



**HAL**  
open science

## Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multimodèle incertain à entrées inconnues : approche LMI.

Abdelkader Akhenak, Mohammed Chadli, José Ragot, Didier Maquin

### ► To cite this version:

Abdelkader Akhenak, Mohammed Chadli, José Ragot, Didier Maquin. Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multimodèle incertain à entrées inconnues : approche LMI.. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, May 2006, Bordeaux, France. pp.CDROM. hal-00092071

**HAL Id: hal-00092071**

**<https://hal.science/hal-00092071>**

Submitted on 8 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multimodèle incertain à entrées inconnues : approche LMI

Abdelkader AKHENAK<sup>1</sup>, Mohammed CHADLI<sup>2</sup>, José RAGOT<sup>1</sup>, Didier MAQUIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centre de Recherche en Automatique de Nancy,  
INPL CNRS UMR 7039.

2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandoeuvre, France.  
abdelkader.akhenak@ensem.inpl-nancy.fr

<sup>2</sup> Université de Picardie Jules Verne  
Centre de Robotique, d'Electrotechnique et d'Automatique  
7, Rue du Moulin Neuf. 80000 Amiens, France  
mohammed.chadli@u-picardie.fr

*Résumé*— Dans cet article, nous proposons une méthode d'estimation d'état d'un système non linéaire incertain représenté par un multimodèle dit également de type Takagi-Sugeno et soumis à l'influence d'entrées inconnues. Pour cela, on propose la synthèse d'un multiobservateur à mode glissant basée sur la compensation des effets des incertitudes et des entrées inconnues. On montre comment déterminer les gains du multiobservateur pour une convergence globale asymptotique. Les conditions de synthèse sont formulées en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Ces conditions sont par la suite relâchées par l'introduction de variables additives constituant ainsi des degrés de liberté supplémentaires. Un exemple numérique illustre la robustesse du multiobservateur proposé vis-à-vis de ces incertitudes et la relaxation apportée.

*Mots-clés*— Approche multimodèle, Multiobservateur, Entrées inconnues, Incertitudes de modèle, Stabilité asymptotique, Inégalités Linéaires Matricielles (LMI).

## I. INTRODUCTION

La surveillance des processus constitue actuellement un moyen privilégié pour améliorer la sûreté de leur fonctionnement. Plusieurs aspects complémentaires constituent cette approche et en particulier : la définition des sources d'information pour la surveillance, l'élaboration de modèles décrivant le processus en fonctionnement normal voire en fonctionnement anormal, la conception d'indicateurs de dysfonctionnements à partir des modèles précédents, la restauration de grandeurs non mesurées mais témoins du fonctionnement du procédé. Dans cette présentation nous nous attachons plus particulièrement à l'estimation de variables d'état non mesurées.

Dans le cas des systèmes linéaires à entrées inconnues, plusieurs approches, à base d'observateurs, ont été développées dans la littérature. Elles peuvent être regroupées en deux principales catégories. La première est basée sur l'élimination de l'effet des entrées inconnues lors de la synthèse d'un observateur. Koenig et al [1] ont présenté une méthode de conception d'un observateur proportionnel intégral (PI) d'ordre réduit pour des systèmes singu-

liers soumis à l'influence des entrées inconnues. Dans [2], de nouvelles conditions de convergence ont été présentées pour l'existence d'un observateur à entrées inconnues en utilisant la méthode de placement de pôles.

D'autre part, la deuxième catégorie est basée sur la compensation de l'effet de ces entrées inconnues lors de la conception d'un observateur. Cette catégorie diffère des observateurs linéaires de Luenberger par l'existence d'une variable discontinue non linéaire injectée dans les équations dynamiques de l'observateur. Cette variable discontinue dépend de l'erreur d'estimation du vecteur de sortie et de la borne des perturbations.

Les premiers travaux ont été réalisés par Utkin en utilisant une structure discontinue dans un observateur [3]. Walcott et Zak ont utilisé une approche basée sur la méthode de Lyapunov consistant à synthétiser un observateur qui, avec des hypothèses appropriées, assure la décroissance asymptotique de l'erreur d'estimation d'état même en présence de non linéarités et d'incertitudes sur l'entrée du système [4]. dans [5][6], Edwards et Spurgeon ont proposé une stratégie de conception d'observateur, semblable du point de vue structure de modèle à celle de Walcott et Zak, en offrant de plus un algorithme explicite de synthèse. Récemment, des travaux ont abordé le problème des performances des observateurs à mode glissant pour la reconstruction de défauts de nature additive [7] et multiplicatif [8].

Cependant, ces travaux concernent seulement les modèles linéaires valables uniquement dans une plage de fonctionnement restreinte. Pour remédier à cet inconvénient, une approche dite multimodèle a été développée ces dernières années. L'idée de cette approche est d'appréhender le comportement non linéaire d'un système par un ensemble de modèles locaux LTI (linéaires ou affines), chaque modèle local caractérise le fonctionnement du système dans une zone de fonctionnement particulière, les modèles locaux étant ensuite agrégés au moyen d'un mécanisme d'interpolation [9]. Dans ce cadre de nombreux travaux concernant l'ana-

lyse de la stabilité, la synthèse de multirégulateur et de multiobservateur ont été développés (voir par exemple [10], [11], [12], [13]).

Notre contribution dans cet article, réside dans l'estimation d'état d'un système non linéaire incertain soumis à l'influence d'entrées inconnues et représenté sous forme multimodèle. De nouvelles conditions de convergence du multiobservateur à mode glissant seront établies en se basant sur les travaux présentés dans [14]. En utilisant une fonction quadratique de Lyapunov, les conditions de convergence seront exprimées sous forme d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles (LMI) [15].

**Notation :** dans cet article, les notations suivantes sont utilisées :  $X^T$  représente la matrice transposée de la matrice  $X$ ,  $X > 0$  désigne que  $X$  est une matrice symétrique et définie positive,  $\mathbb{I}_M = \{1, 2, \dots, M\}$  et  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne pour les vecteurs et la norme spectrale pour les matrices.

## II. REPRÉSENTATION MULTIMODÈLE

Considérons un système non linéaire, représenté sous forme multimodèle de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + d_i) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur de sortie.

Pour le  $i^{eme}$  modèle local,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice d'entrée,  $d_i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  représente un vecteur dépendant du point de fonctionnement et  $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$  représente la matrice de sortie ou d'observation. Enfin,  $\xi(t)$  représente le vecteur de décision dépendant de l'entrée connue et/ou des variables d'état mesurables. La procédure permettant d'obtenir cette structure et d'estimer ses paramètres n'est pas développée ici ; indiquons simplement que l'on peut utiliser des techniques d'estimation paramétrique [16] ou des techniques de linéarisation [17].

Les fonctions d'activation  $\mu_i(\xi(t))$ ,  $i \in \mathbb{I}_M$  ont les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \mathbb{I}_M \end{cases} \quad (2)$$

Le nombre de modèles  $M$  dépend de la précision désirée, de la complexité du système non linéaire et du choix de la structure des fonctions d'activation.

Pour prendre en compte des erreurs de modélisation/approximation et parfois de la présence des entrées inconnues, nous considérons par la suite une représentation multimodèle dépendant d'incertitudes de modèle et de la

présence d'entrées inconnues :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) \left( (A_i + \Delta A_i(t)) x(t) + B_i u(t) + R_i \bar{u}(t) + d_i \right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i x(t) \end{cases} \quad (3)$$

où  $R_i \in \mathbb{R}^{n \times q}$  sont les matrices d'influence des entrées inconnues.

Le vecteur d'entrées inconnues  $\bar{u}(t)$  est supposé borné, tel que :

$$\|\bar{u}(t)\| < \rho \quad (4)$$

où  $\rho$  est un scalaire positif. Les incertitudes de modèle  $\Delta A_i(t)$  sont aussi supposées bornées :

$$\|\Delta A_i(t)\| < \delta_i \quad (5)$$

par la suite, pour alléger l'écriture des expressions des équations, la variable temps ( $t$ ) sera supprimée.

## III. STRUCTURE DU MULTIOBSERVATEUR

Le problème à résoudre ici est la reconstruction de l'état  $x(t)$ , en utilisant uniquement l'information disponible notamment l'entrée connue  $u(t)$  et la sortie mesurée  $y(t)$ .

La structure du multiobservateur que nous proposons est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) \left( A_i \hat{x} + B_i u + d_i + G_i (y - C \hat{x}) + \nu_i + \alpha_i \right) \\ \hat{y} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi) C_i \hat{x} \end{cases} \quad (6)$$

Les gains  $G_i$  et les vecteurs  $\nu_i$  et  $\alpha_i$  doivent être déterminés afin de garantir la convergence asymptotique du multiobservateur (6). Il faut noter que les termes  $\nu_i$  servent à compenser les erreurs dues aux entrées inconnues et les termes  $\alpha_i$  compensent les erreurs dues aux incertitudes de modèle.

### A. Conditions de stabilité du multiobservateur

Pour montrer les conditions de stabilité du multiobservateur, définissons les erreurs d'estimation d'état et de sortie de la manière suivante :

$$e = x - \hat{x} \quad (7)$$

$$r = y - \hat{y} = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i (x - \hat{x}) = \sum_{i=1}^M \mu_i(\xi(t)) C_i e \quad (8)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est obtenue en utilisant les équations (3) et (6) :

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( \bar{A}_{ij} e + \Delta A_i x + R_i \bar{u} - \nu_i - \alpha_i \right) \quad (9)$$

avec :

$$\bar{A}_{ij} = A_i - G_i C_j \quad (10)$$

**Théorème 1 :** l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle (3) et le multiobservateur (6) converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe une matrice symétrique et

définie positive  $P$  et des scalaires positifs  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  vérifiant les LMI suivantes  $\forall i, j \in \mathbb{I}_M$  :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i - C_j^T W_i^T - W_i C_j + (\beta_4 \delta_i^2 + \beta_3) I & P \\ P & -\beta_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

où  $\beta_4 = \beta_1(1 + \beta_2^{-1})$ . Les gains  $G_i$  et les termes  $\nu_i$  et  $\alpha_i$  du multiobservateur (6) sont définis par :

$$\begin{cases} \text{If } r \neq 0 & \begin{cases} \nu_i = \rho^2 \beta_3^{-1} \frac{\|PR_i\|^2}{2r^T r} P^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi) C_j^T r \\ \alpha_i = \beta_1(1 + \beta_2) \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T \hat{x}}{2r^T r} P^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi) C_j^T r \end{cases} \\ \text{If } r = 0 & \begin{cases} \nu_i = 0 \\ \alpha_i = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

$$G_i = P^{-1} W_i. \quad (13)$$

La démonstration de la convergence asymptotique du multiobservateur (6) emploie le lemme suivant :

**Lemme** : pour toutes les matrices  $X$  et  $Y$  ayant des dimensions appropriées, la propriété suivante est vérifiée :

$$X^T Y + Y^T X \leq \beta X^T X + \beta^{-1} Y^T Y, \quad \text{avec } \beta > 0$$

**Preuve** : Afin de démontrer la convergence asymptotique du multiobservateur, considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(e) = e^T P e \quad (14)$$

Sa dérivée par rapport au temps, le long de la trajectoire du système en utilisant les équations (7) et (9) s'explique :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( e^T (\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij}) e + \right. \\ & x^T \Delta A_i^T P e + e^T P \Delta A_i x - \\ & \left. 2\alpha_i^T P e + 2e^T P R_i \bar{u} - 2e^T P \nu_i \right) \end{aligned} \quad (15)$$

La propriété du lemme (1), nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( e^T (\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij}) e + \right. \\ & \beta_1 x^T \Delta A_i^T \Delta A_i x + \beta_1^{-1} e^T P^2 e - \\ & \left. 2\alpha_i^T P e + 2e^T P R_i \bar{u} - 2e^T P \nu_i \right) \end{aligned} \quad (16)$$

En utilisant l'expression de l'erreur d'estimation d'état (7), l'équation (16) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( e^T (\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij} + \beta_1^{-1} P^2) e + \right. \\ & \left. 2e^T P R_i \bar{u} + \beta_1 \delta_i^2 (\hat{x} + e)^T (\hat{x} + e) - \right. \\ & \left. 2\alpha_i^T P e - 2e^T P \nu_i \right) \\ \leq & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( e^T (\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij} + \beta_1^{-1} P^2) e + \right. \\ & \left. \beta_1 \delta_i^2 (\hat{x}^T \hat{x} + e^T e) + \beta_1 \delta_i^2 (\hat{x}^T e + e^T \hat{x}) - \right. \\ & \left. 2\alpha_i^T P e - 2e^T P \nu_i \right) \end{aligned} \quad (17)$$

en utilisant le lemme (1), l'expression (17) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( e^T (\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij} + \beta_1^{-1} P^2 + \right. \\ & \left. \beta_4 \delta_i^2 I) e + \beta_1 (1 + \beta_2) \delta_i^2 \hat{x}^T \hat{x} - \right. \\ & \left. 2\alpha_i^T P e + 2e^T P R_i \bar{u} - 2e^T P \nu_i \right) \end{aligned}$$

avec  $\beta_4 = \beta_1(1 + \beta_2^{-1})$

A partir de maintenant, deux cas sont à distinguer :

**Cas 1** :  $r \neq 0$ , en utilisant la relation (12), il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} 2\alpha_i^T P e &= \beta_1(1 + \beta_2) \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T \hat{x}}{r^T r} r^T \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi) C_j P^{-1} P e \\ &= \beta_1(1 + \beta_2) \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T \hat{x}}{r^T r} r^T r \\ &= \beta_1(1 + \beta_2) \delta_i^2 \hat{x}^T \hat{x} \\ 2e^T P \nu_i &= \rho^2 \beta_3^{-1} \frac{\|PR_i\|^2}{r^T r} e^T P P^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi) C_j^T r \quad (18) \\ &= \rho^2 \beta_3^{-1} \|PR_i\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e^T P R_i \bar{u} &= e^T P R_i \bar{u} + \bar{u}^T R_i^T P e \\ &\leq \beta_3 e^T e + \beta_3^{-1} \|P R_i \bar{u}\|^2 \\ &\leq \beta_3 e^T e + \rho^2 \beta_3^{-1} \|P R_i\|^2 \end{aligned}$$

De (18), on peut facilement déduire :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(\xi) \mu_j(\xi) \left( e^T (\bar{A}_{ij}^T P + P \bar{A}_{ij} + \beta_1^{-1} P^2 + \right. \\ & \left. \beta_4 \delta_i^2 I + \beta_3 I) e \right) \end{aligned} \quad (19)$$

avec :  $\beta_4 = \beta_1(1 + \beta_2^{-1})$  et  $\bar{A}_{ij} = A_i - G_i C_j$

**Cas 2** :  $r = 0$ , nous obtenons le même résultat

Pour les deux cas montrés, la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative, la convergence asymptotique du multiobservateur (6) est garantie. Alors l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro, si les conditions (11) et (12) sont vérifiées.

Remarquons que les inégalités suivantes :

$$(A_i - G_i C_j)^T P + P(A_i - G_i C_j) + \beta_1^{-1} P^2 + \beta_4 \delta_i^2 I + \beta_3 I < 0$$

sont non linéaires par rapport à  $P$  et  $G_i$ . Pour linéariser ces inégalités et obtenir les contraintes (11), il suffit de considérer le changement de variable suivant :

$$W_i = P G_i \quad (20)$$

et d'appliquer le complément de Schur [15].

*B. Relaxation des conditions de convergence du multiobservateur*

Afin de réduire le conservatisme des inégalités (11), nous allons exploiter le résultat proposé dans [12].

**Théorème 2 :** l'erreur d'estimation d'état entre le multimodèle (3) et le multiobservateur (6) converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices symétriques et définies positives  $P$  et  $Q_{ii}$ , des matrices  $Q_{ij}$  et des scalaires positifs  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\beta_3$  vérifiant les LMI suivantes  $\forall i, j \in \mathbb{I}_M$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} A_i^T P + P A_i - C_i^T W_i^T - W_i C_i + Q_{ii} + \beta_1(1 + \beta_2^{-1})\delta_i^2 I + \beta_3 I & P \\ P & -\beta_1 I \end{array} \right] < 0 \\ \left[ \begin{array}{cc} \frac{(A_i + A_j)^T}{2} P + P \frac{(A_i + A_j)}{2} - C_j^T W_i^T - W_i C_j - C_i^T W_j^T - W_j C_i + Q_{ij} + Q_{ij}^T + \beta_1(1 + \beta_2^{-1})\delta_i^2 I + \beta_3 I & P \\ P & -\beta_1 I \end{array} \right] < 0 \\ \left( \begin{array}{cccc} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1M} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1M}^T & \cdots & \cdots & Q_{MM} \end{array} \right) > 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

Les termes  $\nu_i$  et  $\alpha_i$  et les gains  $G_i$  du multiobservateur (6) sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } r \neq 0 \\ \text{Si } r = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \nu_i = \rho^2 \beta_3^{-1} \frac{\|P R_i\|^2}{2 r^T r} P^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi) C_j^T r \\ \alpha_i = \beta_1 (1 + \beta_2) \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T \hat{x}}{2 r^T r} P^{-1} \sum_{j=1}^M \mu_j(\xi) C_j^T r \\ \nu_i = 0 \\ \alpha_i = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

$$G_i = P^{-1} W_i. \quad (23)$$

**Preuve :** la démonstration est obtenue de le même façon qu'au théorème 1 en exploitant le résultat de [12].

IL faut noter que la relaxation est introduite grace aux matrices  $Q_{ij}$ . Ces matrices ne sont pas forcément définies positives ce qui permet de relâcher les contraintes faisant intervenir les termes croisés ( $i \neq j$ ). En comparaison avec [13], notons également que ces matrices ne sont pas forcément symétriques ce qui constituent des degrés de liberté supplémentaires.

#### IV. EXEMPLE DE SIMULATION

Considérons le multimodèle suivant [14], composé de deux modèles locaux et comportant deux sorties et trois états. Le vecteur de sortie du multimodèle  $y$  est une combinaison non linéaire des états, contrairement à l'exemple traité dans [14] où les matrices  $C_i$  sont identiques ( $C_i = C$ ,  $\forall i \in \{1, 2\}$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(u) \left( (A_i + \Delta A_i)x + B_i u + R_i \bar{u} \right) \\ y = \sum_{i=1}^2 \mu_i(u) C_i x \end{array} \right. \quad (24)$$

Les valeurs numériques des matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $R_i$  sont :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 5 & -8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta A_i$  représente les incertitudes de modèle, telles que :

$$\Delta A_i(j, k) = \theta A_i(j, k) \eta(j, k) \in \{1, 3\} \text{ et } i \in \{1, 2\}$$

avec  $\theta = 0.2$  et  $\eta$  est une fonction aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance égal à 1.

Dans ce cas, le multiobservateur considéré est décrit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(\xi) \left( A_i \hat{x} + B_i u + G_i (y - \hat{y}) + \nu_i + \alpha_i \right) \\ \hat{y} = \sum_{i=1}^2 \mu_i(u) C_i \hat{x} \end{array} \right. \quad (25)$$

avec :

$$(A_i - G_i C_j)^T P + P(A_i - G_i C_j) + \beta_1^{-1} P^2 + (\beta_4 \delta_i^2 + \beta_3) I < 0 \quad (26)$$

il est important de noter que l'implémentation du multiobservateur pose des problèmes pratique : en effet quand l'erreur d'estimation de sortie  $r$  tend vers zéro, les grandeurs  $\nu_i$  et  $\alpha_i$  tend vers l'infini. Ce problème peut être surmonté

en fixant un seuil de précision  $\varepsilon$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Si } \|r\| \geq \varepsilon \\ \text{Si } \|r\| \leq \varepsilon \end{cases} \begin{cases} \nu_i = \rho^2 \beta_3^{-1} \frac{\|PR_i\|^2}{2r^T r} P^{-1} \sum_{j=1}^2 \mu_j(\xi) C_j^T r \\ \alpha_i = \beta_1 (1 + \beta_2) \delta_i^2 \frac{\hat{x}^T \hat{x}}{2 r^T r} P^{-1} \sum_{j=1}^2 \mu_j(\xi) C_j^T r \\ \nu_i = 0 \\ \alpha_i = 0 \end{cases}$$

pour cet exemple, nous avons fixé  $\varepsilon$  à  $10^{-5}$ .

La résolution des inégalités du théorème 2 conduit aux matrices suivantes  $G_i$ ,  $P$ ,  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$  et  $Q_{22}$  :

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0.55 & 2.18 \\ 1.58 & -0.67 \\ 0.18 & -0.93 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 2.62 & 1.04 \\ -1.34 & 1.29 \\ 2.22 & -2.19 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_{11} = \begin{bmatrix} 1.66 & -0.13 & -0.44 \\ -0.13 & 1.44 & -0.12 \\ -0.44 & -0.12 & 2.16 \end{bmatrix}$$

$$Q_{22} = \begin{bmatrix} 1.87 & -0.27 & 0.18 \\ -0.27 & 1.66 & 0.12 \\ 0.18 & 0.12 & 1.39 \end{bmatrix}$$

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} 1.16 & 0.14 & 0.22 \\ 0.34 & 0.17 & 0.66 \\ -0.33 & 0.87 & -0.69 \end{bmatrix}$$

Le système (24) a été simulé en choisissant, pour l'entrée inconnue, deux créneaux filtrés se déclenchant aux instants 5s et 20s, de durées 2s et 14s et d'amplitudes respectives égales 1.5 et 1.2 (voir figure (2)).

La figure (1) présente l'évolution de l'entrée connue  $u$  appliquée au multimodèle ainsi qu'au multiobservateur. La figure (3) présente l'allure des fonctions d'activation  $\mu_1(u)$  et  $\mu_2(u)$ .

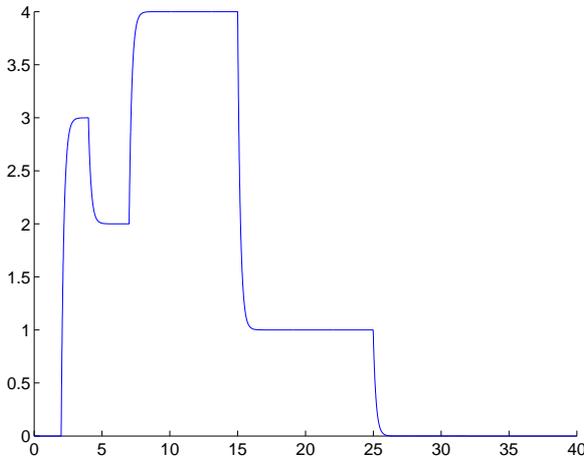


Fig. 1. Entrée connue  $u(t)$

Notons que pour  $\theta = 0.2$ , les conditions du théorème 1 ( et les conditions développées en [14]) échouent à synthétiser un multiobservateur pour le multimodèle (24), ce qui

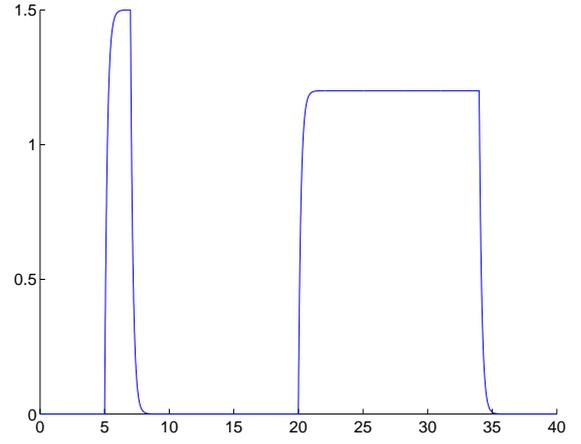


Fig. 2. Entrée inconnue  $\bar{u}$

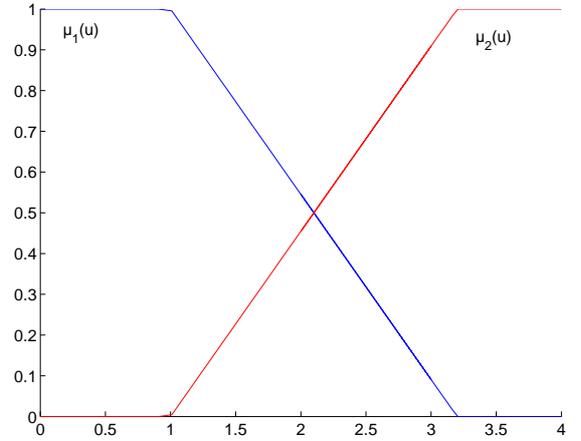


Fig. 3. Fonctions d'activation

illustre bien la relaxation apportée.

Les figures (4), (5) et (6) montrent la comparaison entre les variables d'état du multimodèle (24) et leurs estimations respectives par le multiobservateur (25). On constate que dans chaque figure les deux tracés sont superposés sauf au voisinage de l'origine; cela est dû au choix des conditions initiales du multiobservateur.

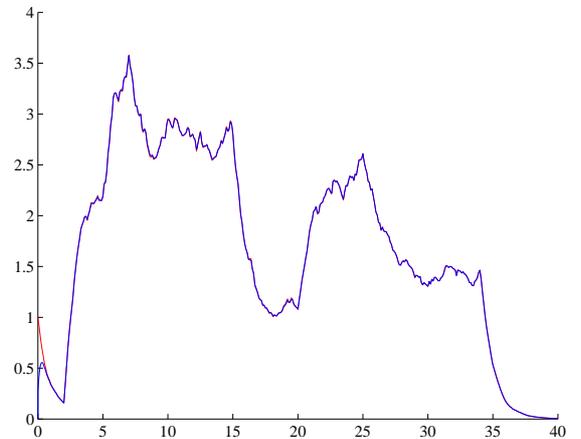


Fig. 4.  $x_1$  et son estimé  $\hat{x}_1$

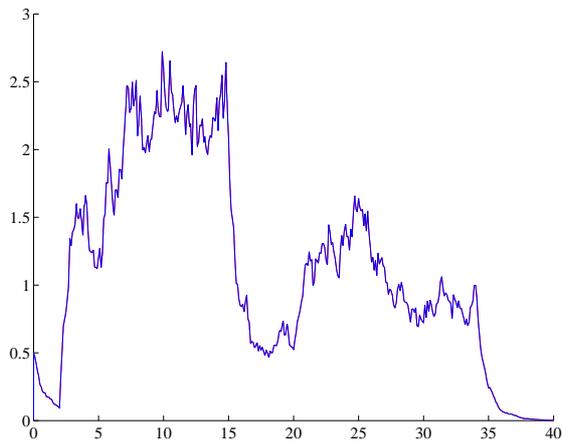


Fig. 5.  $x_2$  et son estimé  $\hat{x}_2$

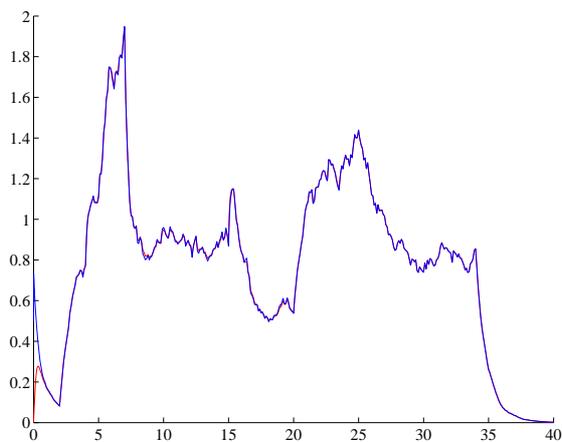


Fig. 6.  $x_3$  et son estimé  $\hat{x}_3$

## V. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons proposé une méthode d'estimation d'état d'un système non linéaire incertain représenté sous forme multimodèle et soumis à l'influence d'entrées inconnues. Pour cela, un multiobservateur est synthétisé sur la base de l'interpolation de plusieurs observateurs à mode glissant. En exploitant la deuxième méthode de Lyapunov, nous avons montré la robustesse du multiobservateur proposé par rapport aux perturbations (incertitudes de modèle et entrées inconnues). La convergence du multiobservateur exige la prise en compte des contraintes de couplage entre les différents observateurs à mode glissant. Ces contraintes mènent à la résolution d'un problème de type LMI. Sous réserve d'existence de matrices appropriées nous avons démontré que la reconstruction d'état du multimodèle est possible. Enfin, l'exemple de simulation présenté a montré la robustesse du multiobservateur à mode glissant vis-à-vis des perturbations considérées et la relaxation apportée aux contraintes de convergence.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. Koenig and S. Mammar, "Design of proportional-integral observer for unknown input descriptor systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 47(12), pp. 2057 – 2062, 2002.
- [2] S. F. Lin and A. P. Wang, "Unknown input observers for singular systems designed by eigenstructure assignment," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 340(1), pp. 43 – 61, 2003.
- [3] V. Drakunov Sergey and I. Utkin Vadim, "Sliding mode control in dynamic systems," *International Journal of Control*, vol. 55(4), pp. 1029 – 1037, 1992.
- [4] B. L. Walcott and S. H. Zak, "Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 88 – 104, 1988.
- [5] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "On the development of discontinuous observers," *International Journal of Control*, vol. 25, pp. 1211 – 1229, 1994.
- [6] C. Edwards and S. K. Spurgeon, "Sliding mode observers for fault detection and isolation," *Automatica*, vol. 36(4), pp. 541–553, 2000.
- [7] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, and D. Maquin, "Conception d'un observateur flou à entrées inconnues," *Rencontres franco-phones sur la Logique Floue et ses Applications, Nantes, France, 18-19 Novembre 2004.*, 2004.
- [8] C. Edwards, "A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction," *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 5, pp. 5279–5284, 2004.
- [9] J. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its application to modelling and control," *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, vol. 15, pp. 116 – 132, 1985.
- [10] K. Tanaka, T. Ikeda, and Y. Y. He, "Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based design," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 6(1), pp. 250 – 256, 1998.
- [11] M. Chadli, D. Maquin, and J. Ragot, "Multiple observer for discrete-time multiple model," *IFAC Congres, Safeprocess*, 2003.
- [12] L. Xiaodong and Z. Qingling, "New approaches to  $H_{\infty}$  controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI," *Automatica*, vol. 39, pp. 1571–1582, 2003.
- [13] E. Kim and H. Lee, "New approaches to relax quadratic stability of fuzzy control systems," *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 8(5), pp. 523 – 534, 2000.
- [14] A. Akhenak, M. Chadli, J. Ragot, and D. Maquin, "State estimation of uncertain multiple model with unknown inputs," *43rd IEEE Conference on Decision and Control, Atlantic, Paradise Island, Bahamas*, vol. 4, pp. 3563 – 3568, 2004.
- [15] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia : SIAM, 1994.
- [16] K. Gasso, G. Mourot, and J. Ragot, "Structure identification in multiple model representation : elimination and merging of local models," *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2992–2997, 2001.
- [17] T. A. Johansen, R. Shorten, and R. Murray-Smith, "On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models," *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, vol. 8(3), pp. 297 – 312, 2000.