



HAL
open science

Nouvelles avancées dans les méthodes sans maillage basées sur les éléments naturels contraints pour la simulation des procédés

Julien Yvonnet, Philippe Lorong, David Ryckelynck, Francisco Chinesta,
Gérard Coffignal

► To cite this version:

Julien Yvonnet, Philippe Lorong, David Ryckelynck, Francisco Chinesta, Gérard Coffignal. Nouvelles avancées dans les méthodes sans maillage basées sur les éléments naturels contraints pour la simulation des procédés. Hermès Science. La méthode des éléments finis: extensions et alternatives, Collection Mécanique et Ingénierie des Matériaux, pp.21-68, 2006. hal-00080964

HAL Id: hal-00080964

<https://hal.science/hal-00080964v1>

Submitted on 1 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nouvelles avancées dans les méthodes sans maillage basées sur les éléments naturels contraints pour la simulation des procédés

1.1. Introduction

Les méthodes sans maillage ont été développées dans le but d'alléger les problèmes liés aux étapes de remaillage dans la méthode des éléments finis. En effet, dans un certain nombre de problèmes, comme les problèmes faisant intervenir des grandes transformations (retrouvés par exemple en mise en forme), le déplacement d'interfaces entre milieux solides et liquides (fonderie) ou encore dans les problèmes mettant en jeu une localisation de déformation ou une fissure (coupe ou découpe par cisailage adiabatique), des procédures de remaillage sont nécessaires dans la méthode des éléments finis soit pour éviter la dégradation de la solution en raison de la déformation des éléments, soit pour raffiner localement la solution, ou conformer le maillage avec le déplacement d'une interface ou d'une fissure. Les phases de remaillage peuvent se révéler coûteuses et très délicates spécialement dans le cas 3D.

Dans les méthodes sans maillage, les fonctions de forme ne sont pas construites sur la base d'une partition du domaine en éléments, mais obtenues uniquement à partir du nuage de nœuds. Les premiers travaux dans ce domaine furent proposés dès la fin des années 70 avec la technique appelée *Smooth Particle Hydrodynamics* (SPH)

[LUC 77] qui consiste en une méthode de collocation pour des nuages de nœuds arbitraires. Les défauts de cette technique sont de ne pouvoir garantir la consistance linéaire (reproduction exacte des champs linéaires), et de ne pas permettre l'imposition des conditions aux limites de manière simple. Une avancée majeure fut proposée par Nayrolles, Touzot et Villon en 1992 par le biais de la méthode des *éléments finis diffus* (EFD) [NAY 92] dans laquelle des fonctions de forme à support local de type moindres carrés mobiles sont utilisées dans une méthode variationnelle de type Galerkin. La technique dite *Element Free Galerkin* (EFG) [BEL 94], proposée par Belytschko *et al.* est une modification de la technique des éléments diffus dans laquelle les dérivées des fonctions de forme sont calculées exactement (il faut souligner cependant que les dérivées au sens diffus convergent vers les dérivées exactes). La méthode *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) [LIU 95] se base sur les mêmes principes que la méthode SPH, mais est utilisée dans une formulation variationnelle de type Galerkin et introduit une fonction de correction permettant de reproduire exactement les polynômes d'un certain ordre.

Bien qu'initialement prometteuses, ces méthodes souffrent principalement des inconvénients suivants : a) l'approximation construite n'est pas une interpolation stricte, ce qui oblige à utiliser un traitement complexe pour imposer les conditions aux limites ; b) un support, ou domaine d'influence, circulaire ou polygonal, est attaché à chacun des nœuds, et en conséquence, pour pouvoir reproduire une certaine base polynomiale, un nombre suffisant de nœuds voisins doit être contenu à l'intérieur de ce support, induisant un réglage de sa taille, ce qui rend difficile le traitement des nuages de nœuds arbitraires ou anisotropes ; c) l'intégration numérique dans ces techniques, nécessite souvent un maillage de cellules d'intégration, les fonctions à intégrer ne sont plus polynomiales et le support de ces fonctions ne coïncide pas avec les domaines d'intégration.

Le manque de robustesse de ces techniques n'en fait pas des outils pertinents dans le cadre de la simulation des procédés. La méthode de la *partition de l'unité* (PU) [MEL 96] proposée par Babuška, bien que souvent citée dans le cadre des méthodes sans maillage, est en réalité une technique plus générale permettant d'enrichir les fonctions de forme afin de reproduire exactement des fonctions qui n'étaient pas présentes dans la base d'origine (discontinuités, fonctions singulières, etc.) ceci pour des fonctions de forme aussi bien de type éléments finis que sans maillage, définissant une partition de l'unité. Ce fut sur cette idée que Moës introduisit des fonctions de Heaviside pour simuler les discontinuités [SUK 01a], et qui donna lieu à la méthode *Extended Finite Element* (X-FEM).

D'un autre côté, la méthode des *éléments naturels* (NEM) [SAM 95, SUK 98], est une méthode sans maillage dans laquelle les fonctions de forme, construites sur la base du diagramme de Voronoï du nuage de nœuds, possèdent des propriétés permettant d'alléger les difficultés citées ci-dessus : a) les fonctions de forme sont strictement interpolantes [SIB 80] et de plus, linéaires sur certains bords (bords des domaines

convexes) permettant l'imposition directe des conditions aux limites comme dans la méthode des éléments finis ; b) la consistance linéaire est garantie par construction [SIB 80] ; c) le support de ces fonctions de forme (domaine d'influence), s'adapte automatiquement au voisinage grâce aux propriétés du diagramme de Voronoï. Pour étendre la linéarité des fonctions de forme sur tout domaine (convexe ou non convexe), tout en supprimant les influences parasites entre nœuds des bords non convexes, nous avons proposé récemment une modification de la méthode, appelée C-NEM [YVO 03, YVO 04] (*méthode des éléments naturels contraints*), dans laquelle le diagramme de Voronoï contraint (dual de la triangulation de Delaunay contrainte) permet d'éviter les problèmes cités précédemment. Nous avons également montré dans [YVO 04] et [YVO 05a] que cette méthode permet l'introduction simple de discontinuités au travers de nuages de nœuds quelconques.

Après un bref rappel de la méthode des éléments naturels contraints (C-NEM) dans la section 1.2, nous présenterons dans la section 1.3 une technique utilisant les aspects *meshless* de la méthode pour le traitement des problèmes d'interfaces mobiles lors d'un changement de phase. Dans la section 1.4, nous montrerons comment cette méthode permet de proposer des stratégies de raffinement sur des nuages de nœuds arbitraires, ce qui peut se révéler essentiel dans la simulation de certains procédés mettant en jeu des déformations localisées. Enfin, nous discuterons dans la section 1.5 des avantages et potentialités de cette méthode dans la simulation des procédés.

1.2. Méthode des éléments naturels contraints (C-NEM)

1.2.1. Diagramme de Voronoï et voisins naturels

Les notions de voisins naturels et d'interpolation naturelle furent introduites par Sibson [SIB 80] pour construire des interpolations sur des nuages de nœuds très irréguliers (destructurés). Cet interpolant est basé sur les constructions géométriques connues sous le nom de diagramme de Voronoï et de son dual, la triangulation de Delaunay. Le concept de diagramme de Voronoï fut introduit à l'origine par les mathématiciens (Dirichlet, 1850 ; Voronoï, 1908) [VOR 08], puis plus tard utilisé dans de nombreux domaines scientifiques. En 2D, le diagramme de Voronoï associé à un ensemble de nœuds est une partition du plan en cellules T_i , une associée à chaque nœud n_i , telles que tout point contenu à l'intérieur d'une cellule est plus proche de son nœud associé que de n'importe quel autre nœud (voir la figure 1.1) :

$$T_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j), \forall j \neq i\}, \quad \forall i \quad [1.1]$$

Le diagramme de Voronoï unique pour un ensemble de nœuds donné, réalise une partition complète de l'espace et peut être étendu à une dimension quelconque.

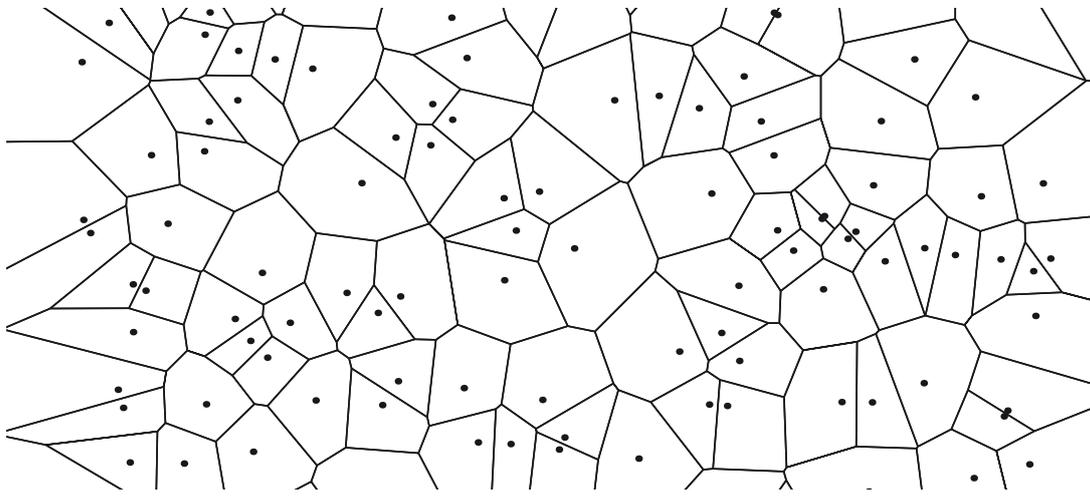


Figure 1.1. *Diagramme de Voronoï d'un ensemble de nœuds*

L'autre construction géométrique associée est la triangulation de Delaunay. Celle-ci fut introduite par Voronoï en 1908 [VOR 08] et étendue par Delaunay en 1934 [DEL 34]. Les triangles de Delaunay relient les nœuds qui ont une face de cellule de Voronoï en commun. La terminologie utilisée jusqu'ici peut être étendue au cas 3D. Les voisins naturels d'un nœud sont tous les nœuds dont les cellules de Voronoï ont une face en commun avec la cellule du nœud, ou encore les nœuds connectés au nœud en question par une arête d'un triangle de Delaunay.

On voit bien que si la densité est irrégulière, ou la distribution des nœuds très anisotrope, les voisins naturels d'un nœud représentent toujours un choix optimal des nœuds voisins parmi tous les nœuds environnants. Dans la méthode des éléments naturels, chaque point d'intégration reçoit l'influence de ses propres voisins naturels.

1.2.2. *Calcul des fonctions de forme NEM*

Pour créer un système de coordonnées locales en un point \mathbf{x} quelconque introduit dans le diagramme, Sibson [SIB 80] utilisa le concept de cellule de Voronoï du second ordre T_{ij} . T_{ij} est une subdivision des cellules de Voronoï telle que tout point \mathbf{x} dans cette zone est d'abord plus proche de n_i que de n'importe quel autre nœud, et n_j est le deuxième nœud le plus proche de \mathbf{x} , c'est-à-dire :

$$T_{ij} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k), \quad [1.2]$$

$$\forall k \neq i, k \neq j, i \neq j\}$$

une mesure de Lebesgue (longueur, aire, volume en 1D, 2D et 3D respectivement). Soit κ_x une mesure de Lebesgue de T_x et κ_{xi} la mesure de Lebesgue de T_{xi} . La

fonction de forme éléments naturels associée au nœud n_i calculée en \mathbf{x} est définie comme le rapport entre la mesure de Lebesgue de la cellule du second ordre T_{xi} sur la mesure de Lebesgue de la cellule du premier ordre T_x , c'est-à-dire :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_{xi}}{\kappa_x} \quad [1.3]$$

Si nous considérons le cas 2D de la figure 1.2, la fonction de forme précédente est définie par :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\text{Aire}(afghe)}{\text{Aire}(abcde)} \quad [1.4]$$

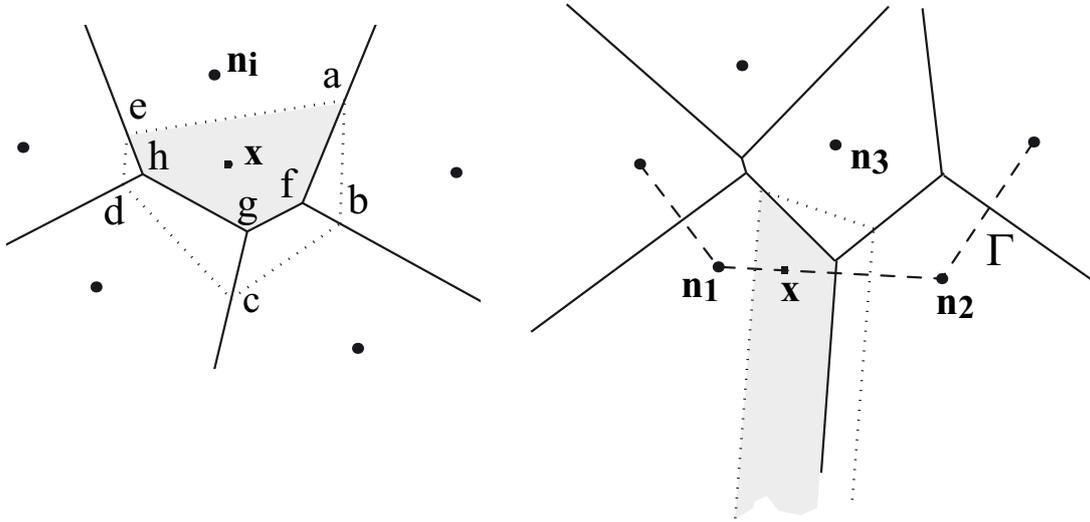


Figure 1.2. Construction des fonctions de forme éléments naturel

Braun et Sambridge [SAM 95] ont utilisé l'interpolant de Sibson [SIB 80] pour obtenir l'expression des dérivées des fonctions de forme, qui peuvent ensuite être introduites dans une technique de Galerkin pour résoudre les équations aux dérivées partielles, dans laquelle les fonctions d'approximations ainsi que les fonctions test sont les fonctions de forme éléments naturels. Ces auteurs ont baptisé cette technique comme la méthode des éléments naturels (*Natural Element Method*).

Ainsi, l'expression de l'approximation d'une fonction vectorielle $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ est donnée par :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad [1.5]$$

où \mathbf{u}_i ($i \in [1, \dots, n]$) représente $\mathbf{u}(\mathbf{x}_i)$ avec \mathbf{x}_i les coordonnées du nœud n_i , n le nombre de nœuds voisins naturels du point \mathbf{x} , et $\phi_i(\mathbf{x})$ la fonction de forme associée au nœud n_i et donnée par l'équation [1.4].

Il en résulte que le support (domaine d'influence) de $\phi_i(\mathbf{x})$ est l'union des n cercles (sphères en 3D) passant par les sommets des triangles (tétraèdres en 3D) de Delaunay contenant le nœud n_i . Le support du nœud n_i dans une distribution quelconque est représenté sur la figure 1.3.

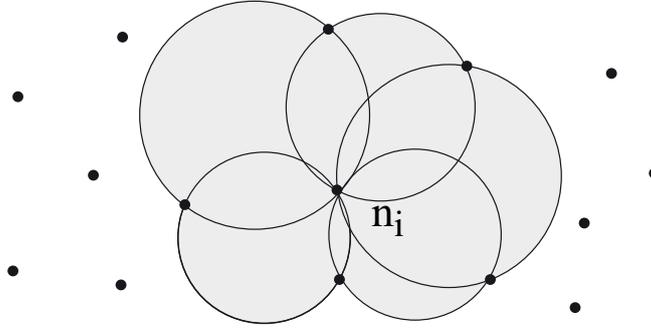


Figure 1.3. Support de la fonction de forme associée au nœud \mathbf{n}_i

1.2.3. Propriétés des fonctions de forme NEM

Si le point \mathbf{x} coïncide avec le nœud n_i , c'est-à-dire ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$), $\phi_i(\mathbf{x}_i) = 1$, et toutes les autres fonctions valent alors zéro, c'est-à-dire $\phi_j(\mathbf{x}_i) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} étant la fonction delta de Kronecker). Les propriétés de positivité, d'interpolation et de partition de l'unité ont été prouvées dans [SUK 98] :

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_i(\mathbf{x}) \leq 1 \\ \phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \end{cases} \quad [1.6]$$

Les fonctions de forme éléments naturels vérifient aussi la propriété de consistance linéaire, soit :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i \quad [1.7]$$

Les fonctions de forme éléments naturels sont infiniment dérivables (C^∞) partout sauf aux nœuds où elles sont seulement C^0 , et sur les cercles de Delaunay où elles sont C^1 , à cause des différents voisins naturels intervenant d'un côté et de l'autre.

Une autre propriété particulièrement intéressante est la linéarité des fonctions de forme sur les bords des domaines convexes (voir la démonstration dans [SUK 98]), ce qui, combiné avec la propriété du delta de Kronecker, rend l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet directe comme dans le cas des éléments finis. Cependant, la propriété n'est plus vérifiée sur les bords des domaines non convexes, comme nous le détaillons ci-dessous.

1.2.4. *Problématique des domaines non convexes*

Un problème intervient dès que l'on considère des domaines dont la frontière est non convexe. En effet, le diagramme de Voronoï n'est défini que pour un ensemble convexe de points et ne tient pas compte d'une éventuelle frontière. Pour illustrer ce problème, nous considérons les domaines non convexes représentés sur la figure 1.4, dans lesquels un point x est introduit. Dans le but de calculer l'interpolation en ce point, une nouvelle cellule de Voronoï est créée, tandis que les cellules associées aux voisins naturels de ce point sont modifiées. On constate sur la même figure que la cellule de Voronoï créée a des faces en commun avec les cellules associées aux nœuds n_1 , n_2 , n_3 et n_4 qui deviennent alors des voisins naturels de x . Cependant, pour imposer les conditions aux limites en ce point, il est nécessaire que l'influence du nœud n_3 s'annule et que l'influence du n_4 dans la solution ne soit pas prise en compte.

Plusieurs techniques ont été proposées pour résoudre ce problème : l'utilisation de l'interpolant dit non sibsonien [SUK 01b], le couplage des éléments naturels avec des éléments finis disposés sur le bord [SUK 01b] ou encore la technique des formes α [CUE 02]. Cependant, des difficultés persistent pour les domaines fortement non convexes, comme le cas des fissures. La technique basée sur l'utilisation des formes α [CUE 02] propose un contrôle de la densité nodale qui tend vers l'infini si le rayon de courbure du bord non convexe tend vers zéro (pointe de fissure), ou encore si la distance entre les deux bords tend vers zéro (autocontact). Dans [SUK 98], Sukumar propose l'utilisation d'une description explicite de la frontière par une série de segments (*planar straight graph*). Dans la prochaine section, nous proposons une nouvelle technique permettant de résoudre tous les problèmes liés aux domaines non convexes à condition d'introduire une description explicite de la frontière et donc de leur évolution.

1.2.5. *La méthode des éléments naturels contraints (C-NEM)*

Dans ce paragraphe, une extension de la méthode des éléments naturels est présentée pour prendre en compte les discontinuités fixes ou mobiles, ainsi que pour éliminer les influences parasites le long des domaines non convexes. La technique proposée ici repose sur deux idées : l'élimination de l'influence des nœuds parasites par l'utilisation

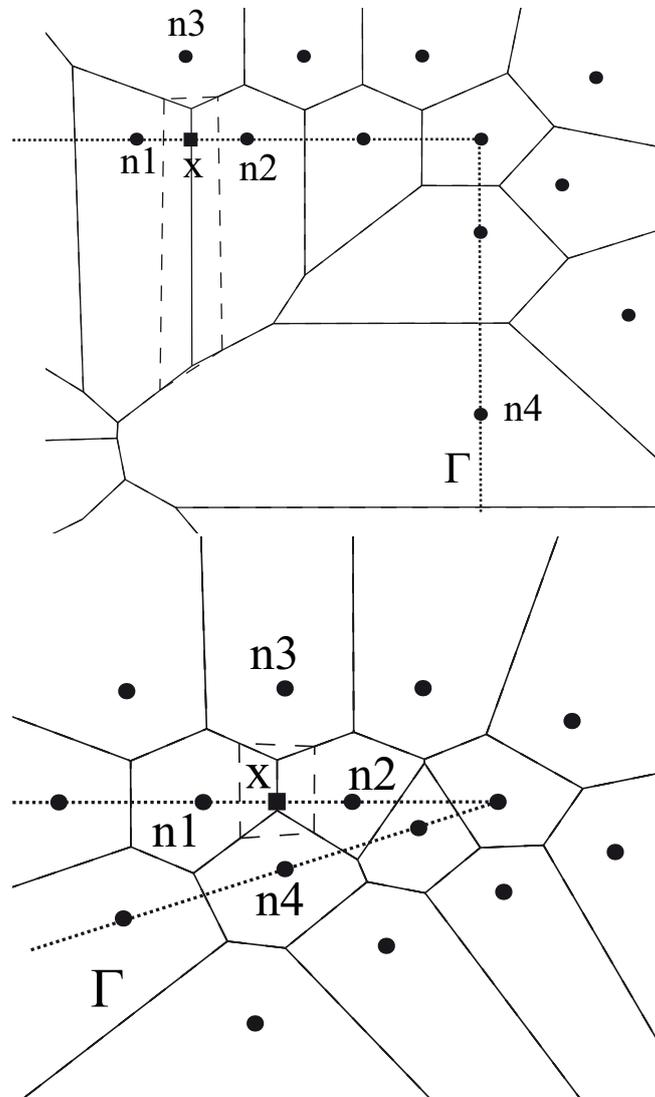


Figure 1.4. Influences parasites entre nœuds dans des domaines non convexes

d'un critère de visibilité, et le calcul des fonctions de forme par le biais d'un nouveau diagramme de Voronoï, dit contraint. Ces deux notions sont développées ci-dessous.

1.2.5.1. Critère de visibilité

Le critère de visibilité fut introduit par Krysl et Belytschko dans [KRY 96] afin de résoudre le même type de problèmes dans la méthode EFG (*Element Free Galerkin*). Dans cette approche, un point x est dans le domaine d'influence d'un nœud n_i si x est dans une région telle que la fonction de forme associée au nœud n_i est non nulle ($\phi_i(x) > 0$) et est visible depuis le nœud n_i en considérant la frontière opaque.

Dans le contexte des moindres carrés mobiles, le principal inconvénient de ce critère est d'introduire des discontinuités parasites dans les fonctions de forme et donc dans la solution. Cette difficulté n'est plus rencontrée dans le contexte C-NEM.

1.2.5.2. Interpolation C-NEM

Si le critère de visibilité est introduit dans la méthode des éléments naturels, le nombre de voisins peut être différent. Les voisins visibles depuis le point \mathbf{x} sont alors appelés voisins naturels contraints. L'approximation devient alors :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=V} \phi_i^C(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad [1.8]$$

où V est le nombre de voisins naturels visibles à partir du point \mathbf{x} et ϕ_i^C est la fonction de forme éléments naturels contraints. Le calcul des fonctions de forme contraintes est similaire à celui des fonctions de forme éléments naturels, lorsque celles-ci sont calculées dans le diagramme de Voronoï contraint introduit dans le paragraphe 1.2.5.4.

1.2.5.3. Support des fonctions de forme C-NEM

Dans la méthode C-NEM, le support des fonctions de forme ϕ_i^C est défini par l'union des n cercles (sphères en 3D), passant par les sommets des triangles de Delaunay (tétraèdres en 3D) définis par le nœud considéré n_i ainsi que les V voisins naturels visibles à partir du nœud n_i . De plus, comme indiqué par Edelsbrunner [EDE 01], ces cercles peuvent s'étendre au-delà des bords du domaine mais ne peuvent contenir de voisins naturels non visibles. Dans la figure 1.5, l'intersection entre le support de la fonction de forme C-NEM ϕ_i^C et le bord est représentée.

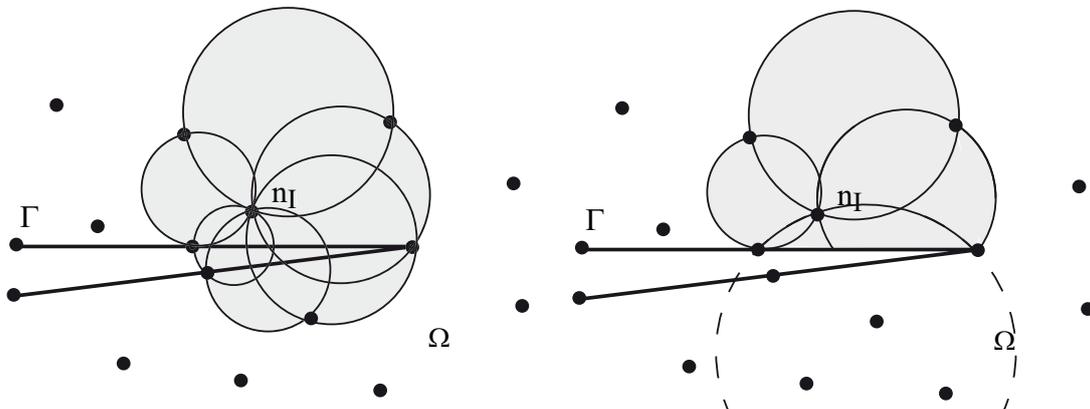


Figure 1.5. Intersection entre le support de la fonction de forme C-NEM et le bord du domaine

Dans cette approche, les discontinuités sont décrites explicitement à l'aide de nœuds. Grâce à la forme particulière du support de ces fonctions de forme, dont la limite passe par les nœuds voisins visibles, les fonctions de forme C-NEM sont strictement continues dans le voisinage de la pointe d'une fissure. Ce point est crucial pour extraire des valeurs telles que les facteurs d'intensité de contraintes, définies à partir

d'une intégrale de contour. Dans cette approche, aucun traitement particulier n'est nécessaire pour obtenir cette continuité, à l'opposé des autres techniques sans maillage [ORG 96]. Nous avons également montré dans [YVO 03] que le méthode C-NEM garantissait la consistance linéaire en tout point du domaine.

1.2.5.4. *Diagramme de Voronoï contraint*

Le diagramme de Voronoï contraint, introduit par Seidel [SEI 88], est le dual de la triangulation de Delaunay contrainte [SHE 98, SHE 00]. Une description détaillée du diagramme de Voronoï contraint est donnée dans l'article [YVO 04].

1.2.5.5. *Calcul des fonctions de forme C-NEM*

Une fois la construction du diagramme de Voronoï effectuée, la sélection des voisins naturels visibles est une tâche immédiate car le diagramme ne conserve de connexions qu'entre les nœuds mutuellement visibles.

Dans la figure 1.6a un exemple de calcul de fonction de forme est illustré. On peut noter que les valeurs nodales des nœuds n_1 , n_2 , n_3 et n_4 vont intervenir dans l'interpolation au point x (situé sur un bord non convexe du domaine). Nous pouvons observer que la solution calculée en x sera faussée car sa valeur ne résulte pas d'une interpolation linéaire des valeurs nodales n_1 et n_3 . L'imposition des conditions aux limites sera donc perturbée par l'influence du nœud interne n_2 et d'un nœud externe de l'autre bord non convexe (n_4).

Sur la figure 1.6b, le même calcul est effectué en utilisant le diagramme de Voronoï contraint. Dans cette construction, comme nous l'avons décrit précédemment, les faces de Voronoï entre deux nœuds non mutuellement visibles sont supprimées. Dans ce cas, la valeur de l'interpolation calculée en x ne dépendra que des valeurs nodales en n_1 , n_2 et n_3 . De plus, en prenant en compte le fait que les cellules du second ordre T_{1x} et T_{3x} ont des aires infinies, la contribution du nœud interne n_2 s'annule (car l'aire de T_{2x} est finie).

Nous pouvons résumer les différents points écrits ci-dessus de la manière suivante : les cellules du second ordre associées aux nœuds du bord du domaine (pour n'importe quelle géométrie, convexe ou non) ont des aires infinies car les influences entre les nœuds non visibles ont été supprimées pendant la construction du diagramme de Voronoï contraint. Dans ce cas, l'influence des nœuds intérieurs s'annule. Ainsi, les conditions aux limites peuvent être imposées directement sur n'importe quel bord (convexe ou non), où l'approximation est strictement linéaire. De plus, les influences parasites entre les deux bords d'une fissure, par exemple, sont éliminées.

Pour construire le diagramme de Voronoï contraint, une description CAD du bord du domaine Γ doit être fournie. Il est également possible d'introduire des inclusions ou des discontinuités à partir d'une liste d'arêtes (facettes en 3D) définissant leur bord.

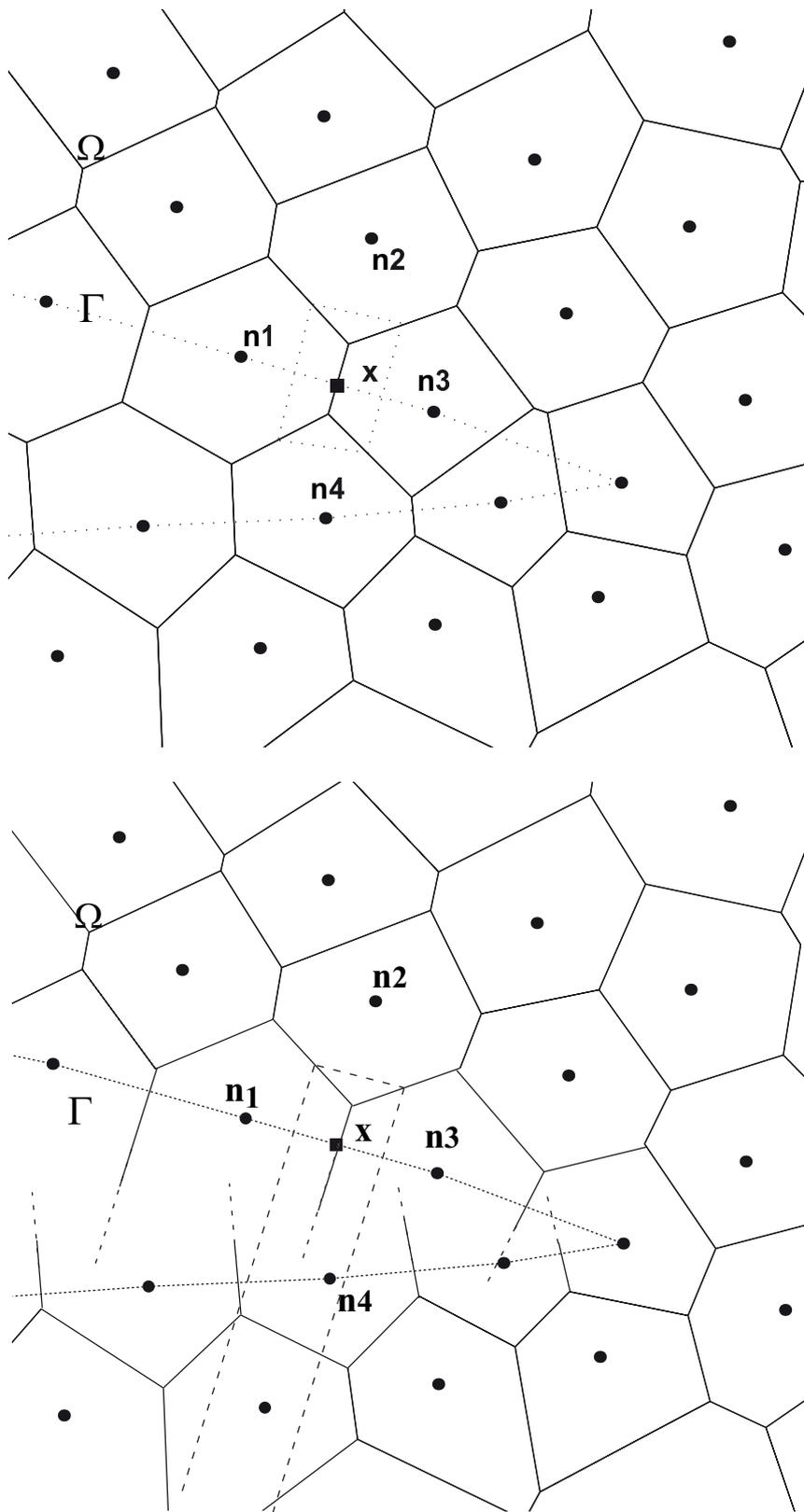


Figure 1.6. Calcul des fonctions de forme éléments naturels sur un domaine non convexe, a) sur le diagramme de Voronoï standard ; b) sur le diagramme de Voronoï contraint

L'analyse de fissures [YVO 04] peut ainsi être traitée, de même qu'un éventuel auto contact, ou encore la propagation d'interfaces mobiles [YVO 05a].

1.2.6. Intégration numérique

Récemment, de nouveaux schémas d'intégration ont été introduits dans le cadre des méthodes sans maillage. Les schémas d'intégration utilisant un schéma de type Gauss ne sont pas adaptés aux méthodes sans maillage car généralement, le support des fonctions de forme ne coïncide pas avec la cellule d'intégration choisie. Une autre source d'erreur provient du fait que les fonctions de forme sont non polynomiales, ce qui rend l'intégration de Gauss non optimale [DOL 99]. D'un autre côté, l'intégration nodale directe, en utilisant les nœuds comme points d'intégration, conduit à des instabilités numériques [CHE 02].

Dans cette étude, nous utilisons le schéma d'intégration proposé par Chen *et al.* [CHE 01] : l'intégration nodale stabilisée (*stabilized conforming nodal integration - SCNI*). Dans cette approche, un lissage du gradient au nœud est effectué dans le but de stabiliser l'intégration nodale.

Dans la méthode d'intégration de type SCNI, un gradient moyen est défini au point d'intégration (nœud) [CHE 01] :

$$\tilde{\nabla} u^h(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Omega_i} \nabla u^h(\mathbf{x}) d\Omega \quad [1.9]$$

où \mathbf{x}_i sont les coordonnées du nœud n_i , Ω_i son domaine représentatif (cellule de Voronoï), A_i étant sa mesure.

Ainsi la déformation (exprimée sous forme de vecteur) est donnée, dans le contexte de l'élasticité plane en HPP, par :

$$\tilde{\epsilon}^h(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Omega_i} \epsilon^h(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{A_i} \int_{\Omega_i} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1^h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2^h(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1^h(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^h(\mathbf{x})}{\partial x_1} \end{array} \right\} d\Omega \quad [1.10]$$

A présent, en appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\tilde{\epsilon}^h(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} \left\{ \begin{array}{c} u_1^h(\mathbf{x})\nu_1 \\ u_2^h(\mathbf{x})\nu_2 \\ u_1^h(\mathbf{x})\nu_2 + u_2^h(\mathbf{x})\nu_1 \end{array} \right\} d\Gamma \quad [1.11]$$

où comme indiqué précédemment Ω_i est la cellule de Voronoï contrainte associée au nœud n_i dont le bord est noté par Γ_i (avec ν_1 et ν_2 les composantes du vecteur unitaire normal à Γ_i), A_i étant son aire.

En introduisant l'approximation C-NEM définie dans l'équation [1.11] on obtient après intégration :

$$\tilde{\epsilon}^h(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} \tilde{b}_{11}(\mathbf{x}_i) & 0 & \tilde{b}_{12}(\mathbf{x}_i) & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{b}_{21}(\mathbf{x}_i) & 0 & \tilde{b}_{22}(\mathbf{x}_i) & \dots \\ \tilde{b}_{21}(\mathbf{x}_i) & \tilde{b}_{11}(\mathbf{x}_i) & \tilde{b}_{22}(\mathbf{x}_i) & \tilde{b}_{12}(\mathbf{x}_i) & \dots \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} \dots & \tilde{b}_{1N}(\mathbf{x}_i) & 0 \\ \dots & 0 & \tilde{b}_{2N}(\mathbf{x}_i) \\ \dots & \tilde{b}_{2N}(\mathbf{x}_i) & \tilde{b}_{1N}(\mathbf{x}_i) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{N1} \\ u_{N2} \end{matrix} \right\} = \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{d} \quad [1.12]$$

où $\tilde{b}_{1j}(\mathbf{x}_i)$ et $\tilde{b}_{2j}(\mathbf{x}_i)$ sont définis par :

$$\begin{cases} \tilde{b}_{1j}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} \phi_j(\mathbf{x}) \nu_1(\mathbf{x}) d\Gamma \\ \tilde{b}_{2j}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{A_i} \int_{\Gamma_i} \phi_j(\mathbf{x}) \nu_2(\mathbf{x}) d\Gamma \end{cases} \quad [1.13]$$

On peut remarquer que la plupart des composantes de la matrice $\tilde{\mathbf{B}}_i$ sont nulles grâce au support compact des fonctions de forme (les seules composantes non nulles correspondent aux nœuds voisins du point \mathbf{x}).

Chen *et al.* [CHE 01] ont proposé d'utiliser l'intersection entre le diagramme de Voronoï et le domaine pour définir les domaines d'intégration Ω_i . Nous étendons cette définition de manière immédiate aux cellules de Voronoï contraintes, mieux adaptées à représenter des domaines dans le voisinage des bords non convexes.

En plus, l'utilisation du théorème de la divergence évite le calcul des dérivées des fonctions de forme, ne nécessitant que le calcul des fonctions de forme sur les bords des cellules de Voronoï contraintes. Le fait d'intégrer ces fonctions (plus régulières que leurs dérivées) sur des éléments de dimensions inférieures (sur des arêtes en 2D), permet d'obtenir une très bonne qualité d'intégration comparée aux autres techniques [GON 00]. Elle permet même de passer le patch test, avec grande précision, alors que les fonctions de forme ne sont pas polynomiales.

1.3. Propagation d'interfaces

Dans [YVO 04], des exemples présentant des discontinuités matérielles fixes (interface entre deux matériaux, fissures) sont présentés. Ces exemples possèdent des solutions analytiques qui permettent d'établir des comparaisons avec les résultats fournis par la méthode C-NEM. Nous nous focalisons ici sur la propagation des discontinuités mobiles telles que les interfaces dans les processus de changement de phase.

Une description détaillée de l'évolution très fine de l'interface impliquée dans les problèmes de changement de phase est importante dans différents domaines de l'ingénieur et dans la simulation des procédés, c'est-à-dire les problèmes de fonderie, le perçage ou le soudage laser, pour pouvoir prédire l'état géométrique, métallurgique et mécanique de la pièce finale. La nécessité de conformer les éléments avec l'interface mobile dans les problèmes de changement de phase est une limitation de la méthode des éléments finis, car le déplacement de l'interface provoque la distorsion des éléments. Dans cette section, une technique utilisant les attraits des méthodes *meshless* ainsi que les différentes propriétés de la méthode C-NEM, est présentée pour simuler la propagation des interfaces dans les changements de phase.

1.3.1. Formulation du problème thermique multiphasique

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un domaine fermé et T le champ de température. Sur le bord du domaine $\Gamma \equiv \partial\Omega$ la température ou le flux thermique sont imposés. Nous désignons par Γ_1 le bord du domaine où la température est imposée $T(\mathbf{x} \in \Gamma_1, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t)$ et par Γ_2 le bord du domaine où le flux \bar{q} est imposé. Le modèle thermique est défini sur l'intervalle de temps $[0, t_{max}]$. La condition initiale est donnée par $T(\mathbf{x}, t = 0) = T_0$, où T_0 est supposée plus haute que la température de fusion T_m . Au temps $t = 0$, une partie de la frontière Γ_1 est brutalement soumise à une température $T_1 < T_m$. Un front de solidification mobile Γ_I est alors généré, dont la position évolue dans le temps, c'est-à-dire $\Gamma_I(t)$, divisant le domaine Ω en deux parties $\Omega_1(t)$ (phase solide) et $\Omega_2(t)$ (phase liquide). Par souci de simplification, nous considérons ici un modèle thermique homogène et isotrope dans chacune des phases.

En l'absence de source de chaleur, le modèle de transfert thermique est défini dans chaque phase par :

$$\begin{cases} c_1 \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k_1 \nabla T) & \text{dans } \Omega_1(t) \\ c_2 \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k_2 \nabla T) & \text{dans } \Omega_2(t) \end{cases} \quad [1.14]$$

où c_1 et c_2 sont les capacités calorifiques de chaque phase, avec k_1 et k_2 leurs conductivités thermiques. Les conditions initiales et les conditions aux bords associées sont données par :

$$\begin{cases} T(\mathbf{x}, t=0) = T_0 > T_m & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) = T_1 < T_m & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad \forall t \in [0, t_{max}] \\ -k\nabla T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = \bar{q}(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad \forall t \in [0, t_{max}] \end{cases} \quad [1.15]$$

L'évolution de l'interface $\Gamma_I(t)$ est décrite par la condition de Stefan :

$$\mathbf{V}(\mathbf{x} \in \Gamma_I(t)) = \frac{|[q]|}{L} \mathbf{n}_I(\mathbf{x}) \quad [1.16]$$

où \mathbf{V} est la vitesse de l'interface, L est la chaleur latente volumétrique de fusion, $\mathbf{n}_I(\mathbf{x})$ est le vecteur normal à l'interface au point \mathbf{x} qui est supposé dirigé vers la phase liquide, et $|[q]|$ est le saut du flux thermique à travers de l'interface $\Gamma_I(t)$, c'est-à-dire :

$$|[q]| = \left(k_1 \nabla T|_{\Gamma_I^-(t)} - k_2 \nabla T|_{\Gamma_I^+(t)} \right) \cdot \mathbf{n}_I \quad [1.17]$$

La condition supplémentaire imposée sur l'interface $\Gamma_I(t)$ est :

$$T(\mathbf{x}, t) = T_m; \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_I(t) \quad [1.18]$$

1.3.2. Discrétisation C-NEM

On supposant que $\Gamma_2 \equiv \Gamma_I$, la formulation faible associée avec l'équation [1.14] est donnée par :

Trouver $T \in H^1(\Omega)$ vérifiant $T = \bar{T}$ sur Γ_1 tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \, d\Omega &= - \int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \delta T \, d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_I(t)} |[q]| \delta T \, d\Gamma, \quad \forall \delta T \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad [1.19]$$

où $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont les espaces fonctionnels de Sobolev usuels. En substituant les fonctions d'approximations et les fonctions test (approximées par le schéma C-NEM) dans l'équation [1.19] nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\mathbf{CT} + \mathbf{KT} = \mathbf{F} \quad [1.20]$$

où \mathbf{T} est le vecteur contenant les températures nodales inconnues. Nous considérons la solution sur l'intervalle $[0, t_{max}]$, découpé en pas de temps $[t^n, t^{n+1}]$ et un schéma de discrétisation en temps de type trapèzes généralisés. Ainsi, la procédure itérative de traitement de la non-linéarité est définie de la manière suivante : connaissant \mathbf{T}^n et $||[q]^n||$ au temps t^n , le problème non-linéaire associé à l'équation [1.19] consiste à trouver \mathbf{T}^{n+1} et $||[q]^{n+1}||$ tels que les équations [1.18] et [1.19] soient satisfaites.

Une méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre le problème non-linéaire associé à l'équation [1.19], dans laquelle la matrice tangente est évaluée numériquement. Au temps t^{n+1} , l'actualisation de la position de l'interface est réalisée en utilisant la formule d'Euler :

$$\mathbf{x}_J^{n+1} = \mathbf{x}_J^n + \Delta t \mathbf{V}^n(x_J^n) \quad [1.21]$$

où \mathbf{x}_J sont les nœuds définissant l'interface.

1.3.3. *Problème de changement de phase avec solution analytique*

Dans ce paragraphe, un domaine $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ cm, initialement entièrement à l'état liquide ($T_0 > T_m$), est refroidi en son centre au point (0,0), ce qui provoque l'apparition d'un front de solidification circulaire dont le rayon augmente avec le temps. La solution analytique de ce problème pour une plaque infinie peut être trouvée dans [CAR 59].

Le rayon analytique du front au temps t est donné par :

$$R_f(t) = 2\lambda\sqrt{\beta_s t} \quad [1.22]$$

La température dans la phase solide $r < R_f$ est donnée par :

$$T(r, t) = T_m + \frac{Q}{4\pi k_s} \left[Ei\left(-\frac{r^2}{4\beta_s t}\right) - Ei(-\lambda^2) \right] \quad [1.23]$$

et dans la phase liquide $r > R_f$ par :

$$T(r, t) = T_0 - \frac{T_0 - T_m}{Ei(\lambda^2 \eta)} Ei\left(-\frac{r^2}{4\beta_l t}\right) \quad [1.24]$$

Dans la formule [1.24], λ est solution de l'équation :

$$\frac{Q}{4\pi} e^{\lambda^2} = \lambda^2 \beta_s L - \frac{k_l(T_0 - T_m)}{Ei(-\lambda^2 \eta)} \quad [1.25]$$

Avec Q l'intensité de la source de refroidissement, Ei la fonction mathématique exponentielle intégrale et η le rapport des diffusivités thermiques :

$$\eta = \frac{\beta_s}{\beta_l} \quad [1.26]$$

Nous considérons ici seulement un quart du problème pour des raisons évidentes de symétrie. Nous obtenons la solution exacte en tout point du domaine en imposant la température exacte (connue en milieu infini) sur le bord de notre plaque carrée. Nous prenons pour les valeurs numériques :

$$Q = 10, k_s = 9.6 \cdot 10^{-2} \text{cal.cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}, k_l = 6.9 \cdot 10^{-2} \text{cal.cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \text{ et } \lambda = 0.3513$$

Pour mettre en évidence les qualités de la méthode, nous avons choisi un domaine dans lequel 144 nœuds sont répartis de manière aléatoire, avec 8 nœuds supplémentaires disposés sur l'interface, coïncidant avec la solution exacte pour $t_0 = 1s$. Une comparaison avec la méthode des éléments finis a été réalisée de la manière suivante : pour un diagramme de Voronoï donné, la triangulation de Delaunay duale est obtenue simplement en connectant entre eux les nœuds voisins. Dans les simulations effectuées dans le cadre de la méthode des éléments finis, des fonctions de forme linéaires sont utilisées sur chaque triangle de Delaunay.

La figure 1.7 montre l'évolution de la triangulation de Delaunay aux instants $t = 1.15s$, $t = 2.65s$ et $t = 5.5s$. La triangulation est contrainte par les segments de l'interface mobile. Les cellules de Voronoï contraintes duales sont représentées au temps $t = 9.25s$. La triangulation, ainsi que les fonctions de forme, sont seulement actualisées au voisinage de l'interface à chaque pas de temps, ce qui induit de faibles coûts de calculs.

Dans la figure 1.8, les allures du front obtenues par la méthode C-NEM ainsi que par la méthode des éléments finis sont comparées avec la solution analytique. On constate une qualité supérieure pour la méthode C-NEM, et un bon accord est obtenu dans ce cas par rapport à la solution analytique, comme le montre la figure 1.9.

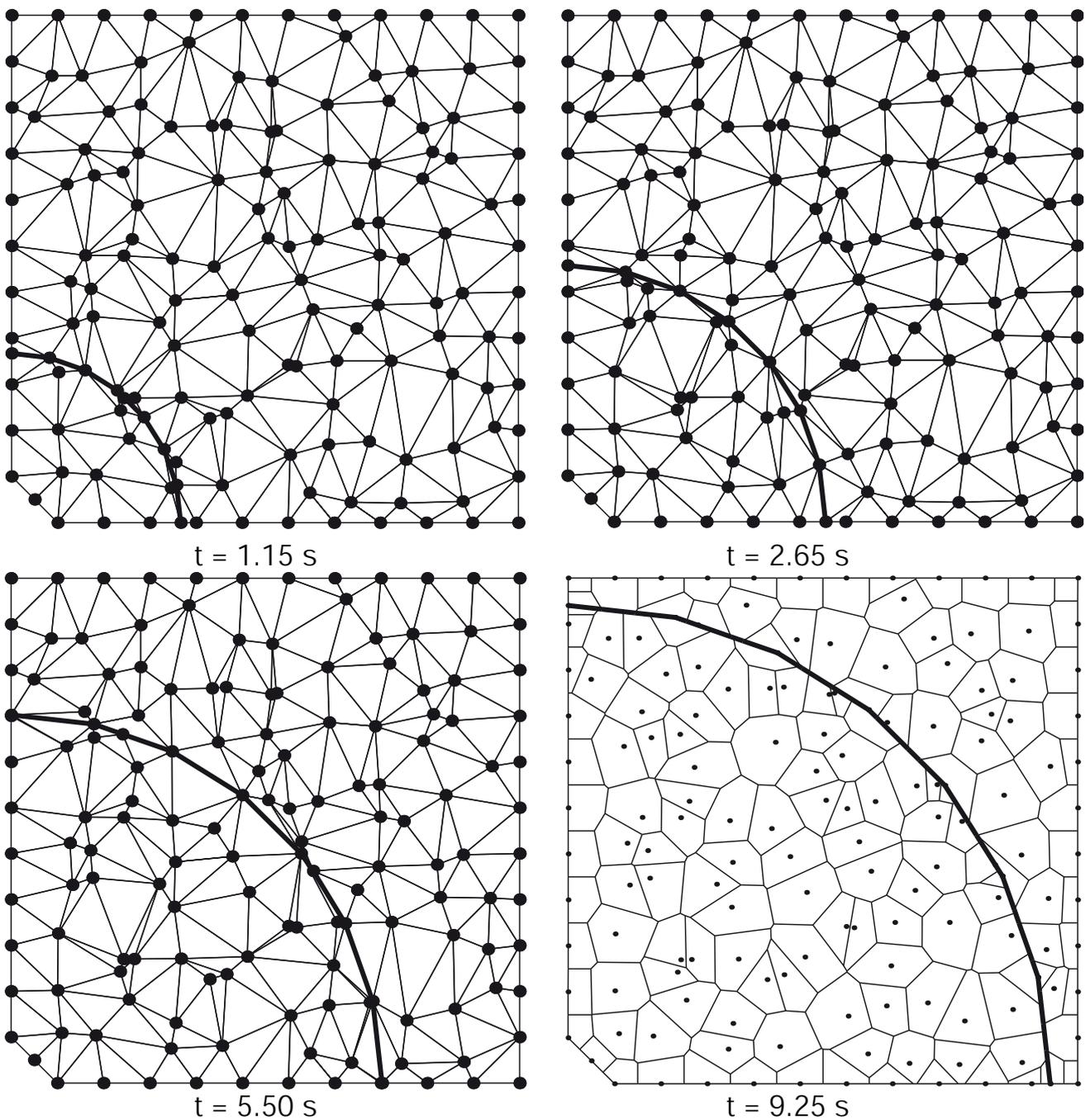


Figure 1.7. Evolution de la triangulation de Delaunay contrainte aux instants $t = 1.15$ s, $t = 2.65$ s et $t = 5.5$ s, ainsi que les cellules de Voronoï contraintes à l'instant $t = 9.25$ s

1.3.4. Exemple numérique : refroidissement d'une pièce de fonderie

Dans cet exemple, un problème de fonderie est présenté, dans lequel une pièce d'aluminium, initialement à la température $T_1 = 1\,000$ K, supérieure à la température de fusion $T_m = 933$ K, est refroidie dans son moule en imposant une température de 300 K sur son bord, provoquant la propagation d'une interface et la solidification. La géométrie du problème est représentée dans la figure 1.10. Nous avons ici utilisé des capacités calorifiques et des conductivités thermiques constantes dans chaque phase, bien que celles-ci soient en réalité légèrement non linéaires. Nous cherchons dans cet exemple à montrer les potentialités numériques de la méthode, plutôt que de modéliser

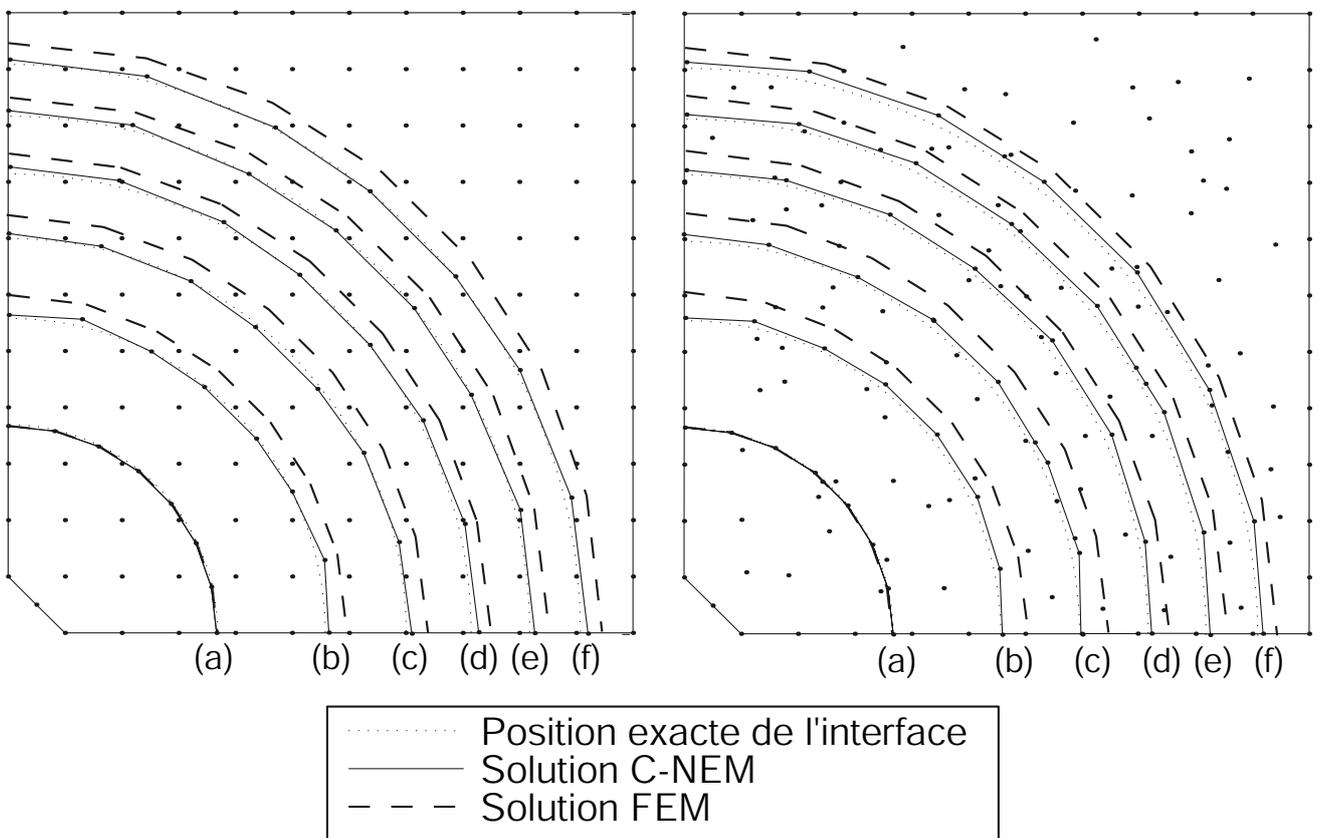


Figure 1.8. Comparaison entre les positions radiales moyennes du front calculées (ligne pleine) et exactes (pointillés) : a) $t = 1.15s$; b) $t = 2.8s$; c) $t = 4.3s$; d) $t = 5.65s$; e) $t = 7.15s$ et f) $t = 8.65s$

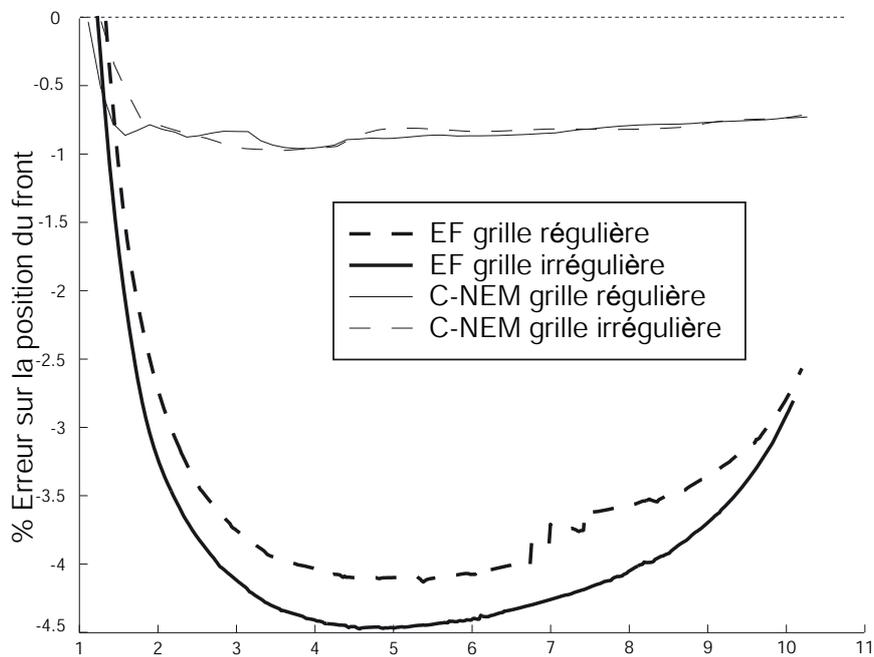


Figure 1.9. Erreur sur la position de l'interface

fidèlement la simulation réelle du refroidissement. Les propriétés thermiques de ce matériau peuvent être trouvées dans [BRA 83]. Sur la figure 1.11, l'évolution des

cellules contraintes de Voronoï est représentée à quatre instants. Dans la figure 1.12, les positions calculées de l'interface sont représentées pour différents temps.

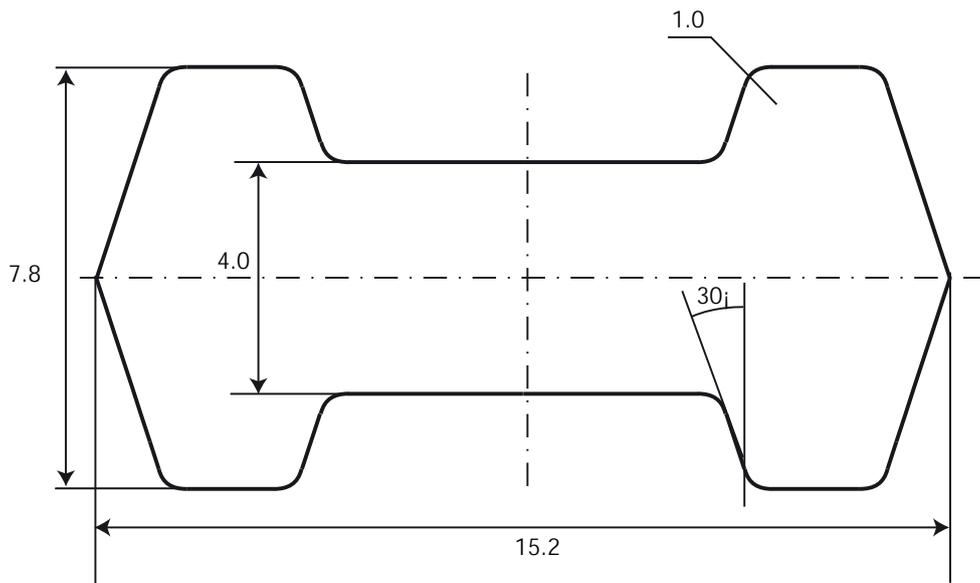


Figure 1.10. Géométrie de la pièce

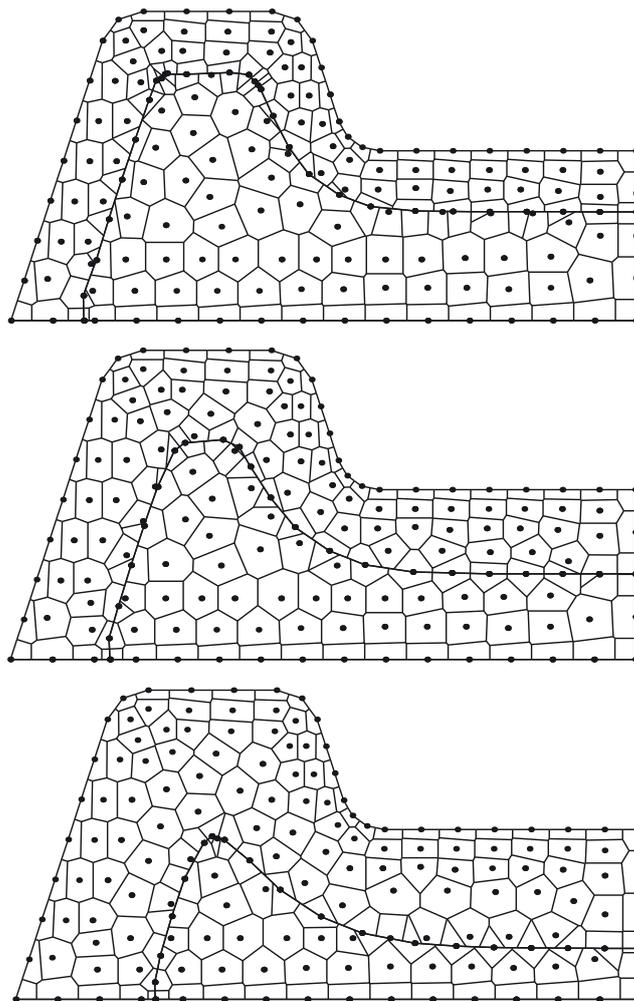


Figure 1.11. Cellules de Voronoï contraintes pour différentes positions de l'interface

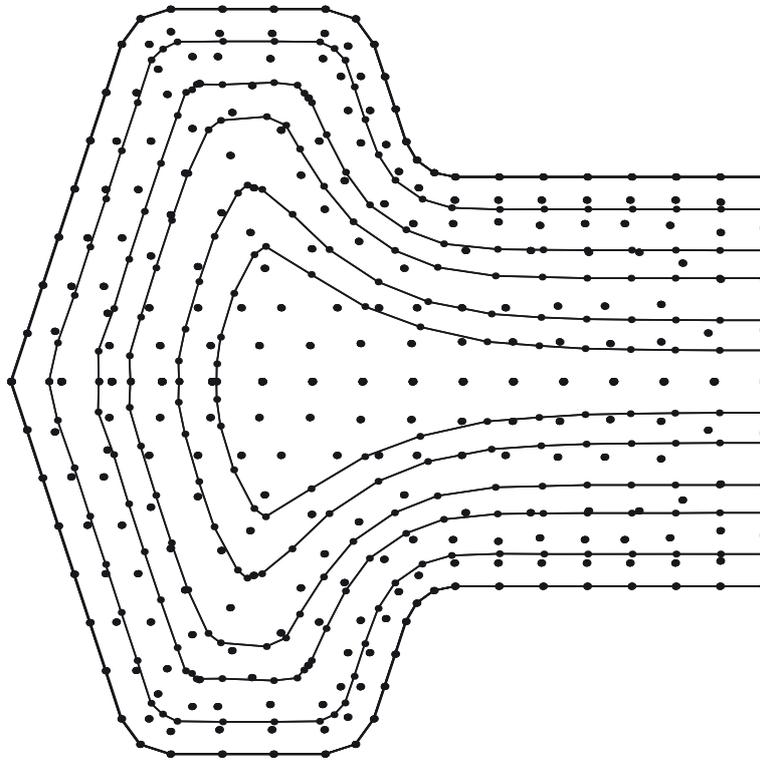


Figure 1.12. *Positions calculées de l'interface pour différents temps*

1.4. Vers la simulation des procédés : raffinement et grandes transformations

1.4.1. Méthodes sans maillage et adaptation

Un des avantages des méthodes sans maillage est de tolérer de grandes distorsions du nuage de nœuds de départ sans introduire d'erreurs significatives dans la solution. Cependant, il est évident que dans tous les cas, une densité nodale appropriée est nécessaire pour décrire les forts gradients pouvant intervenir dans la solution du problème. C'est pourquoi une adaptation de la densité nodale est nécessaire pour calculer la solution numérique des problèmes gouvernés par les équations aux dérivées partielles.

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, ces adaptations sont incluses dans l'opération de remaillage. Le remaillage est nécessaire par exemple lorsque la géométrie des éléments devient trop déformée suite à de grandes déformations du domaine. De plus, il peut être nécessaire, pour améliorer la qualité de l'interpolation dans le voisinage d'un fort gradient dans la solution, d'ajouter de nouveaux nœuds, ou de les repositionner. Cette tâche n'est pas simple car le maillage associé à la nouvelle distribution nodale ne doit pas contenir elle-même d'éléments distordus. La qualité géométrique sur les éléments est une contrainte qui complique fortement les procédures de raffinement, spécialement dans le cas 3D.

A l’opposé, dans les méthodes sans maillage, aucune contrainte géométrique sur la position relative des nœuds n’est imposée. Ainsi, l’introduction, l’élimination ou le repositionnement de nœuds est une tâche triviale. De cette manière, des nœuds peuvent être ajoutés sans vérification géométrique dans les régions où la qualité de la solution doit être améliorée (identifiées par un indicateur d’erreur approprié). Une fois les nouveaux nœuds placés dans le domaine, dans le cas où le problème fait intervenir des variables d’histoire, l’initialisation de ces variables dans le cadre d’une intégration nodale (toutes les variables sont alors définies aux nœuds) peut être réalisée de manière triviale en utilisant le schéma d’interpolation *meshless*. Cet aspect attractif simplifie de manière significative les procédures de raffinement. Pour déterminer les zones dans lesquelles un raffinement est nécessaire, des estimateurs ou indicateurs d’erreurs sont nécessaires. Si l’estimation d’erreur est bien établie dans le cadre de la méthode des éléments finis [BAB 79, LAD 01, ZIE 87], l’émergence de publications sur ces sujets dans le contexte des méthodes sans maillage est plus récente. Dans le contexte de la *Reproducing Kernel Particle method* (RKPM), Belytschko *et al.* [BEL 98], et Liu *et al.* [LIU 97] ont proposé des estimateurs d’erreurs basés sur les résidus de l’équation d’équilibre. You *et al.* [YOU 03] ont proposé une approche originale en utilisant l’approximation RKPM comme un filtre passe-bas et le filtre passe-haut correspondant est utilisé pour localiser les régions à forts gradients, similaire à l’analyse multirésolution et l’analyse ondelettes. Dans le contexte de la méthode *Element Free Galerkin* (EFG), l’estimation d’erreur a été fortement étudiée en utilisant des indicateurs basés sur des procédures de reconstruction (*recovery methods*) [ZIE 87]. Les fonctions de forme possédant une grande continuité, la procédure de reconstruction des contraintes ne nécessite pas de projection comme dans la méthode des éléments finis utilisant des fonctions de forme C^0 . Chung et Belytschko [CHU 98] ont introduit par ce biais des estimations d’erreur locales et globales dans la méthode EFG. L’essence de cet indicateur d’erreur est d’utiliser la différence entre les valeurs obtenues par reconstruction des contraintes et celles obtenues directement par la solution EFG. Une étude plus approfondie a été menée par Lee et Zhou [LEE 03a, LEE 03b] et dans la méthode RKPM par Lu et Chen [LUC 02]. Cependant, des difficultés apparaissent, car la qualité de l’indicateur d’efficacité dépend du nombre de nœuds contenus dans le support de la fonction moindres carrés mobiles utilisée pour le calcul et pour la projection [CHU 98]. De plus, des difficultés associées à l’adaptation de la taille du support des fonctions de forme pendant le raffinement apparaissent, comme il en est discuté dans [LEE 03a]. Ces difficultés sont liées au fait que la taille du support des fonctions de forme moindres carrés mobiles doit être réglée afin qu’il couvre un nombre suffisant de nœuds, sans toutefois en contenir un nombre trop important pour préserver la qualité. Par la suite, nous montrons que l’utilisation des fonctions de forme de type éléments naturels permet d’éviter ces difficultés.

1.4.2. Méthodologie de raffinement adaptatif pour l'élasticité linéaire en statique

Dans cette partie limitée à l'élasticité linéaire, nous proposons une procédure de raffinement adaptatif utilisable dans le contexte de la méthode C-NEM incluant un indicateur d'erreur *a posteriori* basé sur une technique de reconstruction des contraintes de type Zienkiewicz-Zhu [ZIE 87], ainsi qu'une technique de raffinement basée sur les cellules de Voronoï afin de permettre le raffinement dans des nuages de nœuds irréguliers.

1.4.2.1. Formulation élastostatique

Nous commençons par rappeler la formulation des problèmes 2D élastostatiques en petites perturbations. L'équation d'équilibre peut être écrite comme :

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega \quad [1.27]$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^2$ est le domaine matériel, ∇ est l'opérateur gradient, σ est le tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{b} est un terme de forces volumiques.

La loi de comportement est donnée par :

$$\sigma = \mathbf{C}\epsilon \quad [1.28]$$

où maintenant σ et ϵ sont les formes vectorielles des tenseurs de contraintes et de déformations linéarisées (partie symétrique du gradient des déplacements) respectivement, et \mathbf{C} est la forme matricielle du tenseur élastique.

Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } \Gamma_t \end{cases} \quad [1.29]$$

où $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ est la frontière de Ω , \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire défini sur Γ , et $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{t}}$ sont les déplacements et efforts imposés, respectivement. La formulation variationnelle associée avec le problème élastostatique est donnée par :

Trouver $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ cinématiquement admissible ($\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sur Γ_u) tel que :

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \epsilon^* d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot v^* d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot v^* d\Gamma \quad [1.30]$$

$\forall v^* \in H_0^1(\Omega)$, où $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont les espaces fonctionnels de Sobolev usuels.

En substituant les fonctions d'approximation et les fonctions test (approximées par le schéma C-NEM) dans l'équation [1.30], nous obtenons le système d'équations suivant après intégration (dont les détails sont fournis dans le paragraphe 1.2.6) :

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f}^{ext} \quad [1.31]$$

où \mathbf{d} est le vecteur contenant les déplacements nodaux, la matrice \mathbf{K} et le vecteur \mathbf{f}^{ext} étant donnés par :

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^t \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}} d\Omega \quad [1.32]$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^t \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^t \mathbf{b} d\Omega \quad [1.33]$$

où \mathbf{N} et $\tilde{\mathbf{B}}$ sont les matrices contenant les fonctions de forme et leurs dérivées, respectivement.

1.4.2.2. Indicateur d'erreur NEM basé sur la reconstruction de l'erreur

Nous avons proposé dans [YVO à paraître] un indicateur d'erreur de type Zienkiewicz-Zhu dans le cadre de la NEM basé sur l'intégration nodale stabilisée. Nous présentons ci-dessous les grandes lignes de la construction de cet indicateur.

L'indicateur d'erreur de Zienkiewicz-Zhu a été proposé dans [ZIE 87]. L'objectif est d'estimer $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)}$. Dans ce but, un champ de déformation d'ordre supérieur $\mathbf{G}\mathbf{u}$ de $\nabla \mathbf{u}$ doit être construit en utilisant seulement \mathbf{u}^h . Nous commençons tout d'abord par considérer une approximation $\mathbf{G}\mathbf{u}$ plus précise que $\nabla \mathbf{u}^h$, soit :

$$\|\nabla \mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^\alpha \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \alpha > 0 \quad [1.34]$$

L'indice d'effectivité est le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur exacte. Nous avons :

$$\|\nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{G}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \|(\nabla \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}) - (\mathbf{G}\mathbf{u} - \nabla \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \quad [1.35]$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} - \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{G}\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ \|\nabla \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{G}\mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} & \end{aligned} \quad [1.36]$$

En divisant chaque terme par $\|\nabla \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$ on obtient :

$$1 - \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}} \leq \theta \leq 1 + \frac{\|\mathbf{G}\mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla \mathbf{u}^h - \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}} \quad [1.37]$$

Si l'équation [1.34] est vérifiée, alors l'indice d'effectivité est supposé tendre vers 1 lorsque h tend vers zéro, conduisant à une erreur approximée asymptotiquement exacte. Soit $\psi_i(\mathbf{x})$ et $\phi_i(\mathbf{x})$ deux jeux de fonctions de forme d'ordre de consistance zéro et un, respectivement. Nous avons, pour $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} &\left\| \nabla \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 h^\alpha \left\| \nabla \mathbf{u} - \sum_{i=1}^n \psi_i(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad [1.38]$$

En choisissant $\psi_i(\mathbf{x})$ comme les fonctions de forme NEM de Thiessen, soit :

$$\psi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [1.39]$$

où Ω_i est une cellule de Voronoï. En choisissant $\phi_i(\mathbf{x})$ comme les fonctions de forme NEM de Sibson et en utilisant l'intégration nodale stabilisée comme décrite précédemment, on définit :

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) \approx \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \nabla \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) d\Omega \quad [1.40]$$

$$\tilde{\nabla} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\mathbf{x}) \tilde{\nabla} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) \quad [1.41]$$

Nous construisons donc $\mathbf{G}u$ en utilisant :

$$\mathbf{G}u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \tilde{\nabla} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_i) \quad [1.42]$$

En utilisant les équations [1.42], [1.41] and [1.34] nous avons :

$$\|\nabla \mathbf{u} - \mathbf{G}u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 h^\alpha \left\| \nabla \mathbf{u} - \tilde{\nabla} \mathbf{u}^h \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \alpha > 0 \quad [1.43]$$

Nous pouvons alors définir :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{d} \quad [1.44]$$

où $\tilde{\mathbf{B}}$ est la matrice contenant les dérivées stabilisées, ainsi que :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^h(\mathbf{x}_i) \quad [1.45]$$

Dans le cas de problèmes linéaires, $\tilde{\mathbf{B}}$ est linéaire par rapport à $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^h(\mathbf{x})$. On peut donc écrire :

$$\|\mathbf{u}^{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^\sigma(\mathbf{x})\|_{E(\Omega)} \leq C_1 h^\alpha \|\mathbf{u}^{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^\sigma(\mathbf{x})\|_{E(\Omega)}, \quad \alpha > 0 \quad [1.46]$$

où $\|\mathbf{u}^\sigma(\mathbf{x})\|_{E(\Omega)}$ est la norme en énergie associée à $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, définie par :

$$\|\mathbf{u}^\sigma(\mathbf{x})\|_{E(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right\}^{1/2} \quad [1.47]$$

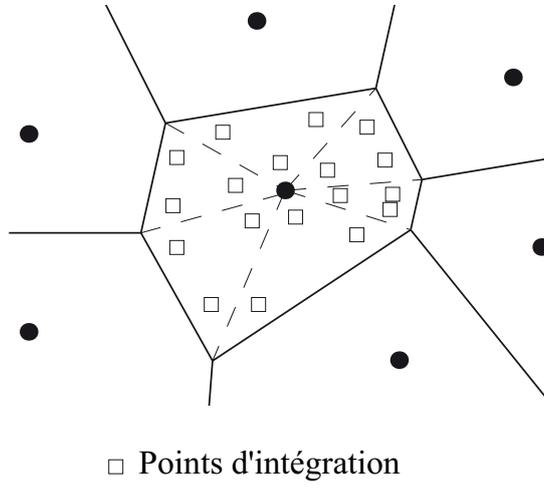


Figure 1.13. Calcul de l'erreur dans chaque cellule de Voronoï

Finalement, en utilisant les équations [1.37] et [1.46], nous avons :

$$1 - \frac{\|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}} - \mathbf{u}^{\sigma}\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{u}^{\tilde{\sigma}} - \mathbf{u}^{\sigma}\|_{E(\Omega)}} \leq \theta \leq 1 + \frac{\|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}} - \mathbf{u}^{\sigma}\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{u}^{\tilde{\sigma}} - \mathbf{u}^{\sigma}\|_{E(\Omega)}} \quad [1.48]$$

alors θ est un indice d'effectivité associé avec l'indicateur d'erreur proposé, supposé asymptotiquement exact.

Afin d'évaluer numériquement l'intégrale dans l'équation [1.47], les cellules de Voronoï sont triangulées, comme décrit dans la figure 1.13, et une intégration de Gauss est utilisée sur chaque sous-triangle. Comme les cellules de Voronoï contraintes définissent une partition du domaine, l'erreur globale peut être exprimée en fonction des contributions locales par :

$$\|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}} - \mathbf{u}^{\tilde{\sigma}}\|_{E(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^N \|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}} - \mathbf{u}^{\tilde{\sigma}}\|_{E(\Omega_i)}^2 \quad [1.49]$$

où N est le nombre total de nœuds dans le domaine. Nous pouvons aussi définir une contribution de l'erreur locale relative par :

$$\eta_i = \frac{\|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}} - \mathbf{u}^{\tilde{\sigma}}\|_{E(\Omega_i)}}{\|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}}\|_{E(\Omega)}} \quad [1.50]$$

1.4.2.3. Stratégie de raffinement

Dans le cas de concentrations de la solution, il peut être nécessaire d'effectuer des raffinements locaux. Pour cela, la connaissance de la contribution locale de l'erreur est cruciale. Dans ce but, nous définissons une erreur tolérée limite $\bar{\eta}$ et sa contribution locale dans chaque cellule $\bar{\eta}_i$ satisfaisant :

$$\bar{\eta}^2 = \sum_{i=1}^N (\bar{\eta}_i)^2 \quad [1.51]$$

Si l'on souhaite que l'erreur soit distribuée de manière égale dans chaque cellule, alors $\bar{\eta}_i = \bar{\eta}_*$, $\forall i$:

$$\bar{\eta}_* = \frac{\bar{\eta}}{\sqrt{N}} \quad [1.52]$$

En suivant la technique décrite par Zienkiewicz *et al.* [ZIE 99], nous pouvons calculer la longueur caractéristique d'une nouvelle cellule par rapport à une ancienne cellule en supposant un ordre de convergence en norme énergie de p ($\Theta(h^p)$). On peut alors écrire :

$$\frac{h_i^{new}}{h_i^{old}} = \left[\frac{\bar{\eta}_*}{\bar{\eta}_i} \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{\bar{\eta} \|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}}\|_{E(\Omega)}}{\sqrt{N} \|\mathbf{u}^{\tilde{\sigma}} - \mathbf{u}^{\hat{\sigma}}\|_{E(\Omega_i)}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad [1.53]$$

Pour décider si une cellule de Voronoï doit être subdivisée, nous définissons la longueur caractéristique h d'une cellule de Voronoï comme la distance moyenne entre le nœud central et les voisins naturels visibles, qui en utilisant les stratégies de raffinement décrites dans la figure 1.14, conduit à :

$$\frac{h^{new}}{h^{old}} \leq \frac{1}{2} \quad [1.54]$$

Il faut alors subdiviser une cellule si :

$$\left[\frac{\bar{\eta} \|\mathbf{u}^{\hat{\sigma}}\|_{E(\Omega)}}{\sqrt{N} \|\mathbf{u}^{\tilde{\sigma}} - \mathbf{u}^{\hat{\sigma}}\|_{E(\Omega_i)}} \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2} \quad [1.55]$$

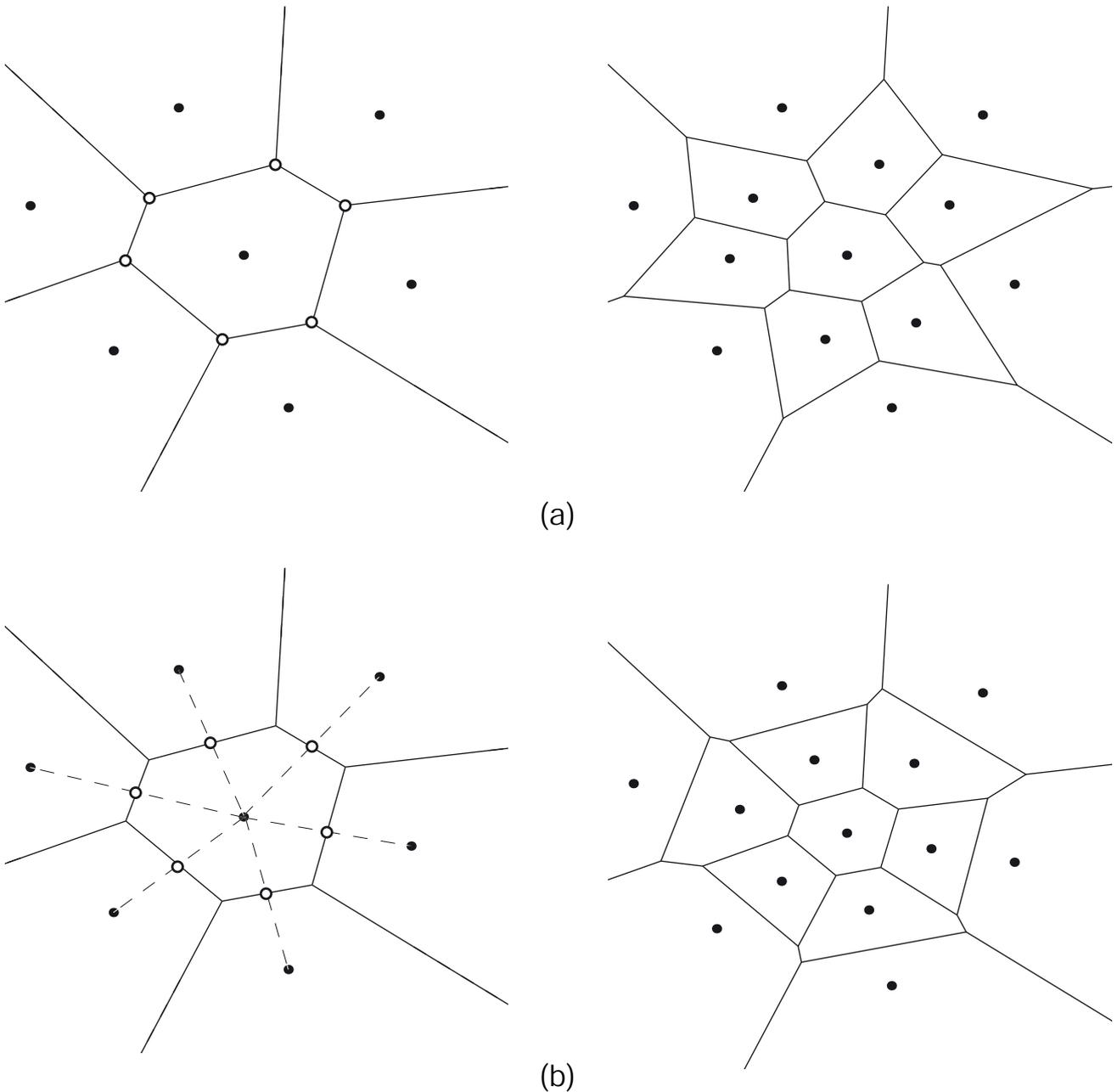


Figure 1.14. *Stratégies de raffinement nodal basées sur les cellules de Voronoï. (o) : nœuds additionnels*

La stratégie décrite dans la figure 1.14a a été considérée par plusieurs auteurs [LUC 02, YOU 03], et est bien adaptée au raffinement dans des nuages de points de-structurés. En partant d'un nuage de nœuds initial, on construit d'abord le diagramme de Voronoï associé. Si la condition [1.55] est validée, de nouveaux nœuds sont ajoutés sur les sommets de la cellule. Cette opération est répétée pour toutes les cellules. On reconstruit alors le diagramme de Voronoï associé au nouveau nuage obtenu, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'erreur globale soit sous la tolérance fixée. Une stratégie différente est décrite dans la figure 1.14b, où les nœuds additionnels sont cette fois

ajoutés entre le nœud central et les voisins naturels visibles. C'est cette stratégie que nous avons appliquée dans l'exemple numérique qui suit.

1.4.3. *Méthodologie de raffinement adaptatif pour les problèmes non linéaires à variables internes*

Dans ce paragraphe, une stratégie de raffinement adaptatif pour les problèmes non linéaires avec variable d'histoire est développée dans le cadre de la méthode C-NEM. Celle-ci inclut : a) un indicateur d'erreur de type Ziekiewicz-Zhu [ZIE 87] basé sur la déformation plastique cumulée ; b) une technique de transfert de variables internes facilitée par une intégration nodale [CHE 02] ; et c), une stratégie de raffinement pour les problèmes évoluant dans le temps basée sur les cellules de Voronoï.

1.4.3.1. *Indicateur d'erreur pour les problèmes non linéaires à variables internes*

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, et pour le cas des problèmes elliptiques linéaires, les techniques visant à établir des stratégies de raffinement adaptatif sont aujourd'hui bien établies et utilisées de manière routinière dans les codes éléments finis. Au contraire, bien que certains progrès aient été effectués pour certaines classes de problèmes non linéaires (voir par exemple [BAB 86] pour une des premières contributions), seul un nombre relativement limité de travaux publiés existent sur les estimations d'erreur *a posteriori* et les approches adaptatives pour les problèmes non linéaires avec variables d'histoire en mécanique du solide. Des exceptions notables sont les contributions de Ladevèze *et al.* [LAD 86], de Jin *et al.* [JIN 89], Ortiz et Quigley [ORT 91], Johnson et Hansbo [JOH 92], Lee et Bathe [LEE 94], Peric *et al.* [PER 96] et Gallimard *et al.* [GAL 96].

Par la suite, nous proposons un indicateur d'erreur simple reposant sur des concepts similaires à ceux décrits pour l'indicateur d'erreur de la partie précédente. Les concepts ci-dessous, ainsi que la formulation du problème en grandes transformations élastoplastiques, peuvent être trouvés dans [YVO 05b]. Soit $\alpha(\mathbf{X}, t)$ une variable, soit associée aux dérivées spatiales des inconnues du problème (par exemple $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$), ou soit une variable interne (par exemple $\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, t)$). Dans le contexte de la méthode C-NEM, l'intégration nodale stabilisée introduite par Chen *et al.* [YOU 04] construit des champs constants par morceaux associés aux dérivées des champs du problème, discontinus au passage d'une cellule de Voronoï à une autre. C'est une conséquence du schéma de stabilisation (moyenne des gradients) utilisé dans l'équation [1.59]. De plus, les différentes variables internes peuvent être définies aux nœuds, car ceux-ci sont, dans ce schéma d'intégration, confondus avec les points d'intégration. Des champs constants associés aux variables $\alpha(\mathbf{X}, t)$ peuvent alors être considérés dans chaque cellule. Une solution simple de champ lissé reconstruit $\alpha^*(\mathbf{X}, t)$ (avec une

convergence supposée plus rapide), est l'interpolation des valeurs nodales $\alpha^h(\mathbf{X}_i, t)$ dans le schéma C-NEM :

$$\alpha(\mathbf{X}, t)^* = \sum_{i=1}^V \phi_i^C(\mathbf{X}) \alpha^h(\mathbf{X}_i, t) \quad [1.56]$$

Ainsi, on peut définir une indication de l'erreur basée sur la déformation plastique cumulée dans chaque cellule Ω_i et dans la configuration de référence comme :

$$|e|_{\Omega_i}^2 = \int_{\Omega_{i0}} ([\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, t)]^* - [\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}_i, t)]^h)^2 J_i d\Omega_0 \quad [1.57]$$

avec :

$$[\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, t)]^* = \sum_{j=1}^V \phi_j^c(\mathbf{X}) [\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}_j, t)]^h, \quad J_i = \det(\tilde{\mathbf{F}}_i) \quad [1.58]$$

où $[\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}_j, t)]^h$ est la déformation plastique cumulée associée avec le voisin naturel visible n_j du point \mathbf{x} , supposé constante dans la cellule Ω_j . Pour évaluer [1.57], les cellules de Voronoï sont triangulées, et un schéma d'intégration de Gauss est appliqué dans chaque triangle.

On peut par cette technique construire tout type d'indicateur d'erreur, comme par exemple des indicateurs d'erreurs basés sur le taux de déformation plastique ou encore sur l'endommagement [PER 99]. Par simplicité, nous considérons ici seulement l'indicateur basé sur la déformation plastique cumulée. L'erreur globale est obtenue, de manière standard, par : $|e|_{\Omega}^2 = \sum_i^N |e|_{\Omega_i}^2$. Enfin, une erreur relative η peut être définie par : $\eta_i := |e|_{\Omega_i} / |e|_{\Omega}$.

1.4.3.2. Transfert des variables internes dans la méthode C-NEM

Dans la méthode des éléments finis, lorsque la déformation des éléments ne garantit plus une certaine qualité de la solution ou lorsqu'un raffinement est nécessaire pour représenter des phénomènes décrits par des dimensions inférieures à la taille du maillage, un nouveau maillage doit être généré. Le nouveau maillage est généralement complètement différent du précédent. Pour ce maillage, un ensemble de nouvelles variables d'état comme les déplacements, les contraintes, ou les paramètres d'écrouissage associés au nouveau maillage doit être reconstruit à partir de l'ancien

maillage. On distingue deux sortes de variables d'état : celles qui sont stockées aux nœuds (comme par exemple les déplacements) et celles qui sont stockées aux points d'intégration (comme par exemple les variables d'écrouissage). Pour ces dernières, il est nécessaire de définir un *opérateur de transfert* (ou de projection) pour permettre le transfert des variables internes associées à l'ancien maillage vers le nouveau [LEE 94, ORT 91, PER 96].

Une discussion sur ces différents aspects, ainsi que différentes techniques possibles peuvent être trouvées dans le cadre de la MEF dans [LEE 94, ORT 91, PER 96, PER 99]. Les principales difficultés sont associées à la localisation des anciens points d'intégration dans le nouveau maillage (opération coûteuse) et à la diffusion numérique des données à chaque transfert (dégradation de la solution).

Pour alléger les différentes difficultés décrites ci-dessus, nous proposons par la suite une méthodologie utilisant les caractéristiques de la méthode des éléments naturels pour définir un opérateur de transfert simplifié entre deux actualisations ou raffinages. Il est à noter que dans le cadre des méthodes *meshless*, le transfert des variables internes intervient dans le cadre d'une réactualisation de la connectivité des nœuds ou d'un raffinement.

Dans ce paragraphe, nous proposons d'utiliser la méthode d'intégration nodale stabilisée conforme (SCNI) [CHE 02] afin (a) d'améliorer la qualité de l'intégration numérique de la forme faible associée aux équations d'équilibre et (b) pour pouvoir transférer les variables internes de manière simple en stockant toutes les variables, y compris les variables habituellement stockées aux points d'intégration de Gauss (comme les variables d'écrouissage ou de déformation plastique cumulée), aux nœuds.

Une formulation lagrangienne est utilisée [YVO 05b], dans laquelle les connectivités, les fonctions de forme ainsi que les dérivées sont définies sur la base du diagramme de Voronoï de l'ensemble des nœuds dans la configuration de référence Ω_0 (pas nécessairement la configuration initiale).

Dans la section précédente, l'intégration nodale stabilisée (SCNI) [CHE 01, CHE 02] a été appliquée dans le cadre de l'élasticité linéaire en petites perturbations. Afin d'appliquer cette technique pour les problèmes non linéaires, nous considérons le gradient de déformation stabilisé au point matériel (nœud) n_i [CHE 02] :

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} (\nabla_X u^h(\mathbf{X}) + \mathbf{1}) d\Omega = \mathbf{1} + \tilde{\nabla}_X u^h(\mathbf{X}_i) = \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{u}_i \quad [1.59]$$

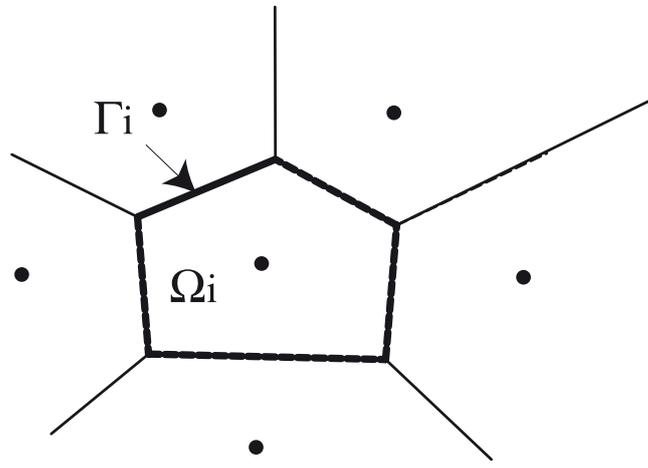


Figure 1.15. *Domaine représentatif autour du nœud pour évaluer le gradient nodal $\tilde{\mathbf{F}}_i$*

où Ω_i est un domaine représentatif autour du nœud (typiquement une cellule de Voronoï) (voir figure 1.15). Par introduction du schéma de discrétisation C-NEM dans l'équation [1.59] nous trouvons :

$$\tilde{\nabla}_X u^h(\mathbf{X}_i) = \begin{bmatrix} u_{,X}^h(\mathbf{X}_i) \\ u_{,Y}^h(\mathbf{X}_i) \\ v_{,X}^h(\mathbf{X}_i) \\ v_{,Y}^h(\mathbf{X}_i) \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{u}_i \quad [1.60]$$

où $\tilde{\mathbf{B}}_i$ est exprimée par :

$$\tilde{\mathbf{B}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{1,X} & 0 & \tilde{\phi}_{2,X} & 0 & \dots & \tilde{\phi}_{N,X} & 0 \\ \tilde{\phi}_{1,Y} & 0 & \tilde{\phi}_{2,Y} & 0 & \dots & \tilde{\phi}_{N,Y} & 0 \\ 0 & \tilde{\phi}_{1,X} & 0 & \tilde{\phi}_{2,X} & \dots & 0 & \tilde{\phi}_{N,X} \\ 0 & \tilde{\phi}_{1,Y} & 0 & \tilde{\phi}_{2,Y} & \dots & 0 & \tilde{\phi}_{N,Y} \end{bmatrix} \quad [1.61]$$

et avec \mathbf{u}_i les déplacements généralisés. Dans le cadre d'une procédure lagrangienne, les options suivantes peuvent être envisagées :

- 1) une procédure lagrangienne *totale*, dans laquelle le diagramme de Voronoï et les fonctions de forme sont calculées une seule fois dans la configuration de référence ;
- 2) une procédure lagrangienne *actualisée* dans laquelle le diagramme de Voronoï et les fonctions de forme sont recalculées à chaque pas de temps ;
- 3) une procédure lagrangienne *actualisée périodiquement* dans laquelle le diagramme de Voronoï et les fonctions de forme sont recalculées après un certain nombre de pas de temps durant lesquels une procédure lagrangienne totale est utilisée.

Dans le cadre d'une procédure lagrangienne totale, aucun transfert de variables internes n'est nécessaire. Par contre, dans le cadre de procédures lagrangiennes actualisées (2) et (3), il est nécessaire de réactualiser la configuration de référence, ce qui implique une reconstruction du diagramme de Voronoï et un recalcul des fonctions de forme. Dans ce cas, l'utilisation du gradient de la transformation donné dans l'équation [1.59] permet de définir toutes les variables internes telles que la déformation plastique cumulée, aux nœuds. Dans le cadre d'une procédure explicite, les différentes grandeurs définies au pas de temps précédent sont également toutes définies aux nœuds. Si le même nuage de nœuds est utilisé pour réactualiser la configuration de référence, le transfert est direct car les points d'intégration sont confondus avec les nœuds. Si un nuage de nœuds différent est utilisé (raffinage, repositionnement des nœuds, etc.), une interpolation directe de type C-NEM à partir des valeurs nodales des anciens nœuds peut être effectuée pour le transfert des variables internes.

1.4.3.2.1. Stratégie de raffinement adaptatif

Nous proposons la stratégie suivante : à partir d'une configuration de référence (instant t_0), on effectue un nombre fixé d'incrémentes dans le cadre d'une procédure lagrangienne, jusqu'à un temps t_a . Au temps t_a , les erreurs sont évaluées grâce à l'indicateur décrit dans l'équation [1.58]. Pour les cellules (nœuds) dépassant le seuil d'erreur toléré, des nœuds sont ajoutés entre le nœud et ses voisins naturels dans la configuration de référence. Le calcul est repris au temps t_0 , avec de nouveaux nœuds. On va ensuite de nouveau jusqu'au temps t_a , et ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cellules dépassant le seuil d'erreur toléré. Si au temps t_a il n'y a plus de cellules à subdiviser, la configuration est actualisée au temps t_a et devient la nouvelle configuration de référence. Voici un résumé de cette procédure :

TANT QUE $t < t_{final}$

1) Actualiser la configuration $\Omega_{ref}(\mathbf{X}), \alpha^{ref}$

2) Effectuer la simulation à l'aide de la procédure lagrangienne jusqu'au temps t_a ,
 $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$

3) Evaluer l'erreur globale *a posteriori*.

4) SI $ERR > TOL$

a) Rajouter des nœuds de coordonnées \mathbf{X}' dans la configuration de référence
 $\Omega_{ref}; \mathbf{X} \leftarrow \mathbf{X} \cup \mathbf{X}'$;

b) Actualiser le pas de temps

c) interpoler les variables internes des nouveaux nœuds à partir des variables dans la configuration de référence : $\alpha(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{X})\alpha_i^{ref}$;

d) interpoler les variables internes des nouveaux nœuds

e) Retourner en 1)

SINON Aller en 5)

5) Initialiser : $\mathbf{X} = \mathbf{x}, \alpha^{ref} = \alpha^{t_a}$ et retourner en 1)

1.4.4. Exemples numériques

1.4.4.1. Exemple en élasticité avec concentration de contraintes

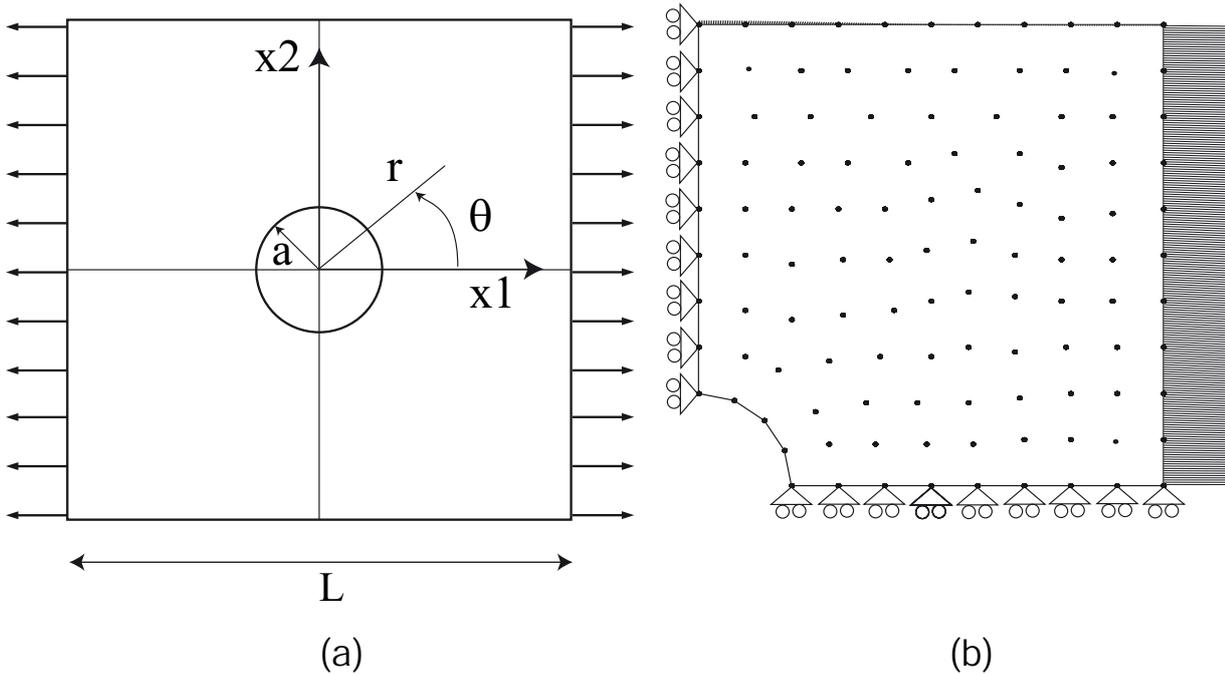


Figure 1.16. a) *Modèle de la plaque trouée* ; b) *modèle discret et conditions aux limites*

Dans cet exemple, une plaque trouée en son centre est soumise à un chargement de traction en contraintes planes. Celle-ci est représentée sur la figure 1.16. La solution exacte pour une plaque de taille infinie par rapport au rayon du trou et soumise à un effort de traction unitaire sur les bords pour lesquels les vecteurs normaux coïncident avec la direction x_1 , est donnée par [TIM 70] :

$$\sigma_{ex_{11}} = 1 - \frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right\} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\theta) \quad [1.62]$$

$$\sigma_{ex_{22}} = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right\} - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\theta) \quad [1.63]$$

$$\sigma_{ex_{12}} = -\frac{a^2}{r^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \sin(4\theta) \right\} + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin(4\theta) \quad [1.64]$$

Pour éviter les erreurs induites par la taille finie de la plaque, des conditions aux limites en efforts correspondant à la solution exacte $\mathbf{F}_d = \sigma_{ex} \mathbf{n}$ sont imposés sur les bords de la plaque. Pour des raisons de symétrie, seul un quart de la plaque est

analysé. Sur la figure 1.17, nous remarquons que la solution de référence $\hat{\sigma}$ converge toujours plus vite que les autres solutions. L'indice d'efficacité est présenté sur la figure 1.18. Nous observons que l'indicateur tend asymptotiquement vers 1, comme prévu. Une séquence de raffinement adaptatif utilisant cet indicateur est représentée sur la figure 1.19.

Nous constatons que le raffinement est bien activé autour du trou central, où la solution en contraintes présente une concentration significative. D'autres exemples impliquant différents niveaux de concentrations de contraintes, y compris des singularités, peuvent être trouvés dans [YVO à paraître].

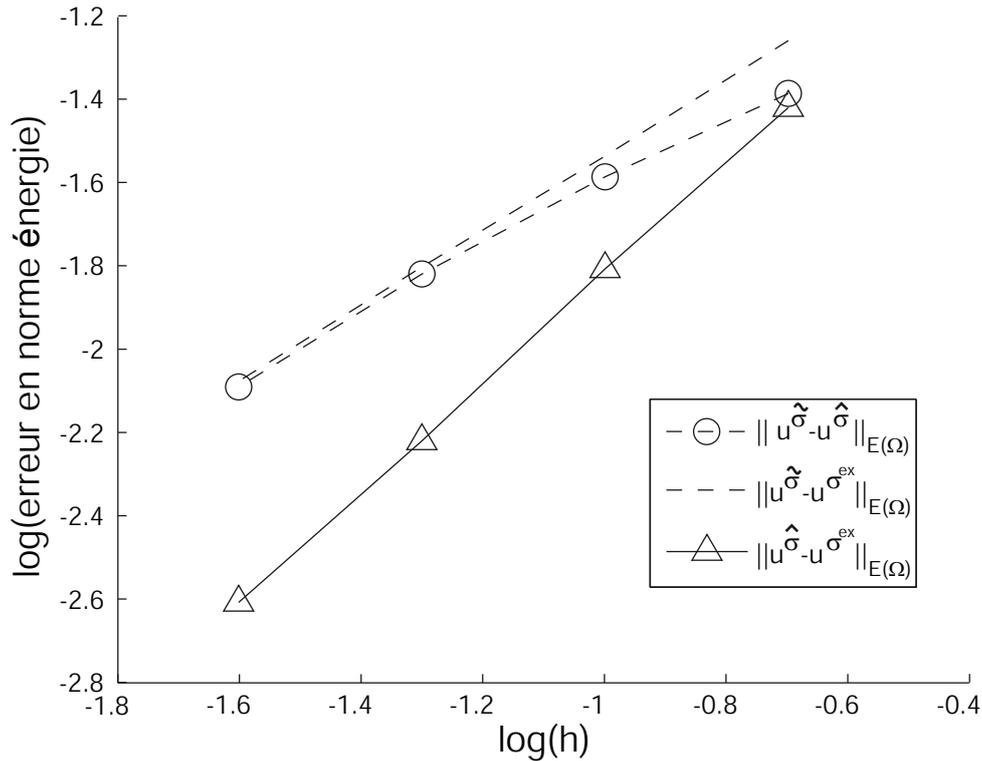


Figure 1.17. Norme énergie de l'erreur pour le problème de la plaque trouée

1.4.4.2. Exemple en élastoplasticité dynamique : propagation de bandes de cisaillement

Le *poinçonnage grande vitesse*, ou *cisaillement adiabatique*, est un nouveau procédé offrant des avantages significatifs par rapport au poinçonnage classique. Dans ce procédé, la grande vitesse et la masse importante du poinçon conduisent à la formation de bandes de cisaillement dans la pièce, qui combinées avec l'endommagement, entraîne une découpe de la pièce de très grande qualité, sans bavure. Ce procédé autorise le poinçonnage de matériaux durs tels que les alliages de titane ou les aciers inoxydables, ou encore de poinçonner des épaisseurs de tôle importantes (jusqu'à 20 mm).

L'exemple suivant montre une première avancée vers la simulation de ce procédé par la stratégie décrite précédemment. La géométrie du problème est décrite dans la

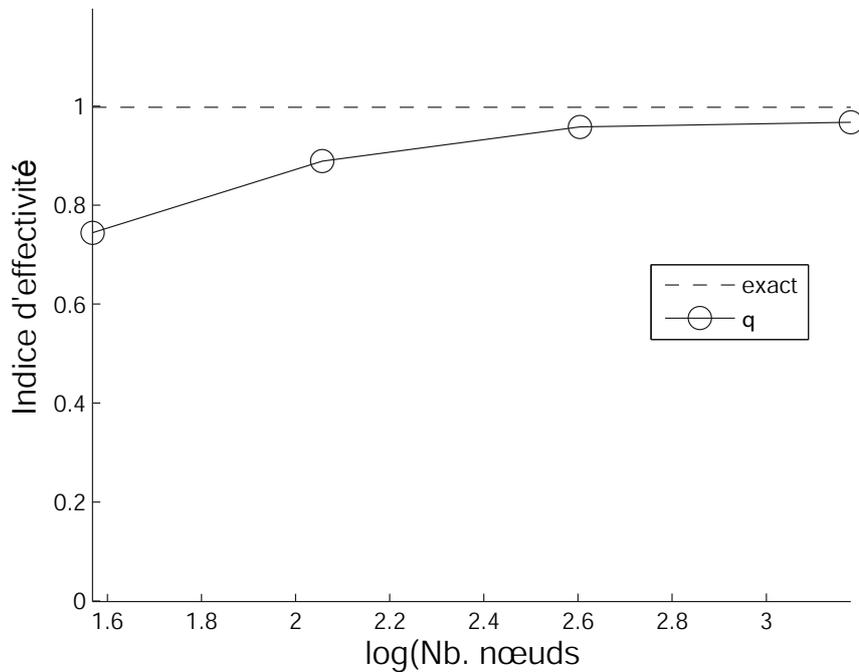


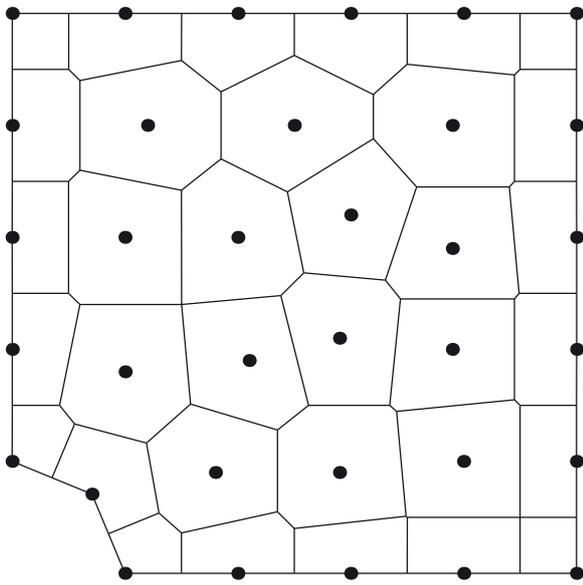
Figure 1.18. Indices d'efficacité pour le problème de la plaque avec le trou

figure 1.20. Les données matérielles de Johnson-Cook suivantes ont été utilisées (acier inoxydable 304 L) : $A = 253$ MPa, $B = 685$ MPa, $C = 0,0973$ $n = 0,312$, $m = 2,044$, $\dot{\epsilon}_0^p = 1$; $T_0 = 296$ K, $T_f = 1698$ K, $E = 210$ GPa, $\nu = 0,33$, $c = 500$ J/kgK, $k = 5,86$ J/JgmK, $\rho = 7850$ kg/m³, la vitesse initiale du poinçon est de $V = 11$ m.s⁻¹.

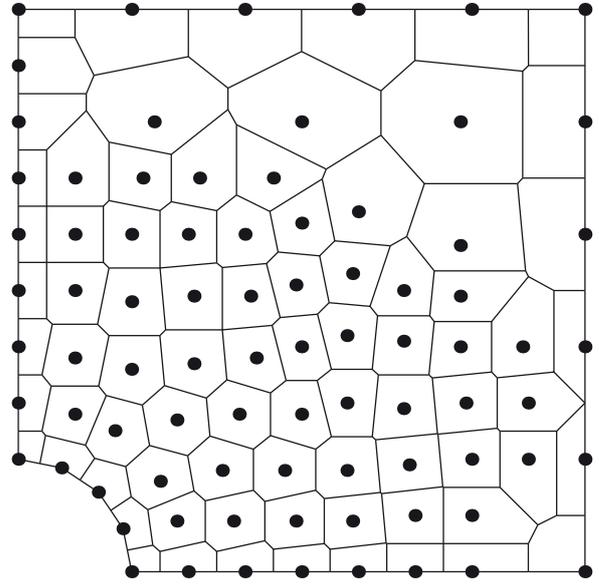
Le but de cet exemple est d'illustrer la capacité de la procédure de raffinement adaptative à capturer les détails des bandes de cisaillement, lorsque différents paramètres géométriques des outillages varient. Dans ce problème, les couplages thermomécaniques sont importants, et la déformation se localise dans des bandes de cisaillement. Deux tests ont été effectués en utilisant les paramètres géométriques suivants : $R = 5$ mm, $L = 20$ mm, $H = 10$ mm et $j = 0,2$ mm.

Dans un premier test, des rayons R_1 et R_2 ont été utilisés (voir figure 1.20). La figure 1.21 montre les différentes séquences de raffinement adaptatif au cours de la progression des bandes de cisaillement. La figure 1.22 montre l'évolution des cellules de Voronoï contraintes dans une moitié de la pièce au cours du temps. Dans cet exemple, la bande de cisaillement se développe parallèlement à la vitesse de poinçonnage.

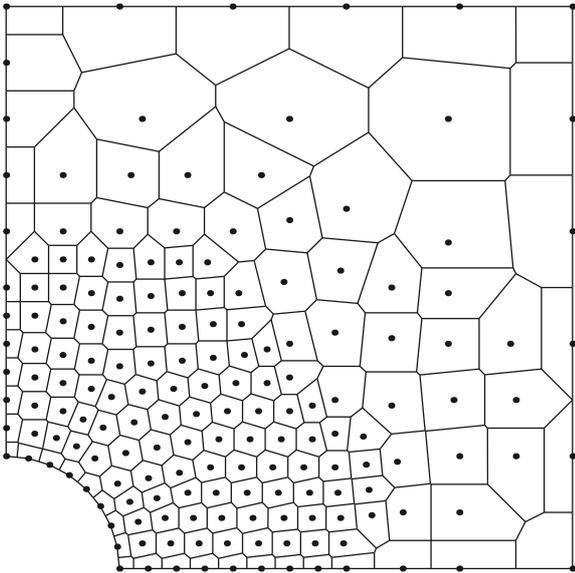
Dans un second test des rayons $R_1 = 0,5$ mm et $R_2 = 0,5$ mm ont été utilisés. Nous remarquons que l'augmentation des rayons d'outil et de matrice induisent une inclinaison des bandes de cisaillement. Ce phénomène entraîne en pratique une qualité de découpe inférieure, car la zone plastifiée est plus importante. La procédure présentée permet de capturer ce phénomène comme on le voit sur le figure 1.23.



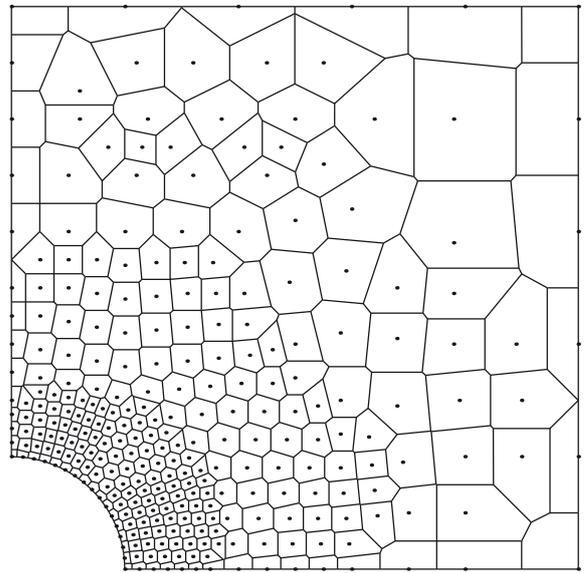
Erreur estimée : 11,3 %
 Erreur exacte : 15,2 %



Erreur estimée : 7,2 %
 Erreur exacte : 8,1 %



Erreur estimée : 4,41 %
 Erreur exacte : 4,60 %



Erreur estimée : 2,88 %
 Erreur exacte : 3,00 %

Figure 1.19. Raffinage adaptatif pour le problème de la plaque trouée

1.4.5. Problèmes en grandes transformations : compression d'un lopin élastoplastique 2D et 3D

Dans cet exemple, un lopin élastoplastique est comprimé à une vitesse de $V = 11 \text{ m.s}^{-1}$ (voir figure 1.24). Le modèle utilisé est un modèle de Johnson-Cook (acier inoxydable 304 L).

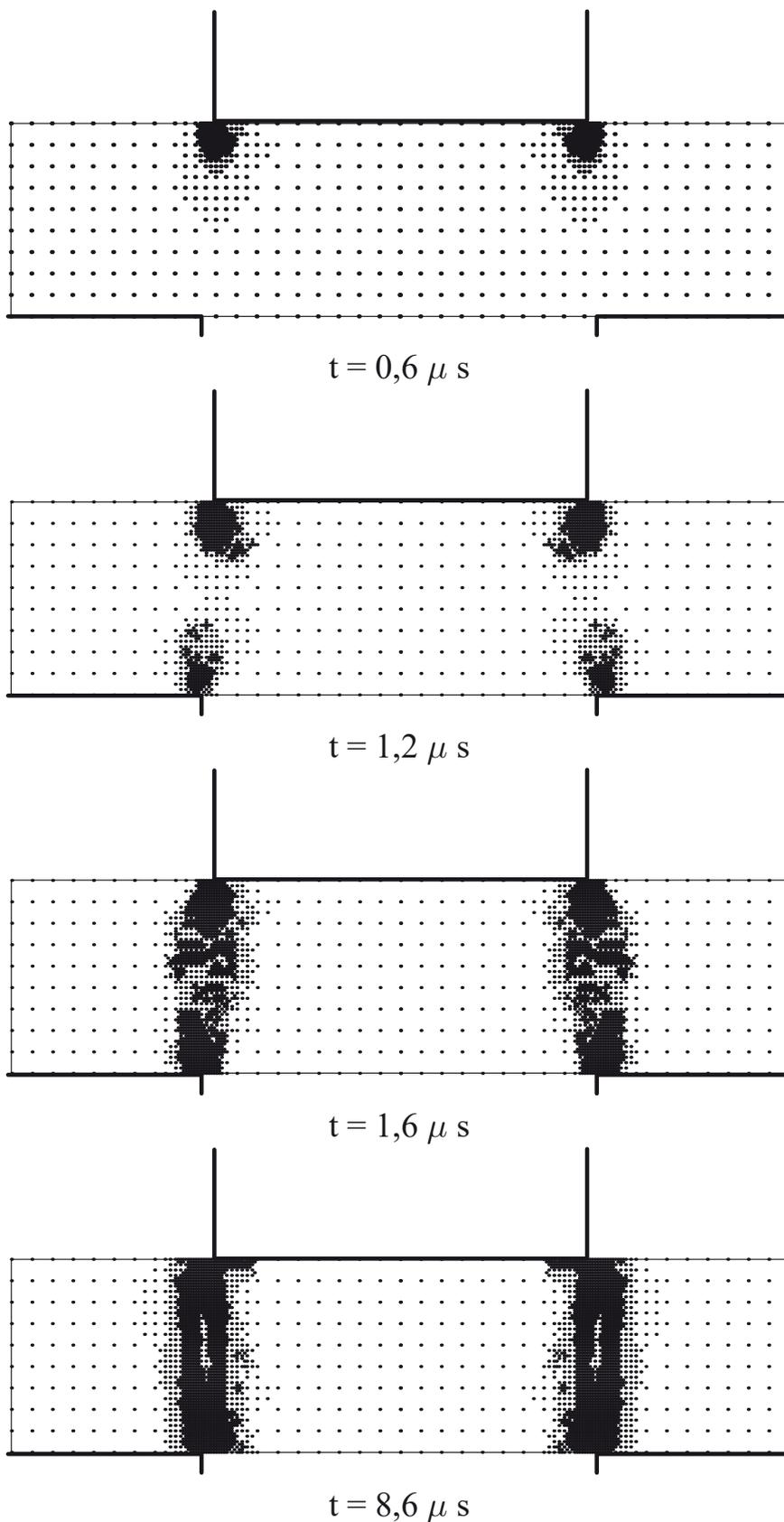


Figure 1.21. Poinçonnage grande vitesse ($R_1 = 0 \text{ mm}$ et $R_2 = 0 \text{ mm}$); raffinement adaptatif pendant la formation de la bande de cisaillement

Un autre point essentiel non développé ici de l'interpolant *meshless* est sa capacité à être utilisé dans la simulation des phénomènes en grandes déformations, dans le

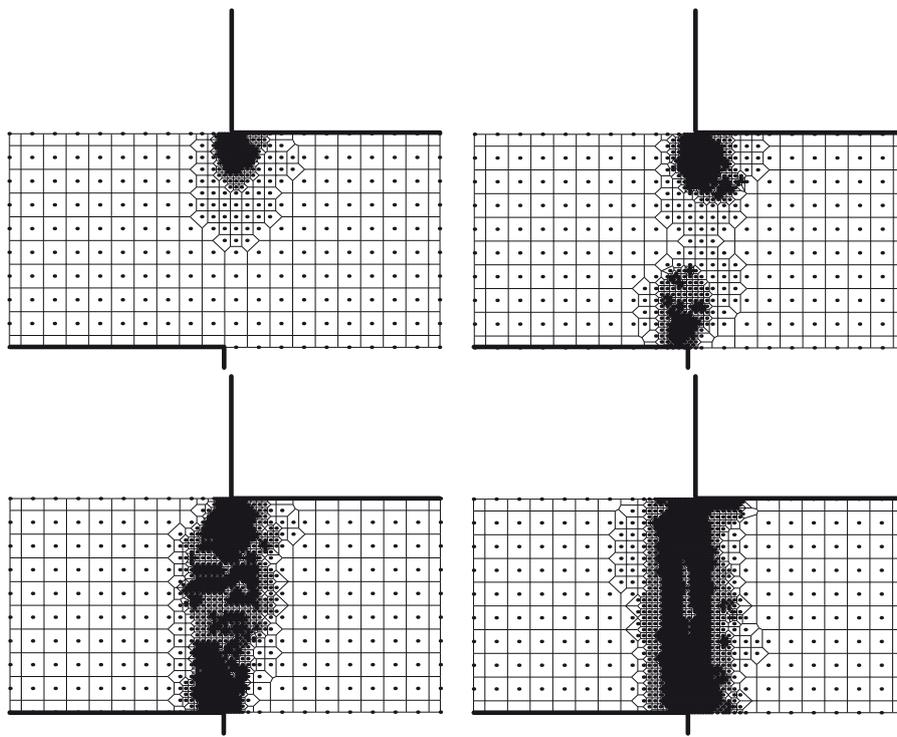


Figure 1.22. Poinçonnage grande vitesse ($R_1 = 0$ mm et $R_2 = 0$ mm); raffinement adaptatif pendant la formation de la bande de cisaillement (cellules de Voronoï contraintes)

cadre d'une description lagrangienne actualisée, sans dégradation majeure de la qualité de la solution [LIU 02]. De plus, en utilisant une intégration nodale, comme décrit plus haut, les variables internes restent attachées aux nœuds. En cas de raffinement, nous procédons par interpolation des variables d'état en utilisant l'équation [1.4].

De plus, comme dans les autres méthodes sans maillage, on peut attendre que la direction de propagation des fissures ou des bandes de cisaillement ne soit pas influencée de manière significative par la distribution nodale [LIU 02]. Cet aspect constitue un réel avantage par rapport à la méthode des éléments finis. L'analyse de la propagation des fissures et des bandes de cisaillement dans un modèle thermo-élasto-viscoplastique est un des points en cours de travaux, ainsi que l'extension d'indicateurs d'erreur pour les analyses lagrangiennes en non linéaire.

La méthode C-NEM, basée sur une interpolation de type éléments naturels, permet l'imposition directe des conditions aux limites et ne nécessite pas de définir de support pour le domaine d'influence des fonctions de forme, celui-ci étant fixé par la position arbitraire des voisins naturels du nœud associé à la fonction de forme. Ces aspects permettent alors d'exploiter pleinement les propriétés attractives des méthodes sans maillage :

- a) la possibilité de gérer les problèmes en grandes transformations dans le cadre d'une formulation réactualisée sans détérioration majeure de la qualité ;
- b) la possibilité de déplacer une interface dans un nuage de nœuds arbitraire, permettant l'analyse des problèmes avec discontinuités fixes ou mobiles ;

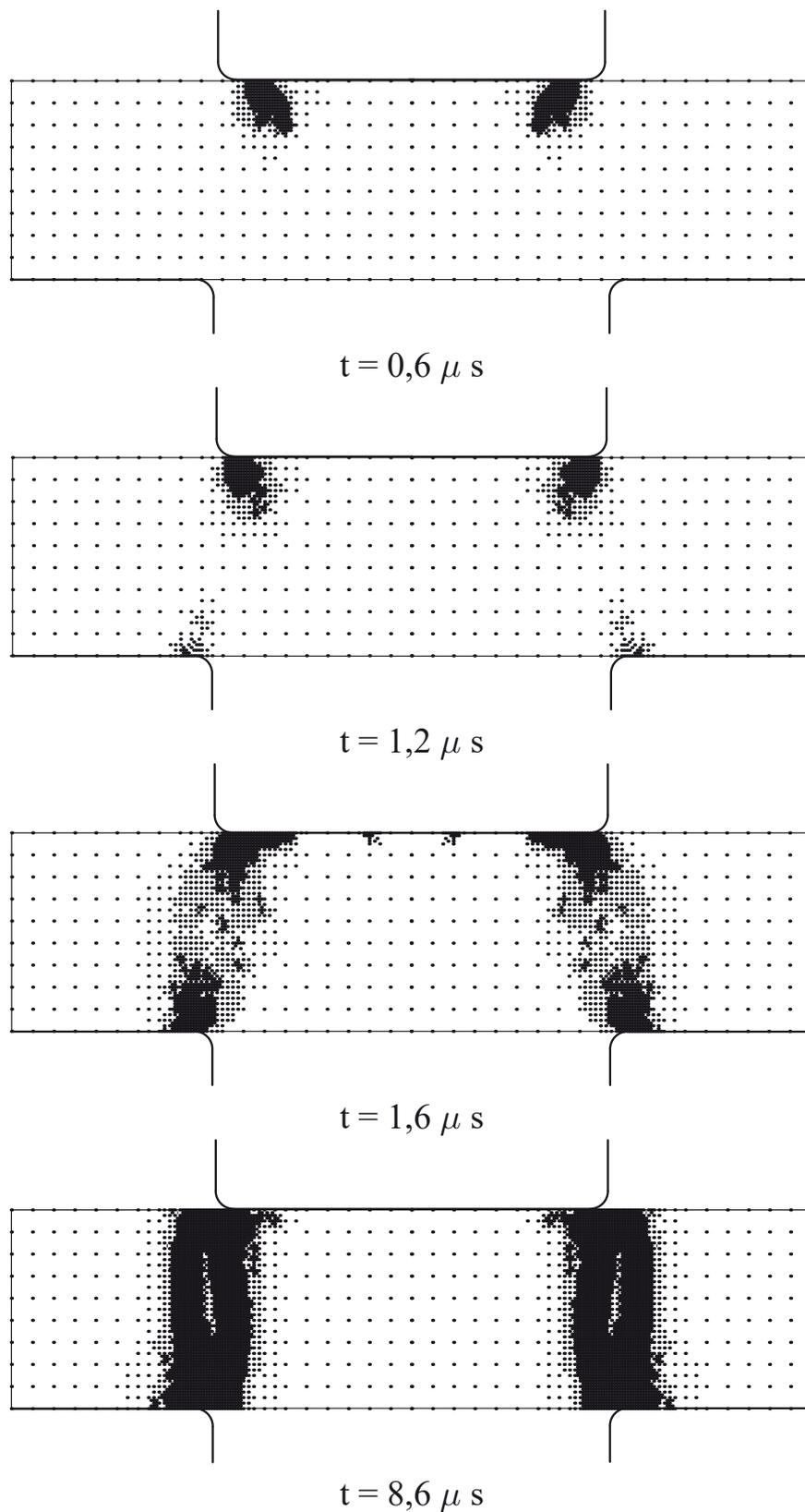


Figure 1.23. Poinçonnage grande vitesse ($R_1 = 0,5 \text{ mm}$ et $R_2 = 0,5 \text{ mm}$); raffinement adaptatif pendant la formation de la bande de cisaillement

c) la possibilité d'ajouter ou supprimer des nœuds dans une procédure de raffinement adaptatif, sans avoir à adapter la taille du support des fonctions de forme.

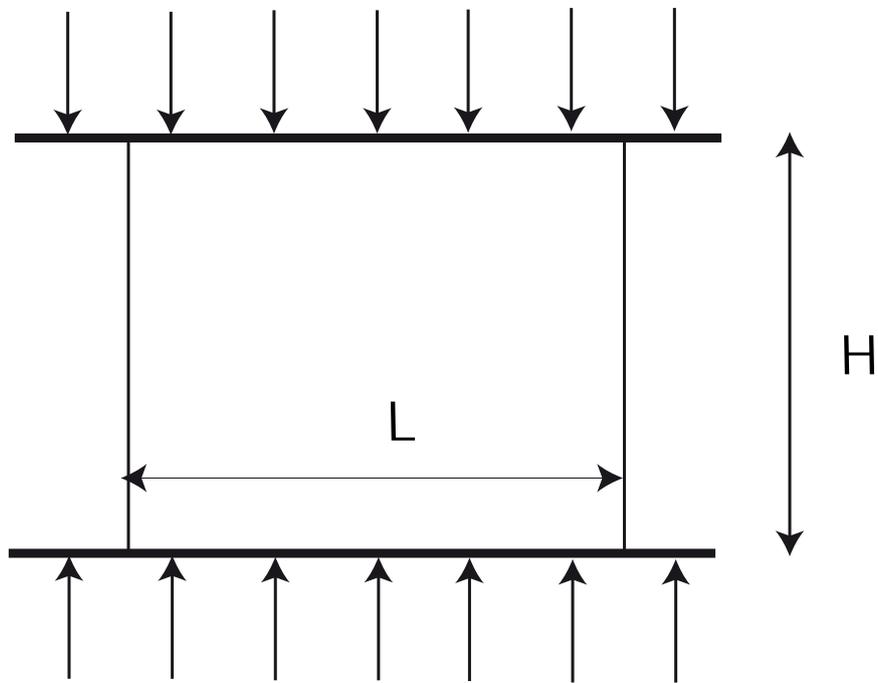


Figure 1.24. Géométrie pour le problème de compression de lopin

Les différents aspects de la méthode C-NEM offrent un outil robuste et permettent d'envisager de nouvelles approches alternatives aux techniques utilisées dans la méthode des éléments finis.

1.6. Bibliographie

- [BAB 79] BABUŠKA I., RHEINBOLDT W.C., « Adaptive approaches and reliability estimations in Finite Element analysis », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 17/18, 519-40 1979.
- [BAB 86] BABUŠKA I., ZIENKIEWICZ O.C., GAGO A., LIVEIRA E.R., *Accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations*, John Wiley, New York, 1986.
- [BEL 94] BELYTSCHKO T., Lu Y.Y., GU L., « Element-free Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 229-256,1994.
- [BEL 98] BELYTSCHKO T., LIU W.K., SINGER M., « On adaptivity and error criteria for meshfree methods », dans P. Ladevèze et J.T. Oden (dir.), *Advances in Adaptive Computational methods in Mechanics*, Elsevier, Amsterdam, p. 217(228, 1998.
- [BRA 83] BRANDES E.A., *Smithells metals reference book*, Butterwoths and Co. Ltd., Londres, 1983.
- [CAR 59] CARSLAW H., JAEGER J., *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [CHE 01] CHEN J.S., WU C.T., YOON Y., « A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 435-466, 2001.

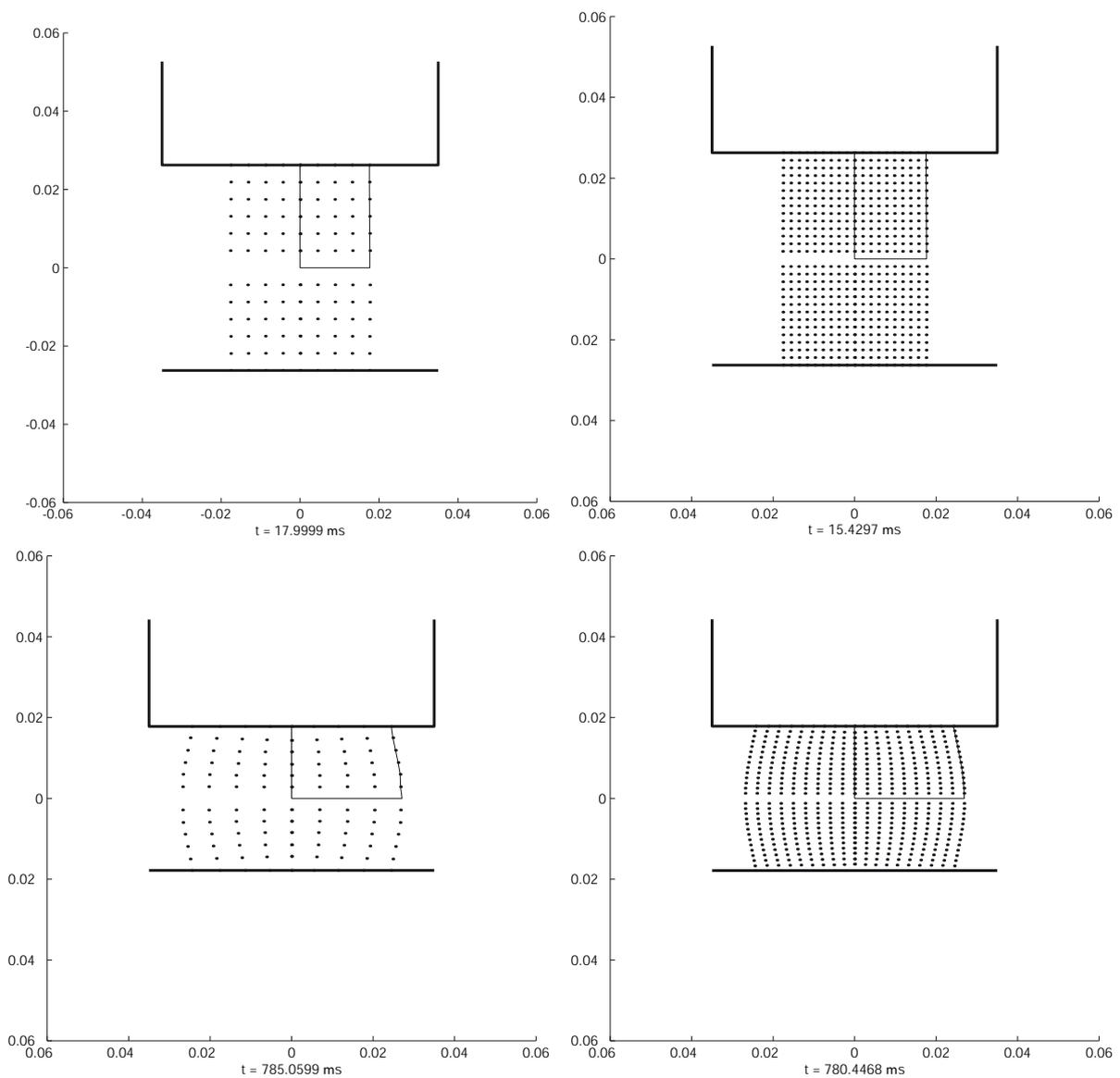


Figure 1.25. Compression d'un lopin : nuages de nœuds ; taux de compression de : 0 %, 32

- [CHE 02] CHEN J.S., YOON Y., WU C.T., « Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods », *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 53, 2587-2615, 2002.
- [CHU 98] CHUNG H.J., BELYTSCHKO T., « An error estimate in the EFG method », *Computational Mechanics*, 21, 91-100, 1998.
- [CUE 02] CUETO E., CEGONINO J., CALVO B., DOBLARÉ M., « On the imposition of essential boundary conditions in Natural neighbor Galerkin Methods », *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19, 361-376, 2002.
- [DEL 34] DELAUNAY B., « Sur la sphère vide. A la memoire de Georges Voronoï », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennyh Nau.* 7, 793-800, 1934
- [DOL 99] DOLBOW J., BELYTSCHKO T., « Numerical integration of the Galerkin weak forme in meshfree methods », *Computational Mechanics*, 23, 219-230, 1999.

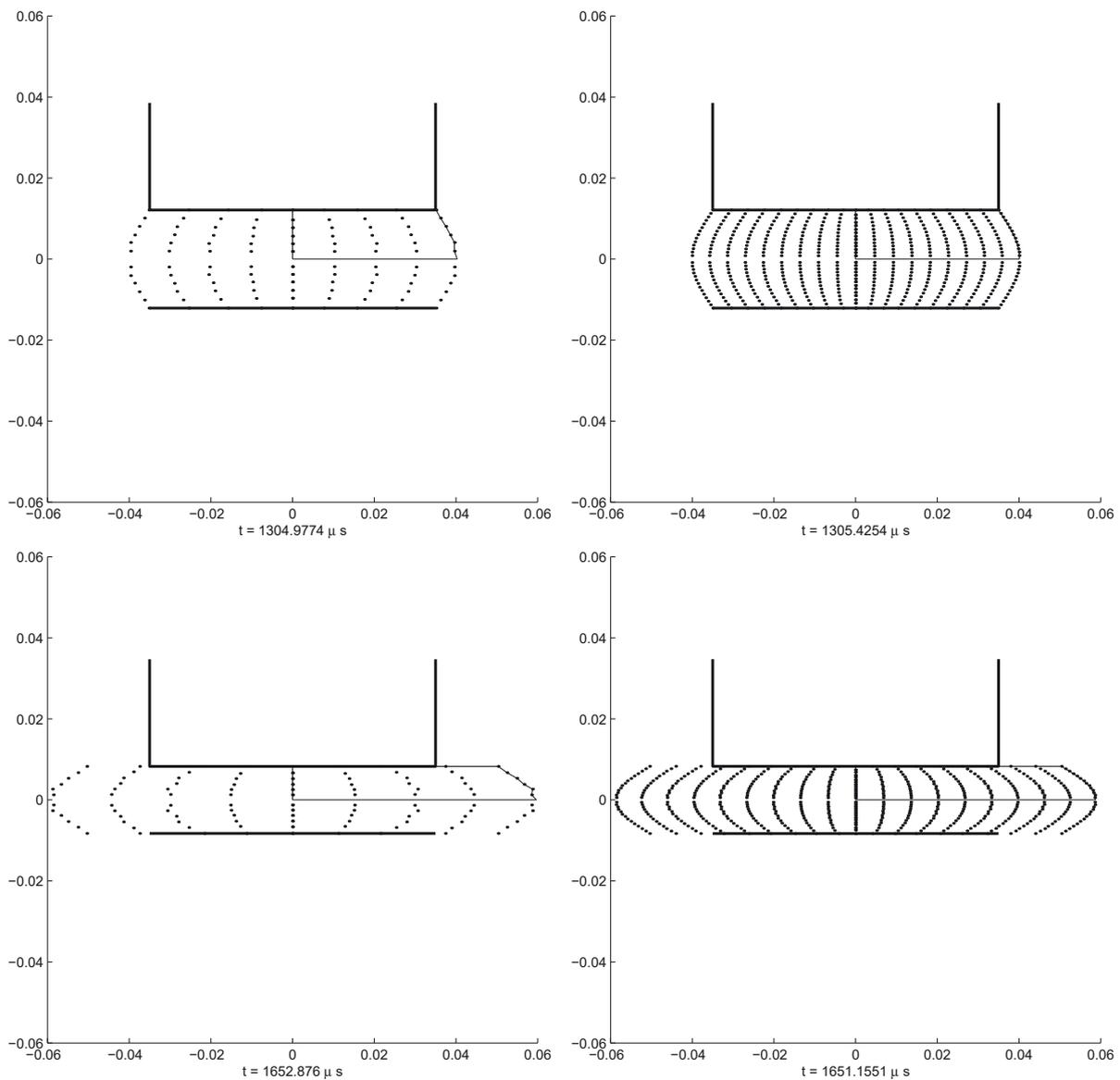


Figure 1.26. Compression d'un lopin : nuages de nœuds ; taux de compression de : 55 %, 70 %

- [EDE 01] EDELSBRUNNER H., *Geometry and topology for mesh generation*, Cambridge Press University, Cambridge, 2001.
- [GAL 96] GALLIMARD L., LADEVÈZE P., PELLE J.P., « Error estimation and adaptivity in elasto-plasticity », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 39, 189-217, 1996.
- [GON 04] GONZALEZ D., CUETO E., MARTINEZ M.A., DOBLARÉ M., « Numerical integration in Natural neighbor Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60/12, 2077-2104, 2004.
- [JIN 89] JIN H., BERSPANG L., LARSSON R., WIBERB N.-E., « Mesh generation and mesh refinement procedures for computational plasticity », dans D.R.J. Owen *et al.* (dir), *Computational Plasticity II : Models, software and applications*, Pineridge Press, Swansea, p. 347-357, 1989.

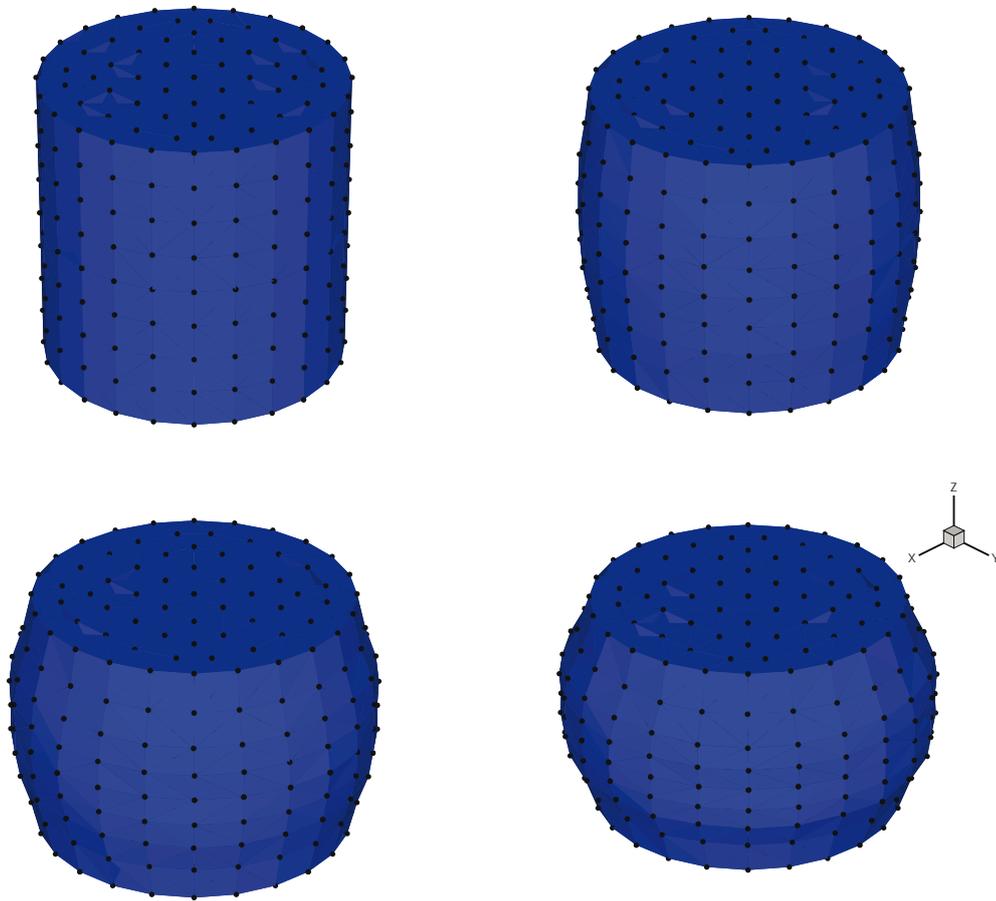


Figure 1.27. *Compression d'un lopin cylindrique 3D*

- [JOH 92] JOHNSON G.C., HANSBO P., « Adaptive finite element methods in computational mechanics », *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 101, 143-181, 1992.
- [KRY 96] KRYSL P., BELYTSCHKO T., « Element-free Galerkin : convergence of the continuous and discontinuous shape functions », *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 148, 257-277, 1996.
- [LAD 86] LADAVÈZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.P., « Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis », dans I. Babuška *et al.* (dir.), *Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations*, John Wiley, New York, p. 181-203, 1986.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., PELLE J.-P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermès, Paris, 2001.
- [LEE 94] LEE N.-S., BATHE K.-J. « Error indicators and adaptive remeshing in large deformation analysis », *Finite Elem. Anal. Des.*, 16,99-139, 1994.
- [LEE 03a] LEE C.K., ZHOU C.E., « On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method : Part I : stress recovery and a posteriori error estimation », *Computer and Structures*, 82/4-5, 429-443, 2003.
- [LEE 03b] LEE C.K., ZHOU C.E., « On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method : Part II : adaptive refinement », *Computer and Structures*, 82/4-5,

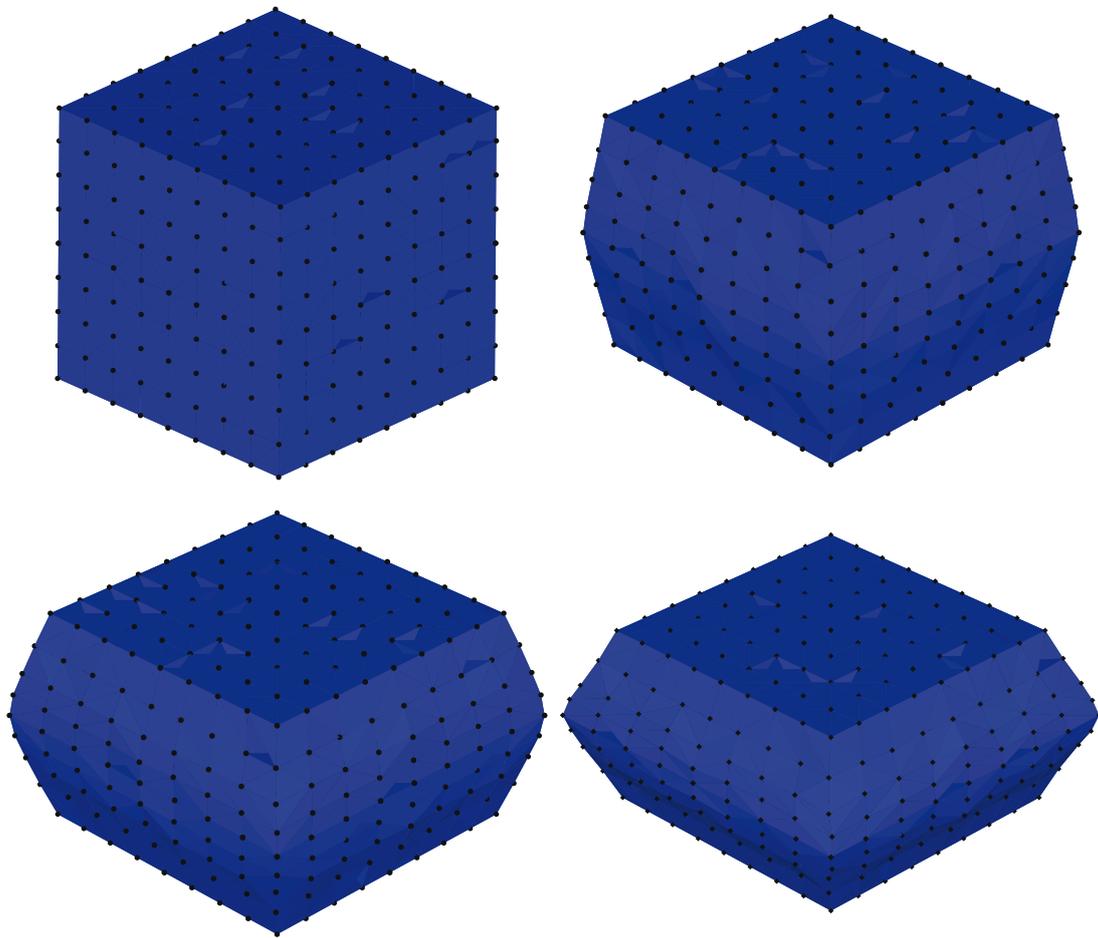


Figure 1.28. *Compression d'un lopin parallélépipédique 3D*

413–428, 2003.

- [LIU 95] LIU W.K., JUN S., ZHANG Y.F., « Reproducing Kernel Particle Methods », *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 21, 1081-1106, 1995.
- [LIU 97] LIU W.K., URAS R.A., CHEN Y., « Enrichment of the finite element method with the reproducing kernel particle method », *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 64, 861-870, 1997.
- [LIU 02] Li S., LIU W.K., ROSAKIS A., BELYTSCHKO T., HAO W., « Mesh-free Galerkin simulations of dynamic shear propagation and failure mode transition. science and engineering », *International Journal of Plasticity*, 39, 1213-1240, 2002.
- [LUC 77] LUCY L.B., « A numerical approach to the testing of fusion process », *The Astronomic Journal*, 88, 1013-1024, 1977.
- [LUC 02] LU H., CHEN J.S., « Adaptive meshfree particle method », *Lecture Note in Computational Science and Engineering*, 26, 251-267, 2002.
- [MEL 96] MELENK J.M., BABUŠKA I., « The partition of unity finite element method : basic theory and applications », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289-314, 1996.

- [NAY 92] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P., « Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements », *Computational Mechanics*, 10, 307-318, 1992.
- [ORG 96] ORGAN D., FLEMING M., TERRY T., BELYTSCHKO T., « Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency », *New Advances in Adaptive Computational Mechanics*, 19, 1-11, 1996.
- [ORT 91] ORTIZ M., QUIGLEY J.J., « Adaptive mesh refinement in strain localization problems », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 90, 781-804, 1991.
- [PER 96] PERIĆ D., HOCHARD C., DUTKO M., OWEN D.R.J., « Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 137, 331-344, 1996.
- [PER 99] PERIĆ D., VAZ M., OWEN D.R.J., « On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains : computational issues and industrial applications », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 176, 279-312, 1999.
- [SAM 95] SAMBRIDGE M., BRAUN J., MCQUEEN M., « Geophysical parameterization and interpolation of irregular data using natural neighbors », *Geophys. I. J. Int.*, 122, 837-857, 1995.
- [SEI 88] SEIDEL R., « Constrained Delaunay triangulations and Voronoï diagrams with obstacles », *1978-1988 Ten Years IIG*, 178-191, 1988.
- [SHE 98] SHEWCHUCK J.R., « Tetrahedral mesh generation by delaunay refinement », *Proceedings of the Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, Minneapolis, Minnesota, p. 86-95, Association for Computing Machinery, 1988.
- [SHE 00] SHEWCHUCK J.R., « Sweep algorithms for constructing higher-dimensional constrained Delaunay triangulations », *Proceedings of the Sixteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, Hong-Kong, p. 350-359, Association for Computing Machinery, 2000.
- [SIB 80] SIBSON R., « A vector Identity for the Dirichlet tessellations », *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 87, 151-155, 1980.
- [SUK 98] SUKUMAR N., MORAN B., BELYTSCHKO T., « The natural elements method in solid mechanics », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 839-887, 1998.
- [SUK 01a] SUKUMAR N., CHOP D., MOËS N., BELYTSCHKO T., « Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 90, 6183-6200, 2001.
- [SUK 01b] SUKUMAR N., MORAN B., SEMENOV Y., BELIKOV V.V., « Natural neighbor Galerkin methods », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 207-219, 2001.
- [TIM 70] TIMOSHENKO S.P., GOODIER J.N., *Theory of elasticity*, 3^e éd., McGraw Hill, New York, 1970.
- [VOR 08] VORONOÏ G.M., « Nouvelles applications des paramètres continus la théorie des formes quadratiques, Deuxième Mémoire », *J. Reine Angew. Math.*, 134, 198-287, 1908.

- [YOU 03] YOU Y., CHEN J.S., LU H., « Filters, Reproducing Kernel, and Adaptive Meshfree Method », *Computational mechanics*, 31, 316-326, 2003.
- [YOU 04] YOO J., MORAN B., CHEN J.-S., « Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60,861-890, 2004.
- [YVO 04a] YVONNET J., RYCKELYNCK D., LORONG P., CHINESTA F., « A new extension of the natural element method for non convex and dscontinuous problems, the constrained natural element method (C-NEM) », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60/8, 1451-1474, 2004.
- [YVO 05a] YVONNET J., RYCKELYNCK D., LORONG P., CHINESTA F., « The meshless constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces », *International Journal of Thermal Sciences*, 44, 559-569, 2005.
- [YVO 05b] YVONNET J., LORONG P., RYCKELYNCK D., CHINESTA F., « Simulating dynamic thermo-elasto-plasticity in large transformations with adaptive refinement in the natural element method : application to shear banding », *International journal of forming processes*, 8, special Issue 2005, 347-363, 2005.
- [YVO a paraître] YVONNET J., COFFIGNAL G., RYCKELYNCK D., LORONG P., CHINESTA F., « A simple error indicator for meshfree methods based on natural neighbors », *Computer and Structures*, à paraître.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis », *Computational Mechanics*, 21, 91-100, 1987.
- [ZIE 99] ZIENKIEWICZ O.C., BOROOMAND B., ZHU J.Z., « Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I : Adaptivity in linear problems », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 176 :111-125, 1999.