



**HAL**  
open science

## Identification d'un bief de rivière par une approche bayésienne

Magalie Thomassin, Thierry Bastogne, Alain Richard

► **To cite this version:**

Magalie Thomassin, Thierry Bastogne, Alain Richard. Identification d'un bief de rivière par une approche bayésienne. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, May 2006, Bordeaux, France. pp.CDRom. hal-00086482

**HAL Id: hal-00086482**

**<https://hal.science/hal-00086482>**

Submitted on 18 Jul 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Identification d'un bief de rivière par une approche bayésienne

Magalie THOMASSIN<sup>1</sup>, Thierry BASTOGNE<sup>2</sup>, Alain RICHARD<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Automatique de Grenoble, UMR 5528 CNRS-UJF-INPG  
INPG / ENSIEG, BP46, rue de la Houille Blanche, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France  
magalie.thomassin@lag.ensieg.inpg.fr, <http://www.lag.ensieg.inpg.fr>

<sup>2</sup>Centre de Recherche en Automatique de Nancy, UMR 7039 CNRS-UHP-INPL  
Université Henri Poincaré, Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France  
{alain.richard,thierry.bastogne}@cran.uhp-nancy.fr, <http://www.cran.uhp-nancy.fr>

*Résumé*— Cet article porte sur l'estimation de retard dans le cadre de l'identification de bief de rivière aménagé pour la production d'énergie hydroélectrique. Les difficultés résident dans l'obligation d'utiliser des données recueillies lors d'une régulation comportant une action anticipatrice effectuée par un opérateur. Nous proposons dans cet article une méthode d'identification bayésienne, non-supervisée, et simple à mettre en œuvre, réalisant conjointement les estimations du retard et d'une réponse impulsionnelle. L'estimation des hyperparamètres est rendue difficile en raison de la dégénérescence d'une densité de probabilité. Cette difficulté a été résolue en intégrant une nouvelle contrainte sur l'hyperparamètre responsable de la dégénérescence. Les estimées journalières du retard et de la réponse impulsionnelle sont fournies pour des données expérimentales relevées sur une année complète.

*Mots-clés*— Estimation de retard, identification bayésienne, dégénérescence, réponse impulsionnelle, bief de rivière.

## I. INTRODUCTION

Cette étude concerne les installations de production d'énergie hydroélectrique disposées en série le long d'une rivière. Par « bief aménagé », nous désignons une installation composée d'un bief (c'est-à-dire une section du cours d'eau) délimité par deux aménagements (voir figure 1), chacun constitué d'un barrage (équipé de vannes) et d'une usine de production hydroélectrique (équipée de turbines). Étant donné que la longueur du bief est de plusieurs kilomètres, des variations de débits en amont produiront des effets en aval qu'avec retard (transport de l'eau). De nombreux travaux de modélisation et de commande de biefs ou de canaux ont été publiés [1], [2] mais peu font état de résultats expérimentaux pour l'estimation de retard.

Le fait que la mise en œuvre de plans d'expériences est difficilement réalisable pour des raisons économiques et de sécurité, mais également pour une question de disponibilité des installations, pose une difficulté particulière. En effet, la structure de modèle est bouclée par une rétroaction et une action anticipatrice effectuées par un opérateur et les données sont peu informatives. L'objectif de cet article est de montrer qu'une méthode d'estimation appropriée permet d'estimer le retard en exploitant des jeux de données mesurés dans des conditions expérimentales imposées par les modalités de production. Cette méthode a déjà fait l'objet de publication [3]. La contribution de cette article concerne

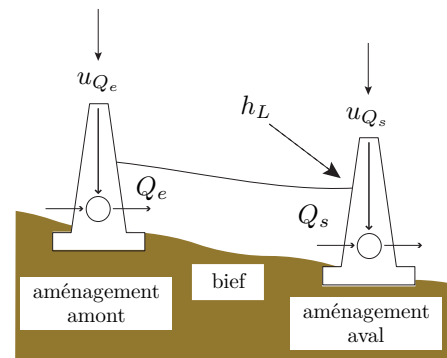


Fig. 1. Bief de rivière aménagé.

l'estimation des hyperparamètres; ces derniers étaient précédemment fixés de manière heuristique. Un problème de dégénérescence d'une densité de probabilité est mis en évidence et une solution est proposée en intégrant une nouvelle contrainte sur l'hyperparamètre responsable de la dégénérescence. La méthode, alors non-supervisée, est appliquée à l'ensemble des jeux de données d'un bief disponibles sur une année.

## II. BIEF DE RIVIÈRE AMÉNAGÉ

Cette section résume les étapes de modélisation de l'installation déjà présentées dans [3], [4], [5], puis positionne le problème d'identification.

Le bief est considéré comme un système possédant deux entrées, correspondant aux débits entrant (en amont) et sortant (en aval), notées respectivement  $Q_e$  et  $Q_s$ , et une sortie, correspondant au niveau d'eau en aval du bief, notée  $h_L$ . Nous l'avons modélisé par une structure simplifiée composée d'un retard pur (terme de transport) et un terme intégrateur (matérialisant le stockage de l'eau). Le problème est que nous ne disposons pas de mesures des débits. Nous disposons uniquement des signaux de commande de débits  $u_{Q_e}[k]$  et  $u_{Q_s}[k]$  envoyés à l'entrée des aménagements. Le temps de réponse des boucles de régulation de débit est supposé négligeable. Par conséquent, ils peuvent être modélisés par un gain (noté  $K_e$  pour l'aménagement en amont et  $K_s$  pour celui en aval). Le bief et les aménagements sont

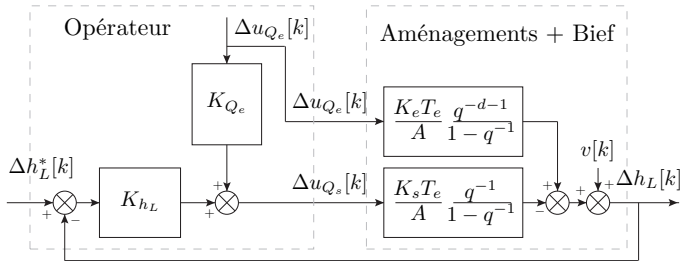


Fig. 2. Structure de modèle simplifiée d'un bief de rivière aménagagé dans les conditions expérimentales imposées (sous l'hypothèse :  $\tau = d \cdot T_e$ ).

ainsi modélisés par l'équation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \frac{T_e q^{-d-1}}{A(1-q^{-1})} (K_e \Delta u_{Q_e}[k] - K_s \Delta u_{Q_s}[k]) + v[k], \quad (1)$$

où  $\Delta h_L[k] = h_L[k] - h_L(0)$ ,  $\Delta Q_e[k] = Q_e[k] - Q_e(0)$ ,  $\Delta Q_s[k] = Q_s[k] - Q_s(0)$ ,  $A$  représente la surface du bief et  $T_e \approx 133$  s est la période d'échantillonnage. Le signal  $v[k]$  représente les erreurs de mesure et de modélisation.

La régulation du bief se fait par *l'amont local*. Cela signifie que l'opérateur ajuste la commande de débit amont afin de réguler le niveau aval et de rejeter les perturbations dues aux variations du débit entrant. Cette régulation avec action anticipatrice peut alors être *approximativement* modélisée par deux correcteurs proportionnels :

$$\Delta u_{Q_s}[k] = K_{Q_e}(q^{-1})\Delta u_{Q_e}[k] - K_{h_L}(q^{-1})\Delta h_L[k]. \quad (2)$$

Finalement, un bief de rivière aménagagé, piloté par un opérateur humain, est modélisé par le schéma-bloc de la figure 2. La variation de consigne  $\Delta h_L^*[k]$  est supposée nulle (fonctionnement en régulation). La structure de modèle du bief de rivière aménagagé est donc régie par la relation suivante :

$$\Delta h_L[k] = \underbrace{\frac{\frac{K_e T_e}{A} q^{-d} - K_{Q_e} \frac{K_s T_e}{A}}{-(K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1)q^{-1} + 1}}_{H(q^{-1})} q^{-1} \Delta u_{Q_e}[k] + \underbrace{\frac{1 - q^{-1}}{-(K_{h_L} \frac{K_s T_e}{A} + 1)q^{-1} + 1}}_{w[k]} v[k]. \quad (3)$$

L'estimation du retard se présente alors comme un problème d'identification en boucle fermée : les corrélations apportées par les actions de l'opérateur expliquent l'échec des procédures d'estimation directe du retard par une approche de type boucle ouverte. La fonction de transfert en boucle fermée se décompose selon deux systèmes du premier ordre. L'un, de gain négatif, est retardé d'un échantillon, l'autre, de gain positif, est retardé de  $d+1$  échantillons. La figure 3 représente la réponse impulsionnelle théorique entre  $\Delta h_L$  et  $\Delta u_{Q_e}$  du modèle (avec  $d = 7$ ,  $K_e T_e / A = 10^{-4}$  s/m<sup>2</sup>,  $K_s T_e / A = 1,2 \cdot 10^{-4}$  s/m<sup>2</sup>,  $K_{Q_e} = 1$  et  $K_{h_L} = -1000$ ). Cette réponse impulsionnelle  $h[k]$  possède deux « discontinuités » : une première entre les points  $h[0]$  et  $h[1]$  et une seconde entre  $h[d]$  et  $h[d+1]$ . En dehors de ces deux discontinuités, la réponse impulsionnelle varie de façon douce au cours du temps. Il est donc possible d'estimer le retard

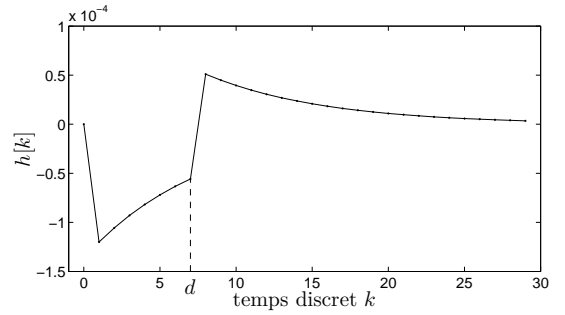


Fig. 3. Exemple d'une réponse impulsionnelle théorique  $h[k]$  entre le niveau  $\Delta h_L$  (en m) et le débit entrant  $\Delta u_{Q_e}$  (en m<sup>3</sup>/s).

$d$  en détectant l'instant de la seconde discontinuité. Pour effectuer cette détection nous proposons d'estimer préalablement le système sous forme d'une réponse impulsionnelle tronquée, c'est-à-dire une réponse impulsionnelle finie (RIF). Cette représentation a l'avantage, par rapport à l'identification d'une forme rationnelle, de ne pas reposer sur le modèle théorique. Le prix à payer pour ce degré de liberté supplémentaire est alors une dégradation du conditionnement du problème d'estimation. Une solution régularisée par minimisation de critère composite est alors proposée (l'identification d'un transfert rationnel correspondant elle à une régularisation par contrôle de dimension).

### III. ESTIMATION CONJOINTE DE LA RIF ET DU RETARD

Un modèle mono-entrée/mono-sortie linéaire, causal, invariant à temps discret, est décrit par un système d'équations linéaires basé sur les données disponibles ( $N$  est le nombre d'échantillons) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}\mathbf{h} + \mathbf{w}, \quad (4)$$

avec  $\mathbf{y} = [y[0], \dots, y[N-1]]^T \in \mathbb{R}^N$  est le vecteur de sortie,  $\mathbf{h} = [h[0], \dots, h[M-1]]^T \in \mathbb{R}^M$  est la RIF à estimer,  $M$  étant son ordre de troncature ( $M < N$ ),  $\mathbf{w} = [w[0], \dots, w[N-1]]^T \in \mathbb{R}^N$  représente les bruits, perturbations et erreurs de modélisation, supposés additifs et :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u[0] & 0 & \dots & 0 \\ u[1] & u[0] & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u[M-2] & u[M-3] & & 0 \\ u[M-1] & u[M-2] & & u[0] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u[N-1] & u[N-2] & \dots & u[N-M] \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times M},$$

est une matrice de Toeplitz composée des échantillons de l'entrée  $u$ .

#### A. Estimateur classique de la RIF : le maximum de vraisemblance

Sous l'hypothèse<sup>1</sup> que  $\mathbf{w}$  est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance  $\sigma_w^2 \mathbf{I}$ , notée  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_w^2 \mathbf{I})$ , on obtient une expression explicite de l'estimateur au sens du

<sup>1</sup>Cette hypothèse est un choix peu compromettant que l'on peut faire sur la densité de probabilité du bruit lors d'incertitude [6].



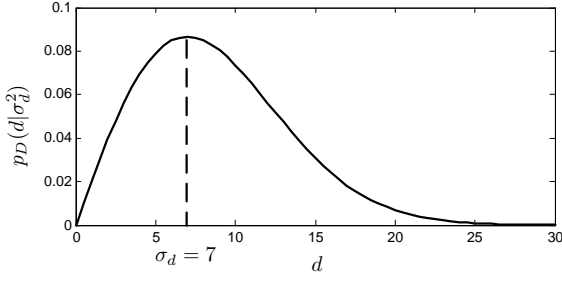


Fig. 4. Loi de Rayleigh.

#### ALGORITHME I

ESTIMATION DE  $\mathbf{h}$  ET  $d$  POUR LES HYPERPARAMÈTRES FIXÉS.

- ◇ Pour  $d = d_{\min}, d_{\min} + 1, \dots, d_{\max}$ ,
  - a) formation de la matrice  $\mathbf{D}_d$ ,
  - b) estimation de  $\mathbf{h}$  à  $d$  fixé :

$$\hat{\mathbf{h}}(d) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y},$$

- c) calcul du critère  $J^{\text{MAPC}}(\hat{\mathbf{h}}(d), d)$

$$\diamond \hat{d}^{\text{MAPC}} = \arg \min_{d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})} J^{\text{MAPC}}(\hat{\mathbf{h}}(d), d).$$

$$\diamond \hat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}} = \hat{\mathbf{h}}(\hat{d}^{\text{MAPC}}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}_{\hat{d}^{\text{MAPC}}}^T \mathbf{D}_{\hat{d}^{\text{MAPC}}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}.$$

Le critère à minimiser  $J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d)$  est obtenu en retenant l'anti-log des termes fonctions de  $\mathbf{h}$  et de  $d$  des équations (10)-(12) :

$$J^{\text{MAPC}} = \underbrace{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2}_{\text{Fidélité aux données}} + \underbrace{\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2}_{\text{Fidélité à l'a priori sur } \mathbf{h}} + \underbrace{\sigma_w^2 \left( \frac{d^2}{\sigma_d^2} - 2 \ln(d) \right)}_{\text{Fidélité à l'a priori sur } d},$$

pour  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M$  et  $d \in \mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max}) = \{d \in \mathbb{N}^* / d_{\min} \leq d \leq d_{\max}\}$ ,  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$  étant *a priori* connus. L'hyperparamètre  $\sigma_{h_D}^2$  permet d'ajuster la contrainte *a priori* de douceur sur  $\mathbf{h}$ . Enfin, la variance du bruit  $\sigma_w^2$  permet d'ajuster le compromis entre la fidélité aux données et celles aux *a priori* sur  $\mathbf{h}$  et  $d$ . Notons que si l'on ne dispose pas d'*a priori* sur le retard, il est possible de considérer la loi *a priori* sur le retard comme une loi uniforme, ce qui conduit au critère suivant :

$$J_{\text{unif}}^{\text{MAPC}} = \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 + \frac{\sigma_w^2}{\sigma_{h_D}^2} \|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2. \quad (13)$$

Le critère  $J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d)$  est quadratique en  $\mathbf{h}$  et, à  $d$  fixé, possède une solution explicite :

$$\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}}(d) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \alpha \mathbf{D}_d^T \mathbf{D}_d)^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}, \quad (14)$$

où  $\alpha = \sigma_w^2 / \sigma_{h_D}^2$  correspond au coefficient de régularisation, mais il n'est pas convexe vis-à-vis de  $d$ . Toutefois, l'ensemble des valeurs du retard admissibles  $\mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$  est fini. Une méthode simple consiste à effectuer une recherche exhaustive en calculant le critère  $J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d)$  pour toutes les valeurs de  $\mathbb{D}(d_{\min}, d_{\max})$ . Finalement, l'estimation de  $\mathbf{h}$  et  $d$  peut donc se résumer par l'algorithme I. Toutefois, la résolution de ce problème nécessite l'évaluation des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$ .

#### IV. ESTIMATION DES HYPERPARAMÈTRES

Les hyperparamètres constituent un second niveau de description du problème indispensable à la résolution du

premier niveau constitué par les paramètres eux-mêmes [8]. On peut remarquer que la densité de probabilité *a posteriori* conjointe des paramètres  $\mathbf{h}$ ,  $d$  et des hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2) p(\sigma_{h_D}^2) p(\sigma_w^2)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}, \quad (15)$$

résume toute l'information des deux niveaux d'inférence. Il est donc intéressant de la maximiser conjointement par rapport aux paramètres et aux hyperparamètres. De plus, si on suppose que les hyperparamètres  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  suivent une loi *a priori* uniforme (le choix d'une autre loi *a priori* non informative est possible), alors :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \sigma_d^2) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}. \quad (16)$$

Le problème est que la limite de cette densité de probabilité (avec les choix effectués au paragraphe III-C), lorsque les échantillons de  $\mathbf{h}$  et  $\sigma_{h_D}^2$  tendent vers 0, tend vers  $+\infty$ . Par conséquent, l'estimateur du MAPC (qui maximise cette densité de probabilité) conduit théoriquement à une RIF nulle<sup>3</sup> quelles que soient les données.

La dégénérescence de la fonction de vraisemblance dans le cadre de l'estimation des paramètres d'un mélange gaussien est un problème d'optimisation connu [9]. Dans ce contexte, une solution consiste à pénaliser la fonction de vraisemblance par une densité de probabilité *a priori* de type gamma inverse sur la variance du bruit, ce qui élimine les singularités et rend ainsi le problème bien-posé [10], [11]. Fondée sur le même principe, une solution à notre problème de dégénérescence consiste à supposer que  $\sigma_{h_D}^2$  suit une densité de probabilité *a priori* de type gamma inverse :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \Theta) = \frac{p(\mathbf{y} | \mathbf{h}, d, \mathbf{U}, \sigma_w^2) p(\mathbf{h} | d, \sigma_{h_D}^2) p(d | \sigma_d^2) p(\sigma_{h_D}^2 | \alpha_h, \beta_h)}{p(\mathbf{y} | \mathbf{U}, \sigma_d^2)}, \quad (17)$$

$$\text{avec } p(\sigma_{h_D}^2 | \alpha_h, \beta_h) = \frac{\beta_h^{\alpha_h} \exp[-\frac{\beta_h}{\sigma_{h_D}^2}]}{\Gamma(\alpha_h) (\sigma_{h_D}^2)^{\alpha_h + 1}} \mathbb{I}_{[0, +\infty)}(\sigma_{h_D}^2),$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma,  $\Theta = (\sigma_d^2, \alpha_h, \beta_h)$  et  $(\alpha_h, \beta_h) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ . On a alors (pour  $\sigma_{h_D}^2 \geq 0$  et  $d \geq 0$ ) :

$$p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2 | \mathbf{y}, \mathbf{U}, \Theta) \propto \frac{d}{(\sigma_w^2)^{N/2} (\sigma_{h_D}^2)^{M/2 + \alpha_h + 1} \sigma_d^2} \times \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 - \frac{1}{2\sigma_{h_D}^2} (\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 + 2\beta_h) - \frac{d^2}{2\sigma_d^2} \right],$$

et il n'y a plus de dégénérescence.

<sup>3</sup>En pratique, l'estimée peut être non nulle lorsque que l'algorithme d'optimisation conduit à un maximum local. Dans la majorité de ces cas, on constate néanmoins que la contrainte de douceur sur la RIF est trop élevée, c'est-à-dire que  $\sigma_{h_D}^2$  est trop faible.

Il reste maintenant à déterminer  $\alpha_h$  et  $\beta_h$ . Reprenons l'expression de la densité de probabilité *a priori* de  $\mathbf{h}$ , équation (11), dont on déduit la fonction de vraisemblance de  $\sigma_{h_D}^2$  :

$$p(\hat{\mathbf{h}}|\hat{d}, \sigma_{h_D}^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_{h_D}^2)^{M/2}} \exp \left[ -\frac{\|\mathbf{D}_{\hat{d}} \hat{\mathbf{h}}\|^2}{2\sigma_{h_D}^2} \right]. \quad (18)$$

La densité de probabilité *a posteriori* est alors :

$$p(\sigma_{h_D}^2|\hat{\mathbf{h}}, \hat{d}, \alpha_h, \beta_h) \propto \frac{1}{(\sigma_{h_D}^2)^{M/2+\alpha_h+1}} \exp \left[ -\frac{\nu/2 + \beta_h}{\sigma_{h_D}^2} \right],$$

où  $\nu = \|\mathbf{D}_{\hat{d}} \hat{\mathbf{h}}\|^2$ . Il s'agit donc d'une loi gamma inverse de paramètres  $\alpha_0 = M/2 + \alpha_h$  et  $\beta_0 = \nu/2 + \beta_h$ . Par conséquent, les paramètres  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  peuvent être déterminés en fonction de l'allure de la densité de probabilité  $p(\sigma_{h_D}^2|\nu)$  désirée. Le problème est que  $\nu$  est inconnue. Une statistique proche peut être utilisée :  $\nu^{\text{MV}} = \|\mathbf{D}_{\hat{d}} \hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}\|^2$ . On montre alors que le choix <sup>4</sup>  $\alpha_0 = M$  et  $\beta_0 = \nu^{\text{MV}}$  conduit à une allure *a priori* admissible de  $p(\sigma_{h_D}^2|\nu)$  [5]. On a alors  $\alpha_h = M/2$  et  $\beta_h = \nu^{\text{MV}}/2$ .

Le critère à minimiser  $J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2)$  est alors :

$$J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}} = \frac{1}{\sigma_w^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2 + \frac{1}{\sigma_{h_D}^2} (\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 + 2\beta_h) + N \ln(\sigma_w^2) + (M + 2(\alpha_h + 1)) \ln(\sigma_{h_D}^2) + \frac{d^2}{\sigma_d^2} - 2 \ln(d). \quad (19)$$

Le problème d'optimisation peut être implémenté par un algorithme itératif maximisant successivement la densité  $p(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2|\mathbf{y}, \mathbf{U}, \Theta)$  par rapport aux paramètres  $\mathbf{h}$ ,  $d$ , puis par rapport aux hyperparamètres  $\sigma_w^2$  et  $\sigma_d^2$  :

$$\begin{aligned} (\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i)}, \widehat{\sigma_w^2}^{(i)}) &= \arg \max_{\sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2} p(\hat{\mathbf{h}}^{(i-1)}, \hat{d}^{(i-1)}, \sigma_{h_D}^2, \sigma_w^2|\mathbf{y}, \mathbf{U}, \Theta), \\ (\hat{\mathbf{h}}^{(i)}, \hat{d}^{(i)}) &= \arg \max_{\mathbf{h}, d} p(\mathbf{h}, d, \widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i)}, \widehat{\sigma_w^2}^{(i)}|\mathbf{y}, \mathbf{U}, \Theta). \end{aligned} \quad (20)$$

A  $\sigma_{h_D}^2$  et  $\sigma_w^2$  fixés, minimiser le critère (19) revient à minimiser  $J^{\text{MAPC}}(\mathbf{h}, d)$ . A  $\mathbf{h}$ ,  $d$  fixés, on montre que :

$$\widehat{\sigma_{h_D}^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_w^2) = \frac{\|\mathbf{D}_d \mathbf{h}\|^2 + 2\beta_h}{M + 2(\alpha_h + 1)}, \quad (21)$$

$$\widehat{\sigma_w^2}(\mathbf{h}, d, \sigma_{h_D}^2) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{h}\|^2}{N}. \quad (22)$$

Par conséquent, l'algorithme itératif décrit par les équations (20), conduit à l'algorithme II, étant donné la procédure d'estimation de  $\mathbf{h}$  et de  $d$  (algorithme I).

## V. APPLICATION À DES DONNÉES EXPÉRIMENTALES

La figure 5 représente les estimées de la RIF obtenues par les estimateurs du MV, du MAP et du MAPC (avec et sans prise en compte d'*a priori* sur l'hyperparamètre  $\sigma_{h_D}$  :  $\hat{h}^{\text{MAPC}}$  et  $\hat{h}^{\text{MAPCdeg}}$ , respectivement) à partir d'un jeu de données expérimentales d'une durée d'environ 24 heures. Les paramètres de l'algorithme du MAPC sont les suivants :  $d_{\text{init}} = 10$ ,  $d_{\text{min}} = 1$ ,  $d_{\text{max}} = 15$  et  $\sigma_d = 6.5$ . La solution

<sup>4</sup>Dans l'état actuel de l'avancée des travaux, ce choix est heuristique, obtenu par essais successifs.

- 
1. Initialisation :  $i = 0$ ,  $\hat{\mathbf{h}}^{(i)} = \hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}$ ,  $\hat{d}^{(i)} = d_{\text{init}}$ ,  
 $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $\alpha_h = M/2$ ,  $\beta_h = \|\mathbf{D}\hat{\mathbf{h}}^{\text{MV}}\|^2/2$ .
  2. Itération :  $i = i + 1$ .
    - ◇ Estimation de  $\sigma_{h_D}^2$  :  $\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i)} = \frac{\|\mathbf{D}_{\hat{d}^{(i-1)}} \hat{\mathbf{h}}^{(i-1)}\|^2 + 2\beta_h}{M + 2(\alpha_h + 1)}$ .
    - ◇ Estimation de  $\sigma_w^2$  :  $\widehat{\sigma_w^2}^{(i)} = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{U}\hat{\mathbf{h}}^{(i-1)}\|^2}{N}$ .
    - ◇ Pour  $d^{(i)} = d_{\text{min}}, d_{\text{min}} + 1, \dots, d_{\text{max}}$ ,
      - a) formation de la matrice  $\mathbf{D}_{d^{(i)}}$ ,
      - b) estimation de  $\mathbf{h}^{(i)}$  à  $d^{(i)}$  fixé :  
 $\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}) = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\widehat{\sigma_w^2}^{(i)}}{\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i)}} \mathbf{D}_{d^{(i)}}^T \mathbf{D}_{d^{(i)}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$ ,
      - c) calcul du critère  $J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}), d^{(i)})$
    - ◇  $\hat{d}^{(i)} = \arg \min_{d^{(i)} \in \mathbb{D}(d_{\text{min}}, d_{\text{max}})} J_{\alpha_h, \beta_h}^{\text{MAPC}}(\hat{\mathbf{h}}^{(i)}(d^{(i)}), d^{(i)})$ .
    - ◇  $\hat{\mathbf{h}}^{(i)} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U} + \frac{\widehat{\sigma_w^2}^{(i)}}{\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i)}} \mathbf{D}_{\hat{d}^{(i)}}^T \mathbf{D}_{\hat{d}^{(i)}})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$ .
  3. Continuer l'itération (étape 2.) tant que :
    - $\left| \frac{\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i)} - \widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i-1)}}{\widehat{\sigma_{h_D}^2}^{(i-1)}} \right| < \epsilon$  et  $\left| \frac{\widehat{\sigma_w^2}^{(i)} - \widehat{\sigma_w^2}^{(i-1)}}{\widehat{\sigma_w^2}^{(i-1)}} \right| < \epsilon$ .
  4.  $\hat{\mathbf{h}}^{\text{MAPC}} = \hat{\mathbf{h}}^{(i)}$  et  $\hat{d}^{\text{MAPC}} = \hat{d}^{(i)}$ .
- 

du MV est très rugueuse, ce qui rend l'étape ultérieure de détection de la discontinuité difficile. La solution du MAP est plus douce. Toutefois, la discontinuité à détecter est fortement atténuée. L'estimée  $\hat{h}^{\text{MAPCdeg}}$  illustre le problème de dégénérescence. L'estimateur a convergé vers un extremum local : la solution est non nulle, mais la contrainte de douceur est trop forte. De plus, le retard estimé est peu réaliste :  $\hat{d}^{\text{MAPCdeg}} = 1$ . Enfin, la solution du MAPC est relativement douce tout en respectant la discontinuité. Le retard estimé est  $\hat{d}^{\text{MAPCdeg}} = 7$ . Notons que le même résultat est obtenu avec  $\sigma_d = 10$ .

Nous avons à notre disposition 332 jeux de données, chacun d'une durée d'environ 24 heures. Afin d'observer l'évolution des estimées au cours du temps, les RIF sont représentées sous la forme d'une barre où chaque coefficient est représenté par un niveau de gris correspondant à sa valeur (du blanc pour la plus faible à noir pour la plus élevée). La présence d'une discontinuité est donc mise en évidence par une brusque variation de gris. La juxtaposition des barres des estimées de la RIF pour chaque jeu de données forme une « représentation temps-jours » (RTJ), représentée à la figure 6. Cette dernière nous permet déjà de visualiser les variations du retard sur l'année. Les figures 7 et 8(a) représentent respectivement la répartition journalière et l'histogramme sur l'année des estimées du retard par le MAPC. On constate que plus de 95% des estimées valent 6 ou 7. Ce qui signifierait que le retard varie peu au cours de l'année. Les références normalement utilisées par les opérateurs pour la conduite manuelle du bief sont comprises entre 6 et 12. On a donc diminué sensiblement l'intervalle d'incertitude. Bien

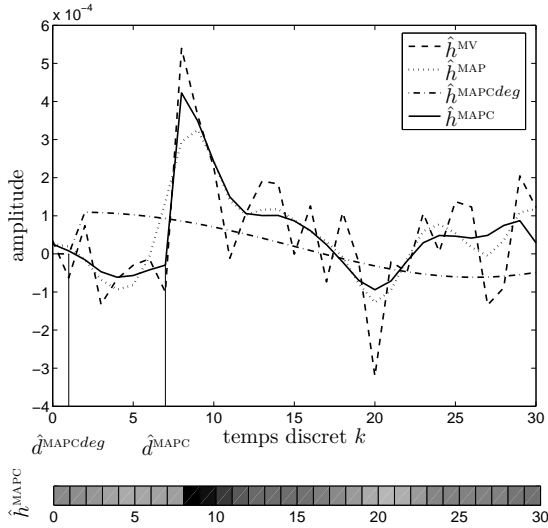


Fig. 5. Estimations de la réponse impulsionnelle et du retard.

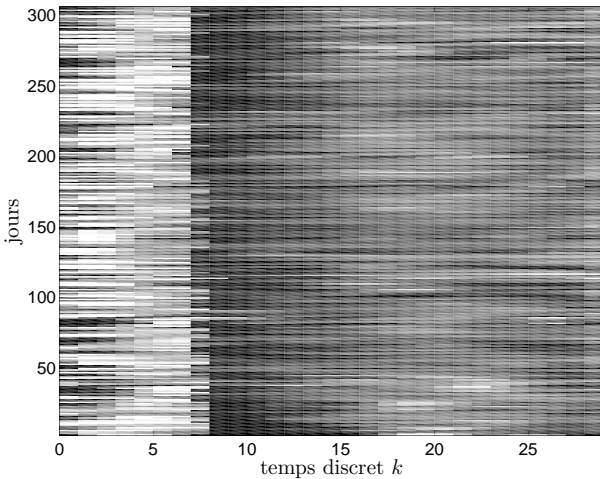


Fig. 6. RTJ des estimées de la réponse impulsionnelle (MAPC).

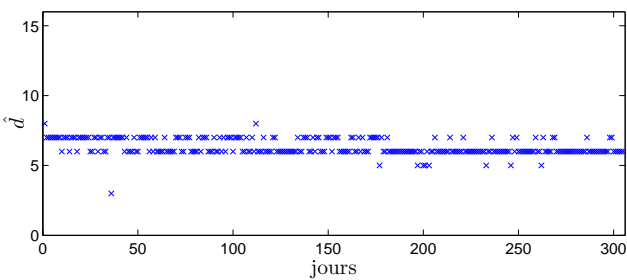


Fig. 7. Répartition journalière des estimées du retard (MAPC).

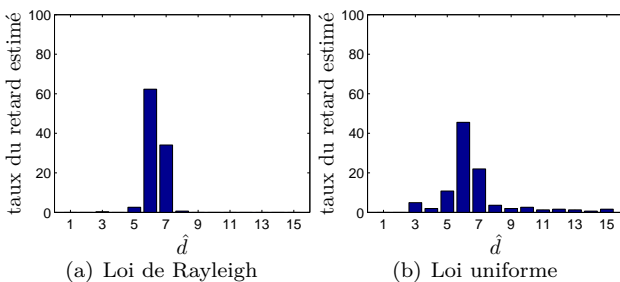


Fig. 8. Histogramme des estimées du retard (MAPC).

sûr, ces résultats reposent sur les hypothèses *a priori* choisies sur le retard. La figure 8(b) représente l'histogramme des estimées du retard obtenues avec une loi uniforme. Plus de détails peuvent être trouvés dans [5].

## VI. CONCLUSION

Cet article est dédié à l'identification d'un bief de rivière aménagé à partir de données expérimentales passives par une approche bayésienne. La principale contribution est le développement d'une méthode originale estimant conjointement le retard et une réponse impulsionnelle finie. Cette approche est basée sur le fait que le retard introduit une discontinuité dans la réponse impulsionnelle entre le niveau aval du bief et la commande du débit entrant. L'estimation du retard est réalisée grâce à l'application d'une contrainte de douceur sur la réponse impulsionnelle sauf au niveau de la discontinuité. Nous avons mis en évidence au cours du développement de la méthode un problème dû à la dégénérescence de la densité de probabilité *a posteriori* conjointe. La solution proposée consiste à pénaliser cette densité de probabilité par une densité de probabilité *a priori* de l'hyperparamètre qui agit sur la contrainte de douceur. Ainsi, la méthode proposée est simple à mettre en œuvre et ne nécessite le réglage d'aucun paramètre. Elle a été appliquée sur des jeux de données correspondant à une année de relevés expérimentaux. Le test de l'algorithme pour d'autres biefs a montré une bonne adéquation entre retards estimés et longueur des biefs considérés.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. Georges et X. Litrico. *Automatique pour la gestion des ressources en eau*. Hermès Science Publications, Paris, 2002.
- [2] X. Litrico. *Modélisation, identification et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre*. Thèse de doctorat, École Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts, Centre de Montpellier, France, 1999.
- [3] M. Thomassin, T. Bastogne, A. Richard, et A. Libaux. A bayesian approach for time-delay estimation of a managed river reach in imposed experimental conditions. *IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, Rocquencourt, France, 8-10 September 2003.
- [4] M. Thomassin, T. Bastogne, A. Richard, et A. Libaux. Estimation des temps de propagation des débits dans les vallées hydrauliques. *La Houille Blanche, Revue Internationale de l'Eau*, 2 :36-42, Avril 2004.
- [5] M. Thomassin. *Estimation de retard dans des conditions expérimentales passives. Application à l'identification d'un bief de rivière*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy 1, France, 2005.
- [6] E. T. Jaynes. *Probability Theory : the logic of science*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2003.
- [7] J. Idier, editor. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès Science Publication, Paris, Nov. 2001.
- [8] G. Demoment et J. Idier. Approche bayésienne pour la résolution des problèmes inverses en imagerie. M. Bonnet, editor, *Problèmes inverses : de l'expérimentation à la modélisation*, Collection Arago, vol. 22, pages 59-77. Observatoire français des techniques avancées, Paris, 1999.
- [9] J. Kiefer et J. Wolfowitz. Consistency of the maximum likelihood estimator in the presence of infinitely many incidental parameters. *Annals of Mathematical Statistics*, 27(4) :887-906, 1956.
- [10] A. Ridolfi et J. Idier. Penalized maximum likelihood estimation for univariate normal mixture distributions. *Actes du 17e colloque GRETSI*, pages 259-262, 1999.
- [11] H. Snoussi et A. Mohammad-Djafari. Penalized maximum likelihood for multivariate gaussian mixture. *American Institute of Physics Conference Proceedings : Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, pages 36-46, 2002.