



HAL
open science

Foncteurs de division et structure de I tenseur 2 tenseur Lambda n dans la catégorie F

Aurélien Djament

► **To cite this version:**

Aurélien Djament. Foncteurs de division et structure de I tenseur 2 tenseur Lambda n dans la catégorie F. 2006. hal-00087238v1

HAL Id: hal-00087238

<https://hal.science/hal-00087238v1>

Preprint submitted on 21 Jul 2006 (v1), last revised 30 Jan 2007 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Foncteurs de division et structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie \mathcal{F}

Aurélien DJAMENT

21 juillet 2006

Résumé

Nous démontrons que dans la catégorie \mathcal{F} des foncteurs entre espaces vectoriels sur \mathbb{F}_2 , le produit tensoriel entre le second foncteur injectif standard non constant $V \mapsto \mathbb{F}_2^{(V^*)^{\oplus 2}}$ et un foncteur puissance extérieure est artinien. Seul était antérieurement connu le caractère artinien de cet injectif; notre résultat constitue une étape pour l'étude du troisième foncteur injectif standard non constant de \mathcal{F} .

Nous utilisons le foncteur de division par le foncteur identité et des considérations issues de la théorie des représentations modulaires des groupes symétriques pour obtenir ce théorème par la détection de facteurs de composition convenables.

Abstract

We prove that, in the category \mathcal{F} of functors between \mathbb{F}_2 -vector spaces, the tensor product between the second non constant standard injective functor $V \mapsto \mathbb{F}_2^{(V^*)^{\oplus 2}}$ and an exterior power functor is artinian. The only case known to date was the artinian character of this injective; our result is a step in the study of the third non constant standard injective of \mathcal{F} .

We use the division functor by the identity functor and facts from modular representation theory of the symmetric groups to obtain this theorem by detecting suitable composition factors.

Mots-clés : catégories de foncteurs, représentations modulaires, foncteurs de division, filtration de Krull.

Classification math. : 16P60, 18A25, 20B30, 20C20.

Introduction

Cet article s'intéresse aux objets injectifs de la catégorie \mathcal{F} des foncteurs de la catégorie \mathcal{E}^f vers la catégorie \mathcal{E} , où l'on note \mathcal{E} la catégorie des espaces vectoriels sur le corps \mathbb{F}_2 à deux éléments et \mathcal{E}^f la sous-catégorie pleine de \mathcal{E} dont les objets sont les espaces de dimension finie. Cette catégorie s'est révélée fondamentale en algèbre et en topologie. Ainsi, Suslin a démontré dans l'appendice de [FFSS99] que l'on peut calculer certains groupes d'homologie stable des groupes linéaires sur \mathbb{F}_2 à partir de groupes d'extensions dans la catégorie

\mathcal{F} , sur lesquels on dispose de nombreux résultats (cf. [FFSS99] et [Fra96]). La catégorie \mathcal{F} a été étudiée systématiquement depuis les travaux de Henn, Lannes et Schwartz montrant les liens étroits entre les foncteurs analytiques de \mathcal{F} et les modules instables sur l’algèbre de Steenrod (cf. [HLS93] et [Sch94]). L’image de la cohomologie d’un 2-groupe abélien élémentaire V par le foncteur fondamental de [HLS93] se trouve être l’objet injectif standard de \mathcal{F} associé au \mathbb{F}_2 -espace vectoriel V . Cela constitue l’une des motivations pour étudier ces objets injectifs.

Nous fournissons une étape supplémentaire dans l’étude de la *conjecture artinienne* (discutée en détails dans [Pow00a] et [Djac]) selon laquelle le foncteur injectif $I^{\otimes d}$ est un objet artinien pour tout entier naturel d , où I désigne le premier objet injectif standard non constant de \mathcal{F} (cf. § 1.1). Celle-ci n’est démontrée que pour $d \leq 2$. Elle est triviale pour $d = 0$, facile pour $d = 1$ et beaucoup plus difficile pour $d = 2$. De fait, bien que la catégorie \mathcal{F} possède de nombreuses propriétés de régularité et que ses objets simples soient connus — ils sont paramétrisés par les représentations simples sur \mathbb{F}_2 des différents groupes symétriques, l’étude de ses objets de longueur infinie s’avère d’une grande complexité, liée au problème de la compréhension *globale* de ces représentations. Les cas particuliers connus ont requis l’utilisation d’outils puissants, qui sont pourtant encore insuffisants pour une approche générale.

Afin d’aborder l’étude de $I^{\otimes d}$, on commence par examiner les sous-foncteurs obtenus en tensorisant par $I^{\otimes d-1}$ la filtration polynomiale de I , dont les quotients font apparaître les puissances extérieures. Ainsi, pour établir le caractère artinien de $I^{\otimes 2}$ dans [Pow98a], Powell s’est appuyé sur le résultat, dû à Piriou ([Pir97]), selon lequel les foncteurs $I \otimes \Lambda^n$ sont artiniens. Nos résultats sur la structure des foncteurs $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$, qui aboutiront au théorème suivant, constituent donc une étape pour l’étude de $I^{\otimes 3}$.

Théorème 1. *Pour tout entier naturel n , le foncteur $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ est artinien.*

L’outil principal, et nouveau pour ce type de problème, que nous employons, est l’endofoncteur $(- : \Lambda^1)$ de \mathcal{F} adjoint à gauche à $- \otimes \Lambda^1$, appelé *division par Λ^1* , qui suggère une approche par récurrence du théorème 1 à partir des isomorphismes naturels $(I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n : \Lambda^1) \simeq I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1}$ et du cas $n = 0$, traité par Powell.

Par des considérations issues de la théorie des représentations modulaires des groupes symétriques, nous donnons des renseignements sur l’effet de ce foncteur sur certains objets simples de la catégorie \mathcal{F} . Nous montrons ensuite comment en déduire des renseignements sur les facteurs de composition de foncteurs analytiques dont on contrôle la division par Λ^1 . Nous les appliquons à des sous-foncteurs de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ pour obtenir le pas de la récurrence.

Précisément, nous introduisons des sous-foncteurs explicites L_n^2 et D_n^2 de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ qui permettent de réduire le théorème 1 à l’énoncé suivant.

Théorème 2. *Pour tout entier naturel n , les foncteurs L_n^2 et D_n^2 sont artiniens.*

En fait, nous donnons une estimation de la « taille » des foncteurs L_n^2 , D_n^2 et $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ beaucoup plus précise que leur caractère artinien ; elle est étroitement liée à la filtration de Krull de \mathcal{F} — cf. [Djac].

Nous obtiendrons le théorème 2 à partir d'une proposition (5.32) affirmant qu'un sous-foncteur X de L_n^2 ayant la propriété que l'image du morphisme $(X : \Lambda^1) \rightarrow (L_n^2 : \Lambda^1)$ induit par l'inclusion est suffisamment grosse est égal à L_n^2 . Le pas de la récurrence s'en déduit par un argument formel, car le foncteur $(L_n^2 : \Lambda^1)$ est étroitement lié à L_{n-1}^2 ; le cas de D_n^2 se traite pareillement.

Ce travail s'organise comme suit. La première section rappelle les premières propriétés de la catégorie \mathcal{F} et la construction de ses objets simples. La deuxième section est consacrée à l'étude des propriétés fondamentales de l'endofoncteur $(- : \Lambda^1)$ de \mathcal{F} , comparées à celles du foncteur différence Δ , l'un des outils de base les plus importants de la catégorie \mathcal{F} . Le foncteur $(- : \Lambda^1)$ est un quotient du foncteur différence; contrairement à celui-ci, il n'est pas exact, mais il possède d'autres propriétés qui le rendent bien plus maniable que Δ , souvent trop « gros » pour permettre des calculs raisonnables, même sur les foncteurs assez élémentaires. La troisième section introduit une classe de foncteurs simples sur laquelle le foncteur de division par Λ^1 se trouve assez maniable. La quatrième montre comment détecter la présence de facteurs de composition dans un sous-foncteur G d'un foncteur F à partir de celle de certains facteurs dans l'image de $(G : \Lambda^1) \rightarrow (F : \Lambda^1)$. Dans la dernière section, après quelques préliminaires sur la structure du foncteur $I^{\otimes 2}$, nous construisons explicitement les foncteurs L_n^2 et D_n^2 qui permettent de filtrer les $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$. Nous établissons les propriétés de leurs facteurs de composition et de leur division par Λ^1 grâce auxquelles on peut mener à bien l'argument de récurrence des théorèmes 1 et 2.

Cet article expose une partie des résultats obtenus par l'auteur dans son doctorat [Djac], qui contient une généralisation du théorème 1 au cas de $I^{\otimes 2} \otimes F$, où F est un foncteur fini. Celle-ci s'effectue au prix de constructions plus techniques liées aux représentations des groupes symétriques, et de l'utilisation occasionnelle d'autres outils, également introduits dans [Djac], qui nous ont permis d'obtenir aussi cette généralisation par une méthode n'utilisant pas la division par Λ^1 (cf. [Djaa] et [Djab]). Les deux approches sont reliées par la nécessité, pour progresser dans l'étude de la conjecture artinienne, d'une compréhension fine des *foncteurs co-Weyl* (définis dans [Pow98c]) et de phénomènes « globaux » dans les représentations modulaires des groupes symétriques ou linéaires.

Notations et conventions

- Dans la suite, \mathbb{F}_2 étant le seul corps de base que nous considérerons, nous nommerons simplement *espace vectoriel* un espace vectoriel sur \mathbb{F}_2 .
- Soit E un ensemble. Nous noterons $\mathbb{F}_2[E]$ l'espace vectoriel somme directe de copies de \mathbb{F}_2 indexées par E . On peut voir l'association $E \mapsto \mathbb{F}_2[E]$ comme un foncteur de la catégorie des ensembles vers \mathcal{E} . Nous noterons $[e]$ l'élément de la base canonique de $\mathbb{F}_2[E]$ associé à un élément e de E .
- Si G est un groupe, $\mathbb{F}_2[G]$ désignera l'algèbre de G sur \mathbb{F}_2 .
- Nous noterons V^* le dual d'un espace vectoriel V .
- Nous désignerons par \mathbf{Mod}_A la catégorie des modules à droite sur un anneau A .

- Nous noterons $\text{Ob } \mathcal{C}$ la classe des objets d'une catégorie \mathcal{C} . L'ensemble des morphismes d'un objet A vers un objet B de \mathcal{C} sera noté $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, ou $\text{hom}(A, B)$ si nulle ambiguïté n'est possible. Enfin, \mathcal{C}^{op} désignera la catégorie opposée de \mathcal{C} .
- La sous-catégorie pleine de \mathcal{F} des foncteurs prenant des valeurs de dimension finie sera notée \mathcal{F}^{df} .
- Nous désignerons par Λ^n (resp. T^n, S^n, Γ^n) le foncteur n -ième puissance extérieure (resp. tensorielle, symétrique, divisée).
- On note \mathbb{Z} l'ensemble des entiers relatifs, \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs.

Table des matières

1	Préliminaires	4
1.1	Rappels généraux sur la catégorie \mathcal{F}	4
1.2	Foncteurs de Weyl et foncteurs simples	8
2	La division par Λ^1 dans \mathcal{F}	11
2.1	Les bifoncteurs Hom et $(- : -)$ de \mathcal{F}	11
2.2	Propriétés générales des foncteurs $(- : \Lambda^1)$ et Hom $(\Lambda^1, -)$	13
2.3	Liens formels avec les représentations des groupes symétriques	16
3	Compléments sur les foncteurs de Weyl	18
3.1	Quelques lemmes techniques	18
3.2	Partitions Weyl-séparantes	21
3.3	Division par Λ^1 des foncteurs de Weyl	24
4	Détection de facteurs de composition par division par Λ^1	25
4.1	Préliminaires formels	26
4.2	Détection de facteurs de degré maximal dans un foncteur fini	29
4.3	Détection dans $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^n$	30
5	Application à la structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$	33
5.1	La décomposition $\Lambda^2(\bar{I}) \simeq L(2) \oplus \bar{D}(2)$	34
5.2	Les foncteurs L_n^2 et D_n^2	38
5.3	Démonstration du théorème principal	42

1 Préliminaires

1.1 Rappels généraux sur la catégorie \mathcal{F}

Pour les définitions et résultats que nous rappelons dans ce paragraphe, et dont nous ferons un usage fréquent, nous renvoyons le lecteur à [Kuh94a], [Pow98b] et [Sch94] par exemple. Pour ce qui concerne les résultats de base sur

les catégories abéliennes que nous utilisons (souvent implicitement), on peut se référer à [Gab62].

Proposition et définition 1.1. 1. La catégorie \mathcal{F} est abélienne, elle possède des limites et des colimites, qui se calculent au but ; les colimites filtrantes y sont exactes. De plus, le produit tensoriel de \mathcal{E} induit une structure monoïdale symétrique sur $\otimes : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, le produit tensoriel.

2. On définit un foncteur $(\mathcal{E}^f)^{op} \rightarrow \mathcal{F} \quad V \mapsto P_V$ par la formule $P_V(E) = \mathbb{F}_2[\text{hom}_{\mathcal{E}^f}(V, E)]$. On note également $P = P_{\mathbb{F}_2}$.

3. On a un isomorphisme $\text{hom}_{\mathcal{F}}(P_V, F) \simeq F(V)$ naturel en $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et en $F \in \mathcal{F}$. En particulier, les foncteurs P_V sont des objets projectifs de \mathcal{F} , appelés foncteurs projectifs standard de \mathcal{F} .

4. Les foncteurs $P_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) forment une famille de générateurs projectifs de \mathcal{F} .

5. On a un isomorphisme $P_V \otimes P_W \simeq P_{V \oplus W}$ naturel en $V, W \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$. En particulier, $P_V \simeq P^{\otimes \dim V}$.

Proposition et définition 1.2. 1. On définit un foncteur

$D : \mathcal{F}^{op} \rightarrow \mathcal{F}$, appelé dualité, par $DF(V) = F(V^*)^*$.

2. Le foncteur D induit une équivalence de catégories entre $(\mathcal{F}^{df})^{op}$ et \mathcal{F}^{df} .

3. Le foncteur D est exact et fidèle ; il commute au produit tensoriel.

4. On a un isomorphisme $\text{hom}(F, DG) \xrightarrow{\text{dual}_{F,G}} \text{hom}(G, DF)$ naturel en les foncteurs F et G .

Définition 1.3. Un foncteur $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$ est dit *auto-dual* s'il est muni d'un isomorphisme $F \xrightarrow{d} DF$ tel que $\text{dual}_{F,F}(d) = d$.

Dans un tel foncteur, on définit l'*orthogonal* d'un sous-objet A par

$$A^\perp = \text{im} \left(D(X/A) \xrightarrow{D\pi} DX \xrightarrow{d^{-1}} X \right),$$

où π désigne la projection $X \rightarrow X/A$.

Remarque 1.4. 1. Un foncteur auto-dual est à valeurs de dimension finie.

2. Le produit tensoriel de deux foncteurs auto-duaux est auto-dual.

Exemple 1.5. Les foncteurs Λ^i sont auto-duaux. Par conséquent, tout produit tensoriel de puissances extérieures est auto-dual.

Il est usuel, en raison des liens avec les modules instables sur l'algèbre de Steenrod (cf. [HLS93] et [Sch94]), de s'intéresser plutôt aux objets injectifs de \mathcal{F} qu'à ses objets projectifs ; la dualité définie précédemment permet de passer d'un point de vue à l'autre.

Proposition et définition 1.6. 1. Pour $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, on pose $I_V = DP_V^*$.

On définit aussi $I = I_{\mathbb{F}_2} = DP$.

2. On a un isomorphisme $\text{hom}_{\mathcal{F}}(F, I_V) \simeq F(V)^*$ naturel en $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et en $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$. En particulier, les foncteurs I_V sont des objets injectifs de \mathcal{F} ; on les appelle foncteurs injectifs standard de \mathcal{F} .

3. Les foncteurs $I_{\mathbb{F}_2^{\oplus n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) forment une famille de cogénérateurs injectifs de \mathcal{F} .
4. On a un isomorphisme $I_V \otimes I_W \simeq I_{V \oplus W}$ naturel en $V, W \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$. En particulier, $I_V \simeq I^{\otimes \dim V}$.

Définition 1.7 (Foncteurs de décalage). Pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, on définit un endofoncteur Δ_V de \mathcal{F} par $\Delta_V(F) = F \circ (V \oplus -)$. Noter que cela définit même un foncteur de \mathcal{E}^f vers la catégorie des endofoncteurs de \mathcal{F} .

On constate que ces foncteurs sont exacts et qu'ils commutent aux limites, aux colimites et au produit tensoriel. De plus, on a des isomorphismes naturels $\Delta_V \circ \Delta_W \simeq \Delta_{V \oplus W}$.

Proposition 1.8. *Il existe un isomorphisme*

$$\text{hom}_{\mathcal{F}}(A, \Delta_V B) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(A \otimes P_V, B) \quad (1)$$

naturel en $A, B \in \text{Ob } \mathcal{F}$ et en $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$. En particulier, pour tout espace vectoriel V de dimension finie, le foncteur Δ_V est adjoint à droite au foncteur $- \otimes P_V$.

On en déduit par dualité :

Corollaire 1.9. *Il existe un isomorphisme*

$$\text{hom}_{\mathcal{F}}(\Delta_V A, B) \simeq \text{hom}_{\mathcal{F}}(A, I_V \otimes B) \quad (2)$$

naturel en $A, B \in \text{Ob } \mathcal{F}$ et en $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$. En particulier, pour tout espace vectoriel V de dimension finie, le foncteur Δ_V est adjoint à gauche au foncteur $- \otimes I_V$.

Proposition 1.10. *Notons $i : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur, exact et fidèle, qui à un espace vectoriel V associe le foncteur constant en V (dans la suite, nous noterons simplement V pour iV). Le foncteur $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \quad F \mapsto F(0)$ d'évaluation en 0 est adjoint à gauche et à droite à i .*

Le foncteur constant $iF(0)$ est naturellement facteur direct du foncteur F de \mathcal{F} .

Notation 1.11. Soit $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$. Nous noterons \bar{F} le conoyau de l'inclusion canonique $F(0) \hookrightarrow F$, de sorte qu'on a un scindement naturel $F \simeq F(0) \oplus \bar{F}$.

Nous utiliserons surtout cette notation pour le projectif \bar{P} et l'injectif \bar{I} .

Corollaire 1.12. *Notons $\Delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ le foncteur conoyau de l'inclusion canonique $\text{id}_{\mathcal{F}} \rightarrow \Delta_{\mathbb{F}_2}$, appelé foncteur différence de \mathcal{F} . On a un scindement naturel $\Delta_{\mathbb{F}_2} \simeq \text{id} \oplus \Delta$. De plus, le foncteur Δ commute à la dualité; il est adjoint à droite à $- \otimes \bar{P}$ et à gauche à $- \otimes \bar{I}$.*

Définition 1.13. 1. Soit $n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. On note \mathcal{F}_n la sous-catégorie pleine de \mathcal{F} formée des foncteurs F tels que $\Delta^{n+1}F = 0$ si $n \geq 0$, réduite à $\{0\}$ sinon.

2. Un foncteur F est dit *polynomial* s'il existe n tel que F appartient à \mathcal{F}_n . Le plus petit n ayant cette propriété s'appelle le *degré* de F , on le note $\text{deg } F$.

3. Un foncteur est dit *analytique* s'il est réunion de sous-foncteurs polynomi-
aux. On désigne par \mathcal{F}_ω la sous-catégorie pleine de \mathcal{F} formée des foncteurs
analytiques.

Dans la suite, nous nommerons simplement *finis* les objets de longueur finie.

Proposition et définition 1.14. 1. *Un foncteur est fini si et seulement s'il est polynomial et à valeurs de dimension finie.*

2. *Le dual d'un foncteur polynomial est polynomial de même degré.*
3. *Un foncteur est localement fini si et seulement s'il est analytique.*
4. *Les foncteurs I_V sont analytiques.*
5. *Soit $n \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. La sous-catégorie \mathcal{F}_n de \mathcal{F} est épaisse. De plus, l'inclusion $\mathcal{F}_n \xrightarrow{i_n} \mathcal{F}$ possède un adjoint à droite (resp. à gauche) noté p_n (resp. q_n). Par abus, on désignera encore par p_n (resp. q_n) l'endofoncteur $i_n p_n$ (resp. $i_n q_n$) de \mathcal{F} .*
6. *Soit F un objet de \mathcal{F} . Via la coïunité (resp. l'unité) de l'adjonction, on peut voir naturellement $p_n(F)$ comme un sous-objet (resp. un quotient) de F ; de plus la suite $(p_n(F))_n$ de sous-objets de F est croissante. Sa réunion est F si et seulement si F est analytique; en général, cette réunion est le plus grand sous-foncteur analytique de F .*

Proposition 1.15. 1. *Si A et B sont deux foncteurs polynomiaux, alors $A \otimes B$ est également polynomial. De plus, $\deg(A \otimes B) = \deg A + \deg B$.*

2. *Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $A, B \in \text{Ob } \mathcal{F}$. On a un isomorphisme naturel*

$$p_n(A \otimes B) \simeq \sum_{i+j=n} p_i(A) \otimes p_j(B).$$

3. *Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit un endofoncteur p_n^{hom} de \mathcal{F} par*

$$p_n^{\text{hom}} = p_n / p_{n-1}. \quad (3)$$

Il existe un isomorphisme naturel

$$p_n^{\text{hom}}(A \otimes B) \simeq \bigoplus_{i+j=n} p_i^{\text{hom}}(A) \otimes p_j^{\text{hom}}(B).$$

Pour une démonstration, on pourra se reporter à [Pir95].

Corollaire 1.16. *Le produit tensoriel de deux foncteurs analytiques est analytique.*

Définition 1.17. Un foncteur F est dit *homogène de degré n* (resp. *cohomogène de degré n*) s'il est polynomial de degré n et si $p_{n-1}(F) = 0$ (resp. $q_{n-1}(F) = 0$).

Il revient au même de dire que F est de degré n de même que tous ses sous-objets (resp. tous ses quotients) non nuls.

Remarque 1.18. Le foncteur $p_n^{\text{hom}}(F)$ est homogène de degré n s'il est non nul.

- Corollaire 1.19.** 1. *Tout sous-foncteur (resp. tout quotient) d'un foncteur homogène (resp. cohomogène) est homogène (resp. cohomogène).*
 2. *Un produit tensoriel de foncteurs homogènes (resp. cohomogènes) est également homogène (resp. cohomogène).*

Définition 1.20. Un foncteur est dit *de type fini* (resp. *de co-type fini*) — en abrégé *tf* (resp. *co-tf*) — lorsqu'il est quotient d'une somme directe finie de foncteurs P_V (resp. qu'il se plonge dans une somme directe finie de foncteurs I_V).

Cette définition d'objet *tf* de \mathcal{F} est équivalente à la notion catégorique générale. Pour une présentation détaillée des différentes notions de finitude utiles dans l'étude de la catégorie \mathcal{F} , nous renvoyons à [Djac].

- Proposition 1.21.** 1. *Tout foncteur *tf* (resp. *co-tf*) est à valeurs de dimension finie.*
 2. *Un foncteur est *tf* si et seulement si son dual est *co-tf*.*
 3. *Un foncteur fini est *tf* et *co-tf*.*
 4. *Un foncteur est *co-tf* si et seulement s'il est analytique et de socle fini.*

1.2 Foncteurs de Weyl et foncteurs simples

L'action par permutation des facteurs du groupe symétrique Σ_n sur le foncteur n -ième puissance tensorielle T^n permet de décrire les objets simples de la catégorie \mathcal{F} à partir de ceux des catégories $\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$, n parcourant \mathbb{N} . Ce paragraphe rappelle la description explicite des simples de \mathcal{F} obtenue par cette approche, qui passe par l'intermédiaire des foncteurs de Weyl, plus maniables que les foncteurs simples eux-mêmes.

Notation 1.22. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Nous noterons $s_n : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$ le foncteur $\mathrm{hom}_{\mathcal{F}}(T^n, \cdot)$, qu'on munit d'une structure de $\mathbb{F}_2[\Sigma_n]$ -module à droite en faisant agir Σ_n à gauche sur T^n .
- Nous noterons $r_n : \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} \rightarrow \mathcal{F}_n$ le foncteur $-\otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} T^n$.

Proposition 1.23. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. *Le foncteur r_n est adjoint à gauche à s_n .*
2. *Les foncteurs r_n et s_n induisent des équivalences de catégories réciproques l'une de l'autre*

$$\mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n-1} \simeq \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}.$$

Cette proposition est démontrée dans [Pir95].

Nous rappelons maintenant, dans le contexte de la catégorie \mathcal{F} , les définitions et propriétés fondamentales de la théorie des représentations des groupes symétriques.

Définition 1.24. 1. Une *partition* est une suite décroissante λ d'entiers, indexée par \mathbb{N}^* , qui stationne en 0.

2. La *longueur* d'une partition λ est le plus grand entier r , noté $l(\lambda)$, tel que $\lambda_r > 0$. Si λ est identiquement nulle, on convient que $l(\lambda) = 0$. Par la suite, on identifiera une partition λ et le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si $n \geq l(\lambda)$.
3. Une partition λ est dite *2-régulière* si $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ pour $1 \leq i < l(\lambda)$; le corps de base étant fixé à \mathbb{F}_2 , nous parlerons par la suite simplement de partition *régulière*.
4. Le *degré* d'une partition λ est l'entier positif $|\lambda| = \sum_{i \in \mathbb{N}^*} \lambda_i$. Une partition de $n \in \mathbb{N}$ est par définition une partition de degré n .
5. Soient λ et μ deux partitions de même degré. On notera $\lambda \leq \mu$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Notation 1.25. Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ est un r -uplet d'entiers, on notera Λ^λ , ou $\Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$, le foncteur

$$\Lambda^\lambda = \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_r} = \bigotimes_{1 \leq i \leq r} \Lambda^{\lambda_i}.$$

Remarque 1.26. La relation \leq définit un ordre *partiel* sur les partitions, appelé parfois *ordre de dominance* (cf. [Jam78], §3).

Remarque 1.27. Soient λ et μ deux partitions de même degré.

- L'assertion $\lambda \leq \mu$ est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{i \geq n} \lambda_i \geq \sum_{i \geq n} \mu_i.$$

- Si $\lambda \leq \mu$, alors $l(\lambda) \geq l(\mu)$.

Soient i et j deux entiers naturels. Il existe un unique morphisme non nul $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{i+j}$, appelé *produit*, et un unique morphisme non nul $\Lambda^{i+j} \rightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^j$, appelé *coproduit*. Ces morphismes sont duaux.

Notation 1.28. 1. Soient i, j et t des entiers tels que $0 \leq t \leq j$ et $i \geq 0$. On note $\theta_{i,j,t} : \Lambda^i \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^t \otimes \Lambda^{j-t} \rightarrow \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t}$ la flèche composée du coproduit sur le deuxième facteur tensorisé par Λ^i et du produit sur les deux premiers facteurs tensorisé par Λ^{j-t} . Par auto-dualité des puissances extérieures, nous identifierons $D\theta_{i,j,t}$ à un morphisme $\Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} \rightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^j$.

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous omettrons les indices pour les morphismes θ et $D\theta$.

2. Soit λ une partition de longueur r . On note, pour $1 \leq i \leq r-1$ et $1 \leq t \leq \lambda_{i+1}$,

$$\psi_\lambda^{i,t} = \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}} \otimes \theta_{\lambda_i, \lambda_{i+1}, t} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r} : \Lambda^\lambda \rightarrow \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}$$

puis

$$\psi_\lambda = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r-1 \\ 1 \leq t \leq \lambda_{i+1}}} \psi_\lambda^{i,t} : \Lambda^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq r-1 \\ 1 \leq t \leq \lambda_{i+1}}} \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}.$$

Définition 1.29. Soit λ une partition. On définit le *foncteur de Weyl* associé à λ , noté W_λ , par

$$W_\lambda = \ker \psi_\lambda \subset \Lambda^\lambda.$$

Remarque 1.30. Si $i \geq j$,

$$W_{(i,j)} = \bigcap_{1 \leq t \leq j} \ker \theta_{i,j,t}$$

et pour une partition λ de longueur quelconque r

$$W_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r-1} \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}} \otimes W_{(\lambda_i, \lambda_{i+1})} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r} \subset \Lambda^\lambda.$$

Remarque 1.31. Pour toute partition λ , W_λ est non nul, c'est donc un foncteur homogène de degré $|\lambda|$. En revanche, le foncteur défini par le noyau analogue à celui qui fournit W_λ est nul sur une suite d'entiers qui n'est pas une partition (cf. [PS98]).

Dans la suite, on désigne par *cosocle* d'un objet le quotient de celui-ci par son *radical* (intersection des sous-objets stricts maximaux). Au moins sur les objets finis, le cosocle est le plus grand quotient semi-simple, c'est donc la notion duale du *socle* (plus grand sous-objet semi-simple).

Théorème et définition 1.32 (Objets simples de \mathcal{F}). *Soit λ une partition régulière.*

1. *Le radical de W_λ est donné par*

$$\text{rad } W_\lambda = W_\lambda \cap W_\lambda^\perp$$

(cf. définition 1.3 et exemple 1.5).

2. *Le cosocle de W_λ est un objet simple de \mathcal{F} , appelé foncteur de Schur associé à λ et noté S_λ pour $n \geq l(\lambda)$. Celui-ci est de degré $|\lambda|$; en particulier, W_λ est cohomogène.*
3. *Les foncteurs de Schur sont auto-duaux.*

De plus, les foncteurs de Schur associés aux partitions régulières forment un système complet de représentants des objets simples de \mathcal{F} .

Théorème 1.33. *Les facteurs de composition de Λ^λ , où λ est une partition de longueur r de $n \in \mathbb{N}$, sont :*

1. *les S_μ , où μ parcourt les partitions régulières de n telles que $\mu \geq \lambda$,*
2. *des simples du type S_μ avec $|\mu| < n$, $l(\mu) < r$, $\mu_1 \geq \lambda_1$ et $\mu_{r-1} \leq \lambda_r$.*

En outre, S_λ est facteur de composition unique de Λ^λ .

Nous renvoyons le lecteur à [PS98], [Kuh94b] et [Jam78] pour les deux résultats précédents. Il pourra également consulter le chapitre 3 de [Pir95] pour une exposition complète des résultats fondamentaux sur les objets simples de \mathcal{F} .

Notation 1.34. Etant donnés une partition régulière λ et un foncteur $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$, nous abrègerons l'assertion S_λ est facteur de composition (i.e. sous-quotient) de F en $\lambda \vdash F$.

2 La division par Λ^1 dans \mathcal{F}

Cette section expose les propriétés de base de l'endofoncteur $(- : \Lambda^1)$, dit de *division par Λ^1* , que nous utiliserons pour repérer certains « bons » facteurs de compositions dans des foncteurs convenables. Les principales vertus de ce foncteur sont les suivantes :

- il est exact à droite et possède un comportement agréable vis-à-vis du produit tensoriel (c'est une dérivation) ;
- c'est un quotient du foncteur différence ; si F est un objet fini, $(F : \Lambda^1)$ contient les facteurs de composition de degré maximal de ΔF et supprime la plupart des facteurs de degré inférieur, rendant son calcul plus facile — ainsi, nous verrons au paragraphe 3.3 que l'on peut calculer aisément la division par Λ^1 d'un foncteur de Weyl, contrairement à ce qui advient pour le foncteur différence ;
- le foncteur de division par Λ^1 généralise naturellement le foncteur de restriction des Σ_n -modules vers les Σ_{n-1} -modules (cf. paragraphe 2.3), remarque qui rejoint la précédente ;
- contrairement au foncteur différence, qui accroît la taille des foncteurs infinis, la division par Λ^1 diminue celle des foncteurs de co-type fini.

La principale difficulté occasionnée par l'emploi de ce foncteur, comparé au foncteur différence, réside dans son inexactitude. Ainsi, si Y est un sous-quotient de X , $(Y : \Lambda^1)$ n'est pas forcément un sous-quotient de $(X : \Lambda^1)$. Nous utiliserons donc, dans la section 4, des méthodes de détection de facteurs de composition adaptées à des foncteurs seulement exacts à droite.

Signalons que les foncteurs de division ont été introduits par Lannes dans [Lan92] dans le cadre de la catégorie des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, intimement liée à \mathcal{F} . Dans [Pow98b], § 3, Powell met en évidence des liens étroits entre les foncteurs de division considérés par Lannes et ceux de la catégorie \mathcal{F} .

2.1 Les bifoncteurs \mathbf{Hom} et $(- : -)$ de \mathcal{F}

Proposition et définition 2.1. *Soit F un objet de \mathcal{F} .*

1. *L'endofoncteur $- \otimes F$ de \mathcal{F} possède un adjoint à droite, noté $\mathbf{Hom}(F, -)$, et appelé foncteur hom interne de source F . Ce foncteur est donc exact à gauche.*
2. *Si F est objet est à valeurs de dimension finie, alors $- \otimes F$ possède un adjoint à gauche, noté $(- : F)$ et appelé foncteur de division par F . Ce foncteur est donc exact à droite.*

Démonstration. Le foncteur $- \otimes F$ commute toujours aux colimites ; si F est à valeurs de dimension finie, il commute également aux limites. La conclusion provient donc du théorème de Freyd. \square

On obtient même ainsi des bifoncteurs $\mathbf{Hom} : \mathcal{F}^{op} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ et $(- : -) : \mathcal{F} \times (\mathcal{F}^{df})^{op} \rightarrow \mathcal{F}$. Ils sont liés par l'isomorphisme naturel de dualité

$$\mathbf{Hom}(F, DG) \simeq D(G : DF). \quad (4)$$

L'isomorphisme (1) de la proposition 1.8 fournit $\mathbf{Hom}(P_V, -) \simeq \Delta_V$, tandis que l'isomorphisme (2) du corollaire 1.9 donne $(- : I_V) \simeq \Delta_V$.

On en déduit en particulier que les foncteurs hom internes et de division commutent aux foncteurs différence et de décalage; de plus, si F est un foncteur de type fini (resp. de co-type fini), alors $\mathbf{Hom}(F, -)$ (resp. $(- : F)$) conserve \mathcal{F}^{df} et les objets de tf (resp. de co-tf), puisque F est un quotient d'une somme directe finie de P_V (resp. un sous-objet d'une somme directe finie de I_V).

Proposition 2.2. *Soient X un objet de \mathcal{F} et A un objet homogène de degré k . Pour tout entier n , il existe un isomorphisme naturel $\mathbf{Hom}(A, p_n(X)) \simeq p_{n-k}(\mathbf{Hom}(A, X))$.*

Démonstration. C'est une conséquence formelle de l'adjonction entre p_n et i_n et de l'isomorphisme naturel $p_n(A \otimes B) \simeq A \otimes p_{n-k}(B)$ (cf. proposition/définition 1.14). \square

Nous terminons ces généralités par une propriété relative aux *foncteurs exponentiels*, qui constituent un outil très commode pour mener à bien des calculs sur des produits tensoriels dans \mathcal{F} (cf. [FFSS99] et [Fra96]).

Définition 2.3 (Foncteurs exponentiels). On appelle *foncteur exponentiel gradué* toute suite $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'objets de \mathcal{F}^{df} telle qu'il existe des isomorphismes

$$E^n(V \oplus W) \simeq \bigoplus_{i+j=n} E^i(V) \otimes E^j(W)$$

naturels en les objets V et W de \mathcal{E}^f .

Exemple 2.4. Les foncteurs $(\Lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Gamma^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont exponentiels gradués.

Proposition 2.5. *Soient $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ un foncteur exponentiel gradué, A et B deux objets de \mathcal{F} . On a des isomorphismes naturels*

$$\mathbf{Hom}(E^n, A \otimes B) \simeq \bigoplus_{i+j=n} \mathbf{Hom}(E^i, A) \otimes \mathbf{Hom}(E^j, B)$$

et

$$(A \otimes B : E^n) \simeq \bigoplus_{i+j=n} (A : E^i) \otimes (B : E^j).$$

Démonstration. Un argument de dualité permet de ne traiter que le premier cas.

La structure exponentielle de E fournit, pour $i + j = n$, un morphisme $E^n \rightarrow E^i \otimes E^j$ (coproduit), d'où un morphisme naturel

$\mathbf{Hom}(E^i, A) \otimes \mathbf{Hom}(E^j, A) \otimes E^n \rightarrow (\mathbf{Hom}(E^i, A) \otimes E^i) \otimes (\mathbf{Hom}(E^j, A) \otimes E^j) \rightarrow A \otimes B$, où la dernière flèche est le produit tensoriel des deux morphismes procurés par la coïunité. Par adjonction, on en déduit un morphisme naturel

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathbf{Hom}(E^i, A) \otimes \mathbf{Hom}(E^j, B) \rightarrow \mathbf{Hom}(E^n, A \otimes B),$$

dont nous allons voir que c'est un isomorphisme.

L'assertion analogue pour hom est démontrée, par exemple, dans [FFSS99]. Le cas général s'en déduit via les isomorphismes naturels

$$\mathbf{Hom}(F, G)(V) \simeq \text{hom}(P_V, \mathbf{Hom}(F, G)) \simeq \text{hom}(P_V \otimes F, G) \simeq \text{hom}(F, \Delta_V G)$$

et la commutation des foncteurs Δ_V au produit tensoriel. \square

2.2 Propriétés générales des foncteurs $(- : \Lambda^1)$ et $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$

Nous exposons dans cette section quelques propriétés générales des endofoncteurs $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$ et $(- : \Lambda^1)$ de \mathcal{F} , qui jouent un rôle particulier parmi tous les foncteurs hom internes et de division par un objet fini. Ces foncteurs sont *duaux* : il existe un isomorphisme

$$D(F : \Lambda^1) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, DF) \quad (5)$$

naturel en l'objet F de \mathcal{F} grâce à l'isomorphisme (4), puisque le foncteur Λ^1 est auto-dual.

Proposition 2.6. *Les endofoncteurs $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$ et $(- : \Lambda^1)$ de \mathcal{F} sont des dérivations en ce sens qu'on a des isomorphismes*

$$\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F \otimes G) \simeq (\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \otimes G) \oplus (F \otimes \mathbf{Hom}(\Lambda^1, G))$$

et

$$(F \otimes G : \Lambda^1) \simeq ((F : \Lambda^1) \otimes G) \oplus (F \otimes (G : \Lambda^1))$$

naturels en les objets F et G de \mathcal{F} .

Démonstration. Cela résulte de la proposition 2.5. \square

Dans la suite, nous noterons souvent $(F \otimes G : \Lambda^1) \twoheadrightarrow (F : \Lambda^1) \otimes G$ sans plus de précision la projection naturelle déduite de cette proposition.

L'isomorphisme naturel $\Delta(F \otimes G) \simeq (F \otimes \Delta G) \oplus (\Delta F \otimes G) \oplus (\Delta F \otimes \Delta G)$ est à comparer à la proposition 2.6.

Lemme 2.7. *Soit F un foncteur polynomial non nul de degré d . Il existe un morphisme non nul de F vers T^d .*

Démonstration. Le foncteur $\Delta^d F$ est non nul, et constant parce que $\Delta^{d+1} F = 0$, donc il existe un morphisme non nul de F vers $\bar{I}^{\otimes d}$, par adjonction. Comme $\deg F \leq d$, ce morphisme est à valeurs dans le sous-objet $p_d(\bar{I}^{\otimes d}) \simeq T^d$ de $\bar{I}^{\otimes d}$, d'où le lemme. \square

Lemme 2.8. *Si F est un foncteur fini tel que $F(0) = 0$ et $(F : \Lambda^1) = 0$, alors $F = 0$.*

Démonstration. On a $\text{hom}(F, T^n) \simeq \text{hom}((F : \Lambda^1), T^{n-1}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On conclut par le lemme précédent. \square

Proposition 2.9. *Soit $X \in \text{Ob } \mathcal{F}$. Le foncteur $(X : \Lambda^1)$ est nul si et seulement si $\overline{\Delta^n X}$ est sans quotient fini non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Supposons $(X : \Lambda^1) = 0$. Le lemme précédent et l'exactitude à droite de $(- : \Lambda^1)$ impliquent que \bar{X} n'a pas de quotient fini non nul. La commutation de $(- : \Lambda^1)$ et Δ^n montre alors qu'il en est de même pour les $\overline{\Delta^n X}$.

Réciproquement, si les $\overline{\Delta^n X}$ sont sans quotient fini non nul, il en est de même des $\overline{\Delta_V X}$ ($V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$), donc $(X : \Lambda^1)(V)^* \simeq \text{hom}((X : \Lambda^1), I_V) \simeq \text{hom}(X, \Lambda^1 \otimes I_V) \simeq \text{hom}(\Delta_V X, \Lambda^1) = 0$, ce qui achève la démonstration. \square

Cette proposition fournit les importants corollaires suivants.

Corollaire 2.10. *Soit F un foncteur fini non constant. Le foncteur $(F : \Lambda^1)$ est fini et non nul; de plus, $\deg(F : \Lambda^1) = \deg F - 1$.*

Corollaire 2.11. *Pour tout foncteur injectif de co-type fini X de \mathcal{F} , on a $(X : \Lambda^1) = 0$.*

Démonstration. Le foncteur \bar{I} n'a pas de quotient fini non nul, comme il résulte par exemple du théorème 7.8 de [Kuh94b], donc un foncteur injectif co-tf n'a pas de quotient fini non constant. Comme le foncteur différence Δ préserve les objets injectifs co-tf, la proposition 2.9 donne la conclusion. \square

Corollaire 2.12. *Si X est un objet injectif co-tf de \mathcal{F} , les endofoncteurs $- \otimes X$ et $(- : \Lambda^1)$ de \mathcal{F} commutent à isomorphisme canonique près.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de la proposition 2.6 et du corollaire 2.11. \square

La propriété suivante des foncteurs $(- : \Lambda^1)$ et $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$ s'avère fondamentale pour effectuer des calculs sur des foncteurs finis.

Proposition 2.13. *On a des suites exactes naturelles en $F \in \text{Ob } \mathcal{F}$*

$$0 \rightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \xrightarrow{\alpha_F} \Delta F \rightarrow \Delta^2 F \quad (6)$$

et

$$\Delta^2 F \rightarrow \Delta F \xrightarrow{\beta_F} (F : \Lambda^1) \rightarrow 0. \quad (7)$$

De plus, si l'on note $v_F = \beta_F \alpha_F : \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \rightarrow (F : \Lambda^1)$, on a les résultats suivants.

1. Si F est de degré n , alors

$$\ker \beta_F \subset p_{n-2}(\Delta F) \quad \text{et} \quad \ker v_F \subset p_{n-2}(\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n-1}F).$$

2. Si F est homogène, v_F est injectif.

3. Si F est cohomogène, v_F est surjectif.

4. Si F est homogène et cohomogène de degré n , $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)$ et $(F : \Lambda^1)$, qui sont naturellement isomorphes via v_F , s'identifient à $p_{n-1}^{\text{hom}}(\Delta F)$, qui est facteur direct de ΔF , où la notation p_k^{hom} est définie dans la proposition 1.15 par (3).

Démonstration. On utilise la suite exacte usuelle

$$0 \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow \bar{I} \rightarrow \bar{I}^{\otimes 2}$$

déduite de l'isomorphisme $p_1(\bar{I}) \simeq \Lambda^1$ — cf. [Kuh94a], lemme 4.12 — et sa duale

$$\bar{P}^{\otimes 2} \rightarrow \bar{P} \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow 0$$

pour obtenir les suites exactes (7) et (6). L'assertion (1) découle ensuite de la proposition 2.2 et de ce que $\deg \Delta^2 F = \deg F - 2$ si cet entier est positif, $-\infty$ sinon ; (2) en résulte et (3) se déduit de (2) par dualité.

Si F est homogène et cohomogène, v_F est un isomorphisme par (2) et (3), d'où le scindement $\Delta F \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \oplus \ker \beta_F$, par définition de v_F . Comme $\ker b_F \subset p_{n-2}(\Delta F)$ et $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \cap p_{n-2}(\Delta F) = 0$, puisque $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F)$ est homogène, la composée $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, F) \hookrightarrow \Delta F \twoheadrightarrow p_{n-1}^{\text{hom}}(\Delta F)$ est un isomorphisme, ce qui achève de prouver (4). \square

Corollaire 2.14. *Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ une suite finie d'entiers. Les foncteurs $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^\lambda)$ et $(\Lambda^\lambda : \Lambda^1)$ sont isomorphes à $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} \Lambda^{\lambda_i}$.*

Démonstration. Le corollaire 2.6 montre qu'il suffit de vérifier l'assertion pour $r = 1$, auquel cas elle découle de la dernière assertion de la proposition précédente, compte-tenu de $\Delta \Lambda^n = \Lambda^{n-1}$. \square

Nous terminons cette section par un calcul explicite élémentaire.

Exemple 2.15. Nous allons déterminer $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I})$ et $(p_n \bar{I} : \Lambda^1)$. Par le lemme 4.12 de [Kuh94a], on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ une suite exacte

$$0 \rightarrow p_{n-1} I \rightarrow p_n I \rightarrow \Lambda^n \rightarrow 0.$$

De plus, Λ^k est le cosocle de $p_k \bar{I}$, de sorte que, par la proposition précédente, $v_{p_k \bar{I}}$ est surjectif. On a aussi des morphismes $p_{n-1} I \otimes \Lambda^1 \xrightarrow{a_n} p_n \bar{I}$, obtenus en appliquant p_n à l'unique morphisme non nul $I \otimes \Lambda^1 \rightarrow \bar{I}$, tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccccc} p_{n-1} I \otimes \Lambda^1 & \hookrightarrow & p_n I \otimes \Lambda^1 & \twoheadrightarrow & \Lambda^n \otimes \Lambda^1 \\ a_n \downarrow & & \downarrow a_{n+1} & & \downarrow \\ p_n \bar{I} & \hookrightarrow & p_{n+1} \bar{I} & \twoheadrightarrow & \Lambda^{n+1} \end{array}$$

On en déduit par adjonction des morphismes $p_{n-1} I \xrightarrow{b_n} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I})$ faisant commuter les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} p_{n-1} I & \hookrightarrow & p_n I & \twoheadrightarrow & \Lambda^n \\ b_n \downarrow & & \downarrow b_{n+1} & & \parallel \\ \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I}) & \hookrightarrow & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I}) & \twoheadrightarrow & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^{n+1}). \end{array}$$

On note enfin c_n le morphisme $(p_n \bar{I} : \Lambda^1) \rightarrow (\Lambda^n : \Lambda^1) = \Lambda^{n-1}$.

Nous allons montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que les flèches b_n et c_n sont des isomorphismes et le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I}) & \xleftarrow{\simeq b_n} & p_{n-1} I \\ v_{p_n I} \downarrow & & \downarrow \\ (p_n \bar{I} : \Lambda^1) & \xrightarrow{\simeq c_n} & \Lambda^{n-1} \end{array}$$

Pour $n = 0$, l'assertion est évidente. Pour déduire l'assertion pour $n + 1$ de l'assertion pour n , on considère le diagramme commutatif aux lignes exactes suivant.

$$\begin{array}{ccccc} p_{n-1} I^c & \longrightarrow & p_n I & \longrightarrow & \Lambda^n \\ b_n \downarrow \simeq & & b_{n+1} \downarrow & & \parallel \\ \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_n \bar{I})^c & \longrightarrow & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I}) & \longrightarrow & \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^{n+1}) \\ v_{p_n \bar{I}} \downarrow & & v_{p_{n+1} \bar{I}} \downarrow & & \parallel \\ (p_n \bar{I} : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_{n+1} \bar{I} : \Lambda^1) & \xrightarrow{c_{n+1}} & \Lambda^n \\ c_n \downarrow \simeq & & & & \downarrow \\ & & & & \Lambda^{n-1} \end{array}$$

La commutation du carré en bas à droite entraîne que la flèche horizontale centrale de droite est surjective, ce qui permet de conclure quant à $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I})$ en appliquant le lemme des cinq à la partie supérieure du diagramme. Il suffit donc d'établir la nullité de la flèche $(p_n \bar{I} : \Lambda^1) \rightarrow (p_{n+1} \bar{I} : \Lambda^1)$ induite par l'inclusion. Son image est de degré au plus $n - 1$ et sans terme constant (pour $n = 1$, cela vient de ce que la suite exacte $0 \rightarrow \Lambda^1 \rightarrow p_2 \bar{I} \rightarrow \Lambda^2 \rightarrow 0$ est non scindée; sinon cela découle de l'hypothèse de récurrence), mais c'est aussi un quotient de $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, p_{n+1} \bar{I}) \simeq p_n I$; du fait que $p_n \bar{I}$ est cohomogène de degré n (son cosocle étant Λ^n), cela entraîne la nullité de ladite image.

2.3 Liens formels avec les représentations des groupes symétriques

Nous explicitons à présent en quoi les foncteurs $(- : \Lambda^1)$, $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$ et Δ constituent des généralisations du foncteur de restriction pour les représentations des groupes symétriques. Cela fait l'objet de la proposition 2.17. La proposition 2.18 montrera qu'en un certain sens, le foncteur de division par Λ^1 constitue une meilleure généralisation que ses homologues de la proposition 2.17.

Convention 2.16. Dans ce paragraphe, n désigne un entier naturel. On notera $\text{Res} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]}$ le foncteur de restriction des scalaires et $\text{Ind} : \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \rightarrow \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]}$ le foncteur d'induction.

Les foncteurs r_n et s_n apparaissant ci-après sont ceux de la notation 1.22.

Proposition 2.17. *Pour tout entier n , le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}_n & \xrightarrow{(-:\Lambda^1)} & \mathcal{F}_{n-1} \\
 s_n \downarrow & & \downarrow s_{n-1} \\
 \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]}
 \end{array} \tag{8}$$

commute à isomorphisme naturel près.

La même assertion vaut en remplaçant $(-:\Lambda^1)$ par $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$ ou Δ .

Démonstration. On établit l'assertion relative à $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$. Les autres s'en déduisent par la proposition 2.13.

Grâce aux adjonctions de la proposition 1.23 et entre Res et Ind, il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}_n & \xleftarrow{-\otimes \Lambda^1} & \mathcal{F}_{n-1} \\
 r_n \uparrow & & \uparrow r_{n-1} \\
 \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xleftarrow{\text{Ind}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]}
 \end{array}$$

commute à isomorphisme naturel près.

En effet, les propriétés d'associativité du produit tensoriel procurent dans \mathcal{F} un isomorphisme

$$(M_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} T^n) \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} T^n \simeq (M_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \otimes_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} T^{n-1}) \otimes \Lambda^1$$

naturel en l'objet M de $\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]}$. □

Proposition 2.18. *Pour tout entier n , le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xrightarrow{\text{Res}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \\
 r_n \downarrow & & \downarrow r_{n-1} \\
 \mathcal{F}_n & \xrightarrow{(-:\Lambda^1)} & \mathcal{F}_{n-1}
 \end{array} \tag{9}$$

commute à isomorphisme naturel près.

Démonstration. La tensorisation par Λ^1 procure un monomorphisme Σ_{n-1} -équivariant $\text{hom}(T^{n-1}, F) \hookrightarrow \text{hom}(T^n, F \otimes \Lambda^1)$ naturel en l'objet F de \mathcal{F}_{n-1} . C'est un isomorphisme car l'application linéaire sous-jacente est inverse des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned}
 s_n(F \otimes \Lambda^1) &= \text{hom}_{\mathcal{F}}(T^n, F \otimes \Lambda^1) \simeq \text{hom}((T^n : \Lambda^1), F) \\
 &\simeq \text{hom}(T^{n-1}, F)^{\oplus n} \simeq \text{Ind}(s_{n-1}(F)).
 \end{aligned}$$

Ainsi, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_n]} & \xleftarrow{\text{Ind}} & \mathbf{Mod}_{\mathbb{F}_2[\Sigma_{n-1}]} \\
s_n \uparrow & & \uparrow s_{n-1} \\
\mathcal{F}_n & \xleftarrow{-\otimes \Lambda^1} & \mathcal{F}_{n-1}
\end{array}$$

commute à isomorphisme naturel près.

La commutativité du diagramme (9) s'en déduit par adjonction. \square

Exemple 2.19. En prenant $M = \mathbb{F}_2$, on obtient $(S^n : \Lambda^1) \simeq S^{n-1}$. Dualement, on a $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Gamma^n) \simeq \Gamma^{n-1}$.

On peut montrer que $(\Gamma^n : \Lambda^1) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Gamma^{n-2^i}$, et donc $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, S^n) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S^{n-2^i}$ dualement ; cela illustre la nécessité de l'hypothèse d'homogénéité et de cohomogénéité dans la proposition 2.13 (4).

3 Compléments sur les foncteurs de Weyl

Les considérations générales de la section précédente méritent d'être appliquées aux foncteurs « concrets » introduits au paragraphe 1.2, afin d'appréhender le comportement du foncteur de division par Λ^1 en termes de facteurs de composition. C'est ce à quoi s'emploie le paragraphe 3.3.

Après des calculs préliminaires, nous donnons, au § 3.2, un résultat sur les facteurs de composition de certains foncteurs de Weyl qui permettront, dans la section 4, de leur appliquer efficacement des raisonnements utilisant le foncteur $(- : \Lambda^1)$. Il s'agit d'éviter que le facteur de composition $S_{\lambda_r^-}$ de $(W_\lambda : \Lambda^1)$ puisse déjà être facteur de composition de $(\text{rad } W_\lambda : \Lambda^1)$.

3.1 Quelques lemmes techniques

Nous commençons par donner la définition et les propriétés de base de morphismes qui joueront un rôle important dans le paragraphe suivant.

Notation 3.1. Pour $i \geq j \geq 1$, nous noterons $\Pi_{i,j}$ et $\Pi'_{i,j}$ les endomorphismes de $\Lambda^i \otimes \Lambda^j$ donnés respectivement par les compositions suivantes.

$$\begin{aligned}
\Pi_{i,j} &= \Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{D\theta} \Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^{j+1} \xrightarrow{\theta} \Lambda^i \otimes \Lambda^j \\
\Pi'_{i,j} &= \Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\theta} \Lambda^{i+1} \otimes \Lambda^{j-1} \xrightarrow{D\theta} \Lambda^i \otimes \Lambda^j
\end{aligned}$$

Lemme 3.2. 1. Pour $k + l \leq j$, on a

$$\theta_{i+k,j-k,l} \theta_{i,j,k} = \frac{(k+l)!}{k! l!} \cdot \theta_{i,j,k+l}.$$

2. Pour $i \geq j \geq 1$, on a $\Pi_{i,j} + \Pi'_{i,j} = (i+j)id$.
3. Soient i, j, k, t, u des entiers positifs, avec $j \geq t+u$. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t,j-t,k} \\
id \otimes D\theta \downarrow & & \downarrow id \otimes D\theta \\
\Lambda^{i,j-u,k+u} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t,j-t-u,k+u}
\end{array}$$

Démonstration. Ces calculs sont analogues ; établissons par exemple (2). Soient V un espace vectoriel de dimension finie et $a_1, \dots, a_i; b_1, \dots, b_j$ des éléments de V . Si $P = \{t_1 < \dots < t_k\}$ est une partie de $\mathbf{i} = \{1, \dots, i\}$, notons $a^{\wedge P}$ pour $a_{t_1} \wedge \dots \wedge a_{t_k}$. On a

$$D\theta_{i-1,j+1,1}(V)(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}}) = \sum_{k=1}^i a^{\wedge \{k\}^c} \otimes (b^{\wedge \mathbf{j}} \wedge a_k)$$

où l'exposant c indique le complémentaire ensembliste ; puis

$$\Pi_{i,j}(V)(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}}) = \sum_{k=1}^i \left(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}} + \sum_{l=1}^j (a^{\wedge \{k\}^c} \wedge b_l) \otimes (b^{\wedge \{l\}^c} \wedge a_k) \right).$$

De même

$$\Pi'_{i,j}(V)(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}}) = \sum_{l=1}^j \left(a^{\wedge \mathbf{i}} \otimes b^{\wedge \mathbf{j}} + \sum_{k=1}^i (a^{\wedge \{k\}^c} \wedge b_l) \otimes (b^{\wedge \{l\}^c} \wedge a_k) \right),$$

d'où l'assertion (2). □

Proposition 3.3. Soient $i \geq j \geq 1$ des entiers.

1. Supposons $i - j$ impair :
 - (a) $\Pi_{i,j}$ et $\Pi'_{i,j}$ sont deux projecteurs dont la somme est l'identité ;
 - (b) $im \Pi_{i,j} = ker \Pi'_{i,j} = im \theta_{i-1,j+1,1} = ker \theta_{i,j,1} \supset W_{(i,j)}$;
 - (c) $im \Pi'_{i,j} = ker \Pi_{i,j} = im D\theta_{i,j,1} = ker D\theta_{i-1,j+1,1}$.
2. Supposons $i - j$ pair. Alors $\Pi_{i,j} = \Pi'_{i,j}$ a une image dont les facteurs de composition sont du type $S_{(i+t,j-t)}$ avec $1 \leq t \leq j$.

Démonstration. Le point (1) du lemme 3.2 montre que l'on a toujours $\Pi'_{i,j} \Pi_{i,j} = 0$. Combiné avec le point (2) de ce même lemme, ce fait implique (1a).

On a ensuite $im \Pi_{i,j} \subset im \theta_{i-1,j+1,1}$, et $ker \Pi'_{i,j} \supset ker \theta_{i,j,1} \supset W_{(i,j)}$, d'où l'on déduit (1b) via (1a) et l'égalité $ker \theta_{i,j,1} = im \theta_{i-1,j+1,1}$ (valable car $i > j$) déduite de la proposition 1.3.1 de [Fra96].

L'assertion (1c) se prouve de façon analogue.

Pour le point (2), on utilise le point (2) du lemme 3.2 et le fait que les facteurs de composition de $\Lambda^{i+1} \otimes \Lambda^{j-1}$, dont $im \Pi'_{i,j}$ est un sous-quotient, sont les $S_{(i+t,j-t)}$ pour $1 \leq t \leq j$. □

Les autres résultats techniques dont nous aurons besoin se démontrent très facilement à l'aide de la notion classique suivante. Ils interviendront dans la section 5.

Définition 3.4. Soient $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et λ une partition de longueur r .

1. Soient $v_1, \dots, v_{\lambda_1}$ des éléments de V . L'élément *semi-standard associé à λ* et $v_1, \dots, v_{\lambda_1}$ est l'élément de $\Lambda^\lambda(V)$ défini par

$$s_\lambda^{\text{st}}(v_1, \dots, v_{\lambda_1}) = \bigotimes_{i=1}^r (v_1 \wedge \dots \wedge v_{\lambda_i}).$$

2. Soient $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq \lambda_i$) des éléments de V . L'élément *standard associé à λ* et $(a_{i,j})$ est l'élément de $\Lambda^\lambda(V)$ défini par

$$g^{\text{st}}((a_{i,j})) = \sum_{\sigma \in R_\lambda} \bigotimes_{i=1}^r (a_{\sigma(i,1)} \wedge \dots \wedge a_{\sigma(i,\lambda_i)})$$

où R_λ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{(i,j) \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ laissant invariante la deuxième composante.

Proposition 3.5. Soient $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$ et λ une partition.

1. L'espace vectoriel $W_\lambda(V)$ est le sous-espace de $\Lambda^\lambda(V)$ engendré par les éléments *semi-standard* $s_\lambda^{\text{st}}(v_1, \dots, v_{\lambda_1})$ pour $v_1, \dots, v_{\lambda_1} \in V$.
2. Si λ est régulière, $W_\lambda(V)$ est le sous-espace de $\Lambda^\lambda(V)$ engendré par les éléments *standard*.

Cette propriété, pour laquelle nous renvoyons à [Jam78] (cf. aussi [PS98], §2, pour le cas de \mathcal{F}), permet de simplifier de façon appréciable certains calculs sur les foncteurs de Weyl.

Lemme 3.6. Soient i, j, t des entiers naturels tels que $i \geq j$; notons $\tau : \Lambda^i \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^j \otimes \Lambda^i$ l'isomorphisme d'échange des deux facteurs du produit tensoriel. La restriction à $W_{(i,j)}$ de $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\tau} \Lambda^j \otimes \Lambda^i \xrightarrow{\theta_{j,i,i-j}} \Lambda^i \otimes \Lambda^j$ coïncide avec l'identité.

Démonstration. Un calcul immédiat montre en effet que le morphisme $\theta \circ \tau$ ne modifie pas les éléments semi-standard. \square

Proposition 3.7. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et λ une partition régulière de longueur r ou $r - 1$. Notons $j_{\lambda,r}$ le morphisme

$$\Lambda^\lambda \otimes \Lambda^r \hookrightarrow \Lambda^\lambda \otimes T^r \simeq \bigotimes_{i=1}^r (\Lambda^{\lambda_i} \otimes \Lambda^1) \xrightarrow{\bigotimes_i \theta_{\lambda_i,1,1}} \Lambda^{(\lambda_1+1, \dots, \lambda_r+1)}.$$

On a $j_{\lambda,r}(W_\lambda \otimes \Lambda^r) = W_{(\lambda_1+1, \dots, \lambda_r+1)}$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 3.5 et du calcul suivant : si les $a_{i,j}$ ($1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq \lambda_i + 1$) sont des éléments d'un espace vectoriel V , on a $j_{\lambda,r}(V)(g^{\text{st}}((a_{i,j})_{j \leq \lambda_i}) \otimes (a_{1,\lambda_1+1} \wedge \dots \wedge a_{r,\lambda_r+1})) = g^{\text{st}}((a_{i,j}))$. \square

Notation 3.8. Soient $\lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq 0$ et $n \geq 0$ des entiers. On pose $\lambda_{+i} = (\lambda_1 + i, \dots, \lambda_r + i)$. On définit par récurrence une flèche

$\Lambda^\lambda \otimes T^n(\Lambda^r) \xrightarrow{j_\lambda^n} \Lambda^{\lambda+n}$ par $j_\lambda^0 = id$ et

$$j_\lambda^n = \Lambda^\lambda \otimes \Lambda^r \otimes T^{n-1}(\Lambda^r) \xrightarrow{j_{\lambda,r} \otimes T^{n-1}(\Lambda^r)} \Lambda^{\lambda+1} \otimes T^{n-1}(\Lambda^r) \xrightarrow{j_{\lambda+1}^{n-1}} \Lambda^{\lambda+n}$$

si $n > 0$.

On déduit de la proposition 3.7 le résultat suivant.

Corollaire 3.9. Soient $\lambda_1 > \dots > \lambda_r \geq 0$ et $n \geq 0$ des entiers.

– Il existe un unique morphisme $w_n^{\lambda_1, \dots, \lambda_r} : \Lambda^\lambda \otimes \Lambda^n(\Lambda^r) \rightarrow \Lambda^{\lambda+n}$ tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^\lambda \otimes T^n(\Lambda^r) & \xrightarrow{j_\lambda^n} & \Lambda^{\lambda+n} \\ \downarrow & \nearrow w_n^{\lambda_1, \dots, \lambda_r} & \\ \Lambda^\lambda \otimes \Lambda^n(\Lambda^r) & & \end{array}$$

– On a $w_n^{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(W_\lambda \otimes \Lambda^n(\Lambda^r)) = W_{\lambda+n}$.
– Pour $i > j > t > 0$, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^i \otimes \Lambda^j \otimes \Lambda^n(\Lambda^3) & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} \otimes \Lambda^n(\Lambda^3) \\ w_n^{i,j,0} \downarrow & & \downarrow w_n^{i+t,j-t,0} \\ \Lambda^{i+n} \otimes \Lambda^{j+n} \otimes \Lambda^n & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t+n} \otimes \Lambda^{j-t+n} \otimes \Lambda^n \end{array}$$

3.2 Partitions Weyl-séparantes

Notation 3.10. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ un r -uplet d'entiers et $1 \leq i \leq r$. On définit λ_i^- (resp. λ_i^+) par $(\lambda_i^-)_j = \lambda_j$ si $j \neq i$ et $(\lambda_i^-)_i = \lambda_i - 1$ (resp. $(\lambda_i^+)_j = \lambda_j$ si $j \neq i$ et $(\lambda_i^+)_i = \lambda_i + 1$).

Pour alléger ces notations, nous simplifierons des écritures du type $(\lambda_a^+)_b^-$ en $\lambda_{a,b}^{+,-}$.

Définition 3.11. On dit qu'une partition λ de longueur r est :

- **Weyl-séparante** (ou **W-séparante**) s'il n'existe pas de partition régulière μ de $|\lambda|$ telle que $\mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$ et $\mu \vdash \text{rad } W_\lambda$,
- **alternée** si $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ est impair pour $1 \leq i < r$.

On notera qu'une partition alternée est toujours régulière.

Intuitivement, une partition régulière λ est Weyl-séparante si le foncteur de Weyl associé n'a pas de facteur de composition « proche » mais distinct de S_λ . Cette notion sera fort utile pour détecter certains facteurs de composition, comme nous le verrons dans la section 4.

Le but de ce paragraphe est d'établir qu'une partition alternée est Weyl-séparante. Cette propriété, analogue aux considérations de [Jam78], § 24, fournira tous les cas de Weyl-séparation dont nous aurons besoin.

Lemme 3.12. Soit λ une partition régulière de longueur r . La partition λ est W -séparante si et seulement si il n'existe pas de partition régulière μ de $|\lambda|$ telle que $\lambda \leq \mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$ et

$$\mu \vdash W_\lambda \cap \sum_{1 \leq i \leq r-1} \text{im } D\psi_\lambda^{i,1}$$

où l'on emploie le morphisme $\psi_\lambda^{i,t}$ de la notation 1.28.

Démonstration. On utilise le théorème 1.32 (1), en notant que si μ est une partition régulière de $|\lambda|$ telle que $\mu \vdash \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i+t, \lambda_{i+1}-t, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r}$ pour un $1 \leq i \leq r-1$ et un $2 \leq t \leq \lambda_{i+1}$, alors μ n'est pas inférieure à $\lambda_{1,r}^{+,-}$ grâce au théorème 1.33. \square

Notation 3.13. Soit L une \mathbb{F}_2 -algèbre associative et unitaire. Nous noterons, dans ce paragraphe, $[a, b] = aba + bab$ pour $(a, b) \in L^2$.

Remarque 3.14. Il s'agit d'une notation *ad hoc* valable uniquement dans ce paragraphe. Elle est motivée par le fait que ce « crochet » joue intuitivement le même rôle qu'un commutateur usuel sur les endomorphismes que l'on considère dans la démonstration de la proposition 3.17 ci-après.

Lemme 3.15. 1. Si a et b sont deux idempotents de L , on a $[1+a, 1+b] = [a, b]$.

2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, u_0, \dots, u_k des éléments de L tels que $u_i u_j = u_j u_i$ si $|i-j| \geq 2$, $v = u_k \dots u_1$ et I l'idéal bilatère de L engendré par les $[u_{i-1}, u_i]$ ($1 \leq i \leq k$). Alors $vu_0 v \in I + Lu_0$.

Démonstration. L'assertion (1) provient du calcul suivant :

$$(1+a)(1+b)(1+a) = 1 + a + b + ab + ba + aba,$$

et $(1+b)(1+a)(1+b) = 1 + a + b + ab + ba + bab$.

Pour l'assertion (2), on raisonne par récurrence sur k . Le cas $k = 1$ provient de ce que $u_1 u_0 u_1 = [u_0, u_1] + u_0 u_1 u_0$, le cas $k = 2$ de ce que

$$\begin{aligned} u_2 u_1 u_0 u_2 u_1 &= u_2 u_1 u_2 u_0 u_1 = [u_1, u_2] u_0 u_1 + u_1 u_2 u_1 u_0 u_1 \\ &= [u_1, u_2] u_0 u_1 + u_1 u_2 [u_0, u_1] + u_1 u_2 u_0 u_1 u_0. \end{aligned}$$

On a donc, en supposant maintenant $k > 2$,

$$\begin{aligned} u_k \dots u_1 u_0 u_k \dots u_1 &= (u_k \dots u_2) u_1 u_0 (u_k \dots u_2) u_1 \\ &= [u_1, u_k \dots u_2] u_0 u_1 + u_1 u_k \dots u_2 [u_0, u_1] + u_1 u_k \dots u_2 u_0 u_1 u_0. \end{aligned}$$

Or l'hypothèse de récurrence montre que $[u_1, u_k \dots u_2] \in I + Lu_1$. Par conséquent,

$$u_k \dots u_1 u_0 u_k \dots u_1 \in I + Lu_1 u_0 u_1 + Lu_0,$$

ce qui permet de conclure grâce au cas $k = 1$ (qui montre que $u_1 u_0 u_1 \in I + Lu_0$). \square

Lemme 3.16. *Etant donnée une partition alternée (i, j, k) de longueur 3, notons A (resp. B) le projecteur (cf. proposition 3.3) $\Pi_{i,j} \otimes \Lambda^k$ (resp. $\Lambda^i \otimes \Pi_{j,k}$) de $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \otimes \Lambda^k$. Avec la notation du lemme précédent, l'image de $[A, B]$ n'a pas de facteur de composition S_λ si λ est une partition régulière de $i + j + k$ telle que $\lambda \leq (i + 1, j, k - 1)$.*

Démonstration. D'après l'assertion (1) du lemme précédent, $[A, B] = [A', B']$ où $A' = \Pi'_{i,j} \otimes \Lambda^k$ et $B' = \Lambda^i \otimes \Pi'_{j,k}$. Il suffit donc de montrer que les deux endomorphismes $A'B'A'$ et $B'A'B'$ ont une image sans facteur de composition du type indiqué dans l'énoncé. Considérons pour cela le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
\Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+1,j-1,k} & \xrightarrow{id \otimes \theta} & \Lambda^{i+1,j,k-1} \\
& \searrow A' & \downarrow D\theta \otimes id & \downarrow D\theta \otimes id & \searrow \Pi_{i+1,j} \otimes id \\
& & \Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{id \otimes \theta} & \Lambda^{i,j+1,k-1} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+1,j,k-1} \\
& & & \searrow B' & \downarrow id \otimes D\theta & & \downarrow id \otimes D\theta \\
& & & & \Lambda^{i,j,k} & \xrightarrow{\theta \otimes id} & \Lambda^{i+1,j-1,k} \\
& & & & & \searrow A' & \downarrow D\theta \otimes id \\
& & & & & & \Lambda^{i,j,k}
\end{array}$$

Il commute (les triangles, par définition des flèches obliques, et les carrés par la propriété (3) du lemme 3.2), donc l'image de $A'B'A'$ est un sous-quotient de l'image de $\Pi_{i+1,j} \otimes \Lambda^{k-1}$.

On établit de même que l'image de $B'A'B'$ est un sous-quotient de l'image de $\Lambda^{i+1} \otimes \Pi_{j,k-1}$.

Pour conclure, on utilise le point (2) de la proposition 3.3 et le théorème 1.33 : ils montrent que les facteurs de composition de degré $i + j + k$ de ces images sont associés à des partitions supérieures à $(i + 2, j - 1, k - 1)$ dans le premier cas, et à $(i + 1, j + 1, k - 2)$ dans le second. \square

Proposition 3.17. *Une partition alternée est W -séparante.*

Démonstration. Soit λ une partition alternée de longueur r . On définit des endomorphismes de Λ^λ par

$$p_i = \Lambda^{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}} \otimes \Pi_{\lambda_i, \lambda_{i+1}} \otimes \Lambda^{\lambda_{i+2}, \dots, \lambda_r} \quad (1 \leq i \leq r-1) \quad \text{et} \quad P = \prod_{i=1}^{r-1} \left(\prod_{j=1}^{r-i} p_{r-j} \right).$$

Par l'assertion (1c) de la proposition 3.3, $im D\psi_{i,1} = im(1 + p_i)$. Comme l'image de chacun des projecteurs p_i contient W_λ (utiliser l'assertion (1b) de la proposition 3.3), on en déduit

$$W_\lambda \cap \sum_{1 \leq i \leq r-1} im D\psi_{i,1} \subset \sum_{1 \leq i \leq r-1} im P(1 + p_i).$$

Il suffit donc d'établir, grâce au lemme 3.12, que S_μ n'est facteur de composition d'aucune des images des $P(1 + p_i)$ si μ est une partition régulière de $|\lambda|$ telle que $\lambda \leq \mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$. Pour cela, on note que p_i et p_j commutent si $|i - j| \geq 2$, de sorte que $P(1 + p_i)$ appartient à l'idéal bilatère de $\text{End } \Lambda^\lambda$ engendré par $p_{r-1} \dots p_{i+1} p_i p_{r-1} \dots p_{i+1} (1 + p_i)$. On applique ensuite l'assertion (2) du lemme 3.15 pour obtenir que $P(1 + p_i)$ appartient à l'idéal bilatère engendré par les $[p_j, p_{j+1}]$, puisque $p_i(1 + p_i) = 0$. Le lemme 3.16, combiné au théorème 1.33, permet alors de conclure. \square

3.3 Division par Λ^1 des foncteurs de Weyl

Nous donnons dans cette sous-section quelques résultats de base sur la division par Λ^1 des foncteurs de Weyl. Ces résultats joueront un rôle fondamental pour la détection de facteurs de composition à l'aide du foncteur $(\cdot : \Lambda^1)$; de fait, on ne dispose pratiquement d'aucun autre renseignement sur la division par Λ^1 d'un foncteur simple que ceux que l'on déduit grossièrement du cas des foncteurs de Weyl.

Proposition 3.18. *Soit λ une partition régulière de longueur r de n .*

1. *Les morphismes $v_{W_\lambda} : \mathbf{Hom}(\Lambda^1, W_\lambda) \rightarrow (W_\lambda : \Lambda^1)$ et $v_{S_\lambda} : \mathbf{Hom}(\Lambda^1, S_\lambda) \rightarrow (S_\lambda : \Lambda^1)$ sont des isomorphismes.*
2. *Si μ est une partition régulière telle que $\mu \vdash (W_\lambda : \Lambda^1)$, on a :*
 - soit $|\mu| = n - 1$ et $\mu \geq \lambda_1^-$,
 - soit $|\mu| < n - 1$, $l(\mu) < r$, $\mu_1 \geq \lambda_1$ et $\mu_{r-1} \leq \lambda_r$.

Démonstration. Le foncteur W_λ est homogène car inclus dans Λ^λ , et cohomogène par le théorème/définition 1.32. La proposition 2.13 fournit donc le premier point. On en déduit

$$(S_\lambda : \Lambda^1) \leftarrow (W_\lambda : \Lambda^1) \simeq \mathbf{Hom}(\Lambda^1, W_\lambda) \hookrightarrow \mathbf{Hom}(\Lambda^1, \Lambda^\lambda).$$

On conclut en appliquant le corollaire 2.14 et le théorème 1.33. \square

Remarque 3.19. Le morphisme v_{W_λ} n'est pas forcément un isomorphisme lorsque λ est une partition non régulière (cf. remarque 3.23).

Remarque 3.20. L'hypothèse de la seconde assertion de la proposition 3.18 est en particulier satisfaite si $\mu \vdash (S_\lambda : \Lambda^1)$.

Précisons cette proposition par l'analogie suivant du théorème de branchement de James pour la restriction des modules de Specht en théorie des représentations du groupe symétrique (cf. [Jam78]); le seul ingrédient nouveau par rapport à la théorie des représentations est la proposition 2.13. Nous donnons une démonstration directe fondée sur le lemme calculatoire simple suivant.

Lemme 3.21. *Soient i, j, t des entiers positifs tels que $t \leq j$. Le morphisme*

$$\begin{aligned} (\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j) \oplus (\Lambda^i \otimes \Lambda^{j-1}) &\simeq (\Lambda^i \otimes \Lambda^j : \Lambda^1) \xrightarrow{(\theta_{i,j,t} : \Lambda^1)} (\Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} : \Lambda^1) \\ &\simeq (\Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t}) \oplus (\Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1}) \end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- sa composante $\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t}$ est égale à $\theta_{i-1,j,t}$,
- sa composante $\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j \rightarrow \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1}$ est nulle,
- sa composante $\Lambda^i \otimes \Lambda^{j-1} \rightarrow \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1}$ est égale à $\theta_{i,j-1,t}$.

Démonstration. Par adjonction, il s'agit de vérifier la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1 \otimes \Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^j & \xrightarrow{D\theta \otimes id} & \Lambda^i \otimes \Lambda^j \\ \Lambda^1 \otimes \theta \downarrow & & \downarrow \theta \\ \Lambda^1 \otimes \Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t} & \xrightarrow{D\theta \otimes id} & \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} \end{array}$$

pour les deux premières composantes considérées, car on peut remplacer $(- : \Lambda^1)$ par $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$ grâce à la proposition 3.18, et

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^i \otimes \Lambda^j & \xrightarrow{id \otimes D\theta} & \Lambda^i \otimes \Lambda^{j-1} \otimes \Lambda^1 \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta \otimes \Lambda^1 \\ \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t} & \xrightarrow{id \otimes D\theta} & \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t-1} \otimes \Lambda^1 \end{array}$$

pour la dernière.

On conclut maintenant grâce à l'assertion 3 du lemme 3.2. \square

Proposition 3.22. *Soit λ une partition régulière de longueur r . Il existe une filtration $0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_r = (W_\lambda : \Lambda^1)$ telle que $F_i/F_{i-1} \simeq W_{\lambda_i^-}$ pour $0 < i \leq r$.*

Précisément, F_i est donné par le diagramme commutatif cartésien d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} F_i \hookrightarrow & \bigoplus_{1 \leq j \leq i} \Lambda^{\lambda_j^-} & \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ (W_\lambda : \Lambda^1) \hookrightarrow & (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) & \end{array}$$

Démonstration. La proposition 3.18 permettant de remplacer $(- : \Lambda^1)$ par $\mathbf{Hom}(\Lambda^1, -)$, qui est exact à gauche, le lemme précédent permet de conclure en utilisant la remarque 1.30. \square

Remarque 3.23. La proposition est en défaut pour une partition non régulière, en raison de la non cohomogénéité du foncteur de Weyl associé. Par exemple, $(W_{1,1} : \Lambda^1) = (\Gamma^2 : \Lambda^1) \simeq \mathbb{F}_2 \oplus \Lambda^1$.

4 Détection de facteurs de composition par division par Λ^1

Le problème de l'effet de foncteurs remarquables sur les facteurs de composition d'objets d'une catégorie abélienne se rencontre naturellement dans divers

contextes, l'étude directe des facteurs de composition s'avérant généralement ardue, voire inabordable. Le cas le plus simple d'un foncteur exact, et commutant aux colimites si l'on s'intéresse à des objets seulement localement finis, se révèle souvent insuffisant.

Dans [Pow98b], Powell introduit des endofoncteurs $\tilde{\nabla}_n$ de la catégorie \mathcal{F} qui ne sont exacts ni à gauche ni à droite, mais qui préservent les épimorphismes et les monomorphismes. Ainsi, si le simple S est facteur de composition de F , alors $\tilde{\nabla}_n S$ est un sous-quotient de $\tilde{\nabla}_n F$. Comme pour certains foncteurs simples S , $\tilde{\nabla}_n S$ est un foncteur simple explicite, on obtient des renseignements sur les facteurs de composition de $\tilde{\nabla}_n F$ dès lors que l'on connaît certains facteurs de composition de F . Powell a montré le grand intérêt des foncteurs $\tilde{\nabla}_n$ dans ses articles [Pow98c] et [Pow00b].

Notre démarche, utilisant le foncteur $(- : \Lambda^1)$, est inverse : nous cherchons à obtenir des renseignements sur les facteurs de composition d'un foncteur analytique F , connaissant certains facteurs de composition de $(F : \Lambda^1)$. Ceci est théoriquement possible dans la mesure où si $\lambda \vdash (F : \Lambda^1)$, alors il existe μ telle que $\mu \vdash F$ et $\lambda \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$, puisque le foncteur $(- : \Lambda^1)$ commute aux colimites. Il semble cependant illusoire d'obtenir des résultats très généraux, en raison des deux écueils suivants :

1. la description des facteurs de composition de $(S_\mu : \Lambda^1)$ est hors de portée en général;
2. un foncteur simple est en général facteur de composition de la division par Λ^1 d'un grand nombre de foncteurs simples.

Afin de contourner ces difficultés, nous mettons deux restrictions à notre problème initial :

1. on suppose que le foncteur F est un sous-objet d'un foncteur connu X , et l'on cherche s'il contient ou non des facteurs de composition identifiés dans X ;
2. on se limite au cas où l'on maîtrise un tant soit peu l'effet de la division par Λ^1 sur le foncteur simple que l'on cherche à détecter.

La stratégie de détection dans un sous-objet d'un objet connu est présentée dans un cadre général dans le paragraphe 4.1. Dans la catégorie \mathcal{F} , la seconde restriction nous amènera à travailler sur les partitions Weyl-séparantes, qui ont été introduites à cette fin, comme nous le verrons au paragraphe 4.2. Nous terminons cette section avec un résultat technique plus global, la proposition 4.16, adapté à la situation des foncteurs $\tilde{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ que nous avons en vue.

4.1 Préliminaires formels

Convention 4.1. Dans ce paragraphe, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux catégories abéliennes avec colimites filtrantes exactes, $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur commutant aux colimites (en particulier, exact à droite), S (resp. S') un objet simple de \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}).

Remarque 4.2. L'intérêt d'avoir affaire à des catégories avec colimites filtrantes exactes pour le maniement des facteurs de composition provient de l'observation suivante : si un objet X d'une telle catégorie est colimite filtrante de sous-objets A_i , un objet simple S est facteur de composition de X si et seulement s'il est facteur de composition de l'un des A_i . On le voit en utilisant l'isomorphisme canonique $Y \simeq \operatorname{colim}_i (A_i \cap Y)$ valable pour tout sous-objet Y de X sous l'hypothèse d'exactitude des colimites filtrantes (cf. [Gab62]).

Définition 4.3. On dit que l'objet simple S est Φ -détecté par S' dans un objet X de \mathcal{A} si S' est facteur de composition de ΦX et que S est facteur de composition de tout sous-objet A de X tel que S' est facteur de composition de $\operatorname{im} \Phi(A \hookrightarrow X)$.

Plus généralement, si $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$ est une flèche de \mathcal{B} , on dit que S est Φ -détecté par S' dans X relativement à π si S' est facteur de composition de $\operatorname{im} \pi$ et que S est facteur de composition de tout sous-objet A de X tel que S' est facteur de composition de $\pi(\operatorname{im} \Phi(A \hookrightarrow X))$.

Remarque 4.4. 1. Par exactitude à droite de Φ , la suite

$$0 \rightarrow \operatorname{im} \Phi(A \hookrightarrow X) \rightarrow \Phi X \rightarrow \Phi(X/A) \rightarrow 0$$

est exacte. En particulier, l'hypothèse sur l'image est satisfaite si S' n'est pas facteur de composition de $\Phi(X/A)$.

2. L'objet simple S est Φ -détecté par S' dans S relativement à π si et seulement si S' est facteur de composition de $\pi(\Phi S)$.
3. La notion de Φ -détection relativement à π ne dépend que de $\ker \pi$: composer π à gauche par un monomorphisme ne change pas la notion obtenue.

Lemme 4.5. Soit X un objet localement fini de \mathcal{A} . Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Si un objet simple T de \mathcal{A} est facteur de composition de X , S' n'est pas facteur de composition de ΦT .
2. Si A est un sous-objet de X , S' n'est pas facteur de composition de ΦA .
3. Si B est un sous-quotient de X , S' n'est pas facteur de composition de ΦB .

Démonstration. Il est trivial que (3) implique (1), et (2) implique (3) car Φ est exact à droite. Supposons maintenant (1) vérifié : une récurrence sur la longueur montre que, pour tout sous-objet fini F de X , ΦF n'a pas de facteur de composition S' (utiliser encore l'exactitude à droite). Il suffit de passer à la colimite pour conclure. \square

Proposition 4.6. Soient X un objet localement fini de \mathcal{A} , Y un sous-objet de X , $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$ et $\Phi Y \xrightarrow{\pi'} B'$ des morphismes de \mathcal{B} vérifiant les conditions suivantes :

1. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Phi Y & \xrightarrow{\pi'} & B' \\ \Phi i \downarrow & & \downarrow u \\ \Phi X & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

où $Y \xrightarrow{i} X$ désigne l'inclusion ;

2. l'objet $\ker u$ n'a pas de facteur de composition S' ;
3. le simple S est Φ -détecté par S' dans Y relativement à π' ;
4. si T est un facteur de composition de X/Y , alors S' n'est pas facteur de composition de ΦT .

Alors S est Φ -détecté par S' dans X relativement à π .

Démonstration. Puisque S' est facteur de composition de $\text{im } \pi'$ (par (3)), la condition (2) montre que S' est facteur de composition de $\text{im } (u \circ \pi')$, c'est donc aussi le cas pour $\text{im } \pi$ (qui contient $\text{im } (u \circ \pi')$ par la condition (1)).

Soit maintenant A un sous-objet de X tel que S' est facteur de composition de $\pi(\text{im } \Phi i)$; posons $A' = A \cap Y$. Comme $A/A' \hookrightarrow X/Y$, le lemme 4.5 prouve que $\Phi(A/A')$ n'a pas de facteur de composition S' .

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Phi A' & \longrightarrow & \Phi Y & \xrightarrow{\pi'} & B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u \\ \Phi A & \longrightarrow & \Phi X & \xrightarrow{\pi} & B \end{array}$$

dont le carré de gauche est induit par les inclusions. L'objet simple S' est facteur de composition de $\text{im } (\Phi A' \rightarrow B)$ car $\text{im } (\Phi A \rightarrow B) / \text{im } (\Phi A' \rightarrow B)$ est un quotient de $\text{coker } \Phi(A' \hookrightarrow A) \simeq \Phi(A/A')$, qui n'a pas de facteur S' . A fortiori, S' est facteur de composition de $\pi'(\text{im } (\Phi A' \rightarrow \Phi Y))$; il s'ensuit (par (3)) que S est facteur de composition de A' (appliquer l'hypothèse (1)), donc de A , ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 4.7. Soient X un objet de \mathcal{A} , Y un sous-objet de X , $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$ et $\Phi(X/Y) \xrightarrow{\rho} C$ et $B \xrightarrow{v} C$ des flèches de \mathcal{B} vérifiant les conditions suivantes.

1. Le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \Phi X & \xrightarrow{\pi} & B \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \Phi(X/Y) & \xrightarrow{\rho} & C \end{array} \quad (10)$$

2. Le simple S est Φ -détecté par S' dans X/Y relativement à ρ .

3. L'objet $\ker v$ n'a pas de facteur de composition S' .

Alors S est Φ -détecté par S' dans X relativement à π .

Démonstration. Le simple S' est facteur de composition de $\pi(\Phi X)$, puisque cet objet se projette sur $\rho(\Phi(X/Y))$.

Soit à présent A un sous-objet de X tel que S' est facteur de composition de $\pi(\text{im } \Phi(A \hookrightarrow X))$; on pose $A' = A \cap Y$. L'examen du diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccc} \Phi A' & \longrightarrow & \Phi A & \twoheadrightarrow & \Phi(A/A') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Phi Y & \longrightarrow & \Phi X & \twoheadrightarrow & \Phi(X/Y) \end{array}$$

montre que $\text{im } (\Phi(A/A') \rightarrow \Phi(X/Y))$ est l'image de $\text{im } (\Phi A \rightarrow \Phi X)$ par la projection $\Phi X \twoheadrightarrow \Phi(X/Y)$. Par conséquent, $\rho(\text{im } (\Phi(A/A') \rightarrow \Phi(X/Y)))$ est l'image de $\pi(\text{im } (\Phi A \rightarrow \Phi X))$ par v , et la dernière condition montre alors que S' est facteur de composition de $\rho(\text{im } (\Phi(A/A') \rightarrow \Phi(X/Y)))$, de sorte que A/A' , et a fortiori A , a un facteur de composition S , ce qu'il fallait démontrer. \square

Corollaire 4.8. Soient X un objet de \mathcal{A} , Y un sous-objet de X , et $\Phi X \xrightarrow{\pi} B$ un morphisme de \mathcal{B} tels que :

1. S' est facteur de composition de $\text{im } \pi$;
2. S' n'est pas facteur de composition de ΦY ;
3. $X/Y \simeq S$.

Alors S est Φ -détecté par S' dans X relativement à π .

Démonstration. Notons i l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ et v la projection $B \twoheadrightarrow C = B/\text{im } (\pi \circ \Phi i)$, de sorte que π induit un morphisme $\rho : \Phi(X/Y) \rightarrow C$ rendant commutatif le diagramme (10). Les deux premières hypothèses montrent que $\ker v$ n'a pas de facteur de composition S' , tandis que $\text{im } \rho$ en a un, donc que S est Φ -détecté dans X/Y relativement à ρ grâce à la dernière hypothèse. La conclusion découle donc de la proposition 4.7. \square

4.2 Détection de facteurs de degré maximal dans un foncteur fini

Comme le foncteur $(- : \Lambda^1)$ est un adjoint à gauche, il commute aux colimites, ce qui permet de lui appliquer les résultats du paragraphe 4.1.

Définition 4.9. Soient λ une partition régulière de longueur $r > 0$ et $X \in \text{Ob } \mathcal{F}$. Nous dirons que λ est Λ^1 -détectable dans X si, selon la terminologie de la définition 4.3, S_λ est $(- : \Lambda^1)$ -détecté par $S_{\lambda_r^-}$ dans X .

Si $\pi : (X : \Lambda^1) \rightarrow B$ est un morphisme de \mathcal{F} , nous dirons que λ est Λ^1 -détectable dans X relativement à π si S_λ est $(- : \Lambda^1)$ -détecté par $S_{\lambda_r^-}$ dans X relativement à π .

Notation 4.10. Soit λ une partition de longueur $r > 0$. On désigne par $\varsigma_\lambda : (W_\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow W_{\lambda_r^-}$ la projection donnée par la proposition 3.22.

Lemme 4.11. Soient λ et μ deux partitions régulières, et $r = l(\lambda)$; on suppose $r > 0$. Si $\mu \vdash \Lambda^\lambda$ et $\lambda_r^- \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$, alors $|\lambda| = |\mu|$ et $\mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$.

Démonstration. On a $|\lambda| \geq |\mu|$ car $\mu \vdash \Lambda^\lambda$, et $|\lambda| - 1 \leq |\mu| - 1$ car $\lambda_r^- \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$, d'où $|\lambda| = |\mu|$. La proposition 3.18 entraîne maintenant $\mu_1^- \leq \lambda_r^-$, d'où $\mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$. \square

Proposition 4.12. Soit λ une partition régulière Weyl-séparante non nulle. Alors λ est Λ^1 -détectable dans W_λ relativement à ς_λ .

Démonstration. On applique le corollaire 4.8 avec $X = W_\lambda$ et $Y = \text{rad } W_\lambda$, de sorte que la dernière condition est satisfaite grâce au théorème/définition 1.32. La première est vérifiée parce que $\lambda_r^- \vdash W_{\lambda_r^-} = \text{im } \varsigma_\lambda$.

La seconde condition du corollaire 4.8 provient de l'hypothèse de Weyl-séparation, via le lemme 4.5. En effet, supposons qu'elle ne soit pas satisfaite : il existerait une partition régulière μ telle que $\mu \vdash \text{rad } W_\lambda$ et $\lambda_r^- \vdash (S_\mu : \Lambda^1)$, d'où $\mu \vdash \text{rad } W_\lambda$ et $\mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$ par le lemme 4.11, en contradiction avec le fait que λ est W-séparante. \square

Corollaire 4.13. On conserve les hypothèses de la proposition 4.12. Soit X un sous-objet de Λ^λ tel que :

- $W_\lambda \subset X$,
- il n'existe pas de partition régulière μ de $|\lambda|$ telle que $\mu \vdash X/W_\lambda$ et $\mu \leq \lambda_{1,r}^{+,-}$.

Alors λ est Λ^1 -détectable dans W_λ relativement à la composée

$$\pi_X : (X : \Lambda^1) \rightarrow (\Lambda^\lambda : \Lambda^1) \twoheadrightarrow \Lambda^{\lambda_r^-}.$$

Démonstration. On applique la proposition 4.6 au sous-objet W_λ de X . Ses deux premières conditions sont satisfaites, car le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (W_\lambda : \Lambda^1) & \xrightarrow{\varsigma_\lambda} & W_{\lambda_r^-} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X : \Lambda^1) & \xrightarrow{\pi_X} & \Lambda^{\lambda_r^-} \end{array}$$

commute.

La troisième hypothèse de la proposition 4.6 est vérifiée par la proposition 4.12, la dernière par le lemme 4.11. \square

4.3 Détection dans $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^n$

En vue d'appliquer les résultats précédents à la détection de sous-foncteurs de $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^\lambda$, nous établissons deux lemmes simples qui permettront de passer

de la détection dans une partie homogène (à laquelle la section précédente est adaptée) à la détection « globale ». Rappelons que l'on a un isomorphisme

$$p_m^{hom}(\bar{I}^{\otimes r}) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_r = m}} \Lambda^\alpha$$

pour tout entier m , via lequel nous identifierons souvent les deux membres.

Lemme 4.14. *Soient r, n, k trois entiers strictement positifs, et α, β deux partitions régulières telles que $\alpha \vdash p_k^{hom}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^n)$, $\beta \vdash (S_\alpha : \Lambda^1)$ et $|\beta| < k - 1$. Alors $l(\beta) \leq r$ et $\beta_r \leq n$.*

Démonstration. Supposons d'abord $|\alpha| < k$. On a alors $l(\alpha) < r + 1$ et $\alpha_r \leq n$ par le théorème 1.33. En utilisant la proposition 3.18, on obtient $l(\beta) \leq l(\alpha) \leq r$ et $\beta_r \leq \alpha_r \leq n$.

Supposons désormais $|\alpha| = k$: on a donc $|\beta| < |\alpha| - 1$, et la proposition 3.18 donne $l(\beta) < l(\alpha)$ et $\beta_r \leq \alpha_{r+1}$, donc, par le théorème 1.33, on a $l(\beta) \leq r$ et $\beta_r \leq n$. \square

Lemme 4.15. *Soient r, m, k des entiers strictement positifs, X un sous-objet de $\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k$ et μ une partition régulière de m telle que $\mu_{r+1} = k$. Si μ est Λ^1 -détectable dans $p_m^{hom}(X)$ relativement au morphisme*

$$(p_m^{hom}(X) : \Lambda^1) \rightarrow (p_m^{hom}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) \twoheadrightarrow p_{m-k}^{hom}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{k-1}$$

dont la première flèche est induite par l'inclusion et la seconde de la proposition 2.6 et de l'isomorphisme $p_m^{hom}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) \simeq p_{m-k}^{hom}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^k$, alors μ est Λ^1 -détectable dans X relativement au morphisme

$$(X : \Lambda^1) \rightarrow (\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k : \Lambda^1) \simeq \bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^{k-1}$$

induit par l'inclusion via le corollaire 2.12.

Démonstration. La proposition 4.7 prouve que μ est Λ^1 -détectable dans $p_m X$ relativement au morphisme $(p_m X : \Lambda^1) \rightarrow (p_m(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) \twoheadrightarrow p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{k-1}$. En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (p_m X : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{k-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (p_m^{hom}(X) : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m^{hom}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}^{hom}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{k-1} \end{array}$$

commute, et le noyau de la flèche verticale de droite est de degré $< m - 1$, donc sans facteur de composition $S_{\mu_{r+1}^-}$.

On termine la démonstration en utilisant la proposition 4.6 avec $Y = p_m X$: le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (p_m X : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{k-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X : \Lambda^1) & \longrightarrow & (\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k : \Lambda^1) & \xrightarrow{\simeq} & \bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^{k-1} \end{array}$$

commute (où les flèches verticales sont induites par les inclusions), et la flèche verticale de droite est injective, ce qui montre que les deux premières hypothèses de ladite proposition sont vérifiées. Nous venons de voir que la troisième l'est ; quant à la dernière, elle provient du lemme précédent : si elle était en défaut, on disposerait de $i > m$ d'une partition régulière α telle que $\alpha \vdash p_i^{hom}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k)$ et $\mu_{r+1}^- \vdash (S_\alpha : \Lambda^1)$. Donc $(\mu_{r+1}^-)_r \leq k$ par le lemme 4.14. Mais par hypothèse $\mu_{r+1} = k$, d'où $(\mu_{r+1}^-)_r = \mu_r > k$, contradiction qui achève la démonstration. \square

Proposition 4.16. *Soient r, m, k des entiers strictement positifs, A un sous-foncteur de $\bar{I}^{\otimes r}$, X un sous-foncteur de $A \otimes \Lambda^k$, μ une partition régulière de longueur r de $m - k$ telle que la suite d'entiers $\lambda = (\mu_1, \dots, \mu_r, k)$ est une partition régulière Weyl-séparante et $\alpha : p_m^{hom}(X) \rightarrow \Lambda^\lambda$ un morphisme vérifiant les propriétés suivantes.*

1. *Il existe un morphisme $\beta : p_{m-k}^{hom}(A) \rightarrow \Lambda^\mu$ tel que α coïncide avec la composée*

$$p_m^{hom}(X) \hookrightarrow p_m^{hom}(A \otimes \Lambda^k) = p_{m-k}^{hom}(A) \otimes \Lambda^k \xrightarrow{\beta \otimes \Lambda^k} \Lambda^\mu \otimes \Lambda^k.$$

2. *L'image de α contient W_λ .*
3. *Il n'existe pas de partition régulière ν de m telle que $\nu \vdash im \alpha / W_\lambda$ et $\nu \leq \lambda_{1, r+1}^{+, -}$.*
4. *Si ν est une partition régulière de $m - k$ telle que $\nu \vdash ker \beta$, alors $\nu > \mu$.*

Alors λ est Λ^1 -détectable dans X relativement au morphisme

$$(X : \Lambda^1) \rightarrow (\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k : \Lambda^1) \simeq \bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^{k-1}.$$

Démonstration. Le corollaire 4.13 montre que λ est Λ^1 -détectable dans $im \alpha$ relativement au morphisme $(im \alpha : \Lambda^1) \rightarrow \Lambda^{k-1}$ induit par l'inclusion. On prouve maintenant que λ est Λ^1 -détectable dans $p_m^{hom}(X)$ relativement au morphisme

$$(p_m^{hom}(X) : \Lambda^1) \rightarrow (p_m^{hom}(A \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) \rightarrow p_{m-k}^{hom}(A) \otimes \Lambda^{k-1}$$

en employant la proposition 4.7, avec le sous-objet $ker \alpha$ et $u = \beta \otimes \Lambda^{k-1}$.

Pour la première condition, on constate que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (p_m^{hom}(X) : \Lambda^1) & \longrightarrow & (p_m^{hom}(A \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & p_{m-k}^{hom}(A) \otimes \Lambda^{k-1} \\ (\alpha : \Lambda^1) \downarrow & & (\beta \otimes \Lambda^k : \Lambda^1) \downarrow & & \downarrow \beta \otimes \Lambda^{k-1} \\ (im \alpha : \Lambda^1) & \longrightarrow & (\Lambda^\mu \otimes \Lambda^k : \Lambda^1) & \twoheadrightarrow & \Lambda^\mu \otimes \Lambda^{k-1} \end{array}$$

commute.

Nous avons montré précédemment que la deuxième hypothèse de ladite proposition est vérifiée.

Pour la dernière, il s'agit d'établir que $S_{\lambda_{r+1}^-}$ n'est pas facteur de composition de $ker \beta \otimes \Lambda^{k-1}$. C'est une conséquence directe de l'hypothèse (4) et du théorème

1.33 : si ν' est une partition régulière de $m-1$ telle que $\nu' \vdash \ker \beta \otimes \Lambda^{k-1}$, alors $\nu' \vdash \Lambda^{(\nu, k-1)}$, donc $\nu' \geq (\nu, k-1)$, où ν est une partition régulière de $m-k$ telle que $\nu \vdash \ker \beta$.

Par conséquent (cf. remarque 4.4), λ est Λ^1 -détectable dans $p_m^{\text{hom}}(X)$ relativement au morphisme

$$(p_m^{\text{hom}}(X) : \Lambda^1) \rightarrow (p_m^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r} \otimes \Lambda^k) : \Lambda^1) \rightarrow p_{m-k}^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes r}) \otimes \Lambda^{k-1}.$$

La conclusion résulte maintenant du lemme 4.15. \square

5 Application à la structure de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$

Comme pour les avancées déjà connues dans l'étude de la conjecture artinienne (cf. [Pir97] et [Pow00b]), la stratégie de la détermination de la structure des foncteurs $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$, incluant le théorème 1, que nous mettons en œuvre dans cette section consiste en deux pas :

1. réduire l'étude de ces foncteurs à celle de foncteurs plus simples ;
2. montrer que ces derniers n'ont pas de sous-foncteur propre « trop gros ».

La première étape sera réalisée par des constructions explicites liées aux représentations des groupes symétriques, tandis que la seconde repose sur l'utilisation du foncteur de division par Λ^1 .

Afin de « dévisser » au maximum les foncteurs $\bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$, on commence par ramener l'étude de $\bar{I}^{\otimes 2}$ à celle de foncteurs plus simples. La décomposition des injectifs standard en somme directe d'injectifs indécomposables peut être raffinée efficacement à l'aide des notions de *foncteur co-Weyl* et de *filtration J-bonne* introduites par Powell dans [Pow98c], dont nous n'aurons pas explicitement usage. En effet, dans le cas de $\bar{I}^{\otimes 2}$, on obtient très simplement une filtration explicite. Nous rappelons, dans le premier paragraphe, ces considérations, et donnons des propriétés des facteurs de composition des « briques élémentaires » (autres que le foncteur \bar{I}) de $\bar{I}^{\otimes 2}$, les foncteurs $L(2)$ et $\bar{D}(2)$. Nous verrons ainsi qu'ils sont « engendrés » par des foncteurs simples associés à des partitions *alternées*.

Remarque 5.1. La possibilité de généraliser ces résultats aux foncteurs co-Weyl supérieurs pose rapidement des problèmes techniques assez ardues ; quelques renseignements remarquables (mais peu explicites) sur les facteurs de composition de ces foncteurs sont toutefois donnés en toute généralité dans [Djac].

Le dévissage de $\bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ obtenu par tensorisation par Λ^n de celui de $\bar{I}^{\otimes 2}$ précédemment évoqué ne s'avère pas suffisant pour comprendre la structure de ce foncteur. Pour étudier le foncteur $\bar{I} \otimes \Lambda^n$, on en définit d'abord un « bon » sous-foncteur \bar{K}_n , qui est l'image de la flèche de but $\bar{I} \otimes \Lambda^n$ de la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow \bar{I} \otimes \Lambda^n \rightarrow \bar{I} \otimes \Lambda^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \bar{I} \otimes \Lambda^1 \rightarrow \bar{I} \rightarrow 0$$

(cf. [Pir97]). De même, des suites exactes permettent d'introduire des sous-foncteurs adéquats L_n^2 et D_n^2 de $L(2) \otimes \Lambda^n$ et $\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n$ respectivement, qui

apparaissent à la fois comme noyau et image de flèches explicites, ce qui permet d'établir aisément les propriétés nécessaires sur leurs facteurs de composition à partir de celles de $L(2)$ et $\bar{D}(2)$. Cela fait l'objet du deuxième paragraphe.

Enfin, le dernier paragraphe applique la proposition 4.16 sur la détection de facteurs de composition par division par Λ^1 pour en déduire le caractère artinien de type 2 de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$, par un argument de récurrence dont l'initialisation fournie par l'article [Pow98a].

5.1 La décomposition $\Lambda^2(\bar{I}) \simeq L(2) \oplus \bar{D}(2)$

Il est plus agréable de décrire le scindement de $\Lambda^2(\bar{P})$ dual de celui indiqué par le titre de ce paragraphe, que l'on obtient à partir du fait suivant, qui résulte d'un calcul direct.

Lemme 5.2. *Le morphisme $\Pi : \Lambda^2(\bar{P}) \rightarrow \Lambda^2(\bar{P})$ donné par*

$$[u] \wedge [v] \mapsto ([u] + [v]) \wedge [u + v] \quad (u, v \in V \setminus \{0\}; V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f)$$

est un projecteur.

Remarque 5.3. Soit U l'endomorphisme $A \mapsto (f \mapsto A(f \circ \iota))$ de $I_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}$, où ι désigne l'endomorphisme $(a, b) \mapsto (a, a + b)$ de $\mathbb{F}_2^{\oplus 2}$. Il est dual de l'endomorphisme de $P^{\otimes 2}$ donné par $[u] \otimes [v] \mapsto [u] \otimes [u + v]$. Le projecteur Π peut se voir comme la composée

$$\Lambda^2 \bar{P} \hookrightarrow \bar{P}^{\otimes 2} \xrightarrow{DU} \bar{P}^{\otimes 2} \twoheadrightarrow \Lambda^2 \bar{P}.$$

Définition 5.4. On pose $P_{2,1} = \text{im } \Pi$, $\bar{G}(2) = \text{ker } \Pi$, $L(2) = DP_{2,1}$ et $\bar{D}(2) = D\bar{G}(2)$. Ainsi $\Lambda^2(\bar{P}) \simeq P_{2,1} \oplus \bar{G}(2)$ et $\Lambda^2(\bar{I}) \simeq L(2) \oplus \bar{D}(2)$.

Remarque 5.5. Ces foncteurs peuvent être caractérisés comme suit — on pourra se référer à [Pow98a], § 1.1 à ce sujet.

- Le foncteur $P_{2,1}$ est la couverture projective de $S_{(2,1)}$.
- Le foncteur $\bar{G}(2)$ est isomorphe au foncteur $\mathbb{F}_2[Gr_2]$, où $Gr_2(V)$ désigne la grassmannienne des plans d'un espace vectoriel V , l'action sur les morphismes étant l'action donnée par $\mathbb{F}_2[Gr_2](f)([\pi]) = [f(\pi)]$ si $f(\pi)$ est un plan, $\mathbb{F}_2[Gr_2](f)([\pi]) = 0$ sinon.

Plus précisément, si (u, v) est une famille libre de $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, dénotons par $\langle u, v \rangle \in Gr_2(V)$ le plan qu'elle engendre. Alors le morphisme $\Lambda^2(\bar{P}) \xrightarrow{P} \mathbb{F}_2[Gr_2]$ donné par $[u] \wedge [v] \mapsto \langle u, v \rangle$ se restreint en un isomorphisme de $\bar{G}(2)$ sur $\mathbb{F}_2[Gr_2]$.

Avant d'indiquer les facteurs de composition que nous utiliserons pour la Λ^1 -détection dans $L(2) \otimes \Lambda^n$ et $\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n$, nous énonçons deux lemmes formels.

Lemme 5.6. *Soient λ une partition régulière et X un foncteur analytique. Supposons que S_λ est facteur de composition unique de X . Alors il existe un plus petit sous-objet $X[\lambda]$ de X tel que $\lambda \vdash X[\lambda]$. Le foncteur $X[\lambda]$ est fini, de degré supérieur à $|\lambda|$. De plus, S_λ est le cosocle de $X[\lambda]$, et cette propriété caractérise $X[\lambda]$ parmi les sous-objets finis de X .*

Démonstration. Comme X est analytique, X a un sous-objet fini F tel que $\lambda \vdash F$. D'autre part, si A et B sont deux sous-objets de X tels que $\lambda \vdash A$ et $\lambda \vdash B$, alors $\lambda \vdash A \cap B$, car sinon λ serait facteur de composition (au moins) double de $(A \oplus B)/(A \cap B) \simeq A + B \subset X$. Par conséquent, l'intersection $X[\lambda]$ des sous-objets A de X tels que $\lambda \vdash A$ convient.

On a $\deg X[\lambda] \geq \deg S_\lambda = |\lambda|$. Par ailleurs, si $\pi : X[\lambda] \rightarrow S$ est un épimorphisme avec S simple, $\ker \pi$ n'a pas de facteur de composition S_λ , donc $S \simeq S_\lambda$; on en déduit $\text{cosoc } X[\lambda] = S_\lambda$. Réciproquement, si Y est un sous-objet de X de cosocle S_λ , $X[\lambda] \subset Y$; si l'inclusion était stricte, S_λ serait facteur de composition de $\text{rad } Y \supset X[\lambda]$, donc serait facteur de composition (au moins) double de Y , contradiction qui achève la démonstration. \square

Exemple 5.7 (fondamental). Le foncteur simple S_λ est facteur de composition unique dans Λ^λ et $\Lambda^\lambda[\lambda] = W_\lambda$.

Définition 5.8. Soient X un foncteur analytique et λ une partition régulière telle que $\lambda \vdash X$. Nous dirons que S_λ est **bien placé** dans X si S_λ n'est pas facteur de composition de $X/p_{|\lambda|}(X)$.

Remarque 5.9. Si S_λ est facteur de composition unique de X , cela équivaut à l'inclusion $X[\lambda] \subset p_{|\lambda|}X$, ou encore à $\lambda \vdash p_{|\lambda|}^{\text{hom}}X$.

Lemme 5.10. Soient X un foncteur analytique et λ une partition régulière d'un entier n telle que S_λ est facteur de composition unique bien placé de X . Supposons aussi que $Y \xrightarrow{f} X$ est un morphisme de \mathcal{F}_ω et A un sous-objet cohomogène de degré n de $p_n Y$ tels que $p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A) = (p_n^{\text{hom}}X)[\lambda]$. On a alors $f(A) = X[\lambda]$.

Démonstration. Les foncteurs p_i étant exacts à gauche et se plongeant naturellement dans le foncteur identité, on a $p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A) \rightarrow p_n^{\text{hom}}(f(A))$. On en déduit $S_\lambda \simeq \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A) \rightarrow \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f(A))$.

D'autre part, comme $\deg A \leq n$, on dispose d'un épimorphisme $f(A) \rightarrow p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A)$, donc aussi $\text{cosoc } f(A) \rightarrow \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f)(p_n^{\text{hom}}A)$.

Enfin, le quotient $f(A)$ de A est cohomogène de degré n (ou nul), donc la projection $f(A) \rightarrow p_n^{\text{hom}}(f(A))$ induit un isomorphisme $\text{cosoc } f(A) \xrightarrow{\simeq} \text{cosoc } p_n^{\text{hom}}(f(A))$. Conséquemment, $S_\lambda \simeq \text{cosoc } f(A)$, d'où le lemme. \square

Nous revenons aux foncteurs $\Lambda^2(\bar{I})$, $L(2)$ et $\bar{D}(2)$, dont nous étudions les facteurs de composition à travers leur filtration polynomiale.

Pour tout entier $n > 0$, on a un isomorphisme

$$p_n^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I})) \simeq \left(\bigoplus_{\substack{a+b=n \\ a>b>0}} \Lambda^a \otimes \Lambda^b \right) \oplus \Lambda^2(\Lambda^{n/2}) \quad (11)$$

où, par convention, le dernier terme est nul si n est impair. Via cette identification, le plongement de $p_n^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I}))$ dans

$$p_n^{\text{hom}}(\bar{I}^{\otimes 2}) \simeq \bigoplus_{\substack{a+b=n \\ a,b>0}} (\Lambda^a \otimes \Lambda^b)$$

s'obtient comme somme des morphismes $\Lambda^a \otimes \Lambda^b \xrightarrow{id \oplus \tau} (\Lambda^a \otimes \Lambda^b) \oplus (\Lambda^b \otimes \Lambda^a)$, pour $a > b > 0$ et $a + b = n$, τ désignant l'isomorphisme d'échange des deux facteurs du produit tensoriel, et de l'inclusion $\Lambda^2(\Lambda^{n/2}) \hookrightarrow \Lambda^{n/2} \otimes \Lambda^{n/2}$.

Lemme 5.11. *Soient i, j, k, l et n des entiers vérifiant $i > j > 0$, $k \geq l > 0$ et $i + j = k + l = n$. La composée*

$$\Lambda^i \otimes \Lambda^j \hookrightarrow p_n^{hom}(\Lambda^2(\bar{I})) \xrightarrow{p_n^{hom}(D\Pi)} p_n^{hom}(\Lambda^2(\bar{I})) \twoheadrightarrow \Lambda^k \otimes \Lambda^l$$

dont les première et dernière flèches sont déduites de (11) est la somme des morphismes :

- $\theta_{i,j,k-i}$ si $k \geq i$;
- $D\theta_{k,l,i-k}$ si $k \leq i$;
- $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\tau} \Lambda^j \otimes \Lambda^i \xrightarrow{\theta_{j,i,k-j}} \Lambda^k \otimes \Lambda^l$ si $k \geq j$, où τ désigne la flèche échangeant les deux facteurs du produit tensoriel ;
- $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\tau} \Lambda^j \otimes \Lambda^i \xrightarrow{D\theta_{k,l,j-k}} \Lambda^k \otimes \Lambda^l$ si $k \leq j$.

En particulier, pour $(i, j) = (k, l)$, le morphisme en question est $\theta_{j,i,i-j} \circ \tau$.

Démonstration. Cela provient de la remarque 5.3, en utilisant que U induit au niveau de la filtration polynomiale les morphismes

$$\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\bigoplus_{0 \leq t \leq j} \theta_{i,j,t}} \bigoplus_{0 \leq t \leq j} \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t}.$$

En effet, si $a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_j$ sont des éléments d'un espace vectoriel V , l'élément $(a_1 \wedge \dots \wedge a_i) \otimes (b_1 \wedge \dots \wedge b_j)$ de $\Lambda^i(V) \otimes \Lambda^j(V)$ se relève en l'élément de $p_{i+j}(I_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}})(V)$ donné par $(l, l') \mapsto (\prod_{r=1}^i l(a_r)) (\prod_{s=1}^j l'(b_s))$ ($(l, l') \in (V^*)^2$; on identifie $I_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}}(V)$ et $I^{\otimes 2}(V)$) ; ensuite développer le produit dans l'élément $(l, l') \mapsto (\prod_{r=1}^i l(a_r)) (\prod_{s=1}^j (l(b_s) + l'(b_s)))$ de $p_{i+j}(I_{\mathbb{F}_2^{\oplus 2}})(V)$ qui est l'image du précédent par le morphisme induit par U . \square

Lemme 5.12. *Soient $i > j > 0$ des entiers. La restriction à $W_{(i,j)}$ du morphisme $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \hookrightarrow p_{i+j}^{hom}(\Lambda^2(\bar{I})) \xrightarrow{p_{i+j}^{hom}(D\Pi)} p_{i+j}^{hom}(\Lambda^2(\bar{I})) \twoheadrightarrow \Lambda^i \otimes \Lambda^j$ coïncide avec l'identité.*

Démonstration. Cela résulte des lemmes 5.11 et 3.6. \square

Notation 5.13. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note f_i la composée

$$p_{2i+1}^{hom}L(2) \hookrightarrow p_{2i+1}^{hom}\Lambda^2(\bar{I}) \twoheadrightarrow \Lambda^{i+1} \otimes \Lambda^i,$$

et g_i le morphisme

$$p_{2i+3}^{hom}\bar{D}(2) \hookrightarrow p_{2i+3}^{hom}\Lambda^2(\bar{I}) \twoheadrightarrow \Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1} \xrightarrow{\theta} \Lambda^{i+3} \otimes \Lambda^i.$$

Proposition 5.14. *Soit $i \in \mathbb{N}^*$.*

1. (a) Le foncteur $L(2)$ possède un unique facteur de composition $S_{(i+1,i)}$, tandis que $\bar{D}(2)$ n'en a pas.
 - (b) De plus, celui-ci est bien placé. Précisément, $W_{(i+1,i)} \subset \text{im } f_i$.
 - (c) En revanche, $\text{im } f_i$ n'a pas de facteur de composition $S_{(i+2,i-1)}$.
2. (a) Le foncteur $\bar{D}(2)$ possède un unique facteur de composition $S_{(i+3,i)}$.
 - (b) De plus, celui-ci est bien placé, et $W_{(i+3,i)} \subset \text{im } g_i$. Par conséquent, $\Lambda^{i+2,i+1}[i+3,i] \subset p_{2i+3}^{\text{hom}} \bar{D}(2)$.
 - (c) En revanche, $\text{im } g_i$ n'a pas de facteur de composition $S_{(i+4,i-1)}$.

Démonstration. Tout d'abord, (11) montre que les facteurs de composition de $\bar{I}^{\otimes 2}$ sont tous bien placés.

D'autre part, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $S_{(i+1,i)}$ est facteur de composition unique de $p_{2i+1}^{\text{hom}} \Lambda^2(\bar{I})$, de sorte que (1) (a) et (1) (b) découlent du lemme 5.12.

Les partitions $(i+2, i+1)$ étant alternées, donc Weyl-séparantes (proposition 3.17), $S_{(i+3,i)}$ n'est pas facteur de composition de $W_{(i+2,i+1)}$, donc est facteur de composition unique de $\Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1}$, et $\theta_{i+2,i+1,1}((\Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1})[i+3,i]) = W_{(i+3,i)}$ (utiliser la filtration de Weyl usuelle de $\Lambda^{i+2} \otimes \Lambda^{i+1}$ — cf. [Pir97], § 1.1). Par conséquent, $\Lambda^2(\bar{I})$ a exactement deux facteurs de composition $S_{(i+3,i)}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$; le lemme 5.12 (qui montre notamment que l'un d'entre eux apparaît dans $L(2)$) montre qu'il suffit de voir pour démontrer (2) (a) et (2) (b) que $L(2)$ a un seul facteur de composition $S_{(i+3,i)}$.

Pour cela, on utilise l'endofoncteur $\tilde{\nabla}_2$ de \mathcal{F} introduit par G. Powell, dont on emploiera les propriétés suivantes (pour la définition de $\tilde{\nabla}_2$ et la démonstration de ces propriétés, voir [Pow98b]) :

1. $\tilde{\nabla}_2$ préserve les injections et les surjections. En particulier, si $\lambda \vdash X$, alors $\tilde{\nabla}_2 S_\lambda$ est un sous-quotient de $\tilde{\nabla}_2 X$.
2. $\tilde{\nabla}_2 S_{(i+1,j+1)} = S_{(i,j)}$ pour $i > j \geq 0$.
3. $\tilde{\nabla}_2 L(2) = L(2) \oplus \bar{I}$.
4. Pour $i > 0$ et $j > t \geq 0$, $\tilde{\nabla}_2$ transforme $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \xrightarrow{\theta_{i,j,t}} \Lambda^{i+t} \otimes \Lambda^{j-t}$ en $\Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^{j-1} \xrightarrow{\theta_{i-1,j-1,t}} \Lambda^{i+t-1} \otimes \Lambda^{j-t-1}$.

Si pour un $i \in \mathbb{N}^*$, $L(2)$ avait deux facteurs de composition $S_{(i+3,i)}$, on en déduirait que $L(2)$ a un facteur de composition Λ^3 , ce qui n'est pas le cas puisque l'unique facteur de composition Λ^3 de $\Lambda^2(\bar{I})$ apparaît dans $p_3^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I})) = \Lambda^2 \otimes \Lambda^1 \simeq S_{(2,1)} \oplus \Lambda^3$, or dans cette décomposition $p_3^{\text{hom}} L(2) = S_{(2,1)}$ et $p_3^{\text{hom}} \bar{D}(2) = \Lambda^3$ (utiliser le lemme 5.11). Cela établit (2) (a) et (2) (b).

Cela montre également (1) (c) pour $i = 1$. Le cas général s'en déduit encore via l'utilisation de $\tilde{\nabla}_2$, car d'après les propriétés rappelées ci-avant, ce foncteur transforme la flèche f_{i+1} en f_i , donc $\text{im } f_{i+1}$ en $\text{im } f_i$, de sorte que si $(i+3, i) \vdash \text{im } f_{i+1}$, alors $(i+2, i-1) \vdash \text{im } f_i$.

De même, il suffit de démontrer (2) (c) pour $i = 1$. Or le lemme 5.12 montre que g_1 a la même image que $\Pi_{4,1}$ (cf. notation 1.28 et proposition 3.3), or ce dernier s'identifie à la projection $\Lambda^4 \otimes \Lambda^1 \twoheadrightarrow S_{(4,1)}$, ce qui achève la démonstration. \square

La définition que nous rappelons ci-après correspond est adaptée pour préciser la structure des injectifs co- tf de \mathcal{F} . Ainsi, une version forte de la conjecture artinienne postule que le foncteur $I^{\otimes n}$ est artinien de type n pour tout $n \in \mathbb{N}$ — cf. [Pow98c].

Définition 5.15 (cf. [Pow98c] et [Pow00a]). On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la notion de foncteur *simple artinien de type n* (resp. *foncteur artinien de type n*). Un foncteur simple artinien de type 0 est un foncteur simple ; un foncteur simple artinien de type $n + 1$ est un foncteur qui n'est pas artinien de type n mais dont tous les sous-objets stricts sont artiniens de type n . Un foncteur artinien de type n est un foncteur qui possède une filtration finie dont les sous-quotients sont simples artiniens de type $\leq n$.

On vérifie par récurrence sur n qu'un objet artinien de type n est artinien. Nos arguments ultérieurs se fonderont sur le résultat suivant.

Théorème 5.16 (Powell). *Il existe une filtration croissante $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $L(2)$ (resp. $\bar{D}(2)$) telle que :*

- tout sous-objet strict de $L(2)$ (resp. $\bar{D}(2)$) est inclus dans l'un des F_n ;
 - pour $n \in \mathbb{N}^*$ et un foncteur fini A , $A \otimes F_n$ est artinien de type 1 ;
 - si λ est une partition régulière telle que $\lambda \vdash F_n$, alors $l(\lambda) \leq 2$ et $\lambda_2 \leq n$.
- Par suite, les foncteurs $L(2)$ et $\bar{D}(2)$ sont simples artiniens de type 2.

La démonstration est fournie dans [Pow98a], à combiner aux résultats de [Pow00b] pour le deuxième point.

Corollaire 5.17. 1. *Le foncteur $L(2)$ est la réunion filtrante sur $i \in \mathbb{N}^*$ des $L(2)[i + 1, i]$.*

2. *Le foncteur $\bar{D}(2)$ est la réunion filtrante sur $i \in \mathbb{N}^*$ des $\bar{D}(2)[i + 3, i]$.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate de la proposition 5.14 et du théorème 5.16. \square

Remarque 5.18. La première assertion implique qu'un sous-foncteur F de $L(2)$ tel que $(i + 1, i) \vdash F$ pour une infinité d'entiers i est égal à $L(2)$.

5.2 Les foncteurs L_n^2 et D_n^2

Nous sommes en mesure de donner une description explicite des « briques élémentaires » des foncteurs $\Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^k$. C'est la suite exacte (12) qui permettra de dévisser itérativement ces foncteurs à l'aide des foncteurs L_i^2 et D_i^2 que nous allons définir et étudier.

Convention 5.19. Dans ce paragraphe, n désigne un entier strictement positif.

Les constructions que nous allons exposer reposent sur la considération des morphismes suivants. Là encore, il est commode de commencer par introduire les flèches duales de celles qui nous intéressent.

Notation 5.20. On désigne par $g_n : \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n \rightarrow \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)$ le morphisme donné par

$$([u] \wedge [v]) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_n) \mapsto ([u] \wedge [v]) \otimes \bigwedge_{1 \leq i \leq n} (u \wedge v \wedge a_i)$$

et par $h_n : \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1} \rightarrow \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n$ le morphisme donné par

$$([u] \otimes [v]) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}) \mapsto ([u] \wedge [v]) \otimes (u \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-1}).$$

Lemme 5.21. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n & \xrightarrow{g_n} & \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n(\Lambda^3) \\ \Pi \otimes \Lambda^n \downarrow & & \downarrow \Pi \otimes \Lambda^n(\Lambda^3) \\ \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n & \xrightarrow{g_n} & \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n(\Lambda^3) \end{array}$$

commute. Ainsi, g_n s'identifie, via la décomposition $\Lambda^2(\bar{P}) \simeq P_{2,1} \oplus \bar{G}(2)$, à la somme directe de deux morphismes $P_{2,1} \otimes \Lambda^n \xrightarrow{g_n^L} P_{2,1} \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)$ et $\bar{G}(2) \otimes \Lambda^n \xrightarrow{g_n^D} \bar{G}(2) \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)$.

Ce résultat provient d'un calcul direct.

Le lemme suivant utilise les morphismes w définis au corollaire 3.9.

Lemme 5.22. *Soient $i > j > 0$ des entiers. La restriction à $\Lambda^i \otimes \Lambda^j \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)$ de $p_{i+j+3n}^{\text{hom}}(Dg_n)$ s'identifie à $w_n^{i,j,0}$ (composée avec l'inclusion $\Lambda^{i+n} \otimes \Lambda^{j+n} \otimes \Lambda^n \hookrightarrow p_{i+j+3n}^{\text{hom}}(\Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^n)$). En conséquence, $p_{i+j+3n}^{\text{hom}}(Dg_n)(W_{(i,j)} \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)) = W_{(i+n,j+n,n)}$.*

Démonstration. La construction des morphismes $w_n^{i,j,0}$ et g_n montre qu'il suffit de traiter le cas $n = 1$. La flèche $\Lambda^{i+1,j+1,1} \rightarrow \Lambda^{i,j,3}$ duale de $w_1^{i,j,0} = j_{(i,j),3}$ — morphisme de la proposition 3.7 — s'obtient à partir du coproduit $\Lambda^{t+1} \rightarrow \Lambda^t \otimes \Lambda^1$ pour $t = i, j$ et du produit $\Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \rightarrow \Lambda^3$. La somme directe pour $i+j = n$ et $i, j > 0$ de ces morphismes correspond donc à la filtration polynomiale de la flèche $\bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^1 \rightarrow \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^3$ donnée par $[u] \otimes [v] \otimes a \mapsto [u] \otimes [v] \otimes (u \wedge v \wedge a)$; par suite, la somme directe pour $i+j = n$ et $i > j > 0$ de ces morphismes décrit la filtration polynomiale de $g_1 : \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n \rightarrow \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^3$. \square

Ce résultat nous permet de donner les principales propriétés nécessaires à la détection de facteurs composition dans $L(2) \otimes \Lambda^n$ et $\bar{D} \otimes \Lambda^n$.

Proposition 5.23. *1. Pour tout entier $i > 0$, $L(2) \otimes \Lambda^n$ contient un unique facteur de composition $S_{(i+n+1,i+n,n)}$. De plus,*

$$(L(2) \otimes \Lambda^n)[i+n+1, i+n, n] = Dg_n^L(L(2)[i+1, i] \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)).$$

2. Pour tout entier $i > 0$, $\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n$ contient un unique facteur de composition $S_{(i+n+3,i+n,n)}$. De plus,

$$(\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n)[i+n+3, i+n, n] = Dg_n^D(\bar{D}(2)[i+3, i] \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)).$$

3. La suite suivante est exacte.

$$\bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1} \xrightarrow{h_n} \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n \xrightarrow{g_n} \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n(\Lambda^3) \quad (12)$$

Démonstration. Le foncteur $L(2)[i+1, i] \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)$ est cohomogène comme produit tensoriel de deux foncteurs cohomogènes (cf. corollaire 1.19) de degré $3i+2n+1$, et sa partie homogène de degré $3n+2i+1$ est $W_{(i+1, i)} \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)$ par la proposition 5.14, de sorte que

$$\begin{aligned} & p_{3n+2i+1}^{hom}(Dg_n^L)(p_{3n+2i+1}^{hom}(L(2)[i+1, i] \otimes \Lambda^n(\Lambda^3))) \\ &= p_{3n+2i+1}^{hom}(Dg_n^L)(W_{(i+1, i)} \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)) = W_{(i+n+1, i+n, n)} \\ &= p_{3n+2i+1}^{hom}(L(2) \otimes \Lambda^n)[i+n+1, i+n, n]. \end{aligned}$$

On a fait usage du lemme 5.22 pour la deuxième égalité. Le lemme 5.10 fournit donc l'assertion (1).

On établit de même l'assertion (2), en utilisant également le dernier point du corollaire 3.9.

L'assertion (3) découle quant à elle d'un calcul direct. \square

Définition 5.24. On pose $L_n^2 = im Dg_n^L$ et $D_n^2 = im Dg_n^D$. On note également $L_0^2 = L(2)$ et $D_0^2 = \bar{D}(2)$.

Corollaire 5.25. – *Le foncteur L_n^2 est la réunion filtrante sur $i \in \mathbb{N}^*$ des sous-foncteurs $(L(2) \otimes \Lambda^n)[i+n+1, i+n, i]$.
– *Le foncteur D_n^2 est la réunion filtrante sur $i \in \mathbb{N}^*$ des sous-foncteurs $(\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n)[i+n+3, i+n, i]$.**

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du corollaire 5.17 et de la proposition 5.23. \square

Le lemme suivant est une variation sur le corollaire 3.9 adapté au cas de D_n^2 , légèrement plus technique que celui de L_n^2 , pour lequel ce corollaire suffira à nos investigations ultérieures.

Lemme 5.26. *Soient k et n des entiers strictements positifs. On a*

$$w_n^{k+2, k+1, 0}(\Lambda^{k+2, k+1}[k+3, k] \otimes \Lambda^n(\Lambda^3)) = \Lambda^{k+n+2, k+n+1, n}[k+n+3, k+n, n].$$

Démonstration. Elle est entièrement analogue à celle de la proposition 3.7, en notant que pour tout $V \in \text{Ob } \mathcal{E}^f$, $\Lambda^{k+2, k+1}[k+3, k](V)$ est le sous-espace vectoriel de $\Lambda^{k+2, k+1}(V)$ engendré par les éléments du type $(a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b \wedge c) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge d) + (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b \wedge d) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge c) + (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge c \wedge d) \otimes (a_1 \wedge \cdots \wedge a_k \wedge b)$ pour $a_1, \dots, a_k, b, c, d \in V$. \square

On rappelle que les morphismes f_k et g_k ont été introduits dans la notation 5.13.

Notation 5.27. Soient n et k des entiers tels que $k > n > 0$. On pose $A_{k, n} = (f_k \otimes \Lambda^n)(p_{2k+n+1}^{hom}(L_n^2))$ et $B_{k, n} = (g_k \otimes \Lambda^n)(p_{2k+n+3}^{hom}(D_n^2))$.

La proposition suivante contient tous les préliminaires nécessaires à la détection de facteurs de composition dans les foncteurs L_n^2 et D_n^2 .

Proposition 5.28. *Soient n et k des entiers tels que $k > n > 0$.*

1. (a) *On a $W_{(k+1, k, n)} \subset A_{k, n}$.*

- (b) Il n'existe pas de partition régulière ν de $2k + n + 1$ telle que $\nu \vdash A_{k,n}/W_{(k+1,k,n)}$ et $\nu \leq (k + 2, k, n - 1)$.
2. (a) On a $W_{(k+3,k,n)} \subset B_{k,n}$.
- (b) Il n'existe pas de partition régulière ν de $2k + n + 3$ telle que $\nu \vdash B_{k,n}/W_{(k+3,k,n)}$ et $\nu \leq (k + 4, k, n - 1)$.

Démonstration. L'assertion (1a) s'obtient en combinant le lemme 5.22 et la proposition 5.14. L'assertion (2a) s'établit pareillement, en utilisant aussi le lemme 5.26.

Montrons l'assertion (1b). Grâce à la suite exacte duale de (12), on a $A_{k,n} \subset (\text{im } f_k \otimes \Lambda^n) \cap (\Lambda^{k+1} \otimes \ker \theta_{k,n,1})$. Posons à présent $A'_{k,n} = A_{k,n} \cap (W_{(k+1,k)} \otimes \Lambda^n) : A_{k,n}/A'_{k,n}$ s'injecte dans $(\text{im } f_k/W_{(k+1,k)}) \otimes \Lambda^n$, qui n'a pas de facteurs de composition du type mentionné dans (1b) grâce à la proposition 5.14. Quant à $A'_{k,n}/W_{(k+1,k,n)}$, il s'injecte dans $\Lambda^{k+1} \otimes (\bigoplus_{t \geq 2} \Lambda^{k+t, n-t})$, de sorte que le théorème 1.33 suffit à conclure.

L'assertion (2b) est analogue, en remarquant que la suite exacte duale de (12) fournit $B_{k,n} \subset (\text{im } g_k \otimes \Lambda^n) \cap (\Lambda^{k+3} \otimes \ker \theta_{k,n,1})$, parce que le morphisme

$$\Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^n \xrightarrow{\theta \otimes \Lambda^n} \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^k \otimes \Lambda^n \xrightarrow{\Lambda^{k+3} \otimes \theta} \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{n-1}$$

est la somme des morphismes

$$\Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^n \simeq \Lambda^{k+1, k+2, n} \xrightarrow{\Lambda^{k+1} \otimes \theta} \Lambda^{k+1, k+3, n-1} \simeq \Lambda^{k+3, k+1, n-1}$$

et

$$\Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^n \xrightarrow{\Lambda^{k+2} \otimes \theta} \Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{k+2} \otimes \Lambda^{n-1} \xrightarrow{\theta \otimes \Lambda^n} \Lambda^{k+3} \otimes \Lambda^{k+1} \otimes \Lambda^{n-1}.$$

□

Nous terminons ce paragraphe en donnant une estimation de la division par Λ^1 des foncteurs que nous avons introduits.

On commence par observer que, comme les foncteurs $L(2)$ et $\bar{D}(2)$ sont des quotients de $\bar{I}^{\otimes 2}$, leur division par Λ^1 est nulle, de sorte que $(L(2) \otimes \Lambda^n : \Lambda^1) \simeq L(2) \otimes \Lambda^{n-1}$ et $(\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n : \Lambda^1) \simeq \bar{D}(2) \otimes \Lambda^{n-1}$. La démonstration ci-dessous exploite sans cesse ces identifications et d'autres analogues.

Proposition 5.29. *L'image du morphisme $(L_n^2 : \Lambda^1) \rightarrow L(2) \otimes \Lambda^{n-1}$ (resp. $(D_n^2 : \Lambda^1) \rightarrow \bar{D}(2) \otimes \Lambda^{n-1}$) induit par l'inclusion est incluse dans L_{n-1}^2 (resp. D_{n-1}^2).*

Démonstration. La suite exacte duale de (12) montre que la composée $L_n^2 \oplus D_n^2 \hookrightarrow \Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^n \xrightarrow{Dh_n} \bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1}$ est nulle ; par division par Λ^1 , on obtient que la somme directe des images des morphismes de l'énoncé est incluse dans le noyau de $\Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^{n-1} \xrightarrow{(Dh_n : \Lambda^1)} \bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-2}$. Il suffit donc de vérifier que

$(Dh_n : \Lambda^1) = h_{n-1}$, ce qui provient de la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^n & \xrightarrow{Dh_n} & \bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^{n-1} \otimes \Lambda^1 & \xrightarrow{Dh_{n-1} \otimes \Lambda^1} & \bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-2} \otimes \Lambda^1 \end{array}$$

qu'on obtient en dualisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^n & \xleftarrow{h_n} & \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Lambda^2(\bar{P}) \otimes \Lambda^{n-1} \otimes \Lambda^1 & \xleftarrow{h_{n-1} \otimes \Lambda^1} & \bar{P}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-2} \otimes \Lambda^1 \end{array}$$

qui est commutatif par inspection. \square

Notation 5.30. Nous désignerons par $u_n^L : (L_n^2 : \Lambda^1) \rightarrow L_{n-1}^2$ et $u_n^D : (D_n^2 : \Lambda^1) \rightarrow D_{n-1}^2$ les morphismes procurés par la proposition précédente.

Remarque 5.31. On peut montrer que ces flèches sont des isomorphismes. Leur surjectivité se déduit d'ailleurs aisément des considérations du paragraphe suivant.

Dans [Djac], nous établissons ce type de résultat dans un cadre plus général et conceptuel.

5.3 Démonstration du théorème principal

La proposition suivante constitue la clef de voûte de notre approche de la structure des foncteurs $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$. Les théorèmes 1 et 2, dont les énoncés seront précisés dans les théorèmes 5.33 et 5.34, s'en déduisent par des arguments formels, moyennant le théorème 5.16 qui traite le cas $n = 0$.

Proposition 5.32. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X un sous-foncteur de L_n^2 (resp. D_n^2). On suppose que le morphisme $(X : \Lambda^1) \rightarrow (L_n^2 : \Lambda^1) \xrightarrow{u_n^L} L_{n-1}^2$ (resp. $(X : \Lambda^1) \rightarrow (D_n^2 : \Lambda^1) \xrightarrow{u_n^D} D_{n-1}^2$) est surjectif. On a alors $X = L_n^2$ (resp. $X = D_n^2$).*

Démonstration. On traite d'abord le cas de L_n^2 . Pour tout entier naturel impair i , la partition $(i + n + 1, i + n, n)$ est alternée, donc Weyl-séparante par la proposition 3.17. Cela permet d'appliquer la proposition 4.16 au sous-objet L_n^2 de $L(2) \otimes \Lambda^n$, où l'on prend pour β le morphisme f_{i+n} , α étant ensuite défini par la composition de la condition 1 de l'énoncé de ladite proposition. La proposition 5.28 montre que les deuxième et troisième conditions de la proposition 4.16 sont vérifiées 5.28. La dernière condition en est également satisfaite puisque toute partition de longueur au plus 2 de $2(i + n) + 1$ est supérieure à $(i + n + 1, i + n)$, et que $\ker f_{i+n}$ ne peut avoir de facteur de composition $S_{(i+n+1, i+n)}$, puisque sa source en possède un seul et que son image en a un par la proposition 5.14.

Par conséquent, la partition $(i+n+1, i+n, n)$ est Λ^1 -détectable dans L_n^2 relativement au morphisme u_n^L , lorsque l'entier naturel i est impair. Ainsi, on a $(i+n+1, i+n, n) \vdash X$ pour i impair, d'où $X = L_n^2$ par le corollaire 5.25.

Le cas de D_n^2 se traite pareillement, en considérant la partition alternée $(i+n+3, i+n, n)$ et le morphisme g_{i+n} pour i impair. La seule différence réside dans la satisfaction de la dernière hypothèse de la proposition 4.16 : on doit utiliser que $\bar{D}(2)$ n'a pas de facteur de composition $S_{(i+n+2, i+n+1)}$ (cf. proposition 5.14), et que toute partition de $2(i+n)+3$ de longueur au plus 2 et distincte de $(i+n+2, i+n+1)$ est supérieure à $(i+n+3, i+n)$. \square

Théorème 5.33. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n^2 et D_n^2 sont simples artiniens de type 2.*

Démonstration. Les foncteurs L_n^2 et D_n^2 ne sont pas artiniens de type 1, car l'image par Dg_n^L et Dg_n^D des filtrations respectives de $L(2)$ et $\bar{D}(2)$ du théorème 5.16, tensorisées par $\Lambda^n(\Lambda^3)$, en fournit des filtrations infinies de quotients infinis.

Montrons maintenant par récurrence sur n que pour tout sous-objet strict X de L_n^2 (resp. D_n^2) et tout foncteur fini F , $X \otimes F$ est artinien de type 1. Pour $n = 0$, cette assertion est incluse dans le théorème 5.16.

Supposons maintenant $n > 0$ et l'assertion démontrée pour L_{n-1}^2 (resp. D_{n-1}^2). Si X est un sous-objet strict de L_n^2 (resp. D_n^2), la proposition 5.32 montre que l'image A du morphisme $f : (X : \Lambda^1) \rightarrow L(2) \otimes \Lambda^{n-1}$ (resp. $(X : \Lambda^1) \rightarrow \bar{D}(2) \otimes \Lambda^{n-1}$) induit par l'injection de X dans $L(2) \otimes \Lambda^n$ (resp. $\bar{D}(2) \otimes \Lambda^n$) est un sous-objet strict de L_{n-1}^2 (resp. D_{n-1}^2).

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & L(2) \otimes \Lambda^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X : \Lambda^1) \otimes \Lambda^1 & \xrightarrow{f \otimes \Lambda^1} & L(2) \otimes \Lambda^{n-1} \otimes \Lambda^1, \end{array}$$

dans lequel la flèche verticale de gauche est l'unité de l'adjonction, montre que X s'injecte dans $A \otimes \Lambda^1$. Ce foncteur étant artinien de type 1, de même que son produit tensoriel par un foncteur fini, par hypothèse de récurrence, cela termine la démonstration. \square

Théorème 5.34. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$ est artinien de type 2.*

Démonstration. On commence par remarquer que si $\Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^n$ est artinien de type 2, il en est de même pour $\bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$, donc de $I^{\otimes 2} \otimes \Lambda^n$. Il suffit pour cela de considérer la filtration de $\bar{I}^{\otimes 2}$ de sous-quotients $\Lambda^2(\bar{I})$, \bar{I} et $\Lambda^2(\bar{I})$, sachant que $\bar{I} \otimes \Lambda^n$ est artinien de type 1 (cf. [Pir97]).

On procède ensuite par récurrence sur n , le cas $n = 0$ étant rappelé dans la proposition 5.16. Supposons donc $n > 0$ et $\bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1}$ artinien de type 2. La suite exacte duale de (12) montre que $(\Lambda^2(\bar{I}) \otimes \Lambda^n) / (L_n^2 \oplus \bar{D}_n^2)$ s'injecte dans $\bar{I}^{\otimes 2} \otimes \Lambda^{n-1}$, ce quotient est donc artinien de type 2. Le théorème précédent implique donc le résultat. \square

Remarque 5.35. On peut retrouver les résultats de Piriou ([Pir97]) relatifs aux foncteurs $\bar{I} \otimes \Lambda^n$ par la même méthode. L'article [Pir97] repose également sur l'étude de facteurs de composition idoines, mais procède de manière beaucoup plus explicite, à l'aide de calculs de groupes d'extensions. Powell, qui a généralisé dans [Pow00b] les résultats de Piriou au cas du produit tensoriel entre \bar{I} et un foncteur fini, mène des raisonnements sur des facteurs de composition à l'aide de quotients du foncteur différence, dont le maniement est cependant différent de celui de $(- : \Lambda^1)$, de sorte que sa stratégie globale, tout en présentant des similitudes avec celle du présent article, en diverge conceptuellement.

Remerciements L'auteur tient à témoigner sa gratitude envers Lionel Schwartz pour ses nombreuses discussions sur les modules instables et la catégorie \mathcal{F} , ainsi qu'à Geoffrey Powell, tant pour ses remarques mathématiques que pour ses commentaires qui ont grandement contribué à améliorer la présentation de cet article. Il remercie également Christine Vespa pour ses encouragements et ses conseils.

Références

- [Djaa] A. DJAMENT – « Catégories de foncteurs en grassmanniennes », en préparation.
- [Djab] — , « Catégories de foncteurs en grassmanniennes et filtration de Krull », en préparation.
- [Djac] — , « Représentations génériques des groupes linéaires : catégories de foncteurs en grassmanniennes, avec applications à la conjecture artinienne », Thèse, Université Paris 13, en préparation.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO & A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [Fra96] V. FRANJOU – « Extensions entre puissances extérieures et entre puissances symétriques », *J. Algebra* **179** (1996), no. 2, p. 501–522.
- [Gab62] P. GABRIEL – « Des catégories abéliennes », *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), p. 323–448.
- [HLS93] H.-W. HENN, J. LANNES & L. SCHWARTZ – « The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects », *Amer. J. Math.* **115** (1993), no. 5, p. 1053–1106.
- [Jam78] G. D. JAMES – *The representation theory of the symmetric groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 682, Springer, Berlin, 1978.
- [Kuh94a] N. J. KUHN – « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. I », *Amer. J. Math.* **116** (1994), no. 2, p. 327–360.

- [Kuh94b] — , « Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. II », *K-Theory* **8** (1994), no. 4, p. 395–428.
- [Lan92] J. LANNES – « Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 135–244, avec un appendice de Michel Zisman.
- [Pir95] L. PIRIOU – « Extensions entre foncteurs de la catégorie des espaces vectoriels sur le corps premier à p éléments dans elle-même », Thèse, Université Paris 7, 1995.
- [Pir97] — , « Sous-objets de $\bar{I} \otimes \Lambda^n$ dans la catégorie des foncteurs entre \mathbf{F}_2 -espaces vectoriels », *J. Algebra* **194** (1997), no. 1, p. 53–78.
- [Pow98a] G. M. L. POWELL – « The Artinian conjecture for $I^{\otimes 2}$ », *J. Pure Appl. Algebra* **128** (1998), no. 3, p. 291–310, With an appendix by Lionel Schwartz.
- [Pow98b] — , « Polynomial filtrations and Lannes' T -functor », *K-Theory* **13** (1998), no. 3, p. 279–304.
- [Pow98c] — , « The structure of indecomposable injectives in generic representation theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 10, p. 4167–4193.
- [Pow00a] — , « On Artinian objects in the category of functors between \mathbf{F}_2 -vector spaces », in *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2000, p. 213–228.
- [Pow00b] — , « The structure of the tensor product of $\mathbf{F}_2[-]$ with a finite functor between \mathbf{F}_2 -vector spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 3, p. 781–805.
- [PS98] L. PIRIOU & L. SCHWARTZ – « Extensions de foncteurs simples », *K-Theory* **15** (1998), no. 3, p. 269–291.
- [Sch94] L. SCHWARTZ – *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1994.

Aurélien DJAMENT
LAGA, Institut Galilée
université Paris 13
99 avenue J.-B. Clément
93430 VILLETANEUSE (FRANCE)
djament@math.univ-paris13.fr