



HAL
open science

Stabilité matérielle et structurelle d'un lamifié élastomère-métal

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin, E. Zoppitelli

► **To cite this version:**

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin, E. Zoppitelli. Stabilité matérielle et structurelle d'un lamifié élastomère-métal. 6e Colloque national en calcul de structures, Association Française de Mécanique et le Laboratoire de Mécanique des Solides; Association Calcul des Structures et Modélisation, May 2003, Giens, France. pp.535-542. hal-00088912

HAL Id: hal-00088912

<https://hal.science/hal-00088912>

Submitted on 19 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



HAL
open science

Stabilité matérielle et structurale d'un lamifié élastomère-métal

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin, E. Zoppitelli

► **To cite this version:**

Stéphane Lejeunes, Adnane Boukamel, Bruno Cochelin, E. Zoppitelli. Stabilité matérielle et structurale d'un lamifié élastomère-métal. 6e Colloque national en calcul de structures, Ecole Polytechnique, 2003, Giens, France. pp.535-542. hal-00088912

HAL Id: hal-00088912

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00088912>

Submitted on 19 Feb 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright

Stabilité matérielle et structurelle d'un lamifié élastomère-métal

S. Lejeunes^{ab}, A. Boukamel^{ab}, B. Cochelin^{bc}, E. Zoppitelli^d

^a Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille, Technopole de Château Gombert, 13451 Marseille Cédex 20, lejeunes@esim.fr

^b Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique Marseille (UPR 7051)

^c Ecole Supérieure de Mécanique de Marseille

^d Eurocopter Marignane

Résumé

On aborde, dans ce papier, les deux types d'instabilités que l'on peut rencontrer dans le cadre des grandes transformations, à savoir les *instabilités matérielles* et les *instabilités structurelles*. Dans une première partie, on propose un algorithme d'identification de lois de comportements hyperélastiques, intégrant un critère de stabilité matérielle. Dans la seconde partie, on présente un macro-éléments permettant de modéliser le comportement global de structures lamifiées élastomère-métal et, *in fine*, prévoir les instabilités structurelles de telles structures.

1 Introduction

Les lamifiées élastomère-métal sont utilisées en tant qu'éléments de liaison mécanique dans plusieurs domaines de l'industrie tels que le ferroviaire, l'automobile, le BTP ou encore l'aérospatiale. Ces pièces jouent le rôle de filtres mécaniques rigides en compression et souples en cisaillement.

Le dimensionnement de ces structures nécessite souvent des modélisations complexes (complexités géométriques et numériques dues aux non-linéarités et à la taille des systèmes à résoudre). Ainsi pour réduire la taille de ces problèmes plusieurs techniques ont été proposées dans la littérature, à savoir:

- les éléments finis pseudo-axisymétriques pour les structures à symétrie de révolution soumises à un chargement quelconque, [2].
- les modèles semi-analytiques [8], [3], qui retranscrivent le comportement global d'un lamifié.
- la méthode de sous-structuration multi-niveaux pour les structures invariantes suivant une direction [9].

L'objet de ce travail est d'analyser la stabilité des structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une modélisation par macro-éléments. Le comportement de l'élastomère, supposé hyperélastique incompressible, est identifié en assurant la stabilité matérielle (au sens de stabilité élastique) dans un domaine de déformations prédéfini.

L'introduction de conditions de stabilité matérielle ramène le problème d'identification à un problème de minimisation sous contraintes. La première partie de ce travail peut s'inscrire dans la continuité des travaux proposés dans [7], qui imposent la positivité des paramètres matériaux afin d'assurer la stabilité matérielle quelque soit l'état de déformation.

La seconde partie, propose une démarche de résolution du problème d'instabilité structurale à l'aide d'une technique par macro-éléments dont la loi de comportement est déduite de la simulation d'un volume représentatif du stratifié à l'aide d'une modélisation par éléments finis tridimensionnels hyperélastiques.

2 Identification et stabilité matérielle

Pour qu'une loi de comportement hyperélastique incompressible soit élastiquement stable, il suffit que l'énergie libre associée vérifie, en plus des conditions de coercivité et de nullité à l'état de référence, la condition de polyconvexité introduite par BALL [6]

La démarche proposée ici consiste à imposer le critère de stabilité matérielle sur un domaine de déformation, fixé par les conditions de service. Dans le cas incompressible ce domaine est particulièrement simple, puisque défini par un sous-domaine borné, du plan des dilatations principales. On obtient donc, des conditions locales nécessaires et suffisantes, qui traduisent la convexité de la fonctionnelle d'énergie presque partout dans le sous-domaine.

L'énergie libre d'un matériau hyperélastique incompressible s'écrit classiquement : $\tilde{\psi}(I_1, I_2)$ où I_1 et I_2 sont les premiers invariants d'un tenseur des déformations. On prendra comme forme d'énergie (où a_{ij} sont les paramètres à identifier) :

$$\tilde{\psi}(I_1, I_2) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (1)$$

ce qui donne la forme du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff (où p est un multiplicateur de lagrange assimilable à une pression) :

$$\bar{\pi} = 2\bar{F} \left(\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_1} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{I}_d - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_2} \bar{C} \right) + p \text{Cof} \bar{F} \quad (2)$$

2.1 Identification sans contrainte

Pour identifier les paramètres matériau, on utilise deux essais expérimentaux, la traction simple et le double cisaillement. En supposant l'homogénéité de la déformation, en plus de l'incompressibilité du matériau, on obtient [2] :

$$\text{En traction} \quad \pi_{tr} = 2\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_2} \right) \quad (3)$$

$$\text{En cisaillement } \pi_{cs} = 2\alpha \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_1} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial I_2} \right) \quad (4)$$

Ainsi la fonction d'erreur adoptée au sens des moindres carrés est :

$$er(Y) = \sum_{i=1}^{n_{exp}} \left[\left(\frac{\pi_{tr}(\lambda_i) - f_{tr}(\lambda_i)}{f_{tr}(\lambda_{max})} \right)^2 + \left(\frac{\pi_{cs}(\alpha_i) - f_{cs}(\alpha_i)}{f_{cs}(\alpha_{max})} \right)^2 \right] \quad (5)$$

Les points $f_{tr}(\lambda_i)$ et $f_{cs}(\alpha_i)$ sont donnés par les essais, les valeurs $f_{tr}(\lambda_{max})$ et $f_{cs}(\alpha_{max})$ sont les valeurs maximales des contraintes de traction et de cisaillement, obtenues expérimentalement.

2.2 Identification avec contraintes locales de stabilité matérielle

En notant $\tilde{\psi}(I_1, I_2) = \psi(\lambda_1, \lambda_2)$, la condition de stabilité matérielle s'écrit sous la forme $\det(\nabla^2 \psi(\lambda_1, \lambda_2)) \geq 0$, le problème d'identification des paramètres devient ainsi :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbf{U} = \{v \in \mathbf{R}^n \text{ vérifiant : } \det(\nabla^2 \psi(\lambda_1, \lambda_2)) \geq 0 \\ \forall (\lambda_1, \lambda_2), \lambda_{imin} \leq \lambda_i \leq \lambda_{imax}\} \\ er(u) = \inf_{v \in \mathbf{U}} \{er(v)\} \end{cases} \quad (6)$$

En effectuant un maillage régulier du sous-domaine des dilatations, le problème (6) ce ramène à un problème discret que l'on résout à l'aide d'un schéma itératif d'Uzawa [5],[4].

2.3 Résultats et discussions

Les essais utilisés pour ces identifications couvrent un domaine de déformation allant jusqu'à 200%. Le tableau 1 présente respectivement les résultats d'identification de différents modèles (sans contraintes, avec contraintes de positivité [7] et avec contrainte de stabilité élastique, cf tableau 2)

La figure (1) montre sur les courbes identifiées en traction et cisaillement que, malgré la perte de précision due aux critères de stabilité, ces méthodes permettent de réaliser un

Modèle	libre	$a_{ij} > 0$	$\det(\nabla^2 \psi) \geq 0$
MOONEY-RIVLIN(1)	0.1277	1.9421	1.5786
JAMES ET AL.(2)	0.0352	1.2718	1.0319
JAMES ET AL.(3)	0.0061	0.9533	0.1745
ISIHARA ET AL.(4)	0.1197	1.2718	0.7891
JAMES ET AL.(5)	0.0386	0.9532	0.4065
BIDERMAN (7)	0.0475	0.9533	0.4314
TSCHOEGL (8)	0.1266	1.9421	1.0503
TSCHOEGL (9)	0.1145	1.9153	1.2551
LION (10)	0.0720	0.8297	0.4960
HAUPT ET SEDLAN (11)	0.0342	0.9533	0.4307

Tableau 1 – Résultats d'identification

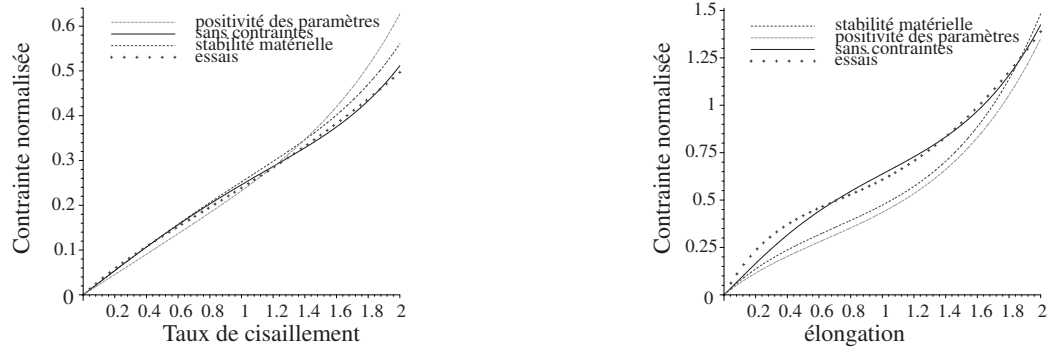


Figure 1 – Courbes identifiées pour le modèle de HAUPT ET SEDLAN

bon compromis entre la précision de l'identification et les conditions de stabilité matérielle. Ces conditions trouvent leur intérêt dans un cadre numérique, évitant ainsi certains effets de sablier et/ou des instabilités locales dans des modèles par éléments finis.

Référence	Coefficients utilisés									
MOONEY-RIVLIN(1)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}								
JAMES ET AL.(2)	a_{10}	a_{01}	\mathbf{a}_{11}	a_{20}	a_{02}					
JAMES ET AL.(3)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}	\mathbf{a}_{11}	a_{20}	a_{02}	a_{21}	\mathbf{a}_{12}	\mathbf{a}_{30}	a_{03}	
ISHIHARA ET AL.(4)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}		a_{20}						
JAMES ET AL.(5)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}	a_{11}	\mathbf{a}_{20}				a_{30}		
BIDERMAN (6)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}		\mathbf{a}_{20}				a_{30}		
TSCHOEGL (7)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}	a_{11}							
TSCHOEGL (8)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}					a_{22}			
LION (9)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}								a_{50}
HAUPT ET SEDLAN (10)	a_{10}	\mathbf{a}_{01}	\mathbf{a}_{11}		a_{02}			a_{30}		

- a_{ij} coefficient nul (avec contrainte de positivité des coefficients)
- \mathbf{a}_{ij} coefficient négatif (avec contrainte de stabilité matérielle)
- \mathbf{a}_{ij} coefficient négatif (sans contrainte) et nul (contrainte de positivité)

Tableau 2 – Paramètres négatifs et nuls pour les identifications

Sur le tableau 2, résumant les différents jeux de paramètres identifiés, on peut remarquer que pour la plupart des modèles, les paramètres négatifs avec l'identification sans contraintes s'annulent avec les contraintes ($a_{ij} \geq 0$), alors qu'avec la contrainte de stabilité matérielle, ces paramètres ne s'annulent pas, mais peuvent changer de signe.

3 Macro-éléments et stabilité structurelle

3.1 Construction du macro-éléments

Afin de modéliser simplement le comportement d'un volume représentatif (une strate élastomère-métal), nous proposons un macro-éléments constitué d'un élément poutre 3D avec cisaillement transverse, traduisant un comportement linéaire (en flexion, cisaillement et torsion) et d'un ressort non-linéaire de compression (fig. 2).

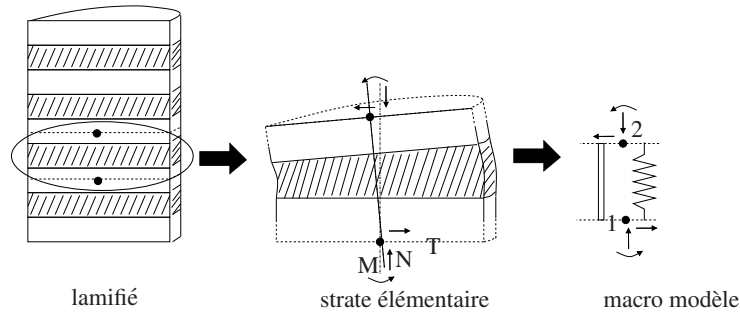


Figure 2 – Représentation schématique du macro-éléments

Le comportement «poutre» du macro-éléments, est identifié à partir de simulations de tests simples de flexion, cisaillement et torsion. Les caractéristiques mécaniques de la section équivalente (module d'Young E , module de cisaillement G , moment d'inertie de flexion I , moment d'inertie de torsion J et l'aire de sa section S) sont déterminées à l'aide d'une méthode d'ajustement par moindres carrés.

Ainsi, en imposant un déplacement transverse v ou une rotation (ω, θ) sur une section extrémité de la strate et en bloquant les ddls de l'autre section, on récupère la réponse en contraintes généralisées de la poutre :

$$\text{En flexion : } T = \frac{6EI}{(1+\phi)L^2}\omega \quad M = \frac{EI(4+\phi)}{(1+\phi)L}\omega \quad (7)$$

$$\text{En cisaillement : } T = \frac{12EI}{(1+\phi)L^3}v \quad M = \frac{6EI}{(1+\phi)L^2}v \quad (8)$$

$$\text{En torsion : } M_t = \frac{GJ}{L}\theta \quad (9)$$

Avec $\phi = \frac{12EI}{GSL^2}$, L est la longueur de la poutre équivalente, elle est égale à la somme de l'épaisseur d'une lamelle de caoutchouc et d'une lamelle d'acier.

Enfin on définit la loi de comportement, du ressort non-linéaire en déduisant la contribution de la poutre de l'effort normal d'une strate 3D mise en compression.

3.2 Comparaison modèle 3D - modèle macro

A titre de validation, on présente les résultats obtenus à l'aide du logiciel ABAQUS sur un lamifié constitué de 10 lamelles planes d'épaisseur 1 mm pour l'acier et 1 mm pour l'élastomère et de diamètre 10 mm.

3.2.1 Comportement global

Afin de valider le macro-éléments, nous avons réalisé une confrontation des résultats obtenus sur un modèle par macro-éléments à la réponse du modèle en éléments finis 3D.

A travers les résultats de compression présentés sur la figure (3), on constate qu'au delà d'un niveau d'écrasement de l'élastomère(7%), le modèle macro se rigidifie sensiblement par rapport au modèle 3D. Cependant l'écart relatif reste inférieur à 8%.

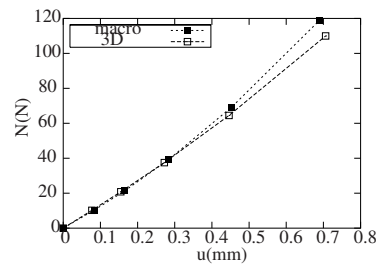


Figure 3 – Test en compression

En cisaillement (voir figures 4), ainsi qu'en flexion, le macro-modèle est également plus raide que le modèle 3D. Cette rigidification peut-être imputée à l'absence de couplage compression/flexion dans la loi de comportement du macro-éléments. En effet, le couplage induit par les non-linéarités géométriques ne constitue qu'une partie du couplage observé en 3D (voir figure 4(c)) dû en grande partie à l'incompressibilité de la couche d'élastomère.

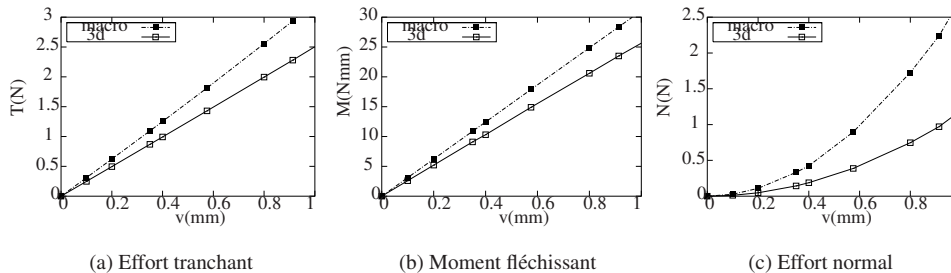


Figure 4 – Test en cisaillement (Efforts vs Déplacements)

3.2.2 Comportement au flambement

L'objectif de ce paragraphe est de prévoir le premier point d'instabilité du lamifié en compression. Ainsi, après avoir déterminé la branche d'équilibre fondamentale, on perturbe l'équilibre en introduisant un chargement transverse de faible intensité, le problème est ensuite résolu à l'aide de la méthode de continuation de RIKS ([10]).

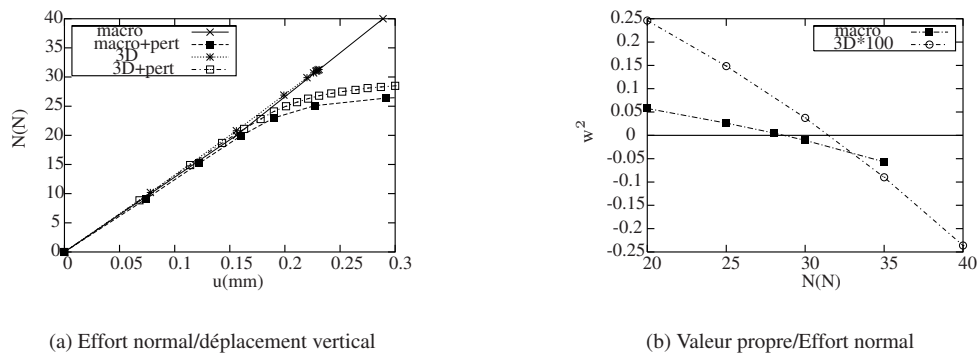


Figure 5 – Flambement, méthode de continuation et analyse modale

La recherche de la branche bifurquée à l'aide du macro-modèle réduit le temps de calcul d'un facteur 45 par rapport au modèle 3D. Par ailleurs, au niveau de la convergence de la méthode de continuation, le modèle macro s'avère plus performant que le modèle 3D qui réduit excessivement la longueur d'arc pour les incréments au voisinage du point de bifurcation (voir figure 5(a)).

Une autre démarche basée sur l'analyse modale permet de retrouver les instabilités obtenues avec la méthode de continuation. La figure 5(b) présente l'évolution de la première valeur propre du système en fonction du préchargement en compression. La nullité de celle-ci indique une singularité de la matrice tangente, le mode propre associé correspond donc à un mode de flambement.

Les deux méthodes permettent ainsi d'obtenir des valeurs comparables, i.e. 28 N pour le modèle macro, 32 N pour le modèle 3D.

4 Conclusion

La méthode d'identification présentée dans ce papier, permet de prendre directement en compte des critères locaux, *nécessaires et suffisants*, pour garantir la stabilité élastique dans un sous-domaine borné de l'espace des déformations. Une comparaison des résultats donnés par d'autres méthodes d'identification est menée et montre que notre méthode permet de réaliser un bon compromis entre la précision de l'identification et les conditions de stabilité matérielle.

Le macro-éléments proposé permet de prédire le comportement global d'un lamifié en compression, torsion, flexion et cisaillement. Cependant ce modèle devra être enrichi, d'une part par l'introduction d'un couplage non-linéaire entre le comportement axial et les effets transverses, d'autre part par l'utilisation de méthodes numériques permettant une réduction du temps de calcul comme la MAN [1]. Malgré ses limites le modèle macro, présente des résultats satisfaisants pour la modélisation du comportement en stabilité d'un lamifié. Le gain en temps de calcul, fera de ce modèle un outil efficace pour la conception de structures lamifiées, intégrées dans un environnement mécanique complexe.

Références

- [1] BAGUET, S. *Stabilité des structures minces et sensibilité aux imperfections par la méthode asymptotique numérique*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II (2001).
- [2] BOUKAMEL, A. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille II (1988).
- [3] CHANG, C.-H. Modeling of laminated rubber bearings using an analytical stiffness matrix. *International Journal of Solids and Structures*, **39**, 6055–6078 (2002).
- [4] CHEN, XIAOJUN. On preconditioned Uzawa methods and SOR methods for the saddle-point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **100**, 207–224 (1998).
- [5] CIARLET, P.G. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson (1982).
- [6] CIARLET, P.G. *Elasticité tridimensionnelle*. Masson (1986).
- [7] HARTMANN, S. Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions. *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 7999–8018 (2001).
- [8] IIZUKA, M. A macroscopic model for predicting large-deformation behaviors of laminated rubber bearings. *Engineering Structures*, **22**, 323–334 (2000).
- [9] MEO, S., DEBORDES, O., BOUKAMEL, A. Assemblage de structures une à une invariants dans une direction. *Mécanique et Industries*, **3**, 211–225 (2002).
- [10] RIKS, E. Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **47**, 219–259 (1984).