



**HAL**  
open science

# Identification d'un processus autorégressif gaussien stable par la méthode de moyennisation logarithmique dans le cas réel

Faouzi Chaabane, Hamdi Fathallah

► **To cite this version:**

Faouzi Chaabane, Hamdi Fathallah. Identification d'un processus autorégressif gaussien stable par la méthode de moyennisation logarithmique dans le cas réel. 2006. hal-00079076v1

**HAL Id: hal-00079076**

**<https://hal.science/hal-00079076v1>**

Preprint submitted on 8 Jun 2006 (v1), last revised 20 Jun 2006 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Identification d'un processus autorégressif gaussien stable par la méthode de moyennisation logarithmique dans le cas réel

Faouzi Chaabane\* et Hamdi Fathallah †

juin 2006

## Résumé

Dans ce travail, on considère un modèle autorégressif gaussien stable à temps continu unidimensionnel et on lui applique les théorèmes limites par moyennisation logarithmique obtenus pour des martingales locales continues à temps continu. On construit alors un estimateur de la covariance du bruit  $\sigma^2$  et un autre estimateur de  $\theta$  autre que celui des moindres carrés. En exploitant la méthode de pondération, on améliore les vitesses de convergence de ces nouveaux estimateurs.

## Identification of a stable gaussian autoregression process by logarithmic averaging method in the real case

### Abstract

In the present work, we consider a stable one-dimensional gaussian autoregressive model in continuous time. Using the limit theorems with logarithmic averaging obtained for continuous local martingales, we construct then an estimator of the noise covariance  $\sigma^2$  and an estimator of  $\theta$  different of the one of the least squares estimator. By exploiting the weighting method we ameliorate the convergence rates of these new estimators.

**Keywords** : Martingale ; Weight ; Almost-sure central limit theorem ;  
Logarithmic central limit theorem ; law of iterated logarithm.

---

\*Equipe d'Analyse Stochastique et Modélisation Statistique, Faculté des Sciences de Bizerte, 7021 Jarzouna (Tunisie). Tel :+21672590613; Fax :+21672590566, E-mail address :faouzi.chaabane@fsb.rnu.tn.

†Laboratoire LMV, Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines, 45 Avenue des Etats-Unis Batiment Ferma 78035 Versailles (France). Tel :+33139253629; Fax :+33139254645, E-mail address :hamdi.fathallah@math.uvsq.fr

# 1 Introduction

Le but de ce travail est d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif gaussien stable à temps continu unidimensionnel. Etant donné un mouvement brownien standard réel  $B = (B_t, t \geq 0)$ . On définit le processus autorégressif  $X = (X_t, t \geq 0)$  avec  $X_0 = 0$  par la relation :

$$X_t = \theta \int_0^t X_s ds + \sigma B_t; \quad t \geq 0, \quad (1)$$

avec  $\theta \leq 0$  et  $\sigma$  un paramètre réel.

On désigne par  $\tilde{\theta}_t$  l'estimateur des moindres carrés pondéré de  $\theta$  défini par

$$\tilde{\theta}_t = P_t^{-1} \int_0^t \omega_s X_s dX_s, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

correspondant au poids  $(\omega_s)$  donné par

$$\omega_s = s^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\right\}; \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad (3)$$

avec  $P_t = \int_0^t \omega_s X_s^2 ds$  et par  $\bar{\theta}_t = \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{\theta}_s ds$  son moyennisé.

On remarque que pour  $\omega_s = 1$  on obtient l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}_t$  de  $\theta$  défini par

$$\hat{\theta}_t = (\zeta_t)^{-1} \int_0^t X_s dX_s, \quad t \geq 0, \quad \text{avec} \quad \zeta_t = \int_0^t X_s^2 ds. \quad (4)$$

Dans [3], dans le cas multidimensionnel, Darwich montre que cet estimateur vérifie la loi du logarithme itéré (LLI). De façon précise, on a

$$|\hat{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log \log t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s..$$

Ce résultat, dans le cas unidimensionnel, découle de la LLI pour les martingales réelles continues (voir [6]). Les théorèmes limites par moyennisation logarithmique permettent entre autre de montrer des résultats aussi bien pour l'estimateur des moindres carrés que l'estimateur pondéré de type

\* Théorème de la limite centrale presque-sûre

$$\text{TLCPS : } \frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{s} \delta_{\{\sqrt{s}(\hat{\theta}_s - \theta)\}} \implies \mathcal{N}(0, 2\theta) \quad p.s..$$

Avec  $(\implies)$  dénote la convergence en loi.

La convergence en moyenne d'ordre deux associée au TLCPS permet d'une part de construire un estimateur de  $\sigma$  et d'autre part de donner un autre estimateur de  $\theta$

$$* \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\log t} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$$* \quad \check{\theta}_t = \frac{1}{2 \log t} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

On donnera par la suite les vitesses de convergence en loi et presque sûre de l'estimateur  $\check{\theta}_t$  de  $\theta$ . La méthode de pondération nous permettra d'améliorer les vitesses de convergence de ces estimateurs. les principaux résultats seront énoncés au paragraphe 2 et leurs preuves seront données au paragraphe 4. Le paragraphe 3 sera consacré à la donnée de quelques outils de démonstration.

## 2 Enoncé des principaux résultats

### 2.1 Cas sans pondération ( $\omega_s = 1$ )

**Théorème 2.1** *Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$  le régresseur stochastique défini par (1). Alors on a les résultats suivants*

1. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

$$TLCPS : \quad \frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{s} \delta_{\{\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\theta) \quad p.s..$$

2. *La loi forte quadratique*

$$i) \quad \frac{1}{\log t} \int_0^t \zeta_s^2 (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \frac{ds}{s^2} \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$$ii) \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\log t} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

iii) *Si de plus on suppose que les observations  $(X_t, t \geq 0)$  vérifient l'hypothèse suivante*

$$(H1) \quad \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds = \frac{\sigma^2}{2\theta} + \mathbf{o}\left((\log \log t)^{-1}\right) \quad p.s., \quad (5)$$

*on obtient*

$$\check{\theta}_t = \frac{1}{2 \log t} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

**Théorème 2.2** *On se place dans le cadre du théorème 2.1 et en renforçant l'hypothèse (H1) de la manière suivante*

$$(H2) \quad \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds = \frac{\sigma^2}{2\theta} + \mathbf{o}\left((\log \log t)^{-1} (\log t)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad p.s., \quad (6)$$

*on obtient*

1. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$TLCL : \quad \sqrt{\log t} \left( \frac{1}{2 \log t} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds - \theta \right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, (2\theta)^2).$$

2. La loi du logarithme itéré logarithmique

$$LLIL : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{\sqrt{\log \log \log t}} \left| \frac{1}{2 \log t} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds - \theta \right| = 2\theta\sqrt{2} \quad p.s..$$

## 2.2 Cas avec pondération

**Théorème 2.3** Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$  le processus autorégressif gaussien à temps continu défini par la relation (1). Alors l'estimateur de moindres carrés pondéré  $\tilde{\theta}_t$  de  $\theta$  donné par la relation (2) ainsi son moyennisé  $\bar{\theta}_t$  convergent au sens presque-sûr.

De façon précise, pour  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ , on a

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log t}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s..$$

Si de plus on suppose que  $2\alpha - 1 \leq \alpha' < \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}$ , on a

$$|\bar{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log \log t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s..$$

**Théorème 2.4** Sous les hypothèses du théorème 2.3, on a les résultats suivants

1. Théorème de la limite centrale presque-sûre

$$TLCPS : \frac{1 - \alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{s^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \implies \mathcal{N}(0, 2\theta) \quad p.s..$$

2. La loi forte quadratique

$$i) \quad \frac{1 - \alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{U_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$$ii) \quad \tilde{\sigma}_t^2 = \frac{4(1 - \alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

iii) Si de plus on suppose que les observations  $(X_t, t \geq 0)$  vérifient l'hypothèse suivante

$$(H3) \quad \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-1}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} \leq \alpha' < \alpha,$$

on dégage un estimateur fortement consistant de  $\theta$  à savoir

$$\check{\theta}_t = \frac{1 - \alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

**Théorème 2.5** Soit  $X = (X_t, t \geq 0)$  le processus autorégressif gaussien à temps continu satisfaisant l'équation (1). Supposons que les observations  $(X_t, t \geq 0)$  vérifient l'hypothèse suivante

$$(H4) \quad \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-1}) \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \alpha' < 3\alpha - 2.$$

Alors, on obtient

1. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$TLCL : t^{\frac{1-\alpha}{2}} \left( \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds - \theta \right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 4\theta^2(1-\alpha)).$$

2. *La loi du logarithme itéré logarithmique*

$$LLIL : \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-\alpha}}{\sqrt{\log \log t^{1-\alpha}}} \left| \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds - \theta \right| = \sqrt{2(1-\alpha)} 2\theta \quad p.s..$$

### 3 Les outils des démonstrations

Au début de ce paragraphe, on introduit  $\tilde{M} = (\tilde{M}_t, t \geq 0)$  la martingale locale réelle continue définie par

$$\tilde{M}_t = \int_0^t \omega_s X_s dB_s, \quad t \geq 0,$$

dont le processus croissant prévisible  $\langle \tilde{M} \rangle = (\langle \tilde{M} \rangle_t, t \geq 0)$  est donné par

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \int_0^t \omega_s^2 X_s^2 ds. \quad (7)$$

D'une part, d'après (1) et (2), on a

$$\tilde{M}_t = \sigma^{-1} P_t (\tilde{\theta}_t - \theta); \quad t \geq 0. \quad (8)$$

D'autre part, on a d'après les relations (1) et (4)

$$M_t = \sigma^{-1} \zeta_t (\hat{\theta}_t - \theta); \quad t \geq 0, \quad (9)$$

où  $M = (M_t, t \geq 0)$  est la martingale locale réelle continue définie par

$$M_t = \int_0^t X_s dB_s, \quad t \geq 0,$$

dont le processus croissant prévisible  $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t, t \geq 0)$  n'est autre que le processus  $\zeta = (\zeta_t, t \geq 0)$  introduit dans la relation (4).

Afin de simplifier les preuves des principaux résultats, on étudiera les comportements asymptotiques des processus  $(\langle M \rangle_t, t \geq 0)$ ,  $(\langle \tilde{M} \rangle_t, t \geq 0)$  et  $(P_t, t \geq 0)$ . On donnera ensuite quelques propriétés de la pondération  $(\omega_t)$ .

Le lemme suivant (voir [4]) donne le comportement de la variation quadratique prévisible de la martingale  $M$ .

**Lemme 3.1** *Soit le processus  $(X_t, t \geq 0)$  défini par (1). Alors*

$$\frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (10)$$

Pour  $(\omega_t)$ , le poids défini par (3), on introduit les deux processus suivants

$$V_t = \left( \int_0^t \omega_s^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad U_t = \int_0^t \omega_s ds, \quad t \geq 0.$$

On a alors les lemmes suivants

**Lemme 3.2** *Le poids  $(\omega_t)$  satisfait les propriétés suivantes :*

$$P_1) \quad t^{-\alpha} \omega_t^{-1} U_t = 2 + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}), \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$P_2) \quad t^{-\alpha} \omega_t^{-2} V_t^2 = 1 + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}), \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$P_3) \quad \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \log V_t^2 = \mathbf{o}(\log t), \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$P_4) \quad \int_0^t \frac{V_s^2}{U_s^2} ds - \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} = \mathbf{o}(\log t), \quad (t \rightarrow \infty).$$

**Lemme 3.3** *On suppose que les observations  $(X_s, s \geq 0)$  vérifient l'hypothèse (H3) du théorème 2.4 suivante*

$$\frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-1}) \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq \alpha' < \alpha.$$

Alors, on a

$$i) \quad \frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{V_t} - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-\alpha}) \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

$$ii) \quad \frac{P_t}{U_t} - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-\alpha}) \text{ p.s.}, \quad (t \rightarrow \infty).$$

La preuve de ces deux lemmes est donnée dans l'annexe.

## 4 Démonstration des principaux résultats

### Preuve du théorème 2.1

1. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre pour le couple  $(M, V)$  avec  $V_t^2 = t$  (voir théorème 1 dans [2]), on obtient

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{ds}{s} \delta_{\{\frac{M_s}{\sqrt{s}}\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}) \quad \text{p.s.}$$

Vu les deux relations (9) et (10) on a

$$\frac{M_s}{\sqrt{s}} \sim \frac{\sigma}{2\theta} \sqrt{s} (\hat{\theta}_s - \theta) \quad \text{p.s.}, \quad (s \rightarrow \infty). \quad (11)$$

Soit

$$\Delta_t = \int_0^t \varphi\left(\frac{M_s}{\sqrt{s}}\right) \frac{ds}{s} - \int_0^t \varphi\left(\frac{\sigma}{2\theta} \sqrt{s} (\hat{\theta}_s - \theta)\right) \frac{ds}{s},$$

où  $\varphi$  est une fonction lipschitzienne continue.  
Grâce à l'équivalence (11), on a

$$(\log t)^{-1} |\Delta_t| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{ds}{s} \delta_{\{\frac{\sigma}{2\theta} \sqrt{s}(\hat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}).$$

Le résultat en découle.

2. i) D'après la relation (9), on a

$$M_s^2 = \sigma^{-2} \langle M \rangle_s^2 (\hat{\theta}_s - \theta)^2. \quad (12)$$

La loi forte quadratique une (LFQ1) appliquée à la martingale  $M$  normalisée par le processus  $(V_t = \sqrt{t}, t \geq 0)$  (voir théorème 3 dans [2]) donne

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{M_s^2 ds}{s} \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta} \quad p.s.. \quad (13)$$

Compte tenu de la relation (12), on voit que

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \langle M \rangle_s^2 (\hat{\theta}_s - \theta)^2 \frac{ds}{s^2} \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s.. \quad (14)$$

Ainsi le résultat est établi.

ii) En appliquant la loi forte quadratique deux (LFQ2) au couple  $(M, V)$  (voir théorème 3 dans [2]), on obtient

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{M_s^2}{\langle M \rangle_s^2} d\langle M \rangle_s \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la relation (9), on a

$$(\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (15)$$

D'une part, dans [3], Darwich a montré que

$$|\hat{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log \log t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (16)$$

D'autre part, vu que

$$\bar{\theta}_t - \theta = \frac{1}{t} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta) ds, \quad (17)$$



et en tenant compte de la relation (16), on obtient

$$|\bar{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log \log t}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (18)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & \left| (\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds - (\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \right| \leq \\ & \underbrace{(\log t)^{-2} (\bar{\theta}_t - \theta) \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t) X_s^2 ds}_{(C_t)} + \underbrace{(\log t)^{-1} (\bar{\theta}_t - \theta)^2 \int_0^t X_s^2 ds}_{(D_t)}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations (10) et (18), on obtient

$$C_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad D_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ce qui implique que

$$\left| (\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds - (\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \right| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (19)$$

Le résultat découle des convergences (15) et (19).

iii) La propriété (14) s'écrit

$$(\log t)^{-1} \left( \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds + \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 ds \right) \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la relation (16), on obtient

$$(\log t)^{-1} \int_{t_0}^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds = (\log t)^{-1} \int_{t_0}^t \mathcal{O}\left(\frac{\log \log s}{s}\right) \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds.$$

Vu l'hypothèse (H1), on a

$$(\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$(\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow 2\theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (20)$$

Par ailleurs, on voit que

$$\begin{aligned} & \left| (\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \theta)^2 ds - (\log t)^{-1} \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \right| \leq \\ & \underbrace{t(\log t)^{-1} (\bar{\theta}_t - \theta)^2}_{(G_t)} + \underbrace{2(\log t)^{-1} (\theta - \bar{\theta}_t) \int_0^t (\hat{\theta}_s - \bar{\theta}_t) ds}_{(H_t)}. \end{aligned}$$

D'après la relation (18), on obtient

$$G_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad H_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$\left| (\log t)^{-1} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds - (\log t)^{-1} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \right| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (21)$$

Alors, d'après les convergences (20) et (21), on conclut le résultat.

## Preuve du théorème 2.2

1. Grâce à l'hypothèse (H2), on a

$$\frac{\langle M \rangle_t}{t} = \frac{\sigma^2}{2\theta} + \mathbf{o}\left((\log t)^{-2}\right) \quad p.s..$$

Alors en appliquant le théorème de la limite centrale logarithmique au couple  $(M, V)$  (voir théorème 5 dans [2]) pour  $V_t^2 = t$  et  $f(x) = x^2 - 1$ , on obtient

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \left( \frac{M_s^2}{s} - \frac{\sigma^2}{2\theta} \right) \frac{ds}{s} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}\right).$$

Par suite

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{M_s^2}{s^2} ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} (\log t)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}\right).$$

Ainsi vu la relation (9), il vient que

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{M_s^2}{s^2} ds = \sigma^{-2} (\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Désormais, on pose

$$I_t = \int_1^t \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Donc

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}} I_t = \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds + \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds. \quad (22)$$

D'après la relation (16), on a

$$\begin{aligned} (\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds = \\ (\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \mathcal{O}\left(\frac{\log \log s}{s}\right) \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds \quad p.s.. \end{aligned} \quad (23)$$

L'hypothèse (H2), implique que

$$\frac{\langle M \rangle_t^2}{t^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} = \mathbf{o}\left((\log \log t)^{-1}(\log t)^{-\frac{1}{2}}\right) \quad p.s..$$

Sous cette dernière hypothèse, on voit que

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par suite

$$\frac{\sigma^2}{2\theta} (\log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} (\log t)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}\right).$$

Ce qui signifie que

$$(\log t)^{\frac{1}{2}} \left[ (2 \log t)^{-1} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds - \theta \right] \Longrightarrow \mathcal{N}\left(0, (2\theta)^2\right).$$

Ainsi le résultat est établi grâce à la convergence (21).

2. En appliquant la loi du logarithme itéré logarithmique au couple  $(M, V)$  (voir théorème 5 dans [2]), on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (2 \log t \log \log \log t)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_1^t \left( \frac{M_s^2}{s} - \frac{\sigma^2}{2\theta} \right) \frac{ds}{s} \right| = \frac{\sigma^2}{\theta} \quad p.s..$$

Grâce à la relation (9), on a

$$\int_1^t \frac{M_s^2}{s} \frac{ds}{s} = \sigma^{-2} \int_1^t \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds = \sigma^{-2} I_t.$$

Vu les deux relations (22) et (23), il vient que

$$(2 \log t \log \log \log t)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{\langle M \rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ce qui implique

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (2 \log t \log \log \log t)^{-\frac{1}{2}} \log t \left| \frac{1}{2 \log t} \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds - \theta \right| = 2\theta \quad p.s..$$

Ainsi compte tenu de la convergence (21), on déduit le résultat.

### Preuve du théorème 2.3

D'après la loi du logarithme itéré appliquée à la martingale continue  $\tilde{M}$  (voir [6]), on a

$$V_t^{-1}\tilde{M}_t = \mathcal{O}\left((\log \log V_t)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (24)$$

Vu la relation (8), la propriété  $(P_3)$  du lemme 3.2 et la propriété ii) du lemme 3.3, on conclut que

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log t}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (25)$$

D'où la première assertion du théorème.

Par ailleurs grâce aux relations (8) et (17), on obtient

$$t^{\frac{1}{2}}(\bar{\theta}_t - \theta) = \sigma t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s}{P_s} ds.$$

La propriété  $(P_4)$  implique que

$$\frac{V_s}{U_s} = s^{-\frac{\alpha}{2}} + o(s^{\frac{\alpha}{2}-1}) \quad p.s..$$

D'après ii) du lemme 3.3, on a

$$\frac{U_s}{P_s} = \frac{2\theta}{\sigma^2} + o(s^{\alpha'-\alpha}) \quad p.s..$$

Par conséquent vu que  $\alpha' - \frac{3}{2}\alpha > \alpha' - \frac{\alpha}{2} - 1$  et  $\alpha' > 2\alpha - 1$ , on obtient

$$t^{\frac{1}{2}}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{2\theta}{\sigma} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{M}_s}{V_s} ds + t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t o(s^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha}) \frac{\tilde{M}_s}{V_s} ds.$$

Posons  $Z_s = \frac{\tilde{M}_s}{V_s}$ . D'après la relation (24), on montre que

$$Z_s = \mathcal{O}((\log s)^{\frac{1}{2}}) \quad p.s.. \quad (26)$$

On déduit que

$$t^{\frac{1}{2}}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{2\theta}{\sigma} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{M}_s}{V_s} ds + \mathcal{O}\left(t^{\alpha' - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}} (\log t)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (27)$$

Comme  $\frac{dV_s}{V_s} \sim \frac{s^{-\alpha}}{2} ds$ , ( $s \rightarrow \infty$ ). Alors

$$\frac{1}{2} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} Z_s ds = - \underbrace{\int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}} dZ_s}_{(K_t)} + \underbrace{\int_0^t \frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{V_s} d\tilde{M}_s}_{(L_t)}. \quad (28)$$

D'une part

$$K_t = t^{\frac{\alpha}{2}} Z_t - \frac{\alpha}{2} \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}-1} Z_s ds.$$

Grâce à la relation (26), il vient que

$$K_t = \mathcal{O}\left((t^\alpha \log t)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (29)$$

D'autre part, on a

$$\langle L \rangle_t = t^\alpha \frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{V_t^2} - \alpha \int_0^t s^{\alpha-1} \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{V_s^2} ds - 2 \int_0^t s^\alpha \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{V_s^2} \frac{dV_s}{V_s}.$$

L'assertion i) du lemme 3.3 implique que

$$\langle L \rangle_t = \mathcal{O}(t) \quad p.s..$$

Encore une fois, la LLI appliquée à la martingale continue  $\tilde{M}$  montre que

$$L_t = \mathcal{O}\left((t \log \log t)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (30)$$

En insérant (29) et (30) dans (28), on obtient

$$\int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} Z_s ds = \mathcal{O}\left((t \log \log t)^{\frac{1}{2}}\right) + \mathcal{O}\left((t^\alpha \log t)^{\frac{1}{2}}\right) \quad p.s.. \quad (31)$$

En combinant (27) et (31), la deuxième assertion du théorème est établie.

## Preuve du théorème 2.4

1. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre pour le couple

$(\tilde{M}, V)$  avec  $V_t^2 = \int_0^t \omega_s^2 ds$ , on obtient

$$(\log V_t^2)^{-1} \int_0^1 \delta_{\{V_s^{-1} \tilde{M}_s\}} d(\log V_s^2) \implies \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right) \quad p.s..$$

D'après la propriété  $(P_3)$  du lemme 3.2, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^1 \delta_{\{V_s^{-1} \tilde{M}_s\}} \frac{ds}{s^\alpha} \implies \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right) \quad p.s..$$

Grâce à la relation (8), on obtient

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{\frac{\sigma}{2\theta} s^{\frac{\alpha}{2}} (\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \implies \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right) \quad p.s..$$

Le résultat en découle.

2. i) D'après la LFQ1 appliquée à la martingale  $\tilde{M}$  normalisée par le processus

$$V_t^2 = \int_0^t \omega_s^2 ds, \text{ on a}$$

$$(\log V_t^2)^{-1} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s^2 dV_s^2}{V_s^2 V_s^2} \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu la relation (8), on a

$$\tilde{M}_t^2 = \sigma^{-2} P_t^2 (\tilde{\theta}_t - \theta)^2. \quad (32)$$

Compte tenu de cette relation et de la propriété  $(P_3)$  du lemme 3.2, on voit immédiatement que

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{U_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (33)$$

ii) En appliquant la LFQ2 au couple  $(\tilde{M}, V)$ , on obtient

$$(\log \langle \tilde{M} \rangle_t)^{-1} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s^2}{\langle \tilde{M} \rangle_s^2} d\langle \tilde{M} \rangle_s \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Compte tenu de la propriété  $(P_3)$  du lemme 3.2 et de la propriété i) du lemme 3.3, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s^2}{\langle \tilde{M} \rangle_s^2} d\langle \tilde{M} \rangle_s \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu les relations (7) et (8), on obtient

$$\frac{\sigma^2(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{\langle \tilde{M} \rangle_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 \omega_s^2 X_s^2 ds \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la propriété  $(P_2)$  du lemme 3.2, on a

$$\frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (34)$$

Notons que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds - \frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \right| \leq \\ & \underbrace{\frac{8(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} (\bar{\theta}_t - \theta) \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t) X_s^2 ds}_{(E_t)} + \underbrace{\frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} (\bar{\theta}_t - \theta)^2 \int_0^t X_s^2 ds}_{(F_t)}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.3 et la relation (10), on obtient

$$E_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad F_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (35)$$

Grâce à la convergence (34), le résultat est établi.

iii) Posons

$$\tilde{I}_t = \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{U_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Soit

$$\tilde{I}_t = \tilde{I}_t^1 + \tilde{I}_t^2$$

avec

$$\tilde{I}_t^1 = \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 \left( \frac{P_s^2}{U_s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds \quad \text{et}$$

$$\tilde{I}_t^2 = \frac{\sigma^4(1-\alpha)}{4\theta^2 t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Vu l'hypothèse (H3), la relation ii) du lemme 3.3 implique que

$$\left( \int_0^t \omega_s ds \right)^{-2} \left( \int_0^t \omega_s X_s^2 ds \right)^2 - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} = \mathbf{o} \left( t^{2(\alpha-1)} (\log t)^{-1} \right) \quad p.s.. \quad (36)$$

D'après le théorème 2.3 et la relation (36), il vient que

$$\left| \tilde{I}_t - \tilde{I}_t^2 \right| \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la propriété (33), on obtient

$$\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (37)$$

Par ailleurs, pour  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ , on voit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \right| \leq \\ \underbrace{\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} (\bar{\theta}_t - \theta) \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t) ds}_{(Q_t)} + \underbrace{\frac{1-\alpha}{2t^{-\alpha}} (\bar{\theta}_t - \theta)^2}_{(S_t)}. \end{aligned}$$

Le théorème 2.3 implique que

$$Q_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad S_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$\left| \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \right| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (38)$$

Alors compte tenu de la convergence (37), le résultat est établi.

## Preuve du théorème 2.5

1. D'après i) du lemme 3.3 et vu que  $\frac{1}{2} \leq \alpha' < 3\alpha - 2$ , l'hypothèse (H4) implique que

$$\left( \int_0^t \omega_s^2 ds \right)^{-1} \left( \int_0^t \omega_s^2 X_s^2 ds \right) - \frac{\sigma^2}{2\theta} = \mathbf{o}(t^{2(\alpha-1)}) \quad p.s..$$

Alors en appliquant le TLCL au couple  $(\tilde{M}, V)$  pour  $V_t^2 = \int_0^t \omega_s^2 ds$  et  $f(x) = x^2 - 1$ , on obtient

$$(\log V_t^2)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \left( \frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2} - \frac{\sigma^2}{2\theta} \right) \frac{dV_s^2}{V_s^2} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}). \quad (39)$$

Grâce à la propriété (P<sub>3</sub>) du lemme 3.2 et la relation (8), on obtient

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{\tilde{M}_s ds}{V_s^2 s^\alpha} \sim \sigma^{-2} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{P_s^2}{U_s^2} (\tilde{\theta}_t - \theta)^2 ds, \quad (t \rightarrow \infty). \quad (40)$$

Soit  $\tilde{J}_t$  le terme de droite de la dernière équivalence. On pose

$$\tilde{J}_t = \tilde{J}_t^1 + \tilde{J}_t^2$$

avec

$$\tilde{J}_t^1 = \sigma^{-2} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\tilde{\theta}_t - \theta)^2 \left( \frac{P_s^2}{U_s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} \right) ds \quad \text{et}$$

$$\tilde{J}_t^2 = \frac{\sigma^2}{4\theta^2} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\tilde{\theta}_t - \theta)^2 ds.$$

Vu l'hypothèse (H4) et d'après ii) du lemme 3.3, il vient que pour  $\alpha' < 3\alpha - 2$

$$\left( \int_0^t \omega_s ds \right)^{-2} \left( \int_0^t \omega_s X_s^2 ds \right)^2 - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} = \mathbf{o}\left( t^{\frac{(\alpha-1)}{2}} (\log t)^{-1} \right) \quad p.s.. \quad (41)$$

D'après le théorème 2.3 et la relation (41), on déduit que

$$\left| \tilde{J}_t - \tilde{J}_t^2 \right| \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty). \quad (42)$$

En combinant (39), (40) et (42), on obtient

$$\frac{\sigma^2}{4\theta^2} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}).$$

Alors

$$\left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \theta \right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 4\theta^2).$$

Grâce à la convergence (38), on obtient le résultat.



2. En appliquant la LLIL au couple  $(\tilde{M}, V)$ , on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (2 \log V_t^2 \log \log \log V_t^2)^{-\frac{1}{2}} \left| \int_1^t \left( \frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2} - \frac{\sigma^2}{2\theta} \right) \frac{dV_s^2}{V_s^2} \right| = \frac{\sigma^2}{\theta} \quad p.s..$$

Ainsi d'après (42), on a

$$\int_1^t \frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2} \frac{ds}{s^\alpha} \sim \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{J}_t^2, \quad (t \rightarrow \infty).$$

Grâce à cette dernière équivalence et la propriété  $(P_3)$  du lemme 3.2, on obtient

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (2 \log V_t^2 \log \log \log V_t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left| \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \theta \right| = 2\theta \quad p.s..$$

Ce qui signifie que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{1-\alpha}}{\sqrt{\log \log t^{1-\alpha}}} \left| \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \theta \right| = 2\theta \sqrt{2(1-\alpha)} \quad p.s..$$

Le résultat est établi vu la convergence (38). Ce qui achève la preuve du théorème.

## 5 Annexe

### Preuve du lemme 3.2

#### 1. Preuve de $(P_1)$

Soit  $N = (N_t, t \geq 0)$  la fonction définie par

$$N_t = t^{-\alpha} \omega_t^{-1} U_t.$$

D'après l'expression du poids  $(\omega_t)$ , on voit que

$$N_t = t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds.$$

Dans la suite on s'intéressera au comportement asymptotique de  $(N_t, t \geq 0)$ . Il est clair que

$$N_t \geq t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \left( \int_{t'}^t s^{-\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds \right), \quad \text{avec } 1 \leq t' < t.$$

Donc

$$N_t \geq e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \int_{t'}^t s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds.$$

Comme

$$\int_{t'}^t s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds = 2 \left( e^{\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} - e^{\frac{(t')^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \right).$$

D'où, on a

$$N_t \geq 2 - 2e^{\frac{(t')^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}.$$

Pour  $t' < t$ , on déduit que

$$N_t - 2 \geq -2e^{\frac{(t')^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} = \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

Par conséquent

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{1-\alpha}(N_t - 2) = 0.$$

D'où

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} N_t = 2. \quad (43)$$

Par ailleurs, notons que pour  $0 < \lambda < 1$ , on a

$$N_t \leq \beta_t^\lambda + \gamma_t^\lambda \quad (44)$$

où

$$\beta_t^\lambda = t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \int_1^{t\lambda} s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds,$$

$$\gamma_t^\lambda = t^{-\frac{\alpha}{2}} (t\lambda)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \int_{t\lambda}^t s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds.$$

Afin de trouver la limite supérieure de  $N_t$ , on cherche le comportement asymptotique des fonctions  $\beta_t^\lambda$  et  $\gamma_t^\lambda$ . En remarquant que

$$\begin{aligned} t^{1-\alpha} \beta_t^\lambda &= 2t^{1-\frac{3}{2}\alpha} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \left( e^{-\frac{(t\lambda)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} - e^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}} \right) \\ &= 2t^{1-\frac{3}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}} \left( (t\lambda)^{1-\alpha} - t^{1-\alpha} \right) - 2t^{1-\frac{3}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}} (1-t^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  et  $0 < \lambda < 1$ , on déduit que

$$t^{1-\alpha} \beta_t^\lambda \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \quad (45)$$

De la même façon on établit la relation suivante

$$\gamma_t^\lambda = 2\lambda^{\frac{\alpha}{2}} \left( 1 - e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} (\lambda^{1-\alpha} - 1) \right).$$

Comme  $\lambda^{1-\alpha} - 1 < 0$ , on obtient

$$\gamma_t^\lambda \sim 2\lambda^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

De plus on a

$$t^{1-\alpha} (\gamma_t^\lambda - 2\lambda^{\frac{\alpha}{2}}) = -t^{1-\alpha} e^{\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} (\lambda^{1-\alpha} - 1) = \mathbf{o}(1). \quad (46)$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda_t = 1 - t^{-\alpha}$ , les propriétés (44), (45) et (46) restent vraies. Par conséquent on obtient

$$t^{1-\alpha}(N_t - 2) \leq t^{1-\alpha}\beta_t^{\lambda_t} + t^{1-\alpha}\left(\gamma_t^{\lambda_t} - 2\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}}\right) + 2t^{1-\alpha}\left(\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}} - 1\right). \quad (47)$$

Vu que  $\lambda_t$  vérifie

$$t^{1-\alpha}(1 - \lambda_t) \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty)$$

on déduit que

$$0 \leq \lambda_t^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \leq \frac{\alpha}{2}(\lambda_t - 1)\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}-1} = \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

Compte tenu de ce dernier résultat et le fait que

$$t^{1-\alpha}\beta_t^{\lambda_t} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad t^{1-\alpha}(\gamma_t^{\lambda_t} - 2\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}}) \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

il vient que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N_t = 2. \quad (48)$$

Grâce à (43) et (48), on conclut le résultat.

## 2. Preuve de $(P_2)$

Posons  $N' = (N'_t, t \geq 0)$ , la fonction définie par

$$N'_t = t^{-\alpha}\omega_t^{-2}V_t^2.$$

D'après l'expression du poids  $(\omega_t)$ , on voit que

$$N'_t = e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \int_0^t s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}} ds = 1 - e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \longrightarrow 1, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par ailleurs

$$t^{1-\alpha}(N'_t - 1) = -t^{1-\alpha}e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

D'où la propriété  $(P_2)$ .

## 3. Preuve de $(P_3)$

La propriété  $(P_2)$  implique que

$$t^{-\alpha} = \frac{\omega_t^2}{V_t^2} + \mathbf{o}\left(\frac{\omega_t^2}{V_t^2}t^{\alpha-1}\right).$$

Compte tenu de l'expression du poids, on obtient

$$V_t^2 = e^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} - 1 \sim t^\alpha \omega_t^2, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent on a

$$t^{-\alpha} - V_t^{-2}\omega_t^2 = \mathbf{o}(t^{-1}).$$

Vu que

$$\frac{\omega_t^2}{V_t^2} \sim V_t^{-2} \frac{dV_t^2}{dt}, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

La propriété  $(P_3)$  est établie.

#### 4. Preuve de $(P_4)$

Grâce à la propriété  $(P_1)$ , on a

$$t^{-2\alpha} \omega_t^{-2} U_t^2 = 4 + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

La propriété  $(P_2)$  donne

$$t^{-\alpha} \omega_t^{-2} V_t^2 = \frac{1}{4} + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\frac{V_t^2}{U_t^2} = t^{-\alpha} + \mathbf{o}(t^{-1}).$$

Ce qui achève la preuve de  $(P_4)$ .

### Preuve du lemme 3.3

D'après l'égalité (4), on a

$$\langle \tilde{M} \rangle_t = \frac{\sigma^2}{2\theta} V_t^2 + \int_0^t \omega_s^2 (X_s^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta}) ds.$$

Comme

$$\frac{\langle M \rangle_t}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta} \text{ p.s.}, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Alors

$$A_t - \frac{\sigma^2}{2\theta} = \frac{1}{t} \int_0^t (X_s^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta}) ds,$$

avec  $A_t = \frac{\langle M \rangle_t}{t}$ ,  $t > 0$ . Donc

$$d(t(A_t - \frac{\sigma^2}{2\theta})) = (X_t^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta}) dt.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_0^t \omega_s^2 (X_s^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta}) ds &= \int_0^t \omega_s^2 d(s(A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta})) \\ &= [\omega_s^2 s(A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta})]_0^t - \int_0^t s(A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) d\omega_s^2. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression de la pondération définie dans (3), on voit que

$$d\omega_s^2 = \omega_s^2 \left\{ \frac{1}{(1-\alpha)s^\alpha} - \frac{\alpha}{s} \right\} ds.$$

Par conséquent

$$\langle \tilde{M} \rangle_t - \frac{\sigma^2}{2\theta} V_t^2 = [\omega_s^2 s (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta})]_0^t + \alpha \int_0^t (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t s^{1-\alpha} (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds. \quad (49)$$

Grâce à la propriété ( $P_2$ ) et l'hypothèse ( $H3$ ), il vient que

$$\frac{1}{V_t^2} \int_0^t (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds \leq \int_0^t (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \frac{\omega_s^2}{V_s^2} ds = \mathbf{o}(t^{\alpha'-\alpha}).$$

De même on a

$$\frac{1}{V_t^2} \int_0^t s^{1-\alpha} (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds = \mathbf{o}(t^{\alpha'-\alpha}).$$

Vu la relation (49), on obtient la propriété i) suivante

$$\frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{V_t^2} - \frac{\sigma^2}{2\theta} = \mathbf{o}(t^{\alpha'-\alpha}) \quad p.s..$$

De la même façon, on établit la propriété ii).

## Références

- [1] Chaâbane. F., Touati. A., On averaging methods for identification of linear regression models. *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 333*, série I, (2001) p. 133-138.
- [2] Chaâbane. F., Invariance principales with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Statistics and Probability Letters*, **59**, (2002) 209-217.
- [3] Darwich. A.R., A law of iterated logarithm for multidimensional local martingales and its application in stochastic linear regression *C.R.Acad.Sc.Paris,t. 309*, série I, (1989) 387-390.
- [4] Le Breton. A., Musiela. M., Some parameter estimation problems for hypoelliptic homogeneous gaussian diffusions, *Banach Centre Publications*, **16**, (1985) 337-356.
- [5] Le Breton. A., Musiela. M., A law of large numbers for vector continuous local martingales and its application in stochastic linear regression. *C.R.Acad.Sc.Paris,t. 303*, série I, n 9 (1986).
- [6] Revuz. D., Yor M., Continuous martingales and brownian motion. (second edition) *Springer-Verlag*, (1994).