



HAL
open science

Coins et arrondis en éléments finis - Une approche mathématique des coins et arrondis pour les solutions par éléments finis de l'équation de Laplace

Laurent Krähenbühl, Hassan Timouyas, Mohand Moussaoui, François Buret

► **To cite this version:**

Laurent Krähenbühl, Hassan Timouyas, Mohand Moussaoui, François Buret. Coins et arrondis en éléments finis - Une approche mathématique des coins et arrondis pour les solutions par éléments finis de l'équation de Laplace. RIGE, 2005, 8, pp.35-45. hal-00082800

HAL Id: hal-00082800

<https://hal.science/hal-00082800>

Submitted on 3 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Coins et arrondis en éléments finis

Une approche mathématique des coins et arrondis pour les solutions par éléments finis de l'équation de Laplace

L. Krähenbühl*—H. Timouyas**— M. Moussaoui**—F. Buret*

* Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY, UMR CNRS 5005)
Ecole Centrale de Lyon
Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully CEDEX
Laurent.Krahenbuhl@ec-lyon.fr

** Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Lyon (MAPLY, UMR CNRS 5585)
Ecole Centrale de Lyon
Avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully CEDEX
Mohand.Moussaoui@ec-lyon.fr

RÉSUMÉ. La modélisation par éléments finis d'un objet technique conduit souvent à négliger certains détails de structure. C'est en particulier le cas des arêtes et des coins. Ces points particuliers jouent cependant parfois un rôle physique important : c'est le cas par exemple en électrostatique, en raison des effets de pointe. Il est donc important, après une résolution par éléments finis, de savoir estimer le champ au voisinage de ces singularités, en prenant en compte les rayons de courbure réels. Nous nous intéressons ici aux liens qui existent entre la solution singulière théorique, la solution numérique obtenue par éléments finis avec un angle vif, et celle qui est obtenue avec un maillage décrivant un arrondi. Un estimateur non local du champ sur l'arrondi est proposé.

ABSTRACT. Some geometrical details like exact curvatures near edges and corners are often neglected in finite element meshes. Nevertheless they could greatly change the local solutions and the physical behavior (electric arc, ...). Therefore, it could be useful to be able to estimate the real field values near these singular points, using an adequate post-processing, which has to take into account the real curve radii. This paper presents the links between the theoretical singular solution, the numerical solution with a sharp angle, and the solutions with rounded angle. A non-local estimator for the field on the rounded edges and corners is proposed.

MOTS-CLÉS : éléments finis, singularité géométrique, coins, rayon de courbure, effet de pointe, électrostatique, champs électromagnétiques

KEYWORDS: finite element, geometrical singularity, edge, curvature, corona effect, electrostatics, electromagnetic fields

1. Introduction

La modélisation par éléments finis d'un objet technique conduit souvent à négliger certains détails de structure. C'est en particulier le cas des arêtes et des coins. En effet, la prise en compte précise des rayons de courbure de détails de pièces intégrées dans une grande structure conduit rapidement à des maillages énormes : on les remplace volontiers dans le modèle numérique par des arêtes vives, sans beaucoup perdre sur la précision générale des résultats

C'est par exemple l'expérience des personnes qui modélisent les dispositifs à haute tension, en résolvant l'équation de Laplace associée à des conditions aux limites de type Dirichlet homogène (potentiel électrique imposé sur les parties conductrices) : on constate généralement que les grandeurs globales (par exemple les coefficients de la matrice des capacités partielles) ne sont pas affectées par ce type de simplification de formes.

Dans le même temps, certaines grandeurs locales essentielles perdent tout rapport avec leurs valeurs réelles. C'est particulièrement vrai pour le champ électrique donné par les éléments finis autour de ces arêtes vives : le résultat brut est bien difficile à interpréter. Ces points particuliers jouent cependant un rôle important en raison des effets de pointe, et des risques associés de développement d'un arc électrique.

Dans la réalité, ce champ dépend du contexte général d'une part, du rayon de courbure réel de l'arête d'autre part, sans qu'on maîtrise bien l'effet de ces deux éléments. Il serait donc utile, après une résolution par éléments finis, de savoir estimer le champ au voisinage de ces singularités, en prenant en compte les rayons de courbure réels, ou même, pour des séries de pièces, la distribution statistique de ces courbures : la question importante est en effet souvent davantage la distribution statistique ou probable des valeurs maximales du champ sur telle ou telle sous-structure, plutôt que l'ensemble des variations de ce champ autour d'elle pour des valeurs précises des rayons de courbure.

Nous nous intéressons ici aux liens qui existent entre la solution singulière théorique, la solution numérique obtenue par éléments finis avec un angle vif et une finesse donnée du maillage, et celle qui est obtenue avec un maillage décrivant un arrondi. Notre but, non encore atteint, serait de parvenir à estimer le champ en post-traitement en fonction du rayon de courbure, à partir de la seule résolution par éléments finis en potentiel sur l'angle vif. La méthode devrait aussi nous indiquer a priori comment mailler vers la singularité pour obtenir par ce post traitement une précision donnée sur le champ, pour une gamme prédéterminée de rayons de courbure.

Ce travail qui a fait l'objet d'une thèse de doctorat (Timouyas, 2003), est l'un des fruits d'une collaboration entre deux laboratoires lyonnais, l'un de génie électrique et l'autre de mathématiques appliquées : nous ne présentons ici que les résultats pratiques, utiles à la communauté du génie électrique. Les fondements

mathématiques et démonstrations rigoureuses sont ou seront publiés par ailleurs (Moussaoui *et al.*, 2003), et sont en tout état de cause disponibles dans le texte complet du mémoire de thèse.

2. Caractérisation des singularités en 2D plan

Le problème considéré est celui du Laplacien nul associé à des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann, une partie de la frontière de Dirichlet comportant un angle d'ouverture $\omega > \pi$ (figure 1).

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= 0 && \text{dans } \Omega \\
 u &= h_i && \text{sur les frontières de Dirichlet } \Gamma_i \\
 \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{sur les frontières de Neumann}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Pour simplifier les raisonnements, nous imposons en plus que la condition de Dirichlet associée à frontière près de la singularité est nulle : on peut de toutes manière se ramener à ce cas en soustrayant une constante à l'ensemble des conditions de Dirichlet.

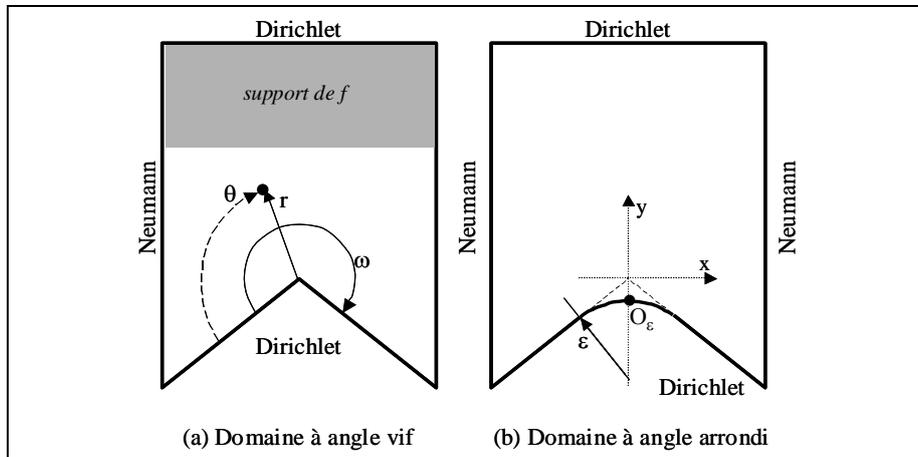


Figure 1. Présentation schématique des domaines d'étude considérés

On démontre que la solution se présente sous la forme suivante pour un domaine à angle vif :

$$u = u_r + \lambda r^\alpha \sin(\alpha\theta) \quad \text{avec } \alpha = \pi/\omega \quad [2]$$

en 2D plan, où u_r est une fonction régulière près de la singularité géométrique.

Le coefficient λ est appelé coefficient de singularité. Il permet de caractériser numériquement la solution « près » de l'angle, de manière beaucoup plus précise que la solution par éléments finis utilisée directement, en particulier quant à la valeur du champ (ω étant plus grand que π , α est plus petit que 1 ; le gradient de u tend donc vers l'infini lorsque r tend vers 0).

3. Estimations du facteur de singularité en 2D plan

Deux méthodes numériques sont proposées pour déterminer ce coefficient de singularité à partir de la solution par éléments finis d'un problème modifié équivalent (de solution notée v) au problème de départ.

3.1. Fonctions auxiliaires utiles

Nous définissons explicitement une fonction $w(x,y)$ dérivable deux fois, qui vérifie les mêmes conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann que le problème d'origine, et qui est nulle sur un large voisinage de la singularité : c'est une sorte de marche d'escalier arrondie, constante vers les conditions de Dirichlet, et à gradient normal sur les conditions de Neumann.

On utilisera aussi la fonction explicite f (Figure 2):

$$f = \Delta w \quad [3]$$

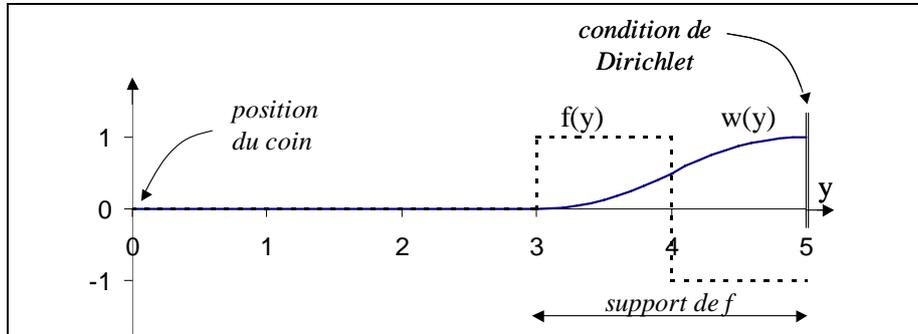


Figure 2. Exemple de fonction escalier w permettant de transformer en source les conditions de Dirichlet, et valeur correspondante de la source $f=\Delta w$. Pour la configuration modèle concernée, ces fonctions ne varient pas suivant x .

On définit ensuite un problème auxiliaire

$$v(x,y)=u-w \tag{4}$$

qui a donc des conditions entièrement nulle sur les frontières de Dirichlet et de Neumann, mais avec un terme source $f=\Delta w$. La fonction w étant explicitement connue, il est équivalent de chercher u ou de chercher v .

Nous définissons encore explicitement une fonction auxiliaire, duale de la partie singulière de la solution et nulle sur les frontières constituant la singularité :

$$v_1(r,\vartheta)=r^{-\alpha}\sin(\alpha\vartheta) \tag{5}$$

et enfin une fonction régulière v_2 , qui est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= 0 && \text{dans } \Omega \\ v_2 &= -v_1 && \text{sur les frontières de Dirichlet} \\ \frac{\partial v_2}{\partial n} &= -\frac{\partial v_1}{\partial n} && \text{sur les frontières de Neumann} \end{aligned} \tag{6}$$

Le calcul de v_2 nécessite la résolution d'un problème du même type que pour trouver u . Cependant, nous verrons que nous n'utiliserons cette solution que « loin » de la singularité. Il apparaît que v est la somme des deux fonctions v_1 et v_2 .

3.2. Méthode de Fourier

La première méthode consiste à identifier l'expression [2] avec un développement en série de Fourier. Le coefficient de singularité est alors simplement égal au premier terme de ce développement, soit :

$$\lambda = \frac{2}{\omega} r_0^{-\alpha} \int_0^{\omega} u(r_0, \vartheta) \sin(\alpha \vartheta) d\vartheta \quad [7]$$

cette intégrale correspondant à un arc de cercle de rayon r_0 centré sur la singularité. On a le choix de ce rayon, tant que l'arc de cercle reste entièrement dans le domaine de calcul : c'est dire que, si on utilise l'expression [7] à partir d'une solution numérique localement imparfaite de [1], il est néanmoins possible d'obtenir une valeur correcte de ce coefficient de singularité en choisissant de calculer [7] suffisamment loin de la singularité.

Le calcul d'une intégrale sur un arc de cercle n'est cependant pas forcément simple à réaliser en pratique sur un maillage d'éléments finis : aucune ligne de maillage n'ayant de raison a priori de se trouver sur un arc de cercle de rayon r_0 autour de la singularité, il faudra réaliser l'intégration numérique à partir de valeurs interpolées. On introduirait ainsi un certain bruit numérique difficile à apprécier.

C'est en réalité l'identification de la solution approximative trouvée numériquement avec le développement harmonique exact théorique, qui permet de déterminer le facteur de singularité, premier coefficient de ce développement. L'écriture (au sens faible) de cette identité pourrait donc aussi être faite par une intégration surfacique pondérée par le rayon, entre deux cercles ou même depuis la frontière singulière jusqu'au cercle de rayon r_0 (les valeurs peu précises du potentiel autour de la singularité intervenant peu du fait de la pondération par le rayon), mais on garde en tout état de cause la difficulté liée à la forme circulaire, incompatible avec un maillage quelconque. On ne peut d'autre part abandonner la symétrie circulaire du domaine choisi pour cette identification : la propriété d'orthogonalité des différents termes du développement harmonique, qui permet d'extraire λ sans calculer les autres coefficients, disparaîtrait si on abandonnait cette caractéristique du domaine d'intégration.

3.3. Méthode de la fonction duale

On peut montrer que :

$$\lambda = \int_{\Omega} (v_1 + v_2) f ds \quad [8]$$

où la fonction f , définie comme le laplacien de w (équation [3] et Figure 2), est non nulle uniquement « loin » du point singulier : c'est uniquement sur cette zone que porte l'intégration surfacique ; v_1 est connue explicitement (équation [5]), et v_2 est solution du problème de conditions aux limites défini plus haut (équations [6]). Remarquons aussi que [8] correspond en réalité à construire la différence de deux moyennes pondérées de v_1+v_2 : pour que la fonction w ait les bonnes propriétés, il faut en effet que son laplacien f s'inverse sur la moitié de son support (suivant le choix précis de w , la situation n'est pas obligatoirement aussi caricaturale que sur l'exemple de la Figure 2, mais le comportement général est bien de ce type).

Si on applique cette expression aux problèmes discrétisés, on retrouve l'avantage de la méthode de Fourier, mais sans l'inconvénient d'avoir à définir une intégrale curviligne. L'intégration surfacique est plus « naturelle » en éléments finis. Il faut par contre définir explicitement la fonction w sur le maillage de la région étudiée, en conformité avec les conditions aux limites. Dans les cas « réels », ces conditions seront évidemment plus compliquées que celles de notre configuration modèle de la figure 1 : il pourra en particulier y avoir plusieurs conditions de Dirichlet à des potentiels différents, correspondant en électrostatique à différents conducteurs. C'est peut-être là l'étape la plus difficile à automatiser.

Remarquons aussi que la quadrature [8] est un simple calcul qui peut être répété plusieurs fois, pour différents jeux de conditions aux limites de Dirichlet (donc différents couples w, f), sans nécessiter de nouvelles résolutions par éléments finis : la solution du problème d'éléments finis, v_2 , ne dépend en effet pas des conditions aux limites du problème d'origine défini par les équations [1]. C'est là un avantage qui pourrait être exploité, par exemple pour l'étude du champ électrostatique dans des dispositifs polyphasés.

Du point de vue du lien entre précision numérique du résultat obtenu et finesse du maillage, on montre que l'erreur absolue sur λ diminue comme le carré de la dimension du maillage, dès lors que le raffinement est bien fait.

Enfin, nous allons voir ci-dessous qu'une quadrature du même type va permettre d'améliorer le calcul du champ sur l'angle « arrondi ».

4. Estimation du champ sur un arrondi en 2D plan

Lorsque l'arrondi est pris en compte dans la discrétisation par éléments finis, la précision de la valeur du champ obtenue par dérivation de la solution en potentiel n'est pas pour autant garantie, à moins de réaliser une discrétisation très fine de l'espace autour de l'arrondi.

Nous proposons ici une technique qui permet d'estimer correctement le champ sur l'arrondi, même si la discrétisation du problème résolu en potentiel reste grossière. Nous utilisons pour cela la même fonction w que ci-dessus, mais les

conditions aux limites du problème modifié [6] sont construites à l'aide des valeurs aux limites de la fonction singulière v_1^* en lieu et place de v_1 (v_1^* est régulière sur les limites, et correspond en fait à la fonction v_1 lorsque $\omega = \pi$) :

$$v_1^* = r^{-1} \sin\left(\varrho + \frac{\omega - \pi}{2}\right) = \frac{y - y^*}{x^2 + (y - y^*)^2} \quad [9]$$

où $(x=0 ; y=y^*)$ sont les coordonnées du milieu de l'arrondi.

On démontre que le champ au milieu de l'arrondi peut alors être déterminé par l'intégrale [8] (mutatis mutandis, c'est-à-dire en remplaçant v_1 par v_1^* et v_2 par la solution v_2^* du problème [6] modifié), donc à nouveau à partir de valeurs des solutions « loin » de la singularité.

On montre de plus que l'erreur *absolue* sur l'estimation numérique de ce champ varie pour sa part, au pire, comme le carré du rapport entre la taille h des éléments et le rayon de courbure ε de l'arrondi. Comme le champ varie en $\varepsilon^{\alpha-1}$, l'erreur relative sur l'estimation du champ varie en $h^2/\varepsilon^{1+\alpha}$ (l'exposant de ε étant compris entre 1,5 pour l'angle plat et 2 pour la pointe parfaite) : pour conserver une précision *relative* donnée sur le champ lorsque le rayon de courbure décroît, il n'est pas nécessaire de diminuer proportionnellement la taille des éléments finis.

5. Autre type de singularité : le point conique

Le cas considéré jusqu'ici était celui du 2D plan. Il s'agit donc d'arêtes droites de dispositifs réels, assez longues par rapport à leur rayon de courbure.

De nombreux dispositifs réels, particulièrement ceux pour lesquels le champ électrostatique et les effets de pointe jouent un rôle important, sont plutôt de géométries axisymétriques. On montre que les résultats obtenus pour les 2 types d'arêtes axisymétriques (dirigée vers les rayons croissants ou décroissants) sont les mêmes que ceux que nous venons de présenter en 2D plan. Nous nous arrêterons par contre sur le point conique. Dans ce dernier cas, les expressions obtenues se compliquent (même si dans le principe les méthodes restent les mêmes) : il s'agit en fait presque d'un véritable coin tridimensionnel. Le cas du point de rencontre de plusieurs arêtes, d'un intérêt pratique évident, n'a pu être abordé, mais fera l'objet de travaux ultérieurs.

5.1. Caractérisation de la singularité du champ d'un point conique

On montre comme pour le cas 2D plan que la solution autour du coin peut être décomposée en une série orthogonale (à base de fonctions de Legendre d'indices ν_k et 0), dont le premier terme caractérise le comportement singulier en champ :

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k \rho^{\nu_k} P_{\nu_k}^0(\cos \varphi) \quad [10]$$

Le coefficient ν_k dépend de l'angle ω d'ouverture du coin. On le détermine pour chaque valeur de k en résolvant numériquement l'équation :

$$P_{\nu_k}^0(\cos \frac{\omega}{2}) = 0 \quad [11]$$

La table 1 donne quelques valeurs de ce coefficient pour $k=1$, dont la variation est quasi linéaire en fonction de $1/\omega$.

ω	(π)	$5\pi/4$ = $1,25\pi$	$3\pi/2$ = $1,50\pi$	$11\pi/7$ = $1,57\pi$	$8\pi/5$ = $1,60\pi$	$5\pi/3$ = $1,67\pi$	$7\pi/4$ = $1,75\pi$	$9\pi/5$ = $1,80\pi$
ν_1	(1)	0,69	0,46	0,41	0,39	0,34	0,29	0,26

Tableau 1. Valeurs de l'indice bas de la fonction de Legendre du premier terme du développement de la solution autour du point conique, pour quelques valeurs de l'angle d'ouverture ω du domaine.

5.2. Calcul du coefficient de singularité

Comme pour le cas 2D, la méthode de calcul du coefficient de singularité consiste à résoudre un problème de type [6], mais avec une fonction ν_1 différente :

$$\nu_1(\rho, \vartheta) = \rho^{-1-\nu_1} u_1(\varphi) \quad [12]$$

Le coefficient de singularité s'écrit alors comme en [8], à un coefficient k près :

$$\lambda = k \cdot \int_{\Omega} (\nu_1 + \nu_2) f \cdot ds \quad [13]$$

avec :

$$\frac{1}{k} = (2\nu_1 + 1) \int_0^{\omega/2} |u_1(\varphi)|^2 \sin \varphi d\varphi \quad [14]$$

où $u_1(\varphi)$ peut être calculé par une série de fonctions de Legendre d'indices entiers (Abramowitz *et al.*, 1972) :

$$u(\varphi) = P_{\nu}^0(\cos\varphi) = \frac{\sin\pi\nu}{\pi} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu+1+n} \right) P_n^0(\cos\varphi) \quad [15]$$

5.3. Cas du point conique arrondi

Par analogie avec ce que nous avons fait en 2D plan (équations [5] et [9]), nous définissons une fonction v_1^* modifiée par rapport à [12] :

$$v_1^*(r, z) = \frac{z - z^*}{(r^2 + (z - z^*)^2)^{3/2}} \quad [16]$$

où ($r=0$; $z=z^*$) correspond au point-milieu O_ε de l'arrondi. Nous définissons comme précédemment la fonction v_2^* , solution du problème de conditions aux limites de type [6], construit avec cette dernière fonction v_1^* .

On démontre alors que le champ au milieu de l'arrondi peut être calculé par :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(O_\varepsilon) = \int_{\Omega} (v_1^* + v_2^*) f \, r \, dr \, dz \quad [17]$$

En cas d'estimation numérique à partir de la solution par éléments finis, on a pu montrer que l'erreur absolue est bornée par un terme variant comme $h^2 \cdot \varepsilon^{-5/2}$. On est dans une situation un peu moins favorable qu'en 2D plan. Cependant, le champ tend à croître plus vite qu'en 2D lorsque le rayon de courbure diminue ; on retrouvera donc un comportement comparable de l'erreur relative sur le champ : à erreur relative égale, il n'est pas nécessaire de diminuer la taille des éléments aussi vite qu'on diminue le rayon de courbure ε .

6. Conclusion

Nous avons présenté ici un ensemble de résultats concernant la caractérisation tant théorique que numérique du potentiel et du champ autour d'un angle sortant equipotentiel, vif ou arrondi. Ces résultats s'appliquent au 2D plan et au point conique avec contexte axisymétrique.

Après cette phase mathématique qui aura pu paraître quelque peu abstraite, nous allons nous attacher à reprendre ces méthodes avec le pragmatisme du génie électrique, de manière à les rendre opérationnelles dans le contexte des logiciels dédiés au calcul des champs en électromagnétisme.

En particulier, il faut maintenant entreprendre une étude systématique permettant de déterminer les meilleurs choix pour la fonction escalier w , tant en ce qui concerne la précision numérique pour des cas d'école, que par rapport aux algorithmes qui permettront l'automatisation de sa mise en place dans des cas moins académiques. De même, des expérimentations numériques vont permettre de déterminer dans quelle mesure il est possible de trouver des estimations suffisantes de v_2^* , solution du problème [6] modifié par les fonctions [9] ou [12], en n'utilisant que le maillage d'origine, sans arrondi du coin.

Nous ne désespérons en tout cas pas de voir apparaître un jour le lien entre les coefficients de singularité d'une part, le champ sur les coins arrondis d'autre part ; entre d'une part la précision souhaitée sur l'estimation du champ pour un rayon de courbure ε , et d'autre part la taille h des mailles vers le coin décrit sans arrondi ...

L'expérience passionnante de cette collaboration entre praticiens et mathématiciens a au moins montré toutes les émulations réciproques qu'elle a pu faire naître. La multiplicité des expériences numériques rendues possibles par cette première phase permettra sans aucun doute de dévoiler ces liens encore cachés. Mais il reste aussi à avancer vers d'autres résultats théoriques. Nous avons déjà signalé en passant les vrais coins en 3D (point conique avec un contexte non axisymétrique ; point de rencontre de plusieurs arêtes, ...). Nous pouvons évoquer en plus la reprise de cette étude en l'associant à d'autres méthodes numériques que les éléments finis : en particulier, la méthode des équations intégrales de frontière, très utilisée en électromagnétisme. Il faut enfin envisager d'aborder d'autres équations que la seule équation de Laplace : équation de diffusion (correspondant à la circulation des courants induits) et équations de propagation des ondes (Aubourg *et al.*, 2000).

7. Bibliographie

- Abramowitz M., Stegun I.A., *Handbook of mathematical functions*, 9^{ème} édition, New-York, Dover, pp. 331-339, 1972.
- Aubourg M., Mengue S., « Champs électromagnétiques en présence de singularités d'arêtes », *Actes de NUMELEC 2000, 3^{ème} conférence sur européenne sur les méthodes numériques en électromagnétisme*, Poitiers, 2000.
- Dauge M., « Elliptic boundary value problems on corner domain », *Lecture Notes in Mathematics* 1341, Springer Verlag, 1988.
- Grisvard P., « Elliptic problems in non-smooth domains », *Monographs and studies in Mathematics* 24, Pitman, 1985.
- Timouyas H., Moussaoui M., Krähenbühl L., « Etude d'un problème elliptique dans un domaine à coins. Application en électrotechnique », *pré-print disponible sur <http://maply.univ-lyon1.fr/>, rubrique Publications*.
- Timouyas H., Analyse et analyse numérique des singularités en électromagnétisme, Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, juillet 2003. *Téléchargeable sur <http://maply.univ-lyon1.fr/>, rubrique Thèses*.