



**HAL**  
open science

# Le modèle standard généralisé non local : une théorie consistante du gradient

Stéphane Andrieux, Quoc Son Nguyen

► **To cite this version:**

Stéphane Andrieux, Quoc Son Nguyen. Le modèle standard généralisé non local : une théorie consistante du gradient. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-00086864

**HAL Id: hal-00086864**

**<https://hal.science/hal-00086864v1>**

Submitted on 3 Oct 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Le modèle standard généralisé non local : une théorie consistante du gradient

Stéphane Andrieux<sup>a</sup> et Quoc-Son Nguyen<sup>b</sup>

<sup>a</sup> LaMSID UMR CNRS EDF 2832  
1, Avenue du Général de Gaulle 62141 Clamart

<sup>b</sup> LMS UMR 7649  
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau

## Résumé :

*On développe une théorie du gradient basée sur une formulation du modèle standard généralisé pour inclure d'une manière simple et consistante les gradients de la température et des paramètres internes comme des variables d'état supplémentaires. Cette théorie est construite à partir d'une formulation globale des idées de base de la thermodynamique des milieux continus, elle conduit des expressions appropriées de l'entropie et de l'énergie interne en fonction de l'énergie libre. Les équations locales en sont ensuite déduites. Le formalisme du potentiel de dissipation s'applique comme dans le cadre de la théorie classique à partir de l'analyse de la dissipation..*

## Abstract :

*In this paper, the non-local generalized standard approach is proposed as a consistent gradient theory to include the gradients of the temperature and of the internal parameter in the set of state variables. This theory is derived from a global point of view developing the classical assumptions of continuum thermodynamics by variational calculus for a finite volume of solid. It leads to the appropriate expressions of the entropy and of the internal energy in terms of the free energy in the case of temperature gradient. The formalism of two potentials, the energy potential and the dissipation potential, can be applied in the same spirit as for the generalized standard materials..*

## Mots clefs :

**Thermodynamique des milieux continus ; Gradient de température ;  
Variables internes ; Matériaux standard généralisés non-locaux.**

## 1 Motivation et principaux résultats

Le développement de modélisations de comportement des matériaux dites non locales, destinées soit à rendre compte de phénomènes non locaux (matériaux à échelle très fine) soit à pallier aux difficultés rencontrées dans la simulation numérique de structures constituées de matériaux à comportement adoucissant (localisation, sensibilité au maillage , ..) connaît une croissance très importante mais s'accompagne assez rarement d'une analyse thermodynamique. De notables exceptions sont cependant à relever comme par exemple [3],[8],[9],[11],[12] ou [6]. Les conséquences de l'introduction du gradient de température dans le potentiel d'énergie libre sont aussi assez rarement étudiés, bien que des qu'abordées récemment ([2],[5])

On s'attache ici à proposer un cadre thermodynamique général incluant d'une part la présence du gradient de température dans l'énergie libre, d'autre part en étendant les notions de matériau standard généralisé aux cas où des gradients de variables internes apparaissent dans les potentiels et pseudo-potentiels thermodynamiques.

La démarche repose sur l'introduction pour tout volume matériel d'une puissance d'interaction avec son voisinage dans l'expression du premier principe, ainsi que sur le choix de définir au niveau global la notion de force thermodynamique. La démarche est différenciée selon que la variable est la température ou une variable interne, grâce au postulat des variables d'état normales de Helmholtz. Enfin, la positivité de la dissipation globale mais aussi locale est assurée dès lors qu'un pseudo-potential de dissipation local existe, fonction des vitesses d'évolution des variables internes et de leur gradient, et qu'il possède les propriétés de convexité, de positivité et de minimum en zéro usuelles.

## 2 Potentiels thermodynamiques globaux

Pour un élément matériel quelconque de volume  $V$ , on définit le potentiel d'énergie libre par la fonctionnelle  $W$  des champs de température, déplacement et variables internes suivante :

$$W(T, u, \alpha) = \int_V w(T, \nabla T, \nabla u, \alpha, \nabla \alpha) \quad (1)$$

Où  $w(T, \nabla T, \nabla u, \alpha, \nabla \alpha)$  est la densité d'énergie libre, fonction des valeurs locales des champs de température, du gradient de température, du gradient du champ de déplacement ainsi que des variables internes et leur gradient. La dérivée de cette fonctionnelle par rapport au champ de température (dans la direction  $\delta T$ ) s'écrit alors comme la forme linéaire :

$$W_{,T}[\delta T] = \int_V w_{,T} \delta T + w_{,\nabla T} \cdot \delta \nabla T \quad (2)$$

La définition globale de l'entropie que nous adoptons consiste à lui donner le sens de force thermodynamique globale associée au champ de température, soit  $S = W_{,T}$  ce qui se traduit par le remplacement de la notion d'entropie scalaire par celle d'un couple:

$$S = (\eta, \eta') \quad \text{avec} \quad \eta = -w_{,T} \quad , \quad \eta' = -w_{,\nabla T} \quad (3)$$

Il est clair que, lorsque la densité d'énergie libre ne dépend pas du gradient thermique, la notion usuelle d'entropie comme force thermodynamique associée à la température est recouvrée. L'énergie interne est définie à partir de l'énergie libre globale par la transformée de Legendre de vis-à-vis de la variable (champ de) température, et cela malgré la non symétrie du couple  $(S, T)$  :

$$E(S, u, \alpha) = \underset{\tau}{\text{Max}} \quad S[\tau] + W(\tau, u, \alpha) \quad (4)$$

d'où :  $E = S[T] + W$ .  $E(S)$  est donc une fonctionnelle convexe par rapport à  $S$ , alors que la convexité de  $W$  n'est assurée que si la densité d'énergie libre est convexe vis-à-vis du couple  $(T, \nabla T)$ . De l'expression de l'énergie interne, on tire alors l'existence d'une énergie interne locale  $e$  :

$$e(T, \nabla T, u, \alpha, \nabla \alpha) = w - w_{,T} T - w_{,\nabla T} \cdot \nabla T \quad (5)$$

Localement la densité d'énergie interne est ainsi la transformée de Legendre de l'énergie libre par rapport aux deux variables indépendantes (localement)  $T$  et  $\nabla T$ . D'où la relation :

$$T = e_{,\eta} \quad , \quad \nabla T = e_{,\eta'} \quad (6)$$

### 3 Bilans thermodynamiques et expression de la dissipation

Dans l'écriture du premier principe de la thermodynamique, nécessairement postulé sous forme globale, on introduit un terme supplémentaire aux termes de puissance mécanique et de puissance calorifique, et rendant compte des échanges d'énergie du volume étudié avec son environnement immédiat :

$$\dot{E} = P_i + P_{cal} + P_c \quad (7)$$

Ce terme est pris sous une forme de flux, suivant ne cela des idées suggérée par Frémond [3], Cardonna et al [2], ou Maugin et al. [9], ou Ireman et al [5].

$$P_c = \int_{\partial V} (b.\dot{\alpha} + c\dot{T}).n \quad (8)$$

D'autres auteurs suggèrent plutôt de prendre cet apport d'énergie sous forme de source mais celle-ci est souvent spécifiée sous forme de divergence uniquement ce qui ramène à une expression en flux. Une condition importante ajoutée à ce choix est la condition d'isolement d'un solide, c'est à dire la condition suivante où  $\Omega$  désigne le volume occupé par tout le solide (ou toute la partie correspondant à un comportement incluant des gradients de température et de variables internes) :

$$0 = \int_{\partial\Omega \cap \partial V} (b.\dot{\alpha} + c\dot{T}).n \quad (9)$$

Le second principe est lui exprimé sur la production interne d'entropie :

$$\begin{cases} P_{entr\_i} = \int_V P_{entr\_i} = P_{entr} - P_{entr\_e} \geq 0 \\ P_{entr} = \int_V \frac{1}{T} (T.\dot{\eta} + \nabla T.\dot{\eta}'), \quad P_{entr\_e} = \int_{\partial V} \frac{q}{T}.n \end{cases} \quad (8)$$

La production d'entropie  $P_{entr}$  est calculée à partir de la variation d'énergie interne  $e$ , les variables non thermiques étant fixées. Lorsque le gradient thermique n'apparaît pas dans la densité  $e$ , on retrouve la description classique puisque qu'alors  $\eta = s$ ,  $\eta' = 0$ .

Les deux principes étant valables pour tout volume matériel  $V$ , on déduit les relations locales :

$$\begin{cases} \dot{e} + \text{div} q = B:\nabla \dot{u} + \text{div}(b.\dot{\alpha} + c\dot{T}) \\ e = \eta T + \eta' \cdot \nabla T + w, \quad \eta = -w_{,T}, \eta' = -w_{,\nabla T} \\ p_{entr\_i} = \dot{\eta} + \frac{1}{T} \dot{\eta}' \cdot \nabla T + \text{div}\left(\frac{q}{T}\right) \end{cases} \quad (9)$$

On introduit enfin la dissipation intrinsèque globale définie sous l'hypothèse que le système de variables d'état retenu pour décrire le solide est un système de variables normales au sens de Helmholtz, c'est-à-dire que tout volume matériel n'échange que de la chaleur avec son environnement lorsque seul le champ de température varie, la dissipation se réduisant alors à la dissipation thermique lorsque la température n'est pas uniforme.

$$D_{int} = \int_V d_{int} = \dot{S}[T] - P_{cal} \quad (10)$$

On a alors :

$$\begin{cases} p_{entr\_i} = \frac{d_{int} + d_{ther}}{T} \geq 0 \\ d_{ther} = -\frac{q \cdot \nabla T}{T}, \quad d_{int} = T\dot{\eta} + \nabla T.\dot{\eta}' + \text{div}(q) \end{cases} \quad (11)$$

où  $d_{ther}$  est la dissipation thermique locale.

#### 4 Nullité de l'apport d'énergie non locale d'origine thermique et Equation de la chaleur

Le postulat de variables normales permet de montrer que le terme d'énergie supplémentaire lié à  $\dot{T}$ , introduit *a priori* pour tenir compte des échanges d'énergie entre voisinages dans un milieu dont la densité d'énergie libre fait intervenir des gradients, est identiquement nul. En effet, puisque le postulat s'applique pour toute évolution de température et tout volume matériel  $V$ , les équations (9) et (10) permettent de montrer qu'en cas d'évolution du champ de température seulement on a successivement :

$$d_{\text{int}} = \dot{\eta}T + \dot{\eta}'\nabla T + \text{div}q = \text{div}(c\dot{T}) \quad (12)$$

$$\int_{\partial V} c\dot{T}.n = 0, \quad \forall V, \forall \dot{T} \quad (13)$$

Par conséquent  $c$  doit s'annuler identiquement. Conservant la loi de Fourier, qui permet d'assurer la positivité de la dissipation thermique, l'équation de la chaleur prend l'expression suivante (en supposant une conductivité isotope de valeur  $k$ ) :

$$\dot{\eta}T + \dot{\eta}'\nabla T - k\Delta T = (B - w_{,\nabla u}) : \nabla \dot{u} - w_{,\alpha}\dot{\alpha} - w_{,\nabla\alpha}\nabla\dot{\alpha} + \text{div}b.\dot{\alpha} \quad (14)$$

On peut remarquer que dans le cas d'un terme supplémentaire dans l'énergie libre de la forme la plus simple qui préserve l'isotropie soit :

$$w(T, \nabla T, u, \alpha, \nabla\alpha) = \bar{w}(T, u, \alpha, \nabla\alpha) - h|\nabla T| \quad (15)$$

l'équation de la chaleur est inchangée par rapport la situation usuelle.

#### 5 Forme globale pour les matériaux standards généralisés avec gradients de variables interne

Si l'on suppose connu un pseudo-potential de dissipation  $D(\dot{\alpha}, \nabla\dot{\alpha})$  convexe et minimum en zéro, on sait ([1],[6]) que bien que les variables  $\dot{\alpha}$  et  $\nabla\dot{\alpha}$  soient indépendantes en un point matériel donné, l'écriture d'une loi d'évolution de type standard généralisée :

$$a = -w_{,\alpha}, \quad A = -w_{,\nabla\alpha}, \quad (a, A) \in \partial D(\dot{\alpha}, \nabla\dot{\alpha}) \quad (16)$$

conduit à l'absence de solution en général au problème dévolution pour le champ de variable internes  $\alpha$ . C'est la contraintes mathématique apportée par la condition que l'un des champs est le gradient de l'autre, qui est à l'origine de cet absence de solution. Reprenant la démarche suivie dans la définition du matériau standard généralisé [4], on écrit la dissipation intrinsèque globale sous la décomposition suivante, qui fait apparaître comme lors de la définition de l'entropie à partir de l'énergie libre, la forme linéaire  $A$ , force thermodynamique associée au champ de variable interne  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} D_{\text{int}} &= \int_V (B - w_{,\nabla u}) : \nabla \dot{u} + (-w_{,\alpha}\dot{\alpha} - w_{,\nabla\alpha}\nabla\dot{\alpha}) + \text{div}(b.\dot{\alpha}) \\ &= \int_V (B - w_{,\nabla u}) : \nabla \dot{u} + A[\dot{\alpha}] \end{aligned} \quad (17)$$

La loi complémentaire est alors écrite sous la forme :

$$A = D^V(\dot{\alpha})_{,\dot{\alpha}}, \quad D^V(\dot{\alpha}) = \int_V D(\dot{\alpha}, \nabla\dot{\alpha}) \quad (18)$$

cette définition conduit à la « loi complémentaire » locale qui apparaît comme un système d'équations aux dérivées partielles pour le champ  $\dot{\alpha}$  :

$$\begin{cases} \text{div}(w_{,\nabla\alpha}) - w_{,\alpha} = \text{div}(D_{,\nabla\dot{\alpha}}) - D_{,\dot{\alpha}} & \text{dans } V \\ (b - w_{,\nabla\alpha}).n = D_{,\nabla\dot{\alpha}}.n & \text{sur } \partial V \end{cases} \quad (19)$$

Posé sur l'ensemble du domaine occupé par le solide et grâce à la condition d'isolement (8), ce système s'écrit sous la forme suivante, rencontrée fréquemment dans la littérature bien qu'obtenue de façon différente en général (voir [6]) :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(w_{,\nabla\alpha}) - w_{,\alpha} = \operatorname{div}(D_{,\nabla\dot{\alpha}}) - D_{,\dot{\alpha}} & \text{dans } \Omega \\ -w_{,\nabla\alpha} \cdot n = D_{,\nabla\dot{\alpha}} \cdot n & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (20)$$

## 6 Positivité des dissipations

Il est immédiat de constater que la formulation précédente permet d'assurer que la dissipation intrinsèque globale pour un volume matériel quelconque est positive dès que la densité de pseudo-potentiel  $D$  est positive, convexe et minimum en zéro. En effet on a (en supposant les contraintes irréversibles nulles) :

$$D_{\text{int}} = A[\dot{\alpha}] = A[\dot{\alpha} - 0] \geq D(\dot{\alpha}) - D(0) \geq 0 \quad (21)$$

La « loi complémentaire » (20) peut être également obtenue par la propriété suivante,

$$\dot{\alpha} = \operatorname{ArgMin}_{\beta} \int_V D(\beta, \nabla\beta) + w_{,\alpha}\beta + w_{,\nabla\alpha} \cdot \nabla\beta \quad (22)$$

c'est cette propriété qui a été choisie dans ([6],[7]) pour généraliser la notion de sous-différentiel vers celle de sous-différentiel global (c'est à dire pour des fonctionnelles), à partir de la propriété fondamentale de la transformation de Legendre :

$$x \in \partial\varphi(y) \Leftrightarrow x = \operatorname{ArgMin}_z \varphi^*(z) - y \cdot z \quad (23)$$

Enfin, la positivité locale de la dissipation intrinsèque c'est-à-dire de  $d_{\text{int}}$  peut également s'observer directement à partir de l'expression (11) et de la condition (19) :

$$\begin{aligned} d_{\text{int}} &= T\dot{\eta} + \nabla T \cdot \dot{\eta}' + \operatorname{div}(q) \\ &= -w_{,\alpha}\dot{\alpha} - w_{,\nabla\alpha} \cdot \nabla\dot{\alpha} + \operatorname{div}(b \cdot \dot{\alpha}) \\ &= -D_{,\dot{\alpha}}\dot{\alpha} - D_{,\nabla\dot{\alpha}} \cdot \nabla\dot{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Le terme  $\operatorname{div}(b \cdot \dot{\alpha})$  qui permet d'assurer la positivité locale de la dissipation est analogue aux sources d'entropie supplémentaires ou au « résidus non locaux » introduits par certains auteurs ([3], [8], [5], [11]).

## Références

- [1] S. Andrieux, M. Joussemet, E. Lorentz , A class of constitutive relations with internal variable derivatives : derivation from homogenization, C. R. Acad. Sci., série II b, 323, pp. 629-636 1996.
- [2] J.M. Cardona, S. Forest, R. Sievert, Towards a theory of second grad thermoelasticity, Extracta Math., 14, pp 127-140, 1999
- [3] M. Frémond, Contact unilatéral avec adhérence, une théorie du premier gradient, in G. Del Piero, F. Maceri (Eds), Unilateral Problems in Structural Analysis, CISM Course, Vol. 304, Springer Verlag, pp 117-137, 1985.
- [4] B. Halphen, Q.S. Nguyen, Sur les matériaux standard généralisés. J. de Mécanique, 14, pp 39-63, 1975.
- [5] P. Ireman, , Q.S. Nguyen, Using the gradients of temperature and internal parameters in continuum thermodynamics, C.R. Mécanique, , 332, pp 249-255 , 2004
- [6] E. Lorentz, S. Andrieux, A variational formulation for nonlocal damage models. Int. J. Plast. 15, 119-138, 1999
- [7] E. Lorentz, S. Andrieux, Analysis of nonlocal models through energetic formulations. Int. J. Solids Struct., 40, pp 2905-2936, 2003
- [8] G.A. Maugin, Internal Variables and dissipative structures, J. Non Equilib. Thermodyn., 15, pp173-192, 1990.
- [9] G.A. Maugin, W. Muschik, Thermodynamics with internal variables, part 1: general concepts, J. Non Equilib. Thermodyn., 15, pp173-192, 1990.
- [10] Q.S. Nguyen, S. Andrieux, The non-local generalized standard approach : a consistent gradient theory, C. R. Mécanique, 333, pp 139-145, 2005.
- [11] C. Polizzotto, Unified thermodynamic framework of nonlocal/gradient continuum theories, Eur. J. Mech A Solids, 22, pp 651-668, 2003.
- [12] T. Svedberg, K. Runesson,. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. Int. J. Plasticity 13, 669-696, 1997