HAL
open science

Sur le comportement local de la répartition de l'indicatrice d'Euler

Gérald Tenenbaum, Vincent Toulmonde

To cite this version:

Gérald Tenenbaum, Vincent Toulmonde. Sur le comportement local de la répartition de l'indicatrice d'Euler. Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici, 2006, 35, pp.321-338. hal-00091289

HAL Id: hal-00091289

https://hal.science/hal-00091289

Submitted on 5 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

(14/11/2005, 17h00)

Sur le comportement local de la répartition de l'indicatrice d'Euler

Gérald Tenenbaum & Vincent Toulmonde

À Eduard Wirsing, en témoignage d'amicale admiration.

Sommaire

1 Introduction 1
1.1 Historique et motivation 1
1.2 Notations 2
1.3 Résultats 3
2 Estimation intégrale de $\lambda(s)$ 4
3 Démonstration du Théorème 1.1 6
3.1 Dérivées de $\lambda_0(s)$ 6
3.2 Complétion de l'argument 6
4 Démonstration du Théorème 1.2 8
4.1 Lemmes relatifs à la fonction Γ d'Euler 8
4.2 Développement asymptotique de $\log \lambda_0(s)$ 10
4.3 Développement asymptotique de $\lambda_0(s)$ 12
4.4 Développement asymptotique de $1 - G(1 - 1/\sigma)$ 14

1. Introduction

1·1. Historique et motivation

Soit φ la fonction indicatrice d'Euler. Le premier exemple historique de loi de répartition limite pour une fonction arithmétique est dû à Schoenberg, qui, en 1928 [6], établit la formule

$$\frac{1}{N} \sum_{\substack{n \leqslant N \\ \varphi(n)/n \leqslant t}} 1 = G(t) + o(1) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ N \to \infty) \tag{1·1}$$

où $G(t)$ dépend continûment de t et vérifie $G(0) = 0$, $G(1) = 1$.

Il est remarquable que, près de quatre-vingts ans plus tard, ce problème recèle encore bien des questions ouvertes. Ainsi, alors qu'Erdős a remarqué dans [5] que la borne supérieure, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, du terme d'erreur de (1·1) est $\gg 1/\log N$, on conjecture que cette valeur est effectivement admissible. Dans cette direction, le meilleur résultat connu, dû à Elliott ([3], th. 5.6), fournit seulement la majoration

$$\ll \frac{\log_2 N}{\log_3 N \log N}.$$

Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

L'étude du comportement local de la loi limite G est également inachevée. Schoenberg a établi dans [7] que G est strictement croissante sur $[0,1]$ et Erdős [4] a montré que la mesure $\mathrm{d}G$ est purement singulière, ce qui implique en particulier que $G'(t)=0$ pour presque tout t. Enfin, Erdős [5] a prouvé en 1974 la majoration

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\{G(t)-G(t-\varepsilon t)\}\ll \frac{1}{\log(1/\varepsilon)}\qquad (0<\varepsilon<1) \tag{1·2}$$

et son optimalité sous la forme indiquée. Diamond & Rhoads [1] ont obtenu en 1984 une nouvelle preuve de cette estimation par des techniques spécifiques de la théorie des fonctions à valeur moyenne bornée.

Dans son récent travail de thèse [9], dont les résultats principaux font l'objet des publications [10] et [11], le second auteur affine la majoration (1·2) en établissant, d'une part, que le maximum du membre de gauche est essentiellement atteint lorsque t est un nombre rationnel de la forme $\varphi(n)/n$ à petit dénominateur et, d'autre part, que les « grandes » valeurs de $G(t)-G(t-\varepsilon t)$ peuvent être décrites simplement en fonction du comportement de G au voisinage de 1. Plus précisément, posant

$$\begin{aligned}
K(t)&:=\sum_{\varphi(n)/n=t}1/n\qquad (0\leqslant t\leqslant 1),\\
\mathcal{A}(\varepsilon)&:=\Big\{\varphi(n)/n:1\leqslant n\leqslant \varepsilon^{-1/8}\Big\}\qquad (0<\varepsilon<1),\\
L(x)&:=\mathrm{e}^{\sqrt{\log x\log_2 x}}\quad (x\geqslant 3),
\end{aligned}$$

il établit [9] que l'on a, uniformément pour $0<\varepsilon<1/3$ et $t\in\mathcal{A}(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}
&G(t)-G(t-\varepsilon t)=K(t)\{G(1)-G(1-\varepsilon)\}+O\Big(L(1/\varepsilon)^{-1/5}\Big),\\
&G(t+\varepsilon t)-G(t)\ll L(1/\varepsilon)^{-1/5}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le comportement de G autour de $t=1$ est représentatif du cas général des irrégularités locales. Cela a motivé l'étude au voisinage de 1 développée dans [9] par des méthodes d'équations fonctionnelles.

En introduisant des méthodes d'analyse complexe, nous nous proposons ici de préciser (voir notamment le Théorème 1.2 *infra*) les résultats obtenus dans [9] sur cet aspect de la question.

1·2. Notations

Nous posons

$$\mathcal{L}(x):=\exp\left(\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log_2 x)^{1/5}}\right)\qquad (x\geqslant 3),$$

désignons par $\pi(x)$ la fonction de comptage des nombres premiers, et par

$$\mathrm{li}(x)=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\log t}\qquad (x\geqslant 2) \tag{1·3}$$

le logarithme intégral. Ainsi, en vertu du théorème des nombres premiers, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$R(x) := \pi(x) - \mathrm{li}(x) \ll x/\mathcal{L}(x)^c \qquad (x \geqslant 3). \tag{1·4}$$

Lorsque l'argument est complexe, la notation log désigne la détermination principale de la fonction logarithme. Pour $s \in \mathbb{C}$, nous définissons implicitement les nombres réels σ et τ par $s := \sigma + i\tau$.

Enfin, nous posons

$$\lambda_0(s) := \exp\left\{ -\gamma + \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1 - \mathrm{e}^{-st}}{t \log t}\, \mathrm{d}t \right\} \qquad (s \in \mathbb{C}), \tag{1·5}$$

où γ désigne la constante d'Euler.

1·3. Résultats

Nous obtenons d'une part une approximation régulière, d'autre part un développement asymptotique, de $G(t)$ au voisinage de $t = 1$.

Théorème 1.1. *Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour $3 \leqslant 1/h \leqslant T \leqslant \mathcal{L}(1/h)^{c_1}/h$,*

$$1 - G(1-h) = \frac{1}{2i\pi} \int_{1/h - iT}^{1/h + iT} \lambda_0(s) \mathrm{e}^{hs} \frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{hT}} \right). \tag{1·6}$$

Théorème 1.2. *Il existe une constante $c_2 > 0$ et une suite réelle $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ telles que l'on ait, uniformément pour $N \geqslant 1$ et $\sigma \geqslant 3$,*

$$1 - G(1 - 1/\sigma) = \sum_{1 \leqslant n < N} \frac{g_n}{(\log \sigma)^n} + O\left(\frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N} + \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^{c_2}} \right). \tag{1·7}$$

De plus, nous avons

$$g_n = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right\} \mathrm{e}^{-\gamma} (-1)^n (n-3)! \qquad (n \geqslant 3) \tag{1·8}$$

et

$$g_1 = \mathrm{e}^{-\gamma}, \quad g_2 = 0, \quad g_3 = -\tfrac{1}{12}\pi^2 \mathrm{e}^{-\gamma}. \tag{1·9}$$

Notre méthode consiste essentiellement à exploiter, lorsque $w > 0$, la formule d'inversion

$$\int_0^w \left\{ 1 - G(\mathrm{e}^{-t}) \right\} \mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \lambda(s) \mathrm{e}^{ws} \frac{\mathrm{d}s}{s^2} \qquad (\sigma > 0), \tag{1·10}$$

où

$$\lambda(s) := \prod_p \left(1 + \frac{(1-1/p)^s - 1}{p}\right) \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{1·11}$$

est la valeur moyenne de $(\varphi(n)/n)^s$, i.e.

$$\lambda(s) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \{\varphi(n)/n\}^s \qquad (s \in \mathbb{C}). \tag{1·12}$$

Nous choisissons l'abscisse d'intégration dans (1·10) de manière essentiellement optimale. Nous approchons ensuite, grâce au théorème des nombres premiers, le produit infini $\lambda(s)$ par l'expression $\lambda_0(s)$, définie en (1·5).

La formule (1·12) est classique. Elle découle, par exemple, du résultat établi dans les Notes sur le paragraphe I.3.8 de [8] pour le choix $f(n) = (\varphi(n)/n)^s$ puisque, notant μ la fonction de Möbius, $g := f * \mu$, on a alors $g(p) = (1-1/p)^s - 1 \ll |s|/p$ et $g(p^\nu) = 0$ si $\nu > 1$.

2. Estimation intégrale de $\lambda(s)$

Nous donnons ici une approximation régulière d'intérêt indépendant pour la transformée de Laplace-Stieltjes $\lambda(s)$ de la mesure $\mathrm{d}G$.

Lemme 2.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour $\sigma \geqslant 3$ et $|s| \leqslant \sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$,*

$$\lambda(s) = \lambda_0(s) + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right). \tag{2·1}$$

Démonstration. Mettons $(1-1/p)$ en facteur dans le terme général du produit infini (1·11) lorsque $p \leqslant \sigma$. Nous obtenons, grâce à la formule de Mertens,

$$\lambda(s) = \prod_{p\leqslant\sigma} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\mathrm{e}^{H_1(s)+H_2(s)} = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^c}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma+H_1(s)+H_2(s)}}{\log\sigma} \tag{2·2}$$

avec

$$H_1(s) := \sum_{p\leqslant\sigma} \log\left(1 + \frac{(1-1/p)^{s-1}}{p}\right), \quad H_2(s) := \sum_{p>\sigma} \log\left(1 + \frac{(1-1/p)^s - 1}{p}\right),$$

où, comme il a été précisé plus haut, les logarithmes sont pris en détermination principale.

Estimons $H_1(s)$. La contribution des nombres premiers p n'excédant pas $\sqrt{\sigma}$ est trivialement

$$\ll \sum_{p\leqslant\sqrt{\sigma}} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma}}}{p} \ll \mathrm{e}^{-\sqrt{\sigma}/2}.$$

Lorsque $\sqrt{\sigma} < p \leqslant \sigma$, $|s| \ll \sigma^2$, on peut écrire

$$\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{s-1} = \mathrm{e}^{-s/p}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{p}+\frac{|s|}{p^2}\Big)\Big\}.$$

Il suit

$$H_1(s) = \sum_{p\leqslant\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-s/p}}{p} + O\Big(\frac{|s|}{\sigma^2\log\sigma}\Big)$$

où le terme d'erreur a été estimé par sommation d'Abel à l'aide du théorème des nombres premiers. Le terme principal relève d'un traitement semblable. Nous obtenons, avec la notation (1·4),

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant\sigma} \frac{\mathrm{e}^{-s/p}}{p} &= \int_2^\sigma \frac{\mathrm{e}^{-s/x}\,\mathrm{d}x}{x\log x} + \int_2^\sigma \frac{\mathrm{e}^{-s/x}\,\mathrm{d}R(x)}{x}\\ &= -\int_{1/\sigma}^{1/2} \frac{\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{t\log t} + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right),\end{aligned}$$

et donc, dans les conditions de l'énoncé,

$$H_1(s) = -\int_{1/\sigma}^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{t\log t} + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right) \tag{2·3}$$

puisque la contribution au terme principal de l'intervalle $1/\mathrm{e} \leqslant t \leqslant 1/2$ est trivialement $\ll \mathrm{e}^{-\sigma/3}$.

Estimons à présent $H_2(s)$. Nous avons

$$\begin{aligned}H_2(s) &= \sum_{p>\sigma}\Big\{\frac{(1-1/p)^s-1}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)\Big\} = \sum_{p>\sigma}\frac{\mathrm{e}^{-s/p}-1}{p} + O\left(\frac{|s|}{\sigma^2\log\sigma}\right)\\ &= \int_\sigma^\infty \frac{\mathrm{e}^{-s/x}-1}{x\log x}\,\mathrm{d}x + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right) = \int_0^{1/\sigma}\frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{t\log t}\,\mathrm{d}t + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right).\end{aligned}$$

Compte tenu de (2·3), il suit donc

$$H_1(s)+H_2(s) = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{t\log t}\,\mathrm{d}t + \log_2\sigma + O\left(\frac{|s|}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

En reportant dans (2·2), nous obtenons bien la formule annoncée (2·1). □

3. Démonstration du Théorème 1.1

3·1. Dérivées de $\lambda_0(s)$

La preuve du Théorème 1.1 nécessite certaines estimations préalables relatives à la régularité de la fonction entière λ_0.

Lemme 3.1. *Il existe une constante $c > 0$ telle que λ_0 soit bornée dans le domaine $\sigma \geqslant 3$, $|s| \leqslant \sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$, et y satisfasse*

$$\lambda_0'(s) \ll \frac{1}{s}, \quad \lambda_0''(s) \ll \frac{1}{s^2}. \tag{3·1}$$

Démonstration. Comme $|\{\varphi(n)/n\}^s| \leqslant 1$ pour $\sigma \geqslant 0$, il résulte de (1·12) que

$$|\lambda(s)| \leqslant 1 \qquad (\sigma \geqslant 0). \tag{3·2}$$

Cela implique immédiatement, au vu de (2·1), que $\lambda_0(s) \ll 1$ dans les conditions de l'énoncé.

Pour montrer (3·1), nous introduisons la dérivée logarithmique

$$\psi(s) := \frac{\lambda_0'(s)}{\lambda_0(s)} = -\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{\log t} = \frac{1-\mathrm{e}^{-s/\mathrm{e}}}{s} + \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{st(\log t)^2}\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{s}.$$

On établit de manière analogue que

$$\psi'(s) = \int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{t\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}{\log t} \ll \frac{1}{s^2}.$$

Compte tenu des identités

$$\lambda_0'(s) = \lambda_0(s)\psi(s), \quad \lambda_0''(s) = \lambda_0'(s)\psi(s) + \lambda_0(s)\psi'(s),$$

et de la première partie de la démonstration, nous obtenons bien le résultat annoncé. □

3·2. Complétion de l'argument

Posons

$$g(w) := \int_0^w \left\{1 - G(\mathrm{e}^{-t})\right\}\,\mathrm{d}t \qquad (w > 0).$$

D'après (1·10) et (3·2), nous avons pour tous $\sigma > 0$, $T \geqslant 1$,

$$g(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda(s)\mathrm{e}^{ws}\frac{\mathrm{d}s}{s^2} + O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{3·3}$$

Sous les conditions $w\sigma \asymp 1$, $\sigma \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$, nous déduisons donc du Lemme 2.1 que

$$g(w) = G_0(w) + O\left(\frac{1}{T} + \frac{\log T}{\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c}\right) \tag{3·4}$$

où l'on a posé

$$G_0(w) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}\,\frac{\mathrm{d}s}{s^2}\cdot$$

La fonction G_0 est indéfiniment dérivable et, toujours sous les hypothèses précédentes, vérifie

$$\begin{aligned}
G_0'(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}\,\frac{\mathrm{d}s}{s},\\
G_0''(w) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}\,\mathrm{d}s\\
&= \left[\frac{\lambda_0(s)\mathrm{e}^{ws}}{2\pi i w} - \frac{\lambda_0'(s)\mathrm{e}^{ws}}{2\pi i w^2}\right]_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} + \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\lambda_0''(s)\mathrm{e}^{ws}}{2i\pi w^2}\,\mathrm{d}s\\
&\ll \frac{1}{w} + \frac{1}{w^2T} + \frac{1}{w^2\sigma} \ll \frac{1}{w},
\end{aligned} \tag{3·5}$$

où nous avons fait appel aux estimations (3·1).

Il découle de (3·4) et (3·5) que, pour $0 < v \leqslant \frac{1}{2}w$, $\sigma w \asymp 1$, $\sigma \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\sigma\mathcal{L}(\sigma)^c$, nous avons

$$\frac{g(w+v)-g(w)}{v} = G_0'(w) + O\left(\frac{v}{w} + \frac{1}{Tv} + \frac{\log T}{\sigma v\mathcal{L}(\sigma)^c}\right).$$

La même formule vaut clairement pour $\{g(w)-g(w-v)\}/v$. Or, l'encadrement

$$\frac{g(w)-g(w-v)}{v} \leqslant 1 - G(\mathrm{e}^{-w}) \leqslant \frac{g(w+v)-g(w)}{v} \quad (w>0,\ v>0) \tag{3·6}$$

résulte immédiatement de la croissance de la fonction $t \mapsto 1 - G(\mathrm{e}^{-t})$. Pour $0 < h \leqslant \frac{1}{3}$, choisissons alors

$$\sigma := 1/h, \qquad w := \log\{1/(1-h)\} \asymp h, \qquad v := \sqrt{w/T} \asymp \sqrt{h/T}.$$

Nous déduisons immédiatement de ce qui précède que, lorsque, par exemple, $\sigma \leqslant T \leqslant \frac{1}{2}\sigma\mathcal{L}(\sigma)^{c/2}$

$$1 - G(1-h) = G_0'(w) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{hT}}\Big).$$

Comme $w = h + O(h^2)$, l'estimation (3·5) pour G_0'' fournit

$$G_0'(w) = G_0'(h) + O(h).$$

Cela implique bien l'estimation souhaitée (1·6). □

4. Démonstration du Théorème 1.2

4·1. Lemmes relatifs à la fonction Γ *d'Euler*

Posons, pour $j \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_j := \left(\frac{1}{\Gamma}\right)^{(j)}(1), \tag{4·1}$$

de sorte que

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = \gamma, \quad \Gamma_2 = \gamma^2 - \frac{\pi^2}{6}\cdot \tag{4·2}$$

Nous introduisons également la suite d'intégrales

$$\mathcal{H}_j(T) := \frac{1}{2i\pi}\int_{1-iT}^{1+iT} \frac{\mathrm{e}^s(\log s)^j\,\mathrm{d}s}{s} \qquad (j \in \mathbb{N},\, T \geqslant 0). \tag{4·3}$$

Lemme 4.1. *On a, uniformément pour* $T \geqslant 2$ *et* $0 \leqslant j \leqslant T$,

$$\Gamma_j = (-1)^j\mathcal{H}_j(T) + O\left(\frac{(\log T + \pi)^j}{T}\right). \tag{4·4}$$

Démonstration. La formule classique de Hankel pour $1/\Gamma$ (voir par exemple [8], th. II.5.2) fournit immédiatement

$$\Gamma_j = \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_H \frac{\mathrm{e}^s(\log s)^j}{s}\,\mathrm{d}s \tag{4·5}$$

où H est un contour de Hankel quelconque entourant l'origine dans le sens positif et contenu dans $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$. Choisissons H comme la concaténation du segment $[1 - iT, 1 + iT]$, du demi-cercle épointé $\{1 - T\mathrm{e}^{i\vartheta} : 0 < |\vartheta| \leqslant \pi/2\}$ et des deux demi-droites de support $]-\infty, 1 - T]$ parcourues avec arguments respectifs $-\pi+$ et $\pi-$.

La contribution du segment vertical constitue le terme principal de (4·4).

Sur la partie circulaire, on a

$$\log s = \log T - i\vartheta + O(1/T).$$

La contribution correspondante est donc

$$\ll (\log T + \pi)^j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-T\cos\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \ll \frac{(\log T + \pi)^j}{T}\cdot$$

Enfin, la contribution des demi-droites horizontales est

$$\ll \int_T^\infty \mathrm{e}^{-y}(\log y)^j\,\frac{\mathrm{d}y}{y} \ll T\mathrm{e}^{-T}(\log T)^j,$$

au vu de la décroissance de $y \mapsto y\mathrm{e}^{-y}(\log y)^j$ pour $y > j$. □

Lemme 4.2. *On a*

$$|\Gamma_j| \leqslant \exp\Big\{ j\log_2 j - \frac{j\log_2 j}{\log j} - \frac{j}{\log j} + O\Big(\frac{j\log_2 j}{(\log j)^2}\Big)\Big\} \qquad (j \geqslant 3). \tag{4·6}$$

Démonstration. En choisissant pour H la réunion des deux demi-droites $]-\infty,-1[$ parcourues avec arguments respectifs $-\pi+$ et $\pi-$ et du cercle unité privé du point $z=-1$, la formule de Hankel pour $1/\Gamma(z)$ fournit immédiatement, par développement au voisinage de l'origine et application de l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$,

$$\Gamma_{j-1} = \frac{(-1)^{j-1}}{\pi j}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-y}\varrho(y)^j \sin\{j\vartheta(y)\}\,\mathrm{d}y + r_j \qquad (j \geqslant 1) \tag{4·7}$$

où l'on a posé

$$r_j := \frac{(-1)^j}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} \vartheta^j \mathrm{e}^{\cos\vartheta}\cos(\vartheta+\sin\vartheta+j\pi/2)\,\mathrm{d}\vartheta \ll \pi^j/j^2,$$
$$\varrho(y) := \sqrt{\pi^2+(\log y)^2}, \quad \vartheta(y) := \arctan(\pi/\log y)\,.$$

La méthode du col peut être employée pour déduire de (4·7) une formule asymptotique, voir par exemple [2], partie IX, problème 18. Pour la commodité du lecteur, nous fournissons une preuve courte et autonome de la majoration nécessaire à la démonstration du Théorème 1.2.

Nous évaluons le majorant suivant de l'intégrale de (4·7)

$$\Gamma^*_{j-1} := \frac{1}{\pi j}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-y}\varrho(y)^j\,\mathrm{d}y \qquad (j \geqslant 1). \tag{4·8}$$

Désignons par y_j l'unique solution sur $[1,\infty[$ de l'équation $j\varrho'(y)=\varrho(y)$, soit encore

$$y_j(\log y_j)\Big(1+\frac{\pi^2}{(\log y_j)^2}\Big) = j.$$

On montre facilement que

$$y_j = \frac{j}{\log j} + \frac{j\log_2 j}{(\log j)^2} + O\Big(\frac{j(\log_2 j)^2}{(\log j)^3}\Big) \qquad (j\to\infty),$$

et les techniques standard de l'analyse asymptotique fournissent, pour j assez grand, la représentation sous forme de série convergente

$$y_j = j\sum_{k\geqslant 1}\frac{P_k(\log_2 j)}{(\log j)^k}$$

où P_k est un polynôme de degré au plus $k-1$.

Posons alors $F(y) = -y + j\log\varrho(y)$. Un calcul de routine fournit, pour $z > -1$,

$$\begin{aligned} F(y_j + zy_j) &= F(y_j) - zy_j + \tfrac{1}{2}j\log\left(1 + \frac{2(\log y_j)\log(1+z) + \{\log(1+z)\}^2}{(\log y_j)^2 + \pi^2}\right) \\ &\leqslant F(y_j) - y_j H_j(z) \end{aligned}$$

avec $H_j(z) := z - \log(1+z)\{1 + \log(1+z)/(2\log y_j)\}$. On en déduit que la contribution à l'intégrale de (4·8) du domaine $|z| > y_j^{-2/5}$ est

$$\ll \mathrm{e}^{F(y_j) - cy_j^{1/5}},$$

où c est une constante strictement positive convenable. La contribution complémentaire peut être évaluée en effectuant un développement limité de $F(y_j + zy_j)$ à l'origine. Nous obtenons ainsi

$$\Gamma^*_{j-1} \sim \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{F(y_j)}}{j\sqrt{\pi y_j}} = \exp\Big\{j\log_2 j - \frac{j\log_2 j}{\log j} - \frac{j}{\log j} + O\Big(\frac{j\log_2 j}{(\log j)^2}\Big)\Big\}.$$

□

Lemme 4.3. *Pour $j \in \mathbb{N}$, nous avons*

$$\Gamma^{(j)}(1) = (-1)^j j! \sum_{m\geqslant 0} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)^{j+1}} + O\left(\{\log(j+2)\}^j\right). \tag{4·9}$$

Démonstration. Par dérivation sous le signe d'intégration de la formule intégrale pour Γ, nous obtenons

$$\Gamma^{(j)}(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\log t)^j\,\mathrm{d}t. \tag{4·10}$$

Nous scindons l'intégrale en deux selon la taille de t par rapport à 1. La contribution des valeurs de $t > 1$ est absorbée par le terme d'erreur de (4·9), en vertu de la majoration

$$t^2\mathrm{e}^{-t}(\log t)^j \ll \{\log(j+2)\}^j \quad (t \geqslant 1). \tag{4·11}$$

La contribution de l'intervalle $[0,1]$ est calculée en développant e^{-t} en série entière de t et en intervertissant sommation et intégration. On conclut en notant que

$$\int_0^1 t^m(\log t)^j\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^j j!}{(m+1)^{j+1}}. \tag{4·12}$$

□

4·2. Développement asymptotique de $\log\lambda_0(s)$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\gamma_n := \frac{\Gamma^{(n)}(1)}{n} = (-1)^n(n-1)!\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\Big\}, \tag{4·13}$$

où la formule asymptotique résulte de (4·9). On a en particulier

$$\gamma_1 = -\gamma, \quad \gamma_2 = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2. \tag{4·14}$$

Lemme 4.4. *Nous avons*

$$\int_0^{1/\mathrm{e}} \frac{1-\mathrm{e}^{-st}}{t\log t} = -\log_2 s + \sum_{1\leqslant n<N} \frac{\gamma_n}{(\log s)^n} + O\left(\frac{|\gamma_N|}{|\log s|^N}\right), \tag{4·15}$$

uniformément sous les conditions

$$\sigma \geqslant 3, \quad \log|s| \ll \log\sigma, \quad 1 \leqslant N \leqslant (\log|s|)/(3\log_2|s|).$$

Démonstration. Soit $I(s)$ la quantité à évaluer. Une intégration par parties permet d'écrire

$$I(s) = -\int_0^{1/\mathrm{e}} s\mathrm{e}^{-st}\log_2(1/t)\,\mathrm{d}t.$$

Effectuons le changement de variable $v = ts$ et notons que, pour $v \in]0, s/\mathrm{e}]$, les nombres $\log s$ et $1-(\log v)/\log s$ appartiennent au demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z > 0\}$. On a donc

$$\log_2(s/v) = \log\left(1-\frac{\log v}{\log s}\right) + \log_2 s,$$

où les logarithmes itérés sont définis par composition de la détermination principale. Comme

$$\int_0^{s/\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1 + O\left(\mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\right),$$

nous obtenons

$$I(s) = -\log_2 s + J(s) + O\left(\mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\log_2\sigma\right) \tag{4·16}$$

avec

$$J(s) := -\int_0^{s/\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-v}\log\left(1-\frac{\log v}{\log s}\right)\mathrm{d}v.$$

Pour évaluer $J(s)$, nous commençons par remplacer le segment oblique d'intégration par l'intervalle réel $[0, |s|/\mathrm{e}]$. L'erreur impliquée coïncide, d'après le théorème des résidus, avec la quantité

$$K(s) := -\int_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-v}\log\left(1-\frac{\log v}{\log s}\right)\mathrm{d}v$$

où $\mathcal{C}$ est l'arc de cercle $\{|s|\mathrm{e}^{i\vartheta-1} : 0 \leqslant \vartheta \leqslant \arg(s)\}$. On a $\Re e\, v \geqslant \Re e\, s/\mathrm{e} = \sigma/\mathrm{e}$ pour $v \in \mathcal{C}$. On en déduit aisément que

$$K(s) \ll \mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\log_2|s| \ll \mathrm{e}^{-\sigma/\mathrm{e}}\log_2\sigma.$$

Il suit, par exemple,

$$J(s) = -\int_0^{|s|/\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-v}\log\left(1-\frac{\log v}{\log s}\right)\mathrm{d}v + O\big(\mathrm{e}^{-\sigma/3}\big).$$

La contribution du segment $0 \leqslant v \leqslant \mathrm{e}/|s|$ à la dernière intégrale est

$$\int_0^{\mathrm{e}/|s|} \log\Big(2 + \Big|\frac{\log v}{\log s}\Big|\Big)\,\mathrm{d}v \ll \frac{1}{|s|}\cdot$$

Lorsque $\mathrm{e}/|s| \leqslant v \leqslant |s|/\mathrm{e}$, on a $|\log v| \leqslant |\log s| - 1$, et nous pouvons écrire

$$-\log\Big(1 - \frac{\log v}{\log s}\Big) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{(\log v)^n}{n(\log s)^n} + O\Big(\frac{(\log v)^{N+1}\log_2|s|}{|\log s|^{N+1}}\Big).$$

Intégrons cette formule pour $\mathrm{e}/|s| \leqslant v \leqslant |s|/\mathrm{e}$ après multiplication par e^{-v}. Nous obtenons, compte tenu de ce qui précède,

$$J(s) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \Big\{\frac{\gamma_n}{(\log s)^n} + \varepsilon_n(s)\Big\} + O\Big(\frac{N|\gamma_{N+1}|\log_2|s|}{(\log|s|)^{N+1}} + \frac{1}{|s|}\Big), \tag{4·17}$$

avec

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(s) &\ll \int_0^{\mathrm{e}/|s|} (\log v)^n\,\mathrm{d}v + \int_{|s|/\mathrm{e}}^{\infty} \mathrm{e}^{-v}(\log v)^n\,\mathrm{d}v\\ &\ll \int_{\log(|s|/\mathrm{e})}^{\infty} \mathrm{e}^{-u}u^n\,\mathrm{d}u \ll \frac{2^n n!}{\sqrt{|s|}} \ll \frac{\gamma_{N+1}}{(\log|s|)^{N+1}} \quad (1 \leqslant n \leqslant N),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la condition $N \leqslant (\log|s|)/(3\log_2|s|)$. Ainsi la contribution globale des $\varepsilon_n(s)$ au membre de gauche de (4·17) peut être englobée par le terme résiduel. Comme cette quantité est $\ll |\gamma_N|/|\log s|^N$, nous obtenons bien la formule annoncée. □

4·3. Développement asymptotique de $\lambda_0(s)$

Posons

$$\alpha_0 := 1, \quad \alpha_m := \sum_{1\leqslant j\leqslant m} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1\geqslant 1,\dots,\,k_j\geqslant 1\\ k_1+\dots+k_j=m}} \gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\cdots\gamma_{k_j} \qquad (m \geqslant 1). \tag{4·18}$$

Lemme 4.5. *On a*

$$\alpha_m = (-1)^m(m-1)!\Big\{1 + \frac{\gamma}{m} + O\Big(\frac{1}{m^2}\Big)\Big\} \qquad (m \geqslant 1).$$

Démonstration. Posons, pour $j \geqslant 1$, $m \geqslant 1$,

$$S_j(m) := \sum_{\substack{k_1\geqslant 1,\dots,\,k_j\geqslant 1\\ k_1+\dots+k_j=m}} (k_1-1)!\cdots(k_j-1)!,$$

de sorte que

$$S_j(m) = \sum_{1\leqslant r\leqslant m-j+1} (r-1)!S_{j-1}(m-r).$$

On en déduit aisément par récurrence sur j que

$$S_j(m) \leqslant 3^j(m-j)! \tag{4·19}$$

D'après (4·13), on a $|\gamma_k| \leqslant A(k-1)!$ pour une constante positive convenable A. Reportant dans (4·18) en tenant compte de (4·19), nous pouvons écrire, pour $m \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\alpha_m &= \gamma_m + \gamma_1\gamma_{m-1} + O\left(\sum_{2\leqslant k\leqslant m-2} |\gamma_k\gamma_{m-k}| + \sum_{3\leqslant j\leqslant m} \frac{(3A)^j(m-j)!}{j!}\right)\\ &= (-1)^m(m-1)!\left\{1+\frac{\gamma}{m-1}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

□

Définissons à présent une nouvelle suite par

$$\lambda_n := \mathrm{e}^{-\gamma}\alpha_{n-1} \quad (n \geqslant 1). \tag{4·20}$$

Il résulte notamment de (4·14) et (4·18) que

$$\lambda_1 = \mathrm{e}^{-\gamma}, \quad \lambda_2 = -\gamma\mathrm{e}^{-\gamma}, \quad \lambda_3 = \mathrm{e}^{-\gamma}\left(\frac{\pi^2}{12}+\gamma^2\right), \tag{4·21}$$

alors que l'on déduit immédiatement du Lemme 4.5 que

$$\lambda_n = \mathrm{e}^{-\gamma}(-1)^{n-1}(n-2)!\left\{1+\frac{\gamma}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} \qquad (n \geqslant 2). \tag{4·22}$$

Lemme 4.6. *Il existe une constante $c_2 \in]0, \frac{1}{10}]$ telle que l'on ait*

$$\lambda_0(s) = \sum_{1\leqslant n<N} \frac{\lambda_n}{(\log s)^n} + O\Big(\frac{\lambda_N}{(\log s)^N}\Big) \tag{4·23}$$

uniformément sous les conditions $\sigma \geqslant 3$, $|s| \leqslant \sigma\mathcal{L}(\sigma)^{c_2}$, $1 \leqslant N \leqslant (\log|s|)^{1-c_2}$.

Démonstration. Choisissons $c_2 := \min(c, \frac{1}{10})$ où c est la constante du Lemme 2.1 et posons $b := [1/c_2]+1$. Nous pouvons écrire, grâce à (4·15),

$$\lambda_0(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log s}\exp\left\{\sum_{1\leqslant k<bN} \frac{\gamma_k}{(\log s)^k} + O\left(\frac{\gamma_{bN}}{(\log s)^{bN}}\right)\right\}. \tag{4·24}$$

Définissant la suite $\{\alpha_{mN}\}_{m=0}^{\infty}$ par la formule

$$F_N(z) := \exp\Bigl\{\sum_{1\leqslant n<bN}\gamma_k z^k\Bigr\} = \sum_{m\geqslant 0}\alpha_{mN}z^m \qquad (z\in\mathbb{C}),$$

et tenant compte du fait que $\lambda_0(s)$ est bornée dans le domaine $|s|\leqslant\sigma\mathcal{L}(\sigma)^{c_2}$, nous obtenons

$$\lambda_0(s) = \mathrm{e}^{-\gamma}\sum_{m\geqslant 0}\frac{\alpha_{mN}}{(\log s)^{m+1}} + O\Bigl(\frac{\gamma_{bN}}{(\log s)^{bN}}\Bigr). \tag{4·25}$$

On a $\alpha_{mN}=\alpha_m$ si $m<bN$. De plus, comme

$$F_N(z) \ll \exp\Bigl\{\sum_{1\leqslant k<bN}\frac{|\gamma_k|}{(bN)^k}\Bigr\} \ll 1$$

lorsque $|z|=1/(bN)$, la formule de Cauchy implique

$$\alpha_{mN} \ll (bN)^m \qquad (m\geqslant 0).$$

En reportant dans (4·25), nous obtenons

$$\lambda_0(s) = \sum_{1\leqslant n<bN}\frac{\lambda_n}{(\log s)^n} + O\Bigl(\Bigl\{\frac{bN}{\log s}\Bigr\}^{bN}\Bigr).$$

Le terme d'erreur est $\ll 1/(\log s)^N$ en vertu du choix de b. De plus, au vu de (4·22), la contribution au terme principal des sommants d'indices $n\geqslant N$ est $\ll\lambda_N/(\log s)^N$. Cela implique bien l'estimation annoncée (4·23). □

4·4. Développement asymptotique de $1-G(1-1/\sigma)$

Posons, avec la notation (4·1),

$$g_m = \sum_{0\leqslant j\leqslant m-1}\binom{m-1}{j}\Gamma_j\lambda_{m-j} \qquad (m\geqslant 1), \tag{4·26}$$

et notons que les valeurs données en (1·9) résultent bien de (4·21). Nous commençons par établir l'assertion du Théorème 1.2 relative au comportement asymptotique de g_m.

Lemme 4.7. *On a*

$$g_m = \Bigl\{1+O\Bigl(\frac{1}{m}\Bigr)\Bigr\}\mathrm{e}^{-\gamma}(-1)^m(m-3)! \qquad (m\geqslant 3). \tag{4·27}$$

Démonstration. Reportons l'estimation (4·22) dans (4·26) lorsque $0 \leqslant j \leqslant m-2$ et estimons le terme d'indice $j = m-1$ par (4·6). Nous obtenons

$$\frac{\mathrm{e}^{\gamma}(-1)^{m-1}g_m}{(m-1)!} = \sum_{0\leqslant j\leqslant m-2} \frac{(-1)^j\Gamma_j}{(m-j-1)j!}\left\{1+\frac{\gamma}{m-j-1}\right\} + R_m \tag{4·28}$$

avec

$$R_m \ll \sum_{0\leqslant j\leqslant m-2} \frac{|\Gamma_j|}{j!(m-j-1)^3} + \Big(\frac{\mathrm{e}\log m}{m}\Big)^{m-1} \ll \frac{1}{m^3}.$$

La contribution au membre de droite de (4·28) des termes dont l'indice j vérifie $m/2 < j \leqslant m-2$ est, d'après (4·6),

$$\ll \sum_{m/2<j\leqslant m-2} \frac{|\Gamma_j|}{j!} \ll \frac{(\log m)^m}{[m/2]!} \ll \frac{1}{m^3}.$$

Lorsque $0 \leqslant j \leqslant m/2$, nous reportons dans (4·28) le développement uniforme

$$\frac{1}{m-j-1} = \frac{1}{m} + \frac{j+1}{m^2} + O\left(\frac{(j+1)^2}{m^3}\right).$$

Il suit

$$\frac{\mathrm{e}^{\gamma}(-1)^{m-1}g_m}{(m-1)!} = \left(\frac{1}{m}+\frac{\gamma}{m^2}\right)U_m + \frac{V_m}{m^2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right), \tag{4·29}$$

où l'on a posé

$$U_m := \sum_{0\leqslant j\leqslant m/2} \frac{(-1)^j\Gamma_j}{j!}, \quad V_m := \sum_{0\leqslant j\leqslant m/2} \frac{(j+1)(-1)^j\Gamma_j}{j!}.$$

Ainsi, U_m est la somme partielle du développement en série de Taylor de $1/\Gamma(1+x)$ en $x=-1$. La série obtenue en étendant la sommation jusqu'à l'infini est donc nulle. Il s'ensuit, d'après (4·6), que

$$U_m \ll \frac{(\log m)^m}{[m/2]!} \ll \frac{1}{m^2}.$$

Semblablement, observons que V_m est la somme partielle du développement de Taylor de $(-1/\Gamma)'(1+x)$ en $x=-1$. Il suit

$$V_m = -1 + O\left(\frac{(\log m)^m}{[m/2]!}\right) = -1 + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

En reportant dans (4·29), cela fournit bien (4·27). □

Nous sommes à présent en mesure de compléter la démonstration du Théorème 1.2.

Observons d'emblée qu'il est suffisant d'établir le développement asymptotique (1·7) pour $N \leqslant N_0 := a(\log\sigma)^{3/5}/(\log_2\sigma)^{6/5}$ où a est une constante arbitrairement petite. En effet, si $N > N_0$, on a

$$\sum_{N_0\leqslant n<N} \frac{g_n}{(\log\sigma)^n} \ll \frac{|g_N|}{(\log\sigma)^N} + \frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)^{a/2}},$$

ainsi qu'on peut l'établir en comparant N à $(\log\sigma)^{4/5}$ et $2\log\sigma$ et en utilisant l'estimation $|g_n| \ll (n/\mathrm{e})^n$ lorsque $n \leqslant 2\log\sigma$.

Nous supposons donc dans toute la suite que $N \leqslant N_0$.

Appliquons le Théorème 1.1 avec $h := 1/\sigma$ et $T := \sigma(\log\sigma)^{3N}$, ce qui est licite sous réserve de choisir la constante a assez petite. Nous obtenons

$$\begin{aligned} 1-G(1-1/\sigma) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \lambda_0(s)\mathrm{e}^{s/\sigma}\frac{\mathrm{d}s}{s} + O\left(\frac{1}{(\log\sigma)^N}\right) \\ &= \sum_{1\leqslant n<3N} \frac{\lambda_n}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} \frac{\mathrm{e}^{s/\sigma}\,\mathrm{d}s}{s(\log s)^n} + O\left(\frac{1}{(\log\sigma)^N} + \left|\lambda_{3N}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{\mathrm{e}^{s/\sigma}\,\mathrm{d}s}{s(\log s)^{3N}}\right|\right), \end{aligned}$$

où nous avons appliqué le Lemme 4.6 à l'ordre $3N$. D'après (4·22) et (4·27), le dernier terme d'erreur est

$$\ll \frac{\lambda_{3N}}{(\log\sigma)^{3N-1}} \ll \frac{g_N}{(\log\sigma)^N}.$$

Il suit

$$1 - G(1-1/\sigma) = \sum_{1\leqslant n<3N} \lambda_n H_n(\sigma) + O\left(\frac{g_N}{(\log\sigma)^N}\right), \tag{4·30}$$

où l'on a posé

$$H_n(\sigma) := \frac{1}{2i\pi}\int_{1-iT_1}^{1+iT_1} \frac{\mathrm{e}^w\,\mathrm{d}w}{w(\log\sigma w)^n} \tag{4·31}$$

pour $T_1 := (\log\sigma)^{3N}$.

Pour $1 \leqslant n < 3N$, appliquons la formule de Taylor–Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} = &\sum_{0\leqslant j<3N-n} \binom{n+j-1}{j}(-x)^j \\ &+ n\binom{3N-1}{n}(-x)^{3N-n}\int_0^1 \frac{(1-t)^{3N-n-1}}{(1+tx)^n}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

pour $x := (\log w)/(\log \sigma)$, et reportons dans (4·31). La contribution du reste intégral est estimée par interversion des intégrales en w et t. Elle vaut

$$\binom{3N-1}{n} \frac{(-1)^{3N-n} n}{2\pi i (\log \sigma)^{3N-n}} \int_0^1 (1-t)^{3N-n-1}\,\mathrm{d}t \int_{1-iT_1}^{1+iT_1} \frac{(\log w)^{3N-n} \mathrm{e}^w\,\mathrm{d}w}{w(\log \sigma + t \log w)^n}.$$

Une intégration par parties permet d'estimer l'intégrale en w. Nous obtenons qu'elle est

$$\ll \frac{(3N-n+1)!}{(\log \sigma)^n}$$

uniformément en t. Nous avons ainsi établi que la contribution à $H_n(\sigma)$ du reste de Taylor–Lagrange est

$$\ll \frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}.$$

Nous en déduisons que

$$H_n(\sigma) = \sum_{0 \leqslant j < 3N-n} \frac{(-1)^j (n+j-1)!}{(n-1)! j! (\log \sigma)^{n+j}} \mathcal{H}_j(T_1) + O\bigg(\frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}\bigg),$$

où $\mathcal{H}_j$ est défini en (4·3). Appliquons (4·4) avec $T = T_1$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Nous pouvons majorer la contribution du terme d'erreur de (4·4) par

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant j < 3N-n} \frac{(n+j-1)!(2\log T_1)^j}{(n-1)! j! (\log \sigma)^{n+j} T_1} &\ll \frac{(3N)!}{T_1 (n-1)!} \sum_{1 \leqslant j < 3N-n} \frac{1}{j!} \\ &\ll \frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité $2 \log T_1 \leqslant \log \sigma$. Cela fournit

$$H_n(\sigma) = \sum_{0 \leqslant j < 3N-n} \frac{(n+j-1)! \Gamma_j}{(n-1)! j! (\log \sigma)^{n+j}} + O\bigg(\frac{(3N)!}{(n-1)!(\log \sigma)^{3N}}\bigg).$$

Nous reportons dans (4·30). Il suit

$$G(1) - G(1-1/\sigma) = \sum_{1 \leqslant n < 3N} \frac{g_n}{(\log \sigma)^n} + O\bigg(\frac{(3N)!}{(\log \sigma)^{3N}} + \frac{|g_N|}{(\log \sigma)^N}\bigg). \tag{4·32}$$

Or, compte tenu des estimations (4·27), nous avons, pour $N \leqslant N_0$,

$$\sum_{N \leqslant n < 3N} \frac{|g_n|}{(\log \sigma)^n} + \frac{(3N)!}{(\log \sigma)^{3N}} \ll \frac{g_N}{(\log \sigma)^N}.$$

Cela achève la démonstration.

Bibliographie

[1] H.G. Diamond & D. Rhoads, The modulus of continuity of the distribution function of $\varphi(n)/n$, *Topics in classical number theory*, vols. I, II (Budapest, 1981), 335–353, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 34, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[2] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.

[3] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : mean value theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. **239**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1979.

[4] P. Erdős, On the smoothness of the asymptotic distribution of additive arithmetical functions, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 722–725.

[5] P. Erdős, On the distribution of numbers of the form $\sigma(n)/n$ and on some related questions, *Pacific J. Math.* **52** (1974), 59–65.

[6] I.J. Schoenberg, Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen mod 1, *Math. Z.* **28** (1928), 171–200.

[7] I.J. Schoenberg, On asymptotic distributions of arithmetical functions, *Trans. A.M.S.* **39** (1936), 315–330.

[8] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n°1, Société Mathématique de France, 1995.

[9] V. Toulmonde, *Fonction de répartition de $\varphi(n)/n$*, Thèse de doctorat, Université d'Évry-Val d'Essonne, 2004.

[10] V. Toulmonde, Module de continuité de la fonction de répartition de $\varphi(n)/n$, *Acta arith.*, à paraître.

[11] V. Toulmonde, Comportement au voisinage de 1 de la fonction de répartition de $\varphi(n)/n$, prépublication.

Gérald Tenenbaum & Vincent Toulmonde
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France

gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr
vincent.toulmonde@iecn.u-nancy.fr