce qu’une grande partie des processus réels peut être représentée par des modèles issus de cette classe.

Les recherches sur les systèmes à commutation sont essentiellement concentrées dans les domaines de l’identification [7], [4], [5], [3], de la synthèse de loi de commande [8], [9] et de l’analyse de la stabilité [9], [10]. Un point crucial, nécessaire pour la mise en oeuvre de tous ces outils ou qui en simplifierait l’usage, est la reconnaissance du mode actif à un instant particulier à partir de jeux de mesures. On note très récemment un regain d’attention pour ce difficile problème [11], [12], [13], [14], [15]. La reconnaissance du mode actif est intimement liée à la proximité des modèles locaux. Elle est évidemment plus aisée si le mécanisme de commutation (ou loi de commutation) est maîtrisé. D’où l’importance de l’identification de ce dernier.

Nous proposons dans cet article une procédure d’identification de la loi de commutation. Sa détermination apporte une connaissance supplémentaire quant à l’évolution du système et permet un meilleur suivi de ce dernier. Deux méthodes sont proposées. La première recherche les valeurs optimales des paramètres de la loi de commutation tandis que la seconde identifie ces paramètres sous forme d’intervalles. Il est également rappelé brièvement une méthode pour déterminer le mode actif à chaque instant à partir de la seule connaissance des entrées et sorties du système et des modèles locaux.

## II. POSITION DU PROBLÈME

De façon générale, un système à commutation est défini par la donnée d'un ensemble de modèles (ici linéaires) correspondant aux modes du système et une loi de commutation permettant de passer d'un mode de fonctionnement à un autre. Considérons le système représenté par l'équation (1) :

$$y(k) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_a} a_1(i) y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_1(i) u(k-i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_a} a_N(i) y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_N(i) u(k-i) \end{cases} \quad (1)$$

qui modélise un système à commutation avec  $N$  régimes de fonctionnement. Les variables  $u(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  désignent respectivement l'entrée et la sortie du système. A chaque instant, seule une des  $N$  descriptions entrée/sortie modélise l'évolution temporelle du système. Les changements de régime se traduisent donc par la sélection de l'une de ces descriptions.

Une autre modélisation possible pour les systèmes à commutation est obtenue en substituant les représentations entrée/sortie des modes du système par des représentations d'état. Le modèle obtenu est alors de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) \\ A_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\} \end{cases} \quad (2)$$

$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$

les variables  $u(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$  et  $x(\cdot)$  désignant respectivement l'entrée, la sortie et l'état du système. Remarquons qu'ici les changements de modes de fonctionnement du système se traduisent, d'après l'équation (2), par des changements de valeur de la matrice de transition du système. Cette formulation ne restreint aucunement la modélisation du système à commutation qui peut être facilement étendue au cas où les matrices  $B$  et  $C$  prennent aussi différentes valeurs.

Dans le cadre de cet article, nous formulons l'hypothèse que la loi de commutation pilotant le passage d'un mode de fonctionnement à un autre est une fonction linéaire des variables mesurées du système à savoir l'entrée  $u(\cdot)$  et la sortie  $y(\cdot)$ . On peut par exemple imaginer aisément que dans un système à commutation comportant deux modes, le passage d'un mode à un autre soit effectif lorsque l'amplitude de l'entrée ou de la sortie à l'instant  $k$  franchit un seuil prédéfini.

Sans atteinte à la généralité, le nombre de modes du système est limité à 2, ceci dans un souci de clarté dans la compréhension des développements qui suivront. Le modèle adopté dans cet article est alors celui de l'équation (3) représentant un système SISO :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_i x(k) + B u(k) \\ y(k) = C x(k) \\ A_i = \frac{1}{2} [(1 + \mu(k)) A_1 + (1 - \mu(k)) A_2] \\ \mu(k) = \text{signe}(y(k) + \alpha u(k) + \beta) \end{cases} \quad (3)$$

L'équation (3) indique que la commutation d'un mode à un autre dépend de la valeur prise par une fonction linéaire en

$y(\cdot)$  et en  $u(\cdot)$ . Le problème posé est de retrouver simultanément le mode actif courant (ou la valeur prise par  $\mu(\cdot)$  à l'instant courant) et les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la loi de commutation connaissant uniquement les valeurs prises par  $u(\cdot)$  et  $y(\cdot)$ . Les matrices d'état  $A_i$ ,  $i \in \{1; 2\}$  du système sont supposées répertoriées et connues *a priori*. La complexité du problème posé est réduite dans le cas où la loi de commutation est parfaitement connue. Nous supposons ici une connaissance partielle de cette loi, à savoir qu'elle dépend du signe d'une régression linéaire sur  $y(\cdot)$  et  $u(\cdot)$  et que l'ordre de cette régression est connu.

## III. RECONNAISSANCE DU MODE ACTIF

### A. Détection de la séquence de commutation en cours

Pour la reconnaissance du mode actif, les techniques de diagnostic à base de modèle ou encore de synthèse d'observateurs sont largement utilisées. Nous rappelons ici de façon condensée la méthode proposée dans [14], [15].

Dans le cas où la matrice d'état est invariante (le régime de fonctionnement ne change pas), on définit, sur une fenêtre temporelle  $[k-h+1, k]$ , les matrices d'observabilité  $O$  et de Toeplitz  $T$  :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{h-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & & \\ \vdots & & & \\ CA^{h-1}B & CA^{h-2}B & \dots & CB \end{pmatrix} \quad (5)$$

De (4) et (5), on peut écrire, pour un système linéaire à temps invariant, la relation suivante :

$$Ox(k-h+1) = \begin{pmatrix} y(k-h+1) \\ \vdots \\ y(k) \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} u(k-h+1) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{pmatrix} \quad (6)$$

où l'on a isolé le terme dépendant de l'état inconnu. En définissant une matrice de projection  $\Omega$  [16] telle que  $\Omega O = 0$ , on forme un résidu  $r(\cdot)$ , indépendant de l'état initial  $x(k-h+1)$  :

$$r(k) = \Omega(Y_k - T U_k) \quad (7)$$

avec  $Y_k = (y(k-h+1) \dots y(k))^T$  et  $U_k = (u(k-h+1) \dots u(k-1))^T$ . Ce résidu, calculé à partir des entrées et sorties, a la propriété d'être nul à chaque instant, ceci évidemment en l'absence de bruit de mesure.

L'idée est alors de transposer la méthode de génération de résidus utilisée dans le cadre des systèmes linéaires à temps invariant au modèle (3). On réécrit ainsi les matrices définies en (4) et (5) compte tenu des commutations possibles :

$$O_l^{k,h} = \begin{pmatrix} C \\ CA_{i_{k-h,l}} \\ \vdots \\ C \underbrace{A_{i_{k-1,l}} A_{i_{k-2,l}} \dots A_{i_{k-h,l}}}_h \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$T_l^{k,h} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ CB & & 0 \\ \vdots & & \\ C \underbrace{A_{i_{k-1,l}} \dots A_{i_{k-h+1,l}}}_{h-1} B & C \underbrace{A_{i_{k-1,l}} \dots A_{i_{k-h+2,l}}}_{h-2} B & \\ \dots & 0 & \\ \dots & CB & \end{pmatrix} \quad (9)$$

La valeur de l'indice  $i_{p,l}$  des matrices d'état dans (8) et (9) est liée à l'instant considéré dans la fenêtre d'observation et à la séquence de commutation en cours sur cette fenêtre. La fenêtre d'observation est de longueur  $h$  et l'indice  $l$  représente la séquence de commutation en cours sur la fenêtre d'observation.

En utilisant (8) et (9), on peut mettre (6) sous la forme suivante :

$$Y_k - T_l^{k,h} U_k = O_l^{k,h} x_{k-h+1} \quad (10)$$

On définit alors le résidu :

$$r_l^{k,h} = \Omega_l^{k,h} \left( Y_k - T_l^{k,h} U_k \right) \quad (11)$$

la matrice  $\Omega_l^{k,h}$  vérifiant  $\Omega_l^{k,h} O_l^{k,h} = 0$ . Le calcul des résidus relatifs à toutes les séquences de commutation envisageables nécessite donc la détermination préalable de toutes les matrices  $\Omega_l^{k,h}$ .

*Théorème 1* (Séquence de commutation active) La séquence de commutation  $l^*$  décrivant l'évolution du système sur l'horizon  $[k-h+1, k]$  est celle satisfaisant l'équation :

$$r_{l^*}^{k,h} = \Omega_{l^*}^{k,h} \left( Y_k - T_{l^*}^{k,h} U_k \right) = 0$$

En résumé, la reconnaissance de la séquence de commutation  $l^*$  à partir des mesures est effectuée de la façon suivante :

- on dénombre sur l'horizon  $[k-h+1, k]$  toutes les séquences de commutation possibles, ce qui revient à construire l'ensemble des matrices  $O_l^{k,h}$  (8).
- on détermine ensuite à partir des matrices  $O_l^{k,h}$  trouvées précédemment les matrices de projection  $\Omega_l^{k,h}$ .
- les matrices  $O_l^{k,h}$  et  $\Omega_l^{k,h}$  étant connues, on peut alors former les résidus  $r_l^{k,h}$  à partir des mesures faites sur le système (11).
- la séquence de commutation active est identifiée en testant l'ensemble des résidus  $r_l^{k,h}$ , de manière à détecter le résidu ayant une valeur nulle. Ce résidu correspond alors à la séquence de commutation active sur la fenêtre temporelle considérée.

Pour plus de détails sur la procédure le lecteur est prié de se référer à [14], [13], [15].

### B. Influence du bruit de mesure

La procédure précédente ne peut être efficace que dans la situation idéale de l'absence de bruit de mesure. On suppose maintenant la présence d'un bruit de mesure borné  $n(\cdot)$  de valeur moyenne nulle sur la sortie du système :

$$\begin{aligned} y_m(k) &= y(k) + n(k) \\ \forall k, |n(k)| &\leq \delta, \quad \delta > 0 \end{aligned}$$

La sortie du système étant corrompue par un bruit de mesure, le résidu correspondant au mode actif ne prend plus

une valeur nulle mais plutôt est dans un voisinage de zéro. La reconnaissance du mode actif nécessite alors de comparer les résidus entre eux et vis-à-vis de la valeur 0. Pour cela une définition de résidus sous forme intervalle [17] s'avère pertinente. En effet, en utilisant la bornitude de l'amplitude du bruit de mesure, on peut caractériser la plage de variation des résidus à chaque instant par l'intervalle :

$$\begin{aligned} [r_l^{k,h}] &= \left[ \Omega_l^{k,h} \left( Y_k - T_l^{k,h} U_k \right) - \left| \Omega_l^{k,h} \right| \Delta ; \right. \\ &\quad \left. \Omega_l^{k,h} \left( Y_k - T_l^{k,h} U_k \right) + \left| \Omega_l^{k,h} \right| \Delta \right] \end{aligned} \quad (12)$$

où  $\Delta$  est un vecteur dont tous les éléments sont égaux à  $\delta$ .

Dans un contexte intervalle, la détection du mode actif correspond à la recherche du résidu, exprimé sous forme intervalle, contenant la valeur 0. Si un seul des résidus contient la valeur 0, on peut alors conclure et le mode actif est identifié. Dans le cas où il existe plus d'un résidu contenant la valeur 0 (l'existence de cette situation est liée à la richesse des entrées d'excitation en termes de « distinguabilité » des modes et à des conditions structurelles relatives aux différents modes du système), on s'abstient de prendre une décision quant à la séquence de commutation active et éventuellement on énumère l'ensemble des séquences candidates.

## IV. IDENTIFICATION DE LA LOI DE COMMUTATION

A partir des résidus, connaissant les domaines temporels où chaque mode est actif ainsi que les instants de commutation d'un mode à un autre, il convient maintenant d'identifier les paramètres de la loi de commutation, sa structure étant supposée *a priori* connue (3).

### A. Estimation paramétrique

La détermination des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  nécessite la connaissance des valeurs de l'entrée  $u(\cdot)$ , de la sortie  $y(\cdot)$  et des valeurs prises par la fonction de commutation  $\mu(\cdot)$ . On cherche le modèle de commutation qui explique les données disponibles et il est donc souhaitable que l'ensemble des données disponibles traduise la totalité des situations de fonctionnement du système. Cette contrainte de richesse des données disponibles est inhérente à tout problème d'identification. A partir de ces remarques, on peut noter que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  estimés ne sont pas forcément les vrais paramètres de la fonction de commutation, mais ceux qui sont en accord avec les entrées et sorties du système disponibles. On suppose donc que tous les modes du système ont été suffisamment excités. La précision de l'estimation paramétrique dépend donc de la capacité de l'ensemble des données entrée/sortie à appréhender les différents modes du système.

Pour présenter la structure du modèle de commutation sous une forme adaptée à l'identification de ses paramètres, notons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \text{signe}(x) x > 0 \quad (13)$$

A partir de (3) et (13), on a :

$$\mu(k) y(k) + \mu(k) u(k) \alpha + \mu(k) \beta > 0 \quad (14)$$

De (14), pour les différentes observations, on obtient un ensemble d'inégalités pouvant se mettre sous la forme :

$$-\begin{bmatrix} \mu(1)u(1) & \mu(1) \\ \vdots & \vdots \\ \mu(N)u(N) & \mu(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \mu(1)y(1) \\ \vdots \\ \mu(N)y(N) \end{bmatrix} \quad (15)$$

$N$  représente le nombre de couples  $(u(k); y(k))$  disponibles. La résolution de (15) conduit à l'obtention d'un ensemble de solutions admissibles. On peut donc envisager la recherche des paramètres de la loi de commutation sous trois angles différents :

- la recherche de l'ensemble de toutes les solutions admissibles pour  $\alpha$  et  $\beta$
- la recherche d'un sous-ensemble de solutions admissibles ayant une forme simple, par exemple un orthotope
- la recherche d'une valeur unique pour  $\alpha$  et  $\beta$ .

À titre d'exemple, le dessin de gauche de la figure 1 représente dans le plan  $(\alpha, \beta)$  le domaine trouvé pour l'ensemble des paramètres admissibles pour le jeu de mesures de la table I. Tout point de ce domaine représente une solution particulière. Le symbole "o" pointe une solution particulière correspondant au « centre » du domaine, le vocable « centre » restant à définir. Le dessin de droite de la figure 1 présente une solution sous-optimale (rectangle gris) envisageable qui simplifie la description du domaine trouvé sous forme d'inégalités indépendantes.

TABLE I  
JEU DE MESURES

$u(k)$	0	0	-1	-2
$y(k)$	-1	-2	0	0
$\mu(k)$	1	-1	1	-1

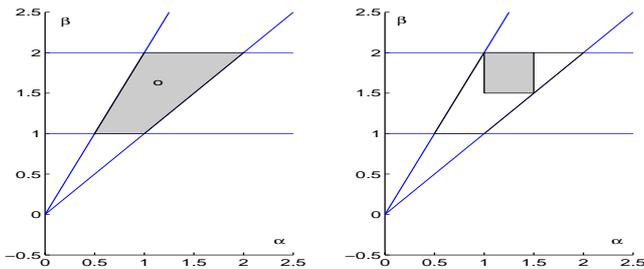


Fig. 1. Domaine admissible pour  $\alpha$  et  $\beta$

### B. Recherche d'un ensemble de solutions

Dans la situation où l'échantillon de mesures disponible pour l'estimation paramétrique n'est pas exhaustif, les paramètres de la loi de commutation peuvent prendre différentes valeurs compatibles avec l'ensemble des mesures. On peut alors rechercher un domaine auquel les paramètres sont susceptibles d'appartenir. La résolution de (15) donne un domaine décrivant l'ensemble des valeurs admissibles pour les paramètres à identifier. Toutefois, le domaine obtenu, généralement un polytope, n'est pas aisé à manipuler à cause de sa forme géométrique complexe. Pour contourner cette difficulté, il est proposé de représenter un tel domaine par un orthotope aligné aux axes. Cela revient à rechercher,

à partir des triplets  $\{(u(k); y(k); \mu(k)), k = 1, \dots, N\}$ , les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sous forme intervalle en imposant une contrainte de précision du modèle de commutation, à savoir que les intervalles recherchés sont les plus grands tout en restant compatibles avec les mesures. Pour ce faire, plusieurs critères d'optimisation peuvent être choisis. Par exemple, on peut imposer que les demi-largeurs des intervalles à déterminer soient maximales tout en respectant les contraintes du système :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_0 + r_\alpha \nu_\alpha \\ \beta = \beta_0 + r_\beta \nu_\beta \\ r_\alpha > 0, r_\beta > 0 \\ |\nu_\alpha| \leq 1, |\nu_\beta| \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Les variables  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont les centres des intervalles à déterminer et  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  représentent les demi-largeurs de ces intervalles. Les  $\nu$  sont des variables bornées et normalisées traduisant les fluctuations possibles de  $\alpha$  et  $\beta$  autour de leur centre respectif. En se servant de (14) et comme  $|\nu_\alpha| \leq 1$  et  $|\nu_\beta| \leq 1$ , on obtient :

$$\begin{cases} y(k) + u(k)(\alpha_0 + \varepsilon_\alpha r_\alpha) + (\beta_0 + \varepsilon_\beta r_\beta) > 0 & \text{si } \mu(k) = 1 \\ y(k) + u(k)(\alpha_0 + \varepsilon_\alpha r_\alpha) + (\beta_0 + \varepsilon_\beta r_\beta) < 0 & \text{si } \mu(k) = -1 \\ \varepsilon_\alpha = \pm 1, \varepsilon_\beta = \pm 1 \end{cases} \quad (17)$$

Finalement, prenant en compte la contrainte de forme de dimension maximale, pour trouver  $\alpha_0$ ,  $r_\alpha$ ,  $\beta_0$ , et  $r_\beta$ , il faudrait maximiser  $r_\alpha$  et  $r_\beta$ , avec  $r_\alpha > 0$  et  $r_\beta > 0$ , en respectant les contraintes (17). Ce problème est mal posé car il correspond à la recherche simultanée du maximum de deux variables. Il est ainsi nécessaire de transformer les critères portant sur le maximum des variables  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  en un seul critère. Un choix naturel peut consister à maximiser l'aire de l'orthotope aligné aux axes, inscrit dans le polytope des contraintes. Dans ce cas, on utilise une fonction scalaire de  $r_\alpha$  et  $r_\beta$  comme par exemple  $\max(r_\alpha r_\beta)$  et on obtient :

$$\begin{cases} \max(r_\alpha r_\beta) \\ r_\alpha > 0, r_\beta > 0 \\ \text{sous les contraintes (17)}. \end{cases} \quad (18)$$

On peut alors faire appel à des algorithmes classiques d'optimisation sous contraintes [18] pour la résolution de (18).

### C. Recherche d'une valeur unique

Afin de trouver une valeur unique pour les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , il est nécessaire de fixer un critère permettant de vérifier l'optimalité des valeurs trouvées. Plusieurs choix s'avèrent possibles. Par exemple, on pourrait envisager de retenir simplement le centre des intervalles trouvés lors de la recherche de la loi de commutation à paramètres bornés, c'est-à-dire  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ . En fait, les performances (habileté à trouver des valeurs assez proches des valeurs vraies) obtenues en utilisant un critère ou un autre sont fonction de la forme du domaine correspondant à l'ensemble des solutions admissibles et des connaissances *a priori* portant sur les valeurs des paramètres à déterminer (plage de variation des paramètres,...).

La détermination d'une valeur unique pour les paramètres

$\alpha$  et  $\beta$  est équivalente à la recherche d'un classificateur linéaire (ici une droite) séparant le jeu de données  $\{(u(k); y(k)), k = 1, \dots, N\}$  en deux ensembles distincts. Il s'agit donc d'un problème de séparation linéaire qui peut être résolu en recherchant la droite séparatrice qui maximise la distance entre cette droite séparatrice et le point qui en est le plus proche dans le jeu de données [19]. On est ainsi ramené à des problèmes classiques d'optimisation sous contraintes inégalités que l'on peut résoudre au moyen d'algorithmes appropriés implémentés dans bon nombre de logiciels de calcul scientifique.

Remarquons que la présence de bruit de mesure conduit le plus souvent à l'obtention d'un jeu de données linéairement inséparable. Dans notre démarche, ce cas de figure est écarté car, comme cela a été mentionné précédemment, lors de la phase de reconnaissance du mode actif, les situations faisant apparaître plusieurs résidus intervalle contenant la valeur 0 ne sont pas considérées, ces valeurs correspondant à des ambiguïtés de décision de mode de fonctionnement. Les données susceptibles d'être mal classées sont ainsi écartées.

## V. EXEMPLE

Nous présentons ici un exemple académique de système à commutation. Le système simulé est caractérisé par deux modes et modélisé par l'équation (3) où :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.211 & 0.011 \\ 0.121 & 0.521 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.209 & 0.610 \\ -0.412 & 0.810 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = 1.3 \quad \beta = -3.2$$

La simulation est faite en présence d'un bruit de mesure borné d'amplitude maximale 0.5, ce qui correspond à peu près à 10% de la valeur maximale de la sortie du système recueillie lors de la simulation.

La figure 2 indique l'évolution de l'entrée  $u(\cdot)$ , la sortie  $y(\cdot)$ , l'état  $x(\cdot)$  et la loi de commutation  $\mu(\cdot)$  du système. Les traits verticaux sur le troisième graphique de cette figure marquent les instants de commutation ou de changement de régime du système. Les quatre premiers graphiques de la figure 3 présentent l'évolution des différents résidus calculés (tracés en traits continus). Il s'agit des résidus associés aux séquences de commutation ( $A_1 \rightarrow A_1$ ), ( $A_1 \rightarrow A_2$ ), ( $A_2 \rightarrow A_1$ ) et ( $A_2 \rightarrow A_2$ ) notées respectivement  $r_{11}(\cdot)$ ,  $r_{12}(\cdot)$ ,  $r_{21}(\cdot)$  et  $r_{22}(\cdot)$ . Il est également représenté sur ces graphiques en traits discontinus l'enveloppe des résidus ou l'évolution des résidus intervalle. En présence de bruit, on constate qu'effectivement les résidus ne prennent pas une valeur nulle lorsque leur séquence correspondante est active mais plutôt une valeur proche de 0 et un seul des quatre résidus intervalle contient à chaque instant la valeur 0. Ce résidu correspond à la séquence de commutation en cours. Par exemple, de l'instant  $k = 30$  jusqu'à l'instant  $k = 33$ , le résidu intervalle généré pour la séquence ( $A_2 \rightarrow A_2$ ) (quatrième graphique de la figure 3) est le seul à contenir la valeur 0, montrant que le mode associé à la matrice  $A_2$  est le mode actif sur ce domaine temporel. La commutation du mode associé à la matrice  $A_2$  vers celui relatif à la matrice  $A_1$  est mise en évidence par le fait que le résidu intervalle correspondant à la séquence

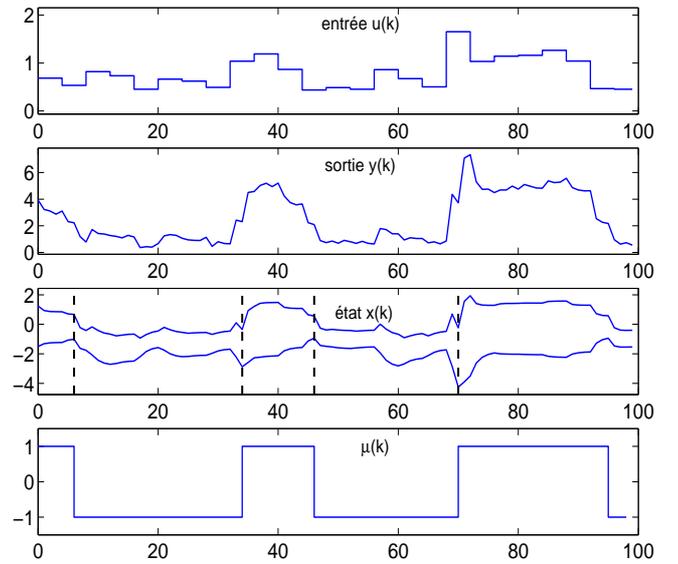


Fig. 2. Entrée, sortie, état, loi de commutation

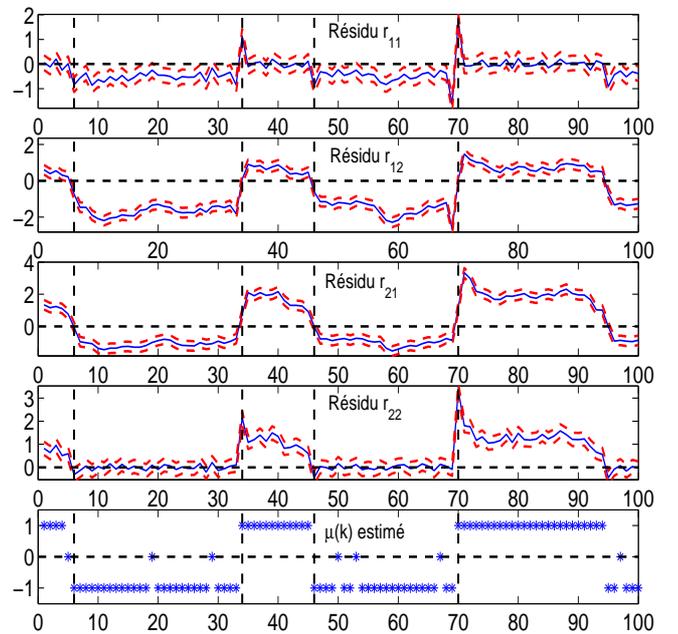


Fig. 3. Résidus  $r_{11}(\cdot)$ ,  $r_{12}(\cdot)$ ,  $r_{21}(\cdot)$  et  $r_{22}(\cdot)$

( $A_2 \rightarrow A_1$ ) (troisième graphique de la figure 3) devient le seul à inclure la valeur 0 à l'instant  $k = 34$ . Le dernier graphique de la figure 3 montre les résultats de la reconnaissance du mode actif à partir des résidus intervalle générés. Les modes sont assez bien détectés dans l'ensemble. On peut noter, comme cela a été dit précédemment, la présence d'instant où il a été impossible de fournir un estimé de  $\mu(\cdot)$  à cause du fait que plus d'un résidu contenait la valeur 0. Toutefois, en analysant l'évolution de l'estimé de  $\mu(\cdot)$  et en utilisant la notion de persistance dans un mode (connaissance *a priori*), on peut reconstruire totalement la trajectoire suivie par  $\mu(\cdot)$ .

A partir des données entrée/sortie collectées lors de la simulation et des valeurs prises par  $\mu(\cdot)$ , les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  ont été identifiés sous forme intervalle en résolvant (18) par une technique itérative. Les résultats sont présentés dans la table II, les paramètres initiaux étant choisis

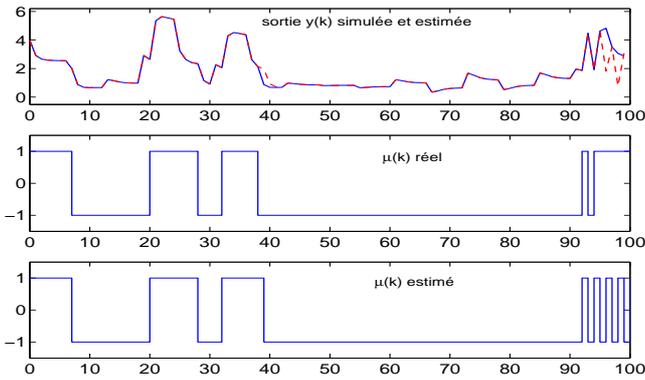


Fig. 4. Sortie  $y(\cdot)$  réelle et estimée

arbitrairement. Pour valider les résultats d'identification,

TABLE II  
ESTIMATION DES PARAMÈTRES  $\alpha_0$ ,  $r_\alpha$ ,  $\beta_0$  ET  $r_\beta$

	$\alpha_0$	$r_\alpha$	$\beta_0$	$r_\beta$
Paramètres réels	1.3	-	-3.2	-
Paramètres initiaux	0.5	0	-1	0
Paramètres estimés	1.247	0.173	-3.093	0.348

le premier graphique de la figure 4 présente l'évolution de la sortie du système ainsi que celle de la sortie simulée à partir de la loi de commutation identifiée pour une entrée différente de celle utilisée pour la reconnaissance du mode actif. Pour ce tracé, il a été retenu une valeur arbitraire des valeurs appartenant aux intervalles correspondant aux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , les valeurs choisies étant les centres des intervalles trouvés. Les deux courbes obtenues sont pratiquement superposées. Le second graphique de la figure 4 représente les valeurs réelles prises par la loi de commutation. Enfin le dernier graphique de la figure 4 montre les valeurs obtenues pour  $\mu(\cdot)$  à partir des paramètres identifiés. La loi de commutation  $\mu(\cdot)$  est bien reconstruite dans son ensemble. Les instants où les valeurs réelles et estimées de la loi de commutation  $\mu(\cdot)$  ne concordent pas correspondent à des instants où le système fonctionne dans des régions très voisines de la droite de commutation d'équation  $y(\cdot) + \alpha u(\cdot) + \beta$ .

## VI. CONCLUSION

Il a été proposé dans cet article une méthode pour la détermination des instants de commutation et du modèle local actif à chaque instant d'un système à commutation. La méthode repose sur l'analyse de résidus générés à partir des différents modes du système. Une procédure d'identification de la loi régissant les changements de régime du système à commutation est également examinée. Deux approches sont analysées. La première recherche les paramètres optimaux pour la loi de commutation au sens des données disponibles. La seconde approche utilise les méthodes de l'analyse intervalle pour rechercher un ensemble de valeurs admissibles des paramètres de la loi de commutation.

Les travaux futurs viseront à étendre ces approches dans un contexte de fonctionnement en mode non supervisé. On supposera, dans ce cas, que l'on ne dispose pas d'une

connaissance complète de tous les régimes de fonctionnement du système. Il s'agit alors de procéder simultanément, au cours du fonctionnement du système, à l'identification des modes de fonctionnement non répertoriés, c'est-à-dire des matrices d'état associées à ces modes, et à la reconnaissance du mode courant actif. Il sera également envisagé la recherche de l'ordre de la régression dont dépend la fonction de commutation dans l'hypothèse où cet ordre est inconnu.

## RÉFÉRENCES

- [1] K. Gasso, G. Mourot, et J. Ragot. Structure identification of multiple models with output error local models. *Proceedings of 15th IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona, Spain, 2002.
- [2] R. Murray-Smith et T. Johansen. *Multiple model approaches*. Taylor & Francis, London, United Kingdom, 1997.
- [3] A. Juloski, M. Heemels, G. Ferrari-Trecate, R. Vidal, S. Paoletti, et H. Niessen. *Hybrid Systems : Computation and Control*, chapter Comparison of Four Procedures for Identification of Hybrid Systems. Springer-Verlag, 2005.
- [4] R. Vidal. Identification of pwarx hybrid models with unknown and possibly different orders. *Proceedings of the 23rd IEEE American Control Conference*, pages 13–19, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [5] A. Bemporad, A. Garulli, S. Paoletti, et A. Vicino. Data classification and parameter estimation for the identification of piecewise affine models. *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 20–25, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [6] T. Kailath. *Linear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [7] J. Ragot, G. Mourot, et D. Maquin. Parameter estimation of switching piecewise linear systems. *Proceedings of the 42nd Conference on Decision and Control*, pages 5783–5788, Maui, Hawaii, 2003.
- [8] A. Bemporad et M. Morari. Control of systems integrating logic, dynamics and constraints. *Automatica*, 35(3) :407–427, 1999.
- [9] M. S. Branicky, V. S. Borkar, et S. K. Mitter. A unified framework for hybrid control : model and optimal control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1) :31–45, 1998.
- [10] M. Johansson et A. Rantzer. Computation of piecewise quadratic Lyapunov functions for hybrid systems. *Automatic Control*, 43(4) :555–559, 1998.
- [11] A. Balluchi, L. Benvenuti, M. D. Di Benedetto, et A. L. Sangiovanni-Vincentelli. *Hybrid Systems : Computation and Control*, chapter Design of observers for hybrid systems, pages 76–89. Springer-Verlag, 2002.
- [12] M. Babaali et M. Egerstedt. *Hybrid Systems : Computation and Control*, chapter Observability of switched linear systems, pages 48–63. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 2004.
- [13] V. Cocquempot, M. Staroswiecki, et T. El Mezyani. Switching time estimation and fault detection for hybrid systems using structured parity residuals. *Proceedings of the 15th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, pages 681–686, Washington, D. C., 2003.
- [14] J. Ragot, D. Maquin, et E. A. Domlan. Switching time estimation of piecewise linear system. application to diagnosis. *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, pages 669–704, Washington DC, USA, 2003.
- [15] E. A. Domlan, D. Maquin, et J. Ragot. Diagnostic des systèmes à commutation, approche par la méthode de l'espace de parité. *Proceedings of the Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Douz, Tunisie, 2004.
- [16] J. Gertler. Fault detection and isolation using parity relations. *Control Engineering Practice*, 5(5) :663–661, 1997.
- [17] O. Adrot. *Diagnostic à base de modèles incertains utilisant l'analyse par intervalle : l'approche bornante*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2000.
- [18] J. F. Bonnans, J. Ch. Gilbert, C. Lemarchal, et C. A. Sagastizbal. *Numerical optimization : theoretical and practical aspects*. Springer-Verlag, 2002.
- [19] S. Paoletti. *Identification of Piecewise Affine Models*. PhD thesis, Department of Information Engineering, University of Siena, Siena, Italy, 2004.