



**HAL**  
open science

## Sur la conjecture abc version corps de fonction, d'Oesterle

Frédéric Campana

► **To cite this version:**

| Frédéric Campana. Sur la conjecture abc version corps de fonction, d'Oesterle. 2006. hal-00091240

**HAL Id: hal-00091240**

**<https://hal.science/hal-00091240>**

Preprint submitted on 5 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SUR LA CONJECTURE ABC, VERSION CORPS DE FONCTIONS D'OESTERLÉ

Frédéric Campana

July 20, 2006

**Résumé:** Nous démontrons une forme faible de la version corps de fonctions complexe, due à Oesterle, de sa conjecture abc: soit  $B$  une courbe projective complexe, et  $D$  un diviseur réduit de degré  $d > 0$  sur  $B$  de la surface  $S := B \times \mathbb{P}^1$ . Alors le nombre de points d'intersection comptés *sans multiplicités* de  $D$  et du graphe  $H$  d'une section de la projection  $q : S \rightarrow B$ , est au moins  $(d - 2[\sqrt{d}]).n$ , à une constante additive près ne dépendant que de  $(D, B)$ , si  $H$  est de degré  $n > 0$  sur  $\mathbb{P}^1$ . (La conjecture affirme l'existence d' au moins  $(d - 2 - \epsilon).n$  points).

**Abstract:** We show a weak form of Oesterlé's complex function field version of his abc conjecture: let  $B$  be a complex projective curve, and  $D$  a divisor on the surface  $S := B \times \mathbb{P}^1$ ,  $D$  of degree  $d > 0$  over  $B$ . For any map  $h : B \rightarrow \mathbb{P}^1$  of any geometric degree  $n > 0$ , the number of intersection points, counted *without multiplicities*, of  $D$  with the graph of  $h$  is then at least  $(d - 2[\sqrt{d}]).n$ , up to an additive constant depending only on  $(B, D)$ . (The conjecture asserts the existence of  $(d - 2 - \epsilon).n$  intersection points at least, instead).

**Remerciements:** Je remercie vivement J. Oesterlé et le rapporteur, le premier pour m'avoir communiqué sa conjecture et signalé une lacune dans une version antérieure; le rapporteur pour sa lecture attentive, repérant une erreur résiduelle.

## 1 Introduction

L'énoncé suivant est une forme très affaiblie de la conjecture *abc* pour les corps de fonctions, due à J. Oesterle ([Oe 05]), qui est l'énoncé ci-dessous, mais avec  $[\sqrt{d}]$  remplacé par  $1 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  arbitraire; sous forme optimiste l'inégalité subsisterait avec  $\epsilon = 0$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $B$  une courbe complexe lisse et connexe de genre  $g$ . Soit  $S := B \times \mathbb{P}^1$ , munie des projections  $p : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  et  $q : S \rightarrow B$ . Soit  $D \subset S$  une courbe projective réduite de degré géométrique  $d > 0$  sur  $B$ .*

*Il existe alors une constante  $C := C(D, B)$  telle que:*

Pour tout  $n > 0$ , et pour toute application holomorphe surjective  $h : B \rightarrow \mathbb{P}^1$ , de degré géométrique  $n$ , de graphe  $H \subset S$ , non contenu dans  $D$ , le nombre  $N_H$  de points d'intersection (deux à deux distincts) de  $D$  et  $H$  vérifie:  $N_H \geq n.(d - 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor) - C$ .

**Remarques:** 1. Lorsque  $D$  est un diviseur *constant* constitué de la réunion des graphes de  $d$  sections constantes distinctes de  $q$ , la conjecture est une conséquence immédiate de la formule de Riemann-Hurwitz, qui fournit:  $N \geq (d - 2)n - (2g - 2)$ .

2. La conjecture est invariante par transformation birationnelle de  $S = B \times \mathbb{P}^1$  au-dessus de  $B$ , remplaçant  $D, H$  par leurs transformées strictes. En effet, le nouvel  $n$  diffère alors de l'ancien par une constante *additive*, égale à la différence cohomologique entre une section constante de  $q$  et sa transformée stricte, divisée par la classe d'une  $q$ -fibre.

3. Si  $d \leq 3$ , on peut transformer birationnellement  $D$  en un diviseur constant à l'aide du birapport. La conjecture est donc vraie pour  $d \leq 3$  (mais ouverte déjà pour  $d = 4$ ). On peut en déduire aisément que  $N_H \geq n.(d/3) - C'(D, B)$ .

4. La conjecture est vraie pour  $(D, B)$  si elle l'est pour  $(D', B')$  déduit par changement de base fini  $B' \rightarrow B$ . On supposera donc dans la suite que  $D$  est la réunion des graphes  $D_j$  de  $d$  sections distinctes  $s_j : B \rightarrow S$  de  $q$ , pour  $j \in J := \{1, \dots, d\}$ .

5. La méthode suivie est, en plus simple, celle de [Ca 04], issue des considérations orbifoldes de [Ca 01].

**Notations et conventions:** On supposera que la section à l'infini  $B_\infty := B \times \{\infty\}$  diffère de  $H$ , et coupe  $D$  transversalement en  $\delta$  points,  $\delta$  étant le degré de  $D$  sur  $\mathbb{P}^1$ . On notera  $\delta_j \geq 0$  les degrés des sections  $s_j$ , et  $\delta$  est donc la somme des  $\delta_j$ .

On notera  $x$  (resp.  $y$ ) une coordonnée locale sur  $B$  (resp. une coordonnée linéaire sur  $\mathbb{C} := \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ ), et  $dx$  (resp.  $dy$ ) les formes différentielles déduites de ces fonctions par dérivation. On notera aussi  $p \in B$  un point fixé de  $B$  (choisi en fonction de  $h$ ), et  $P := q^{-1}(p)$  sa  $q$ -fibre réduite.

**Definition 1.2** Soit  $m, \nu$  deux entiers, et  $w \in H^0(S, \text{Sym}^m(\Omega_S^1)(2mB_\infty + \nu.P))$ ,  $m > 0$ . On dit que  $w$  est **tangente à  $D$**  si  $s_j^*(w) = 0$ , pour tout  $j \in J$ . On note  $W_{m, \nu, p}$  le sous-espace vectoriel complexe de  $H^0(S, \text{Sym}^m(\Omega_S^1)(2mB_\infty + \nu.P))$  constitué des formes pluridifférentielles tangentes à  $D$ .

**Lemme 1.3** Si  $m \geq \lfloor\sqrt{d}\rfloor$ , il existe  $\nu(m)$  tel que si  $\nu \geq \nu(m)$ , alors  $W_{m, \nu, p}$  est de dimension au moins 1, ceci pour tout  $p \in B$ .

**Démonstration:** Ecrivons  $w = \sum_{h=0}^{h=m} (dy)^{\otimes(m-h)} \otimes w_h$ , avec  $w_h \in q^*(H^0(B, hK_B + \nu.p)) \otimes \pi^*(H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2h)))$ ,  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  étant la seconde projection. Notons  $V := V_{m, \nu, p}$  l'espace vectoriel complexe des formes pluridifférentielles méromorphes sur  $S$  de cette forme. Alors, pour tout  $j \in J$ , on a une restriction linéaire naturelle  $s_j^*(w) \in H^0(B, mK_B + 2m\{\delta_j\} + \nu.p)$  dont le noyau est de codimension au plus:  $((2m - 1)(g - 1) + 2m\delta_j + \nu)$  dans  $V$ , avec  $\{\delta_j\} := s_j^*(B_\infty)$ . La codimension dans  $V$  de  $W_{m, \nu, p}$  est donc au plus  $(2md(g - 1) + 2m\delta + d.\nu)$ .

Supposons (pour simplifier l'écriture) que  $g \geq 1$ , et que  $\nu \geq (2g-1)$ . Alors  $V$  est de dimension  $(\sum_{h=0}^{h=m} (2h+1) \cdot \nu) = ((m+1)^2 \cdot \nu)$ . Si  $(m+1)^2 > d$ , et si  $\nu \geq \nu(m, d, \delta)$ , avec  $\nu(m, d, \delta) := 1 + [(2m/(m+1)^2 - d) \cdot (d(g-1) + \delta)]$ , alors  $W_{m, \nu, p}$  n'est donc pas réduit à  $\{0\}$ , et ceci pour tout choix de  $p \in B_\bullet$

**Conventions:** Soit maintenant  $h : B \rightarrow S$  une section de  $q$  de degré  $n$ . On fixe  $m, \nu$  satisfaisant les inégalités du lemme précédent. On supposera, quitte à choisir  $p$  générique, et à modifier un peu  $B_\infty$ , que:  $s(p) \notin (B_\infty \cup D)$ , et que  $B_\infty$  coupe  $D$  transversalement (en  $\delta$  points distincts, donc). On choisit alors  $0 \neq w \in W_{m, \nu, p}$ .

**Lemme 1.4** *Soit  $b \in B$  tel que  $h(b) \in D$ . Soit  $t_j := t_j(b)$  l'ordre de contact en  $h(b)$  de  $H$  avec  $D_j, j \in J$ , et  $t := \sum_{j \in J} t_j$ . Soit  $t' = t'(b)$  l'ordre d'annulation en  $b$  de  $h^*(w) \in H^0(B, mK_B + 2mB_{\infty|H} + \nu p)$ . Si  $h(b) \notin B_\infty$ , alors:*

1.  $t' \geq (t-1)$  si  $h(b)$  est un point lisse de  $D$ .
2.  $t' \geq (t-1 - T(r) - d)$ , si  $r := h(b)$  est un point singulier de  $D$ , et si  $T(r) := \sum_{j < k \in J_r} \delta_{j,k}$ , où  $J_r \subset \{1, \dots, d\}$  est l'ensemble des  $j$  tels que  $r \in D_j$ , et  $\delta_{j,k}$  est l'ordre de contact en  $r$  des branches  $D_j$  et  $D_k$  de  $D$ .
3. Si  $h(b) \in B_\infty$ ,  $h^*(w)$  a en  $b$  un pôle d'ordre au plus  $(2m - t + 1)$ .

**Démonstration:** Assertion 1: Soit  $D_j$  une composante irréductible locale de  $D$  contenant  $a := h(b)$ , et  $y = s_j(x)$  l'expression locale de la section  $s_j$  dans des coordonnées locales  $(x, y)$  près de  $a$ . On peut donc écrire, sur un voisinage analytique de  $a$  dans  $S$ :  $w(x, y) = (dy - s'_j(x)dx) \otimes w_1(x) + (y - s_j(x)) \cdot w_2(x, y)$ , avec  $w_1$  (resp.  $w_2$ ) une section locale de  $Sym^{m-1}(\Omega_S^1)$  (resp. de  $Sym^m(\Omega_S^1)$ ).

Puisque  $D_j$  et  $H$  ont en  $a$  un contact d'ordre  $t$ , on a:  $h(x) = s_j(x) + x^t \cdot u(x)$ , et  $h^*(dy) = s'_j(x)dx + x^{(t-1)}v(x)$ , avec  $u, v$  des 1-formes holomorphes non nulles en  $b$ .

Donc  $h^*(w) = x^{(t-1)}v(x)dx \otimes w_1(x) + x^t \cdot u(x)w_2(x, s(x))$ . D'où l'assertion.

Assertion 2: soit  $t_+ := \max\{t_j, j \in J_r\} = t_{j_0}$ . On a donc:  $t' \geq (t_+ - 1)$ , par l'argument précédent. Il suffit donc de voir que  $t_+ \geq t - T(r) - d$ . Or,  $t := \sum_{j \in J_r} t_j \leq \sum_{j \in J_r} t_j + d$ , si  $J'_r \subset J_r$  est l'ensemble des  $j \in J_r$  tels que  $H$  soit tangente à  $D_j$ . Pour chaque  $j_0 \neq j \in J'_r$ , on a:  $t_j = \delta_{j, j_0}$ , puisque l'ordre de contact avec  $H$  est une valuation sur l'ensemble des germes de courbes lisses de  $S$  passant par  $r$ . Donc  $t \leq t_+ + \sum_{j \in J_r} \delta_{j, j_0} + d \leq t_+ + T(r) + d$ . D'où l'assertion.

Assertion 3: elle se déduit de l'assertion 1 en exprimant  $w$  dans les coordonnées locales  $(x, z := 1/y)$  près de  $h(b)$  •

**Démonstration du théorème 1.1:** Considérons  $h, m, \nu, p, w$  comme ci-dessus. Si  $h^*(w) \neq 0$ , soit  $Z$  (resp.  $P$ ) le nombre de ses zéros (resp. pôles) comptés avec multiplicités. Alors  $Z - P = 2m(g-1)$ . Les seuls pôles de  $h^*(w)$  sont en  $p$  (d'ordre au plus  $\nu$ ), et en les  $b$  où  $h(b) \in B_\infty$  (d'ordres  $(2m - t + 1)$  au plus).

Donc:  $P \leq \nu + 2mn - \sum_{(h(b) \in B_\infty \cap D)} (t-1)$ .

Soit maintenant  $T := \sum_{r \in R} T(r)$ , où  $R$  est l'ensemble des points singuliers de  $D$ . on a donc:  $T \leq \sum_{(j < k \in J)} D_j \cdot D_k = \sum_{(j < k \in J)} (\delta_j + \delta_k) \leq d\delta/2$ , et le lemme 1.4 montre que:  $Z \geq \sum_{(h(b) \in D - R - B_\infty)} (t(b) - 1) + \sum_{(r := h(b) \in R)} (t(b) - 1 - T(r) - d) = \sum_{D - B_\infty} (t-1) - T - d \cdot |R|$ .

Pour tout  $t \geq 1$ , soit  $N_t$  le nombre des  $b \in B$  tels que  $t(b) = t$ . On a donc:  $N := N_H := \sum_{t \geq 1} N_t$ , et aussi:  $(\sum_{b \in B} t.N_t) = H.D = dn + \delta$ . Des deux inégalités précédentes résulte que:  $2m(g-1) = Z - P \geq (\sum_{b \in B} (t(b)-1) - T - d.|R| - \nu - 2mn) = \sum_{t \geq 1} (t-1)N_t - T - d.|R| - \nu - 2mn = (dn + \delta) - N_H - T - d.|R| - \nu - 2mn$ . Donc:  $N_H \geq n(d-2m) - C$ , si  $C := T + d.|R| + \nu - 2m(g-1)$ . Choisisant  $m = \lceil \sqrt{d} \rceil$  fournit l'assertion dans ce cas.

L'estimation obtenue ne dépend pas de  $w$ , générique dans  $W_{m,\nu,p}$ , mais seulement de  $m, \nu, g, D$ , fixés. Si  $h^*(w) = 0$ , pour  $h$  fixée et  $w$  générique dans  $W_{m,\nu,p}$ ,  $p \in B$  générique, on a alors  $h^*(w) = 0$  pour toute  $w \in W_{m,\nu,p}$ . On peut donc fixer  $0 \neq w \in W_{m,\nu,p}$  désormais. Puisque  $h^*(w) = 0$ , La section  $w$  définit une hypersurface  $Y_w \subset \mathbb{P}(\Omega_S^1)$  génériquement finie sur  $S$ . Les sections  $h$  telles que  $h^*(w) = 0$  sont des courbes de  $S$  dont les relèvements canoniques à  $\mathbb{P}(\Omega_S^1)$  sont contenues dans  $Y_w$  et sont des courbes intégrales algébriques du feuilletage algébrique (singulier) défini par  $w$  sur  $Y_w$  (ou sur l'une de ses désingularisées). Le théorème de Jouanolou ([J]) affirme alors que ces courbes intégrales algébriques forment une famille bornée (plus précisément: soit finie, soit fibres d'un pinceau) sur  $Y_w$  et donc sur  $S$ . Pour  $n \geq n_0$  assez grand,  $H$  n'est donc pas contenue dans cette famille, et le résultat précédent s'applique. Il existe donc bien une constante  $C_0$  (non effective, dépendant de  $n_0$ )  $N \geq n(d - 2\lceil \sqrt{d} \rceil) - C_0$ , pour toute  $H \bullet$

## References

- [Ca 01] F.Campana. Special Varieties, Orbifolds, and Classification Theory. Ann. Inst. Fourier 54 (2004), 499-665. (Aussi sur math. AG/0110051).
- [Ca 04] F.Campana. Fibres multiples sur les surfaces: aspects géométriques, arithmétiques et hyperboliques. Man. Math. 117 (2005), 429-461. (Aussi sur math. AG/0410469).
- [J78] J.P. Jouanolou. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. Math. Ann. 232 (1978), 239-248.
- [Oe 05] J. Oesterlé. Communication orale. Juin 2005.

Adresse: Frédéric Campana.  
 Université Nancy 1. Département de Mathématiques  
 BP239. F-54506-Vandoeuvre-les-nancy.  
 E-mail: campana@iecn.u-nancy.fr