



HAL
open science

Sur la propagation d'une ligne de discontinuité et la fonction génératrice de choc pour un solide anélastique

Claude Stolz

► **To cite this version:**

Claude Stolz. Sur la propagation d'une ligne de discontinuité et la fonction génératrice de choc pour un solide anélastique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie II, 1989, 308, pp.1-4. hal-00091942

HAL Id: hal-00091942

<https://hal.science/hal-00091942v1>

Submitted on 10 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la propagation d'une ligne de discontinuité et la fonction génératrice de choc pour un solide anélastique

Claude STOLZ

Résumé — On analyse la propagation éventuelle d'une ligne de discontinuité. La surface mobile est considérée comme une bande de largeur finie et on exprime les équations du problème dynamique. Comme en mécanique des fluides on introduit la fonction génératrice du choc dont on donne l'interprétation thermodynamique.

On the propagation of discontinuity and Shock generating Function in anelastic solids mechanics

Abstract — We analyse the propagation of a discontinuity inside an anelastic continuum. We consider the moving surface as a small band whose propagation is stationary and we solve the associated dynamical problem whose boundary conditions are those which are applied on the surface of discontinuity. We emphasize, as in fluid dynamics, the existence of the generating function of the shock which helps to study the stability of the shock.

INTRODUCTION. — On s'intéresse à la propagation d'une ligne de discontinuité. On modélise cette ligne par une bande de largeur finie et on analyse les équations du problème du milieu continu ainsi décrit.

1. RAPPEL SUR LES LIGNES DE DISCONTINUITÉS. — De façon classique le long d'une ligne de discontinuité, diverses relations ont été données sur les sauts éventuels des quantités mécaniques et thermodynamiques. Les équations de saut s'obtiennent par les équations de bilan [1] :

— quantité de mouvement :

$$[\sigma \cdot n]_{\Sigma} = -m \left[\frac{du}{dt} \right]_{\Sigma}$$

— énergie :

$$[q \cdot n] + m \left[\varphi + \theta s + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] + \left[\sigma \cdot n \cdot \frac{du}{dt} \right] = 0$$

— dissipation :

$$m [s]_{\Sigma} + \left[\frac{q \cdot n}{\theta} \right]_{\Sigma} = \int_{\Omega} \frac{D_m}{\theta} - q \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} d\omega$$

où σ est la contrainte à l'équilibre dans le volume de matière Ω , q le flux de chaleur, φ la densité d'énergie libre, θ la température, s l'entropie massique, u le champ de déplacement, m le débit massique $\rho_0 c$ où c est la vitesse de propagation de la ligne de discontinuité.

2. LA FONCTION GÉNÉRATRICE DE CHOC. — Les conditions aux limites sur les bords de la bande sont données par les équations aux discontinuités, introduisons alors les constantes

λT^d et Q telles que :

$$\sigma n^+ = \lambda T^d - m \frac{du^+}{dt} \quad \text{et} \quad \sigma n^- = \lambda T^d - m \frac{du^-}{dt}$$

$$m Q = \sigma n^+ \frac{du^+}{dt} + m \left(\varphi^+ + \theta^+ s^+ + \frac{1}{2} (du^+/dt)^2 \right) + qn^+$$

$$= \sigma n^- \frac{du^-}{dt} + m \left(\varphi^- + \theta^- s^- + \frac{1}{2} (du^-/dt)^2 \right) + qn^-.$$

Réexprimons le second principe de la thermodynamique en fonction des constantes Q et λT^d :

$$m Q \left[\frac{1}{\theta} \right] + \lambda \frac{d}{dt} \left[\frac{du}{dt} \frac{1}{\theta} \right] - m \left[\frac{\varphi - (1/2)(du/dt)^2}{\theta} \right] = \int_{\Omega} \frac{D_m}{\theta} - q \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} d\omega.$$

De l'expression précédente nous introduisons la fonction P définie par :

$$P = -\rho c \frac{Q}{\theta} + \frac{\lambda}{\theta} T^d c u_{,x} - \frac{1}{\theta} c \left(\varphi \rho - \frac{1}{2} (u_{,x})^2 \rho c^2 \right)$$

où on a tenu compte de la propagation en remplaçant du/dt par $c u_{,x}$; ainsi $P(x)$ vérifie :

$$P(x^+) - P(x^-) = \int_{\Omega} \frac{D_m}{\theta} - q \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2} d\omega.$$

Cette fonction P est la fonction de Massieu associée à la fonctionnelle de Lagrange L d'une tranche dx du milieu anélastique. En effet considérons une tranche dx :

$$P \frac{dx}{c} = -\rho \frac{Q}{\theta} dx + \frac{\lambda}{\theta} T^d [u(x+dx) - u(x)] - \frac{1}{\theta} \rho \left(\varphi - \frac{1}{2} \frac{du^2}{dt} \right) dx$$

dans cette expression nous reconnaissons le travail des forces extérieures appliquées à la tranche : $\lambda T^d [u]_x^{x+dx}$, la densité d'énergie cinétique et la densité d'énergie libre; comme la fonctionnelle de Lagrange est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle totale du système, c'est-à-dire :

$$L = \int_{\omega} \frac{1}{2} \rho \frac{du^2}{dt} - \rho \varphi dx + \lambda \int_{\partial \omega} T^d u ds$$

l'expression de P devient :

$$P dx = m \frac{Q}{\theta} + \frac{L}{\theta}.$$

3. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION GÉNÉRATRICE DU CHOC P . — Considérons la dissipation D dont l'expression est :

$$D = \frac{1}{\theta} \left(\Omega (c^2 \nabla u_{,x}) + \Phi (d\alpha/dt) + \frac{1}{2} \frac{K}{\theta} (\theta_{,x})^2 \right)$$

où le flux de chaleur est lié au gradient de la température par la conduction K telle que $q = -K \theta_{,x}$.

PROPOSITION. — La structure du choc est déterminée par les équations d'évolution [2] :

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{\partial D}{\partial \theta_{,x}}, \quad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial D}{\partial u_{,x}}, \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{\partial D}{\partial \alpha_{,x}}$$

Démonstration. — Nous avons : $(\partial P/\partial \theta) \theta^* = -(\theta^*/\theta^2) P + m s (\theta^*/\theta)$ soit

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} \theta^* = \frac{1}{\theta^2} \left(Q m - c \sigma \cdot n u_x - m \left(\varphi + s \theta + \frac{1}{2} (du/dt)^2 \right) \right)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \theta_{,x}} \theta_{,x}^* = -\frac{1}{\theta^2} q \cdot \theta_{,x}^*$$

la première égalité représente l'équation thermique. De même :

$$\frac{\partial P}{\partial u} u^* \frac{\theta}{c} = \lambda T^d u_{,x}^* - \sigma_r \varepsilon^* + m u_{,x} u_{,x}^* = \lambda T^d u_{,x}^* - (\sigma \cdot n \cdot u^*)_{,x} - m (u_{,x} u^*)_{,x} + \sigma_{ir} \varepsilon^*$$

$$\frac{\partial D}{\partial u_{,x}} u_{,x}^* = \frac{1}{\theta} \sigma_{ir} c \varepsilon_{,x}^*$$

la deuxième égalité exprime l'équilibre local; enfin nous avons

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} \alpha^* = c A \frac{\alpha^*}{\theta}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{,x}} \alpha_{,x}^* = \frac{c}{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial d\alpha/dt} \alpha_{,x}^*$$

ce qui donne $A = \partial \Phi / (\partial d\alpha/dt)$ là où $d\alpha/dt$ est non nul, ce qui exprime l'évolution de l'anélasticité par la loi de normalité.

COMMENTAIRES. — La fonction P est la fonction génératrice du choc, cette fonction est une fonction croissante de X qui de plus vérifie :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{D_m}{\theta} - q \cdot \frac{\nabla \theta}{\theta^2}.$$

Cette fonction permet de décrire et de classifier les structures des ondes de chocs compatibles avec les lois de comportement et d'étudier la stabilité de telles structures, son intérêt réside surtout dans l'analyse de mécanismes dissipatifs différents dans le choc de ceux pris en compte en dehors du choc.

Nous avons étendu la notion de fonction génératrice de choc P au cas des solides anélastiques et nous en avons donné une interprétation thermodynamique.

L'étude des structures de chocs compatibles avec les lois de comportement sera menée comme en mécanique des fluides en considérant la structure du choc comme une perturbation donnée sur les lois de comportement en dehors du choc, ce qui permettra d'analyser l'influence de la viscosité et de la température au cours d'un choc.

Note remise le 21 octobre 1988, acceptée le 26 octobre 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. MANDEL, *Cours de mécanique des Milieux continus*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
 [2] P. GERMAIN, *Shock Waves, Jump Relations, and Structure*, *Advances in Applied Mechanics*, 12, 1972, Acad. Press, Inc., New York and London.

Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.