



**HAL**  
open science

# Une approche séquentielle de l'hypothèse de Riemann généralisée

Anne de Roton

► **To cite this version:**

Anne de Roton. Une approche séquentielle de l'hypothèse de Riemann généralisée. 2006. hal-00091966v1

**HAL Id: hal-00091966**

**<https://hal.science/hal-00091966v1>**

Preprint submitted on 7 Sep 2006 (v1), last revised 19 Nov 2009 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# UNE APPROCHE SÉQUENTIELLE DE L'HYPOTHÈSE DE RIEMANN GÉNÉRALISÉE

par

Anne de Roton

---

**Résumé.** — Une généralisation du théorème de Beurling et Nyman établit que l'hypothèse de Riemann pour une fonction  $F$  de la classe de Selberg est équivalente à l'appartenance de la fonction  $\chi$ , indicatrice de l'intervalle  $]0, 1[$ , à l'adhérence d'un sous-espace de fonctions  $\mathcal{B}_F$  dans l'espace  $L^2(0, +\infty)$ . Dans cet article, l'auteur étend aux fonctions  $F$  de la classe de Selberg un résultat de Báez-Duarte en donnant une construction d'une suite de  $\mathcal{B}_F$  qui, sous l'hypothèse de Riemann pour la fonction  $F$ , converge dans  $L^2(0, +\infty)$  vers la fonction  $\chi$ .

**Abstract (An approach of generalised Riemann hypothesis through sequences)**

A generalisation of the Beurling and Nyman criterion implies that the Riemann hypothesis is equivalent to the statement that for any function  $F$  in the Selberg class,  $\chi$ , the characteristic function of  $]0, 1[$ , belongs to the adherence in  $L^2(0, +\infty)$  of a subspace  $\mathcal{B}_F$ . In this article, the author generalise a result of Báez-Duarte to the Selberg class and give a construction of sequences of  $\mathcal{B}_F$  converging towards  $\chi$  in  $L^2(0, +\infty)$ .

## 1. Présentation des résultats; historique

Le théorème de Beurling et Nyman (cf [Be]) établit une correspondance entre des régions sans zéro de la fonction  $\zeta$  de Riemann et la densité d'un certain sous-espace fonctionnel. Plus précisément, on considère l'espace de fonctions  $\tilde{\mathcal{B}}$  suivant

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ t \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\}, n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1, \sum_{k=1}^n c_k \theta_k = 0 \right\},$$

où  $\{.\}$  représente la fonction partie fractionnaire.

Le théorème de Beurling et Nyman s'énonce ainsi :

---

**Mots clefs.** — Beurling-Nyman criterion, generalised Riemann hypothesis, Selberg class.

**Théorème 1 (Beurling-Nyman).** — Soit  $p > 1$  un nombre réel. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $\zeta(s)$  ne s'annule pas dans le demi-plan  $\Re(s) > 1/p$ ;
2.  $\tilde{\mathcal{B}}$  est dense dans  $L^p(0, 1)$ ;
3. La fonction constante égale à  $-1$  est dans l'adhérence de  $\tilde{\mathcal{B}}$  dans  $L^p(0, 1)$ .

Bercovici et Foias étendent dans [BF] ce résultat au cas  $p = 1$ . Le lecteur trouvera des commentaires du théorème de Beurling et Nyman dans l'article [BS1].

L'étude des régions sans zéro de la fonction  $\zeta$  de Riemann est donc liée à la recherche de suites  $(f_n)_n$  de fonctions de  $\tilde{\mathcal{B}}$  telles que la norme  $\|1 + f_n\|_p$  tende vers 0. La formule  $\sum_{k=1}^{\infty} \{1/kt\} = -1$  pour  $0 < t \leq 1$ , issue de formules classiques sur la fonction  $\mu$  de Möbius, conduit à considérer les sommes partielles

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \mu(k) \{1/kt\},$$

qui constituent une suite dite naturelle.

Dans son article [BD1], Báez-Duarte étudie une suite  $(B_n)_n$ , construite à partir de la suite naturelle  $(S_n)_n$  qu'il modifie afin d'obtenir des fonctions de  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Il démontre, sous l'hypothèse de non-annulation de  $\zeta$  dans le demi-plan  $\{Res > 1/p\}$ , que la suite  $(B_n)_n$  converge vers  $-1$  dans l'espace  $L^r(0, 1)$  pour tout réel  $r$  vérifiant  $1 < r < 2 - 1/p$ .

Balazard et Saias améliorent ce résultat dans [BS1] en montrant que cette hypothèse de non-annulation est équivalente à la convergence de la suite de fonctions  $(B_n)_n$  vers  $-1$  dans  $L^r(0, 1)$  pour tout  $r$  vérifiant  $0 < r < p$ .

Notons que les fonctions  $B_n$  sont des fonctions de  $\tilde{\mathcal{B}}^{nat}$ , le sous-ensemble des fonctions  $f$  de  $\tilde{\mathcal{B}}$  définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$f(t) := \sum_{k=1}^n c_k \left\{ \frac{1}{kt} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

Plusieurs questions, soulevées par Báez-Duarte dans [BD1], se posent alors :

- Peut-on dans l'énoncé du théorème de Beurling et Nyman remplacer dans les seconde et troisième assertions, l'espace  $\tilde{\mathcal{B}}$  par l'espace  $\tilde{\mathcal{B}}^{nat}$ ?
- Pour un entier naturel  $n$  donné, la fonction  $B_n$  minimise-t-elle la norme  $\|f + 1\|_p$  pour  $f$  une fonction de  $\tilde{\mathcal{B}}^{nat}$  de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \{1/kt\}?$$

Une réponse a été apportée par Báez-Duarte à ces deux questions dans le cas  $p = 2$ . Nous nous restreindrons désormais à ce cas.

En tenant compte de la symétrie des zéros de la fonctions  $\zeta$  de Riemann, la première assertion du théorème de Beurling et Nyman dans le cas  $p = 2$  est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Le théorème de Beurling et Nyman dans le cas  $p = 2$  fournit donc une reformulation de l'hypothèse de Riemann en terme d'analyse fonctionnelle.

L'article **[BS2]** de Balazard et Saias détaille ce cas précis du théorème de Beurling et Nyman (le cas  $p = 2$  est en fait dû essentiellement à Nyman) et en donne un nouvel éclairage.

Il est souvent plus commode de travailler dans l'espace  $L^2(0, +\infty)$  et non plus de se restreindre aux fonctions identiquement nulles sur  $[1, +\infty[$ . Avec les notations suivantes :

- $\chi$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $]0, 1[$ ;
- $\mathcal{B}$  est l'ensemble des fonctions de la forme

$$f(t) = \sum_{k=1}^n c_k \left\{ \frac{\theta_k}{t} \right\},$$

avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $0 < \theta_k \leq 1$ ,

les auteurs de **[BDBLS1]** montrent que le théorème de Beurling et Nyman dans le cas  $p = 2$  établit l'équivalence entre l'hypothèse de Riemann et l'appartenance de la fonction  $\chi$  à l'adhérence de  $\mathcal{B}$  dans  $L^2(0, +\infty)$ .

Si, par analogie avec les notations précédentes,  $\mathcal{B}^{nat}$  désigne le sous-espace de  $\mathcal{B}$  composé des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$f(t) := \sum_{k=1}^n c_k \left\{ \frac{1}{kt} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

alors les fonctions  $B_n$  et  $S_n$  sont des fonctions de  $\mathcal{B}^{nat}$ .

Báez-Duarte démontre dans l'article **[BD2]** que, sous l'hypothèse de Riemann (cas  $p = 2$ ), les suites  $(B_n)_n$  et  $(S_n)_n$  divergent dans  $L^2(0, +\infty)$ .

En 2002, dans son article **[BD3]**, il montre pourtant que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion :  $\chi \in \overline{\mathcal{B}^{nat}}$ . Il donne une construction explicite, de Balazard, d'une suite  $(F_n)_n$  de  $\mathcal{B}^{nat}$  qui converge vers  $\chi$  dans  $L^2(0, +\infty)$  et qui garantit une certaine vitesse de convergence. Les fonctions  $F_n$  sont des versions lisses des fonctions  $S_n$  décrites précédemment.

Notons que la recherche d'une fonction de  $\tilde{\mathcal{B}}$  qui minimise la norme  $\|f + 1\|_2$  amène à étudier une fonction définie à partir d'une autocorrélation multiplicative de la fonction partie fractionnaire. Une telle étude fait l'objet de l'article **[BDBLS2]**. À la lecture de cette article, le lecteur pourra se convaincre de la difficulté des problèmes soulevés par cette question.

Nous avons étendu dans **[dR2]** le théorème de Beurling et Nyman dans le cas  $p = 2$  aux fonctions de la classe de Selberg. Nous allons dans cet article étendre le résultat de Báez-Duarte et Balazard à cette même classe de fonctions.

Commençons par rappeler la définition de la classe de Selberg  $S$ , introduite en 1989 dans **[Sel]**, et qui est conjecturalement l'ensemble des fonctions  $L$  de formes automorphes.

**Définition 1.** — On dit qu'une fonction  $F$  appartient à la classe de Selberg  $S$  si  $F$  vérifie les conditions suivantes :

1. Pour  $\Re s > 1$ ,  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$  est une série de Dirichlet absolument convergente;
2. il existe un entier naturel  $m$  tel que  $(s-1)^m F(s)$  soit une fonction entière d'ordre fini;
3. la fonction  $F$  satisfait une équation fonctionnelle de la forme :

$$\Phi(s) = \omega \overline{\Phi(1-\bar{s})} \quad \text{où } \Phi(s) = Q^s \Delta(s) F(s),$$

avec  $\Delta(s) = \prod_{j=1}^r \Gamma(\lambda_j s + \mu_j)$ ,  $\lambda_j > 0$ ,  $\Re \mu_j \geq 0$ ,  $Q > 0$  et  $|\omega| = 1$ ;

4. pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $a(n) = O(n^\varepsilon)$ ;
5. pour  $\Re s$  assez grand,  $\log F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} b(n)n^{-s}$  où  $b(n) = 0$  si  $n$  n'est pas une puissance d'un nombre premier et  $b(n) = O(n^\theta)$  pour un  $\theta < 1/2$ .

**Notations 1.** — On note  $d = 2 \sum_{j=1}^r \lambda_j$  le degré de  $F$ ,  $m_F$  l'ordre du pôle éventuel de  $F$  en  $s = 1$ .

On note  $\bar{f}$  la fonction  $s \mapsto \overline{f(\bar{s})}$ .

L'assertion 5 implique que la fonction  $F$  admet un développement en produit Eulérien de la forme :

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p(s),$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des nombres premiers et  $F_p$  est une série de Dirichlet de la forme  $F_p(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta(k)p^{-ks}$ .

Les fonctions de la classe de Selberg ont été étudiées dans de nombreux articles depuis leur introduction en 1989. Le lecteur pourra en particulier consulter l'article [KP0], dans lequel Kaczorowski et Perelli dressent un bilan de l'étendue des connaissances dans ce domaine en 1997.

On appelle classe de Selberg étendue et on note  $S^\#$  l'ensemble des fonctions  $F$  qui vérifient les trois premières assertions.

On distingue parmi les zéros d'une fonction  $F$  de la classe de Selberg les zéros de la forme  $-(n + \mu_j)/\lambda_j$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $j \in [1, r]$ , que l'on appelle zéros triviaux de  $F$ . Les zéros non triviaux de  $F$  sont de partie réelle comprise entre 0 et 1. La droite d'équation  $\Re s = 1/2$  est appelée droite critique.

**Conjecture 1.** — Les zéros non triviaux de  $F$  sont de partie réelle égale à  $1/2$ .

C'est ce que l'on appelle hypothèse de Riemann généralisée pour la fonction  $F$ .

Afin de caractériser l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction  $F$  de la classe de Selberg, nous avons introduit dans [dR2] la fonction complémentaire associée à  $F$ .

**Définition 2.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg. On définit la fonction complémentaire associée à  $F$  par :

$$\Psi_F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \operatorname{Res} \left( \frac{x^s}{s} F(s), 1 \right) - \sum_{n \leq x} a(n) \end{array}$$

On définit également la fonction  $\Psi_F^{(1)}$  par  $\Psi_F^{(1)}(x) = \Psi_F(1/x)$ .

Nous avons démontré dans l'article [dR2] que l'hypothèse de Riemann généralisée pour une fonction  $F$  de la classe de Selberg était équivalente à la densité d'un sous-espace de fonctions dans  $L^2(0, 1)$ . Plus précisément, on définit le sous-espace de fonctions suivant :

$$\mathcal{B}_F = \left\{ f : t \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \Psi_F \left( \frac{\theta_k}{t} \right), n \in \mathbb{N}, \forall k \in [1, n], c_k \in \mathbb{C}, 0 < \theta_k \leq 1 \right\}.$$

Le théorème que nous avons obtenu est le suivant.

**Théorème I.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg  $S$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La fonction  $F$  vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée;
2.  $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty)$  et  $\chi \in \overline{\mathcal{B}_F}$ , où  $\chi$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $]0, 1[$ .

La démonstration de ce théorème est essentiellement basée sur la formule suivante, qui nous sera également utile dans cet article

$$\mathcal{M}\Psi_F^{(1)}(s) = -\frac{F(s)}{s}, \text{ pour } \frac{1}{2} < \Re s < 1, \quad (1)$$

où  $\mathcal{M}f$ , la transformée de Mellin de  $f$ , est définie par

$$\mathcal{M}f(s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}dt.$$

**Remarque 1.** — Nous avons démontré dans [dR1] que si  $F$  est une fonction de la classe de Selberg de degré strictement inférieur à 4, alors  $\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty)$ .

Nous démontrons dans cet article le résultat suivant, qui est une extension du résultat de Bâez-Duarte et Balazard.

**Théorème II.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. Si  $\mu_F(n)$  désigne le  $n$ -ième coefficient de la série de Dirichlet  $F^{-1}$ , on suppose qu'il existe un réel  $\alpha < 1/2$  tel que  $\mu_F(n) = O(n^\alpha)$ . Alors, pour  $N$  entier supérieur ou égal à 3, la distance dans  $L^2(0, +\infty)$  entre la fonction  $\chi$ , indicatrice de l'intervalle  $]0, 1[$ , et la fonction

$$x \mapsto -\sum_{n=1}^N \mu_F(n) e^{-a \frac{\log n}{\log \log N}} \Psi_F(1/nx),$$

où  $a$  désigne une constante dépendant uniquement de  $F$ , est  $O((\log \log N)^{-1/3})$ .

Afin d'obtenir ce résultat, nous étudierons dans la partie 2 l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Dirichlet inverse d'une fonction de la classe de Selberg, puis nous estimerons dans la partie 3 l'ordre de grandeur du logarithme d'une fonction de la classe de Selberg. La partie 4 sera enfin consacrée à la démonstration du théorème II.

Notons que la démonstration de ce résultat n'utilise pas les théorèmes d'analyse fonctionnelle que les démonstrations précédentes du théorème de Beurling et Nyman mettaient en oeuvre.

## 2. Inverse d'une fonction de la classe de Selberg

**Notations 2.** — Dans toute la suite,  $s$  désignera un nombre complexe de partie réelle  $\sigma$  et de partie imaginaire  $\tau$ .

**2.1. Cas d'une série de Dirichlet quelconque.** — La proposition suivante est apparentée au *Satz 4* de [Land] et sa démonstration est quasiment identique à celle de Landau, nous ne la reproduisons donc pas ici.

**Proposition 2.1 (Landau).** — Soient  $\eta$  un réel et  $f$  une fonction holomorphe sans zéro dans le demi-plan  $\sigma \geq \eta$ . On suppose de plus que  $f(s)$  tend vers 1 uniformément en  $\tau$  lorsque  $\sigma$  tend vers l'infini et qu'il existe un réel  $c$  tel que  $f(s) = O((1 + |\tau|)^c)$  uniformément pour  $\sigma \geq \eta$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $\delta > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a uniformément pour  $\sigma \geq \eta + \delta$  et  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{1}{f(s)} = O((1 + |\tau|)^\varepsilon).$$

La proposition suivante est une généralisation du *Satz 12* de [Land].

**Proposition 2.2.** — Soit  $F(s) = \sum_{n \geq 1} c(n)n^{-s}$  une série de Dirichlet vérifiant :

- $c(1) = 1$ ;
- il existe  $K \in \mathbb{R}$  tel que  $c(n) \ll n^K$ ;
- la fonction  $F$  admet un prolongement méromorphe avec un nombre fini de pôles et sans zéro dans un demi-plan de la forme  $\sigma > \eta$ ;
- il existe  $\tau_0 > 0$ , et  $c > 0$  tels que  $F(s) = O((1 + |\tau|)^c)$  uniformément pour  $\sigma > \eta$  et  $|\tau| \geq \tau_0$ .

Alors l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet  $1/F(s)$  est inférieure ou égale à  $\eta$ .

**Démonstration.** Sans restreindre la généralité, on peut supposer  $F$  méromorphe dans  $\sigma \geq \eta$ , sans pôle sur  $\sigma = \eta$ . Posons  $G(s) = 1/F(s)$ .

La fonction  $G$  est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence  $\sigma_c$  finie, comme le démontre Landau dans [Land], *Satz 5*. Dans le demi-plan  $\sigma > \eta$ , la fonction  $G$  possède un prolongement analytique holomorphe. Pour montrer  $\sigma_c \leq \eta$ , il suffit donc

de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $\sigma > \eta$ ,  $G(s) = O_{\varepsilon, \sigma}(|\tau|^\varepsilon)$  et d'appliquer le théorème de Landau-Schnee (voir [Te], section 2.2) à la fonction  $G$ .

Quitte à considérer  $F(s + \eta)$ , on peut supposer  $\eta = 0$ . On désigne par  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les pôles de la fonction  $F$  dans le demi-plan  $\sigma > 0$  et par  $m_1, m_2, \dots, m_n$  leurs multiplicités respectives. À chaque pôle  $a_i$ , on associe  $a_i^* = -\bar{a}_i$ .

On définit la fonction

$$f(s) = F(s) \frac{(s - a_1)^{m_1} \dots (s - a_n)^{m_n}}{(s - a_1^*)^{m_1} \dots (s - a_n^*)^{m_n}}.$$

Soit  $\sigma > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . En appliquant la proposition 2.1 à la fonction  $f$ , on obtient

$$\frac{1}{f(s)} = O((1 + |\tau|)^\varepsilon).$$

La même majoration vaut pour  $G(s)$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**2.2. Cas de la classe de selberg.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg étendue telle que  $a(1) = 1$ . On écrira pour  $\sigma > 1$  :

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} a(n) n^{-s}.$$

L'inverse de  $F$  est une série de Dirichlet formelle. Ses coefficients, que l'on note  $\mu_F(n)$  par analogie avec la fonction  $\mu$  de Möbius, sont définis par (voir sections I.2.3 et I.2.4 de [Te])

$$\begin{cases} \mu_F(1) = 1 \\ \mu_F(n) = \sum_{d|n, d < n} a(n/d) \mu_F(d) \quad (n > 1). \end{cases}$$

**Proposition 2.3.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg étendue  $S^\#$  vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée et  $a(1) = 1$ . Alors  $F^{-1}$  est une série de Dirichlet d'abscisse de convergence  $\sigma_c \leq 1/2$ .

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer la proposition 2.2 à la fonction  $F$ .  $\square$

**Remarque 2.** — On en déduit immédiatement une première estimation des coefficients  $\mu_F(n)$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \mu_F(n) = O_\varepsilon(n^{1/2+\varepsilon}).$$

Sous une hypothèse qui conjecturalement est vraie pour toutes les fonctions de la classe de Selberg, le théorème suivant permet d'améliorer cette majoration.

**Proposition 2.4.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg. On suppose que pour tout nombre premier  $p$ ,  $F_p(s)^{-1}$  est un polynôme en  $p^{-s}$  de degré  $r$  indépendant de  $p$ . Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\mu_F(n) = O_\varepsilon(n^\varepsilon).$$



**Démonstration.** On peut écrire  $F_p(s)^{-1}$  sous la forme

$$F_p(s)^{-1} = (1 - \alpha_{1,p}p^{-s}) \dots (1 - \alpha_{r,p}p^{-s}) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \lambda_p^{(i)} p^{-is}$$

où  $\lambda_p^{(i)} = \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} \alpha_{j_1,p} \alpha_{j_2,p} \dots \alpha_{j_i,p}$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $\lambda_p^{(0)} = 1$ . On notera  $\lambda_p^{(i)} = 0$  pour  $i > r$ .

Si  $n = p_1^{s_1} \dots p_m^{s_m}$  est la décomposition en produit de nombres premiers distincts de l'entier  $n$ , on a  $\mu_F(n) = (-1)^{s_1 + \dots + s_m} \prod_{i=1}^m \lambda_{p_i}^{(s_i)}$  et

$$|\mu_F(n)| \leq \left| \prod_{i=1}^m \lambda_{p_i}^{(s_i)} \right| = \left| \prod_{i=1}^k \lambda_{p_i}^{(s_i)} \right|,$$

où on a rangé les  $s_i$  par ordre croissant (quitte à renuméroter les  $p_i$ ) et où on a posé  $k := \max\{l \in \mathbb{N}, s_l \leq r\}$ .

On définit la série entière  $L_p$  par :

$$L_p(X) = \prod_{i=1}^r (1 - \alpha_{i,p} X)^{-1} = \sum_{i=0}^r a(p^k) X^k.$$

En utilisant l'hypothèse de Ramanujan, on constate que le rayon de convergence  $R$  de cette série entière vérifie  $R \geq 1$ . S'il existait un indice  $i$  compris entre 1 et  $r$  tel que  $|\alpha_{i,p}| > 1$  alors la fonction  $L_p$  aurait un pôle en  $\alpha_{i,p}^{-1}$  et cela contredirait  $R \geq 1$ . On a donc pour tout entier  $1 \leq i \leq r$ ,  $|\alpha_{i,p}| \leq 1$ .

Pour tout nombre premier  $p$  et tout entier  $i$  compris entre 1 et  $r$ , on a

$$|\lambda_p^{(i)}| \leq \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_i} |\alpha_{j_1,p} \alpha_{j_2,p} \dots \alpha_{j_i,p}| \leq \binom{r}{i}.$$

Ainsi

$$|\mu_F(n)| \leq \left| \prod_{i=1}^k \lambda_{p_i}^{(s_i)} \right| \leq \prod_{i=1}^k \binom{r}{s_i} \leq 2^{rk} \leq 2^{rm} \leq 2^{r\omega(n)}$$

Or on a :

$$\omega(n) \leq (1 + o(1)) \frac{\log n}{\log \log n},$$

donc  $\mu_F(n) = O_{\varepsilon,r} n^{\varepsilon}$ . □

### 3. Estimation du logarithme d'une fonction de la classe de Selberg

#### 3.1. Majoration de $F$ et $F^{-1}$ . —

**Définition 3.** — Pour  $T > 0$ , on définit  $N_F(T)$ , le nombre de zéros  $s = \sigma + i\tau$  de  $F$  vérifiant

$$0 \leq \sigma \leq 1, 0 < \tau \leq T.$$

L'étude de cette fonction a été esquissée dans [Sel] et [BH]. Ces auteurs donnent la proposition suivante.

**Proposition 3.1.** — Pour tout  $T > 0$ ,

$$N_F(T) = \frac{d}{2\pi} T \log T + c_1 T + O(\log T),$$

où  $c_1$  est une constante dépendant de  $F$ .

En particulier pour tout  $T > 0$ ,

$$N_F(T+1) - N_F(T) = O(\log T). \quad (2)$$

Dans l'établissement des estimations présentées dans les deux propositions suivantes, nous avons suivi l'étude de la fonction  $\zeta$  que Titchmarsh a menée dans [T2], chapitres IX et XIV. Quelques détails mineurs diffèrent cependant et le lecteur pourra consulter [dR0] pour une démonstration détaillée de ces résultats. Nous donnons donc ici les résultats qui nous seront utiles, sans démonstration.

**Notations 3.** — Pour tout  $t > 3$ , on notera

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\log t}{\log \log t}.$$

**Proposition 3.2.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg qui vérifie l'hypothèse de Riemann généralisée. Alors il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\log |F(s)| \leq K\mathcal{L}(|\tau|)$$

uniformément pour  $\sigma > \frac{1}{2}$ .

**Proposition 3.3.** — Il existe deux constantes positives absolue  $c_1$  et  $c_2$  telles que, pour tous nombres réels  $\sigma$  et  $\tau$  vérifiant :

$$|\tau| \geq 3, \quad \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log \log |\tau|} \leq \sigma \leq 1,$$

on a

$$|F(\sigma + i\tau)|^{-1} \leq e^{c_2 \mathcal{L}(\tau)}.$$

**3.2. Généralisation à la classe de Selberg d'une inégalité de Burnol.** —

Dans son article [Bu2], Burnol donne une majoration uniforme de  $\zeta(s)/\zeta(s+A)$  sur la droite critique. Nous allons ici généraliser cette majoration pour une fonction de la classe de Selberg.

**Proposition 3.4.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg et  $A$  un réel vérifiant  $0 \leq A \leq 1/3$ . Supposons que l'hypothèse de Riemann généralisée soit vraie pour  $F$ . Alors, sur la droite critique,

$$\left| \frac{F(s)}{F(s+A)} \right| = O(|s|^{Ad/2}).$$

**Démonstration.** Pour  $\Re s = 1/2$  et  $0 \leq A \leq 1/3$ , on considère la fonction  $g_A(s) = F(s - A/2)/F(s + A/2)$ .

Pour  $A > 0$  et  $\Re(s) \geq 1/2$ , on définit

$$h_A(s) = \frac{(s - 1 - A/2)^{m_F} F(s - A/2)}{(s - 1 + A/2)^{m_F} F(s + A/2)} \frac{1}{s^{dA/2}}.$$

La fonction  $h_A$  est holomorphe dans  $\{\sigma \geq 1/2\}$ . Si  $s = 1/2 + i\tau$  et  $0 < A \leq 1/3$ , alors  $z = s + A/2 = (1 + A)/2 + i\tau$  vérifie  $1/2 < \Re z \leq 2/3$ . On a alors, d'après l'équation fonctionnelle de  $F$  et le lemme 2 de [dR1]

$$|g_A(s)| = \left| \frac{\overline{F(1-z)}}{F(z)} \right| = \left| Q^{2z-1} \frac{\Delta(z)}{\overline{\Delta(1-z)}} \right| = O\left(|z|^{d(\Re z - 1/2)}\right),$$

où la constante implicite dans le  $O$  ne dépend que de  $F$ . On a donc sur la droite critique, uniformément pour  $0 \leq A \leq 1/3$

$$|g_A(s)| = O\left(|s|^{Ad/2}\right) \text{ donc } h_A(s) = O(1). \quad (3)$$

On sait d'autre part que  $\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} F(s) = 1$ , donc il existe  $\Lambda_0 > 1$ , tel que pour tout  $\sigma \geq \Lambda_0$ , pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , pour tout  $A$  tel que  $0 \leq A \leq 1/3$ ,

$$|F(s + A/2)| \geq \frac{1}{2} \text{ et } |F(s - A/2)| \leq 2,$$

donc

$$\left| \frac{F(s - A/2)}{F(s + A/2)} \right| \leq 4.$$

Comme on a pour  $\sigma \geq 1$ ,

$$\left| \frac{s - 1 - A/2}{s - 1 + A/2} \right|^{m_F} \leq 1,$$

alors pour tout  $\sigma \geq \Lambda_0$ , on a la majoration  $|h_A(s)| \leq 4|s|^{-dA/2} \leq 4\Lambda_0^{-dA/2}$ .

Appliquons maintenant le principe de Phragmén-Lindelöf à  $h_A$  entre  $\sigma_1 = 1/2$  et  $\sigma_2 = \Lambda_0$ .

– Évaluons  $h_A$  en  $\sigma_1$ .

$$h_A(s) = \left( \frac{s - 1 - A/2}{s - 1 + A/2} \right)^{m_F} g_A(s) \frac{1}{s^{dA/2}},$$

donc, d'après l'équation (3), on a uniformément par rapport à  $A$ ,  $0 \leq A \leq 1/3$ ,  $h_A(s) = O(1)$ .

– Évaluons  $h_A$  en  $\sigma_2$ . On sait déjà

$$|h_A(\sigma_2 + i\tau)| \leq 4|s|^{-dA/2} \leq 4\Lambda_0^{-dA/2} \leq 4$$

pour tout  $A$  tel que  $0 \leq A \leq 1/3$ .

– Évaluons  $h_A$  en  $s$  tel que  $\sigma \geq 1/2$ .

D'après les estimations précédentes et le principe de Phragmén-Lindelöf, pour  $1/2 \leq \sigma \leq \Lambda_0$ ,  $h_A(s) = O(1)$ , uniformément par rapport à  $A$  tel que  $0 \leq A \leq 1/3$ . Donc finalement  $h_A(s) = O(1)$ , et donc

$$g_A(s) = O(|s|^{Ad/2}),$$

uniformément par rapport à  $A$  tel que  $0 \leq A \leq 1/3$  et  $1/2 \leq \sigma \leq 1/2 + A$ .

Cette estimation est donc vraie en particulier pour  $\sigma = (1 + A)/2$ . On pose  $z = s - A/2$ , on a donc  $\Re z = 1/2$  et

$$\left| \frac{F(z)}{F(z+A)} \right| = O(|z|^{Ad/2}),$$

uniformément par rapport à  $A$  tel que  $0 \leq A \leq 1/3$ .  $\square$

Cette majoration permettra de pallier l'absence de majoration uniforme de  $|F(s)|^{-1}$  pour  $\sigma > 1/2$ .

#### 4. Explicitation d'une suite de $\mathcal{B}_F$ tendant vers $\chi$ dans $L^2(0, +\infty)$

Nous allons à présent chercher une suite de  $\mathcal{B}_F$  tendant vers  $\chi$  dans  $L^2(0, +\infty)$ .

Comme dans le cas de la fonction  $\zeta$  de Riemann, on peut définir la suite "naturelle" de la façon suivante.

$$S_{n,F}(t) = \sum_{k=1}^n \mu_F(k) \Psi_F^{(1)}(kt).$$

Báez-Duarte a cependant démontré dans [BD2] que la suite  $S_{n,\zeta}$  diverge dans  $L^2(0, +\infty)$ . Nous devons donc nous intéresser à une autre suite et nous utiliserons un procédé de construction analogue à celui que Báez-Duarte expose dans [BD3].

Nous allons utiliser le lemme suivant, corollaire de la formule de Perron (voir [Te], §2.1). Sa démonstration étant identique à celle du corollaire 2.1 de [Te], nous ne la reproduisons pas ici.

**Lemme 1.** — Soit

$$G(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s},$$

une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue finie  $\sigma_a$ . On suppose l'existence de deux réels strictement positifs  $K$  et  $\varepsilon$  tels que  $\sigma_a \leq 1 + \varepsilon$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|c_n| \leq Kn^\varepsilon.$$

Soit  $z = u + iv$  un complexe tel que  $0 \leq u \leq 1$ . Alors pour tout  $N \geq T \geq 2$ ,  $N$  entier, on a

$$\sum_{n \leq N} \frac{c_n}{n^z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} G(s+z) \frac{N^s}{s} ds + O\left(\frac{N^{1+\varepsilon-u}}{T} \log N\right),$$

où  $c := 1 + \varepsilon - u + 1/\log 3N$ . Les constantes implicites dans le  $O$  ne dépendent que de  $\varepsilon$  et  $K$ .

**Proposition 4.1.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg. Supposons qu'il existe un réel  $\alpha < 1/2$  tel que  $\mu_F(n) = O(n^\alpha)$ . Alors il existe deux constantes positives  $a$  et  $b$  ne dépendant que de  $F$  et  $\alpha$  telles que, pour tous réels  $t$ ,  $\delta > 0$  et tout entier  $N \geq e^4$  vérifiant

$$\frac{a}{\log \log N} \leq \delta \leq \frac{1}{2},$$

on ait uniformément

$$\sum_{n \leq N} \frac{\mu_F(n)}{n^{\frac{1}{2} + \delta + it}} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{2} + \delta + it\right)} + O(N^{-\delta/3} \exp(b(\mathcal{L}(t)))).$$

**Démonstration.**

Dans toute cette démonstration, les constantes implicites dans les  $O$  ne dépendront que de la fonction  $F$  et de la constante  $\varepsilon$ .

La fonction  $F^{-1}$  est la série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue  $\sigma_a \leq 1 + \varepsilon$  suivante :

$$F^{-1}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s}.$$

On lui applique le lemme 1. Si  $z = 1/2 + \delta + it$  avec  $0 < \delta \leq 1/2$ , alors pour tout entier  $N$  et tout réel  $T$  tel que  $N \geq T \geq 2$ , on a

$$\sum_{n \leq N} \frac{\mu_F(n)}{n^z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2} + \varepsilon - \delta}}{T} \log N\right),$$

où  $c := \frac{1}{2} + \varepsilon - \delta + 1/\log 3N$ .

On supposera  $N \geq N_0 = N_0(F, \varepsilon)$  où  $N_0$  est une constante assez grande.

Déplaçons à présent le segment d'intégration à l'abscisse  $c' = -\delta/2$  en appliquant le théorème des résidus. On obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds &= F(z)^{-1} + \frac{1}{2i\pi} \int_{c'-iT}^{c'+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c'-iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds + \frac{1}{2i\pi} \int_{c'+iT}^{c+iT} F^{-1}(s+z) \frac{N^s}{s} ds. \end{aligned}$$

Notons  $I_1(T)$ ,  $I_2(T)$  et  $I_3(T)$  les intégrales du membre de droite. On a donc

$$\sum_{n \leq N} \frac{\mu_F(n)}{n^z} = F(z)^{-1} + I_1(T) + I_2(T) + I_3(T) + O\left(\frac{N^{\frac{1}{2} + \varepsilon - \delta}}{T} \log N\right). \quad (4)$$

Nous allons à présent traiter séparément les cas  $|t| \leq N^{1/2 + \varepsilon}$  et  $|t| > N^{1/2 + \varepsilon}$ .

- Si  $|t| \leq N^{1/2+\varepsilon}$ , on choisit  $T = 2N^{1/2+\varepsilon}$ , ce que l'on peut faire si l'on suppose  $\varepsilon < 1/2$ . On a alors

$$\frac{N^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\delta}}{T} \log N = O(N^{-\delta} \log N) = O(N^{-\delta/3})$$

donc

$$\sum_{n \leq N} \frac{\mu_F(n)}{n^z} = F(z)^{-1} + I_1(T) + I_2(T) + I_3(T) + O\left(N^{-\delta/3}\right).$$

Majorons les intégrales horizontales  $I_2$  et  $I_3$ :

Observons tout d'abord qu'avec nos hypothèses, on a :

$$N^{1/2+\varepsilon} \leq |\tau + t| \leq 3N^{1/2+\varepsilon}$$

et donc

$$\frac{1}{\log \log |t + \tau|} \leq \frac{1}{\log \log N + \log(1/2)} \leq \frac{2}{\log \log N}$$

si on suppose  $N \geq e^4$ . Ainsi, si  $s$  parcourt les chemins sur lesquels  $I_2$  et  $I_3$  sont définis, si  $a \geq 4c_1$ , alors

$$\Re(s + z) \geq \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{a}{2 \log \log N} \geq \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log \log |t + \tau|}$$

et d'après la proposition 3.3, on a

$$|F(s + z)|^{-1} \leq e^{c_2 \mathcal{L}(|t + \tau|)} \ll e^{c_2 \mathcal{L}(N)/2}.$$

On a donc

$$I_2, I_3 \ll \frac{1}{T} \exp(O(\mathcal{L}(N))) \frac{N^{1/2+\varepsilon-\delta+1/\log 3N}}{\log N} \ll N^{-\delta+O(1/\log \log N)} \ll N^{-\delta/3},$$

si  $N_0$  est assez grand.

Reste à majorer l'intégrale  $I_1$ . Pour cela, on divise le segment  $[c' - iT, c' + iT]$  en deux parties, respectivement définies par

$$|t + \tau| \leq e^{\sqrt{\log N}} \text{ et } |t + \tau| > e^{\sqrt{\log N}}.$$

On note  $I_{11}$  (resp.  $I_{12}$ ), l'intégrale sur la première (resp. seconde) partie.

Sur la première partie, d'après la proposition 3.3,

$$\begin{aligned} F^{-1}(s + z) &\leq \exp(O(\mathcal{L}(|t + \tau|))) \\ &\leq \exp\left(O(\sqrt{\log N}/\log \sqrt{\log N})\right) \leq \exp\left(O(\sqrt{\log N})\right), \end{aligned}$$

et donc

$$I_{11} \ll \frac{N^{-\delta/2}}{\delta} \exp\left(O(\sqrt{\log N})\right) \ll N^{-\delta/3}.$$

La constante implicite ne dépend que de  $F$  et de  $\varepsilon$ .

Sur la seconde partie, on a encore

$$\Re(s + z) \geq \frac{1}{2} + \frac{\delta}{2} \geq \frac{1}{2} + \frac{2c_1}{\log \log N} \geq \frac{1}{2} + \frac{c_1}{\log \log |t + \tau|}$$

donc d'après la proposition 3.3,

$$F^{-1}(s+z) \leq \exp(O(\mathcal{L}(|t+\tau|))) \ll \exp(O(\log N / \log \log N)).$$

Comme

$$\int_{c'-iT}^{c'+iT} \frac{|ds|}{|s|} \ll \log N,$$

on a quitte à choisir  $a$  assez grand,

$$I_{12} \ll N^{-\delta/2} \log N \exp(O(\log N / \log \log N)) \ll N^{-\delta/3},$$

ce qui conclut la démonstration dans ce premier cas.

- Si  $|t| \geq N^{1/2+\varepsilon}$ , on applique l'équation (4) en choisissant  $T = \frac{1}{2}N^{1/2+\varepsilon}$ . On obtient

$$\sum_{n \leq N} \frac{\mu_F(n)}{n^z} = F(z)^{-1} + I_1(T) + I_2(T) + I_3(T) + O(N^{-\delta/3}).$$

Remarquons que l'on a  $|t+\tau| \asymp |t|$  sur tous les segments d'intégration. Majorons les intégrales horizontales  $I_2'$  et  $I_3'$ :

$$I_{2,3}' \ll \frac{1}{T} \exp(O(\mathcal{L}(|t|))) \frac{N^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\delta+\frac{1}{\log 3N}}}{\log N} \ll N^{-\delta/3} \exp(O(\mathcal{L}(|t|))).$$

Pour  $I_1'$ , on raisonne comme précédemment, on obtient

$$I_1' \ll N^{-\delta/3} \exp(O(\mathcal{L}(|t|))),$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Proposition 4.2.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg vérifiant l'hypothèse de Riemann généralisée. On a uniformément pour  $0 < A \leq 1/(2d)$ ,

$$\int_{\Re z=1/2} \left| \frac{F(z)}{F(z+A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll A^{2/3}.$$

**Démonstration.** D'après la proposition 3.4, sur la droite critique on a

$$\left| \frac{F(s)}{F(s+A)} \right| = O(|s|^{Ad/2}),$$

uniformément par rapport à  $A$  tel que  $0 \leq A \leq 1/2$ . On peut donc supposer  $A$  inférieur à une constante positive donnée au préalable, le résultat étant trivial dans le cas contraire.

On notera  $\gamma$  la partie imaginaire d'un zéro générique de  $F$ .

Soit  $\delta$  tel que  $0 < \delta \leq 1$ , et

$$E_1 := \bigcup_{\gamma} [\gamma - \delta, \gamma + \delta]; \quad E_2 := \mathbb{R} \setminus E_1.$$

Si  $t \in E_1$  et  $A \leq 1/(2d)$ , d'après la proposition 3.4, on a pour  $z = 1/2 + it$  :

$$\left| \frac{F(z)}{F(z+A)} \right| = O(|t|^{1/4}).$$

Par conséquent,

$$\int_{\frac{1}{2}+iE_1} \left| \frac{F(z)}{F(z+A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll \sum_{\gamma} \delta \gamma^{-3/2} \ll \delta$$

car d'après la formule (2), la somme  $\sum_{\gamma} \gamma^{-3/2}$  converge.

Si  $t \in E_2$ , on a

$$\log F\left(\frac{1}{2} + it\right) - \log F\left(\frac{1}{2} + A + it\right) = - \int_0^A \frac{F'}{F}\left(\frac{1}{2} + x + it\right) dx.$$

Le lemme  $\alpha$  de [T2], section 3.9, permet de montrer que si  $\rho = \beta + i\gamma$  parcourt les zéros de  $F$ , on a uniformément pour  $-1 \leq \sigma \leq 2$ , la formule :

$$\frac{F'}{F}(s) = \sum_{|\tau-\gamma| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\log \tau).$$

Pour  $0 \leq x \leq A$ , on a donc

$$\begin{aligned} \frac{F'}{F}\left(\frac{1}{2} + x + it\right) &= \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{x + i(t-\gamma)} + O(\log(|t| + 3)) \\ &\ll \delta^{-1} \log(|t| + 3), \end{aligned}$$

en utilisant (2). Ainsi,

$$\log F\left(\frac{1}{2} + it\right) - \log F\left(\frac{1}{2} + A + it\right) \ll A\delta^{-1} \log(|t| + 3).$$

En utilisant l'inégalité  $|e^z - 1| \leq |z|e^{|z|}$ , on en déduit

$$\left| \frac{F(s)}{F(s+A)} - 1 \right| \ll A\delta^{-1} \log(|t| + 3)(|t| + 3)^{c'A/\delta},$$

où  $c'$  est une constante positive absolue. Par conséquent,

$$\int_{\frac{1}{2}+iE_2} \left| \frac{F(z)}{F(z+A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll A^2 \delta^{-2} \log^2(|t| + 3)(|t| + 3)^{2c'A/\delta-2} \ll A^2 \delta^{-2},$$

pourvu que  $A \leq \delta/4c'$ , ce que nous supposons. On choisit  $\delta = A^{2/3}$  pour conclure, ce qui est possible si l'on suppose  $A \leq (1/4c')^3$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème II donné en introduction.

**Démonstration.** Posons

$$f_{A,N}(x) := - \sum_{n=1}^N \frac{\mu_F(n)}{n^A} \Psi_F(1/nx).$$

D'après (1), pour  $1/2 < \Re z < 1$ , on a

$$\mathcal{M}f_{A,N}(z) = \frac{F(z)}{z} \left( \sum_{n=1}^N \frac{\mu_F(n)}{n^{z+A}} \right).$$



On sait par ailleurs que pour  $\Re z > 0$ ,

$$\mathcal{M}\chi(z) = -\frac{1}{z}.$$

D'après le théorème de Plancherel, on a donc:

$$\begin{aligned} \|f_{A,N} - \chi\|^2 &= \int_{\Re z=1/2} \left| F(z) \sum_{n=1}^N \frac{\mu_F(n)}{n^{z+A}} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \\ &\leq 2 \int_{\Re z=1/2} \left| F(z) \left( \sum_{n=1}^N \frac{\mu_F(n)}{n^{z+A}} - F(z+A)^{-1} \right) \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} + 2 \int_{\Re z=1/2} \left| \frac{F(z)}{F(z+A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \end{aligned}$$

car pour tout réels  $\alpha, \beta$ , on a  $(\alpha + \beta)^2 \leq 2(\alpha^2 + \beta^2)$ . D'après la proposition 4.1, si  $A \geq a/\log \log N$ , on a

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{\mu_F(n)}{n^{z+A}} - F(z+A)^{-1} \right| = O\left(N^{-A/3} \exp(b\mathcal{L}(t))\right),$$

d'autre part, d'après la proposition 3.2, on a

$$|F(z)| = \exp(O(\mathcal{L}(t)))$$

donc

$$\begin{aligned} &\int_{\Re z=1/2} \left| F(z) \left( \sum_{n=1}^N \frac{\mu_F(n)}{n^{z+A}} - F(z+A)^{-1} \right) \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \\ &\ll N^{-2A/3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{O(\mathcal{L}(t))} \frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2} \ll N^{-2A/3}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 4.2, on a

$$\int_{\Re z=1/2} \left| \frac{F(z)}{F(z+A)} - 1 \right|^2 \frac{|dz|}{|z|^2} \ll A^{2/3}.$$

On a donc finalement

$$\|f_{A,N} - \chi\|^2 \ll N^{-2A/3} + A^{2/3}.$$

On choisit  $A = a/\log \log N$ . On a alors le résultat cherché.  $\square$

On en déduit du théorème II le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** — Soit  $F$  une fonction de la classe de Selberg. On suppose qu'il existe un réel  $\alpha < 1/2$  tel que  $\mu_F(n) = O(n^\alpha)$ , où les  $\mu_F(n)$  sont les coefficients de la série de Dirichlet  $F^{-1}$ .

Alors l'hypothèse de Riemann pour  $F$  est équivalente à la propriété :

$$\Psi_F^{(1)} \in L^2(0, +\infty) \text{ et } \chi \in \overline{\mathcal{B}_F^{nat}},$$

où  $\mathcal{B}_F^{nat}$  est le sous-ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathcal{B}_F$ , définies sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par :

$$f(t) := \sum_{k=1}^n c_k \Psi_F \left( \frac{1}{kt} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad c_k \in \mathbb{C}.$$

## References

- [BD1] L. Báez-Duarte, *On Beurling's real variable reformulation of the Riemann hypothesis*, Adv. in Maths **101** (1993), 10-30.
- [BD2] L. Báez-Duarte, *A class of invariant unitary operators*, Adv. in Math **144** (1999), 1-12.
- [BD3] L. Báez-Duarte, *A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei **9**, Mat. Appl. **14** (2003), n°1, 5-11. 1-12.
- [BDBLS1] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, III*, Adv. in Maths. **149** (2000), n°1, 130-144.
- [BDBLS2] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau, E. Saias, *Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction 'partie fractionnaire'*, Ramanujan J. **9** (2005), n°1-2, 215-240. 1-12.
- [BS1] M. Balazard, E. Saias, *Note sur la fonction zeta de Riemann, 1*, Adv. in Maths. **139** (1998), 310-321.
- [BS2] M. Balazard, E. Saias, *The Nyman-Beurling equivalent form for the Riemann hypothesis*, Expo. Math. **18** (2000), 131-138.
- [BF] H. Bercovici, C. Foias, *A real variable restatement of Riemann's hypothesis*, Israel J. Maths. **48** (1984), 57-68.
- [Be] A. Beurling, *A closure problem related to the Riemann Zeta-function*, Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 312-314.
- [BH] E. Bombieri, D. A. Hejhal *On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products*, Duke math. J. **80** (1995), 821-862.
- [Bu2] J.-F. Burnol, *On an analytic estimate in the theory of the Riemann Zeta function and a theorem of Báez-Duarte*, à paraître dans Acta Cientifica Venezolana **54** (2003).
- [dR0] A. de Roton *Généralisation du critère de Beurling-Nyman à la classe de Selberg*, thèse, université Bordeaux 1, 2003, disponible sur [www.iecn.u-nancy.fr/~deroton](http://www.iecn.u-nancy.fr/~deroton).
- [dR1] A. de Roton, *On the mean square of an error term for an extended Selberg's class*, à paraître dans Acta Arithmetica.
- [dR2] A. de Roton, *Généralisation du critère de Beurling-Nyman pour l'hypothèse de Riemann généralisée*, à paraître dans AMS Transactions.
- [dR3] A. de Roton, *Généralisation du critère de Beurling et Nyman pour l'hypothèse de Riemann généralisée*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **340** (2005), 191-194.
- [KP0] J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class: a survey*, Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Kościelisko, 1997), 953-992, de Gruyter, Berlin, 1999.
- [Land] E. Landau *Über den Wertevorrat von  $\zeta(s)$  in der Halbene  $\sigma > 1$* , Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. I, **36** (1933), 81-91.
- [Sel] A. Selberg *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proceedings of the Almafí Conference on Analytic Number Theory, Università di Salerno (1992).
- [Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Société mathématique de France, 1995.
- [T1] E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, Second edition, Oxford University Press, 1939.
- [T2] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford University Press, 1951.

---

A. DE ROTON, I.E.C.N. - Université Henri Poincaré : Nancy 1, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy • *E-mail* : [deroton@iecn.u-nancy.fr](mailto:deroton@iecn.u-nancy.fr)