



HAL
open science

Géométrie des surfaces algébriques et points entiers

Pascal Autissier

► **To cite this version:**

Pascal Autissier. Géométrie des surfaces algébriques et points entiers. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2009, 42 (2), pp.221-239. hal-00078974

HAL Id: hal-00078974

<https://hal.science/hal-00078974>

Submitted on 8 Jun 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Géométrie des surfaces algébriques et points entiers

Pascal Autissier

8 juin 2006

Abstract : Let X be a projective normal surface over a number field K . Let H be the sum of four properly intersecting ample effective divisors on X . We show that any set of S -integral points in $X - H$ is not Zariski dense.

2000 Mathematics Subject Classification : 11G35, 14G05, 14G25.

1 Introduction

On s'intéresse ici aux solutions à coordonnées quasi-entières de systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans un corps de nombres, dans l'esprit de la conjecture de Lang et Vojta (*cf* conjecture 4.2 de [6] p. 223).

Plus précisément, soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K . On montre le résultat suivant :

Théorème 1.1 : *Soit X une surface normale projective sur K . Soient $D_1; D_2; D_3; D_4$ quatre diviseurs effectifs amples sur X qui se coupent proprement. Posons $Y = X - D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. Soit $\mathcal{E} \subset Y(K)$ un ensemble S -entier sur Y . Alors \mathcal{E} n'est pas Zariski-dense dans Y .*

Cet énoncé était connu de Vojta pour X lisse vérifiant $\rho \leq g + 1$, où ρ désigne le nombre de Picard de $X_{\overline{K}}$ et $g = h^1(X; \mathcal{O}_X)$ (*cf* corollaire 0.3 de [12]). En fait, Vojta a besoin de $\rho + 3 - g$ diviseurs au lieu de 4. L'intérêt de notre résultat réside donc dans l'uniformité en le nombre de diviseurs à considérer.

Remarquons que le théorème 1.1 s'inscrit bien dans le cadre de la conjecture de Lang et Vojta, puisque si X est lisse sur K de diviseur canonique \mathcal{K}_X , alors $\mathcal{K}_X + D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ est ample sur X (*cf* exemple 1.5.35 de [7] p. 87).

La démonstration repose sur une légère extension d'un théorème de Corvaja et Zannier [1] (*cf* théorème 3.2), qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points S -entiers, et sur un bon choix de multiplicités associées aux diviseurs D_i (*cf* proposition 2.3).

On utilise en particulier le théorème du sous-espace de Schmidt (*cf* [9] §VI) et Schlickewei (*cf* [8]).

Je remercie Antoine Chambert-Loir pour l'inspiration qu'il m'a procurée.

2 Géométrie

Soit K un corps de caractéristique nulle.

Conventions : On appelle variété sur K tout schéma intègre, quasi-projectif et géométriquement irréductible sur K . Une surface sur K est une variété sur K de dimension 2. Le mot “diviseur” sous-entend “diviseur de Cartier”.

Soit X une variété projective sur K de dimension $d \geq 1$. Lorsque $L_1; \dots; L_d$ sont des diviseurs sur X , on désigne par $\langle L_1 \cdots L_d \rangle$ leur nombre d'intersection.

Soient L un diviseur ample sur X et E un diviseur effectif non nul sur X . La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne l'estimation $h^0(X; nL) = \frac{\langle L^d \rangle}{d!} n^d + O(n^{d-1})$. Ceci motive la définition suivante :

Pour tout entier $n \geq 1$, posons d'abord $S_n = \sum_{k \geq 1} h^0(X; nL - kE)$; remarquons que cette somme est finie puisque $h^0(X; nL - kE) = 0$ si $k > \langle L^d \rangle n / \langle L^{d-1} E \rangle$.

Définition : On pose $\nu(L; E) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{h^0(X; nL)n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{d! S_n}{\langle L^d \rangle n^{d+1}}$.

Exemple : Si X est une courbe, alors on peut aisément expliciter cette constante; on trouve $\nu(L; E) = \frac{\langle L \rangle}{2\langle E \rangle}$.

On aura besoin dans la suite de minorer $\nu(L; E)$. Commençons par une variante des “inégalités de Morse holomorphes” (cf [2] §12) :

Lemme 2.1 : Soit X une surface projective sur K . Soient L et M des diviseurs amples sur X . Posons $\alpha = \langle LM \rangle / \langle M^2 \rangle$. Soient n et k des entiers vérifiant $1 \leq k \leq \alpha n$. On a alors la minoration

$$h^0(X; nL - kM) \geq \langle L^2 \rangle \frac{n^2}{2} - \langle LM \rangle nk + \langle M^2 \rangle \frac{k^2}{2} - O(n) \quad ,$$

où le O ne dépend que de $(K; X; L; M)$.

Démonstration : On choisit un entier $b \geq 1$ tel que bM soit très ample. D'après le théorème de Bertini, il existe $s \in \Gamma(X; bM) - \{0\}$ tel que $C = \text{div}(s)$ soit géométriquement irréductible sur K .

Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq \alpha n$. On a la suite exacte de \mathcal{O}_X -modules suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - (i+b)M) \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - iM) \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - iM)|_C \rightarrow 0 \quad .$$

On en déduit une suite exacte en cohomologie qui donne l'inégalité

$$h^0(X; nL - (i + b)M) \geq h^0(X; nL - iM) - h^0(C; (nL - iM)|_C) \quad .$$

En utilisant la majoration $h^0(C; L|_C) \leq \langle L'C \rangle + 1$ valable pour tout diviseur L' tel que $\langle L'C \rangle \geq 0$ (cf proposition 3 (3) de [4] p. 192), on obtient

$$h^0(X; nL - (i + b)M) \geq h^0(X; nL - iM) - \langle LM \rangle bn + \langle M^2 \rangle bi - 1 \quad .$$

Maintenant, écrivons k sous la forme $k = bq + r$ avec $q \geq 0$ et $0 \leq r < b$. En sommant l'inégalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned} h^0(X; nL - kM) &\geq h^0(X; nL - rM) - \sum_{j=0}^{q-1} \left[\langle LM \rangle bn - \langle M^2 \rangle b(bj + r) + 1 \right] \\ &= \langle L^2 \rangle \frac{n^2}{2} - \langle LM \rangle nk + \langle M^2 \rangle \frac{k^2}{2} - O(n) \end{aligned}$$

(l'asymptotique $h^0(X; nL - rM) = \langle L^2 \rangle n^2/2 + O(n)$ est fournie par Hirzebruch-Riemann-Roch). D'où le résultat. \square

Remarque : La démonstration donne en fait une minoration de $h^0(nL - kM) - h^1(nL - kM)$.

Corollaire 2.2 : Soit X une surface projective sur K . Soient L un diviseur ample sur X et E un diviseur effectif ample sur X . On a alors

$$\nu(L; E) \geq \frac{\langle L^2 \rangle}{4\langle LE \rangle} + \frac{\langle L^2 \rangle^2 \langle E^2 \rangle}{24\langle LE \rangle^3} \quad .$$

Démonstration : On pose $\alpha = \langle LE \rangle / \langle E^2 \rangle$ et $\beta = \langle L^2 \rangle / \langle LE \rangle$. Remarquons que $\beta \leq \alpha$ par le théorème de l'indice de Hodge.

Grâce au lemme 2.1, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k \geq 1} h^0(X; nL - kE) &\geq \sum_{k=1}^{[\beta n/2]} \left(\langle L^2 \rangle \frac{n^2}{2} - \langle LE \rangle nk + \langle E^2 \rangle \frac{k^2}{2} \right) - O(n^2) \\ &= \left(\langle L^2 \rangle \frac{\beta}{4} - \langle LE \rangle \frac{\beta^2}{8} + \langle E^2 \rangle \frac{\beta^3}{48} \right) n^3 - O(n^2) \quad . \end{aligned}$$

D'où la minoration $\nu(L; E) \geq \frac{\beta}{4} + \frac{\beta^2}{24\alpha}$. \square

Montrons maintenant le résultat principal de cette section :

Proposition 2.3 : Soit X une surface projective sur K . Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs amples sur X . Il existe alors des entiers $m_1; \dots; m_r$ tels qu'en posant $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$, on ait $m_i \geq 1$ et $\nu(L; D_i) > \frac{r}{4} m_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$.

Démonstration : On pose $\Delta = \{(t_1; \dots; t_r) \in \mathbb{R}_+^r \mid t_1 + \dots + t_r = 1\}$. Pour tout $t = (t_1; \dots; t_r) \in \Delta$, on désigne par L_t le \mathbb{R} -diviseur $L_t = \sum_{j=1}^r t_j D_j$ et on pose $\phi(t) = \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{\langle L_t D_i \rangle} \right)^{-1}$.

On note $f : \Delta \rightarrow \Delta$ l'application continue définie par $f(t) = \left(\frac{\phi(t)}{\langle L_t D_1 \rangle}; \dots; \frac{\phi(t)}{\langle L_t D_r \rangle} \right)$ pour tout $t \in \Delta$. D'après le théorème de Brouwer, f admet un point fixe $x = (x_1; \dots; x_r)$. On a alors $\phi(x) = \langle L_x D_i \rangle x_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$, donc $\phi(x)r = \langle L_x^2 \rangle$.

On en déduit l'inégalité $\frac{\langle L_x^2 \rangle}{\langle L_x D_i \rangle} + \frac{\langle L_x^2 \rangle^2 \langle D_i^2 \rangle}{6 \langle L_x D_i \rangle^3} > x_i r$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$.

On approche x par un $y \in \mathbb{Q}_+^{*r} \cap \Delta$ de la forme $y = \left(\frac{m_1}{m}; \dots; \frac{m_r}{m} \right)$ de telle sorte que l'inégalité précédente soit encore valable avec y au lieu de x , et on conclut en appliquant le corollaire 2.2. \square

Terminons cette section par une définition :

Définition : Soit X une surface normale projective sur K . Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X . On dit que $D_1; \dots; D_r$ **se coupent proprement** lorsque : toute intersection de deux quelconques d'entre eux est finie, et toute intersection de trois quelconques d'entre eux est vide.

3 Arithmétique

Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K . Pour tout $v \in S$, on désigne par K_v le complété de K en la place v . On note $O_{K;S}$ l'anneau des S -entiers de K , i.e. l'ensemble des $x \in K$ tels que $|x|_v \leq 1$ pour toute place finie $v \notin S$.

Définition : Soit Y une variété sur K . Un ensemble $\mathcal{E} \subset Y(K)$ est dit **S -entier** sur Y lorsqu'il existe un $O_{K;S}$ -schéma intègre et quasi-projectif \mathcal{Y} de fibre générique Y tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}(O_{K;S})$.

On va utiliser la version suivante du théorème du sous-espace de Schmidt et Schlickewei :

Proposition 3.1 : Soient X une variété projective sur K et L un faisceau inversible très ample sur X . Soit h_L une hauteur de Weil relativement à L . Pour chaque $v \in S$, on munit L_v d'une métrique $\|\cdot\|_v$ et on choisit une base $(s_{1v}; \dots; s_{qv})$ de $\Gamma(X; L)$. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble des points $P \in X(K)$ vérifiant

$$-\sum_{v \in S} \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P)\|_v \geq (q + \varepsilon) h_L(P) - c \quad (*)$$

n'est pas Zariski-dense dans X .

Démonstration : En posant $V = \Gamma(X; L)$, on a un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$. On applique alors la reformulation de Vojta (cf théorème 2.2.4 de [11] p. 19) du théorème du sous-espace : il existe une réunion finie H de K -hyperplans de $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_K^{q-1}$ telle que tout point $P \in X(K)$ vérifiant (*) est dans $H \cap X$. \square

On montre ci-dessous une légère extension d'un résultat de Corvaja et Zannier (cf théorème principal de [1] p. 707-708) ; on s'inspire de leur méthode, tout en adoptant un point de vue plus géométrique :

Théorème 3.2 : Soit X une surface normale projective sur K . Soient $D_1; \dots; D_r$ des diviseurs effectifs non nuls sur X qui se coupent proprement. Posons $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$. Soient $m_1; \dots; m_r$ des entiers ≥ 1 . On suppose que le diviseur $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$ est ample sur X et que $\nu(L; D_i) > m_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$. Soit $\mathcal{E} \subset Y(K)$ un ensemble S -entier sur Y . Alors \mathcal{E} n'est pas Zariski-dense dans Y .

Démonstration : On fixe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\nu(L; D_i) > (1 + \varepsilon)m_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$, puis un entier $b \geq 1$ tel que bL soit très ample et que

$$\sum_{k \geq 1} h^0(X; bL - kD_i) \geq (1 + \varepsilon)h^0(X; bL)m_i b \quad \text{pour tout } i \in \{1; \dots; r\}.$$

On note $q = h^0(X; bL)$ et on choisit une hauteur de Weil h_{bL} relativement à bL . Pour tout diviseur effectif E sur X , on désigne par 1_E la section globale de $\mathcal{O}_X(E)$ qu'il définit.

Raisonnons par l'absurde en supposant \mathcal{E} Zariski-dense. Il existe alors une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathcal{E} qui est générique, i.e. telle que pour tout fermé $Z \neq X$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid P_n \in Z\}$ est fini.

Quitte à extraire, on peut supposer (par compacité) que pour tout $v \in S$, la suite $(P_{nv})_{n \geq 0}$ converge dans $X(K_v)$ vers un $y_v \in X(K_v)$.

Soit $v \in S$. On munit chaque faisceau $\mathcal{O}_X(D_i)_v$ d'une métrique $\| \cdot \|_v$. Les diviseurs $D_1; \dots; D_r$ se coupent proprement, donc il existe deux indices $j_v < l_v$ tels que $y_v \notin D_i$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\} - \{j_v; l_v\}$.

Le lemme 3.2 de [1] fournit une base $\mathcal{B}_v = (s_{1v}; \dots; s_{qv})$ de $\Gamma(X; bL)$ adaptée aux filtrations $\left(\Gamma(X; bL - kD_{j_v}) \right)_{k \geq 0}$ et $\left(\Gamma(X; bL - kD_{l_v}) \right)_{k \geq 0}$, i.e. \mathcal{B}_v contient une base de $\Gamma(X; bL - kD_i)$ pour tout $i \in \{j_v; l_v\}$ et tout $k \geq 0$.

Fait : On a la minoration suivante pour tout $n \geq 0$:

$$- \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + q\varepsilon) \ln \|1_{bL}(P_n)\|_v - O(1) \quad , \quad (1)$$

où le $O(1)$ est indépendant de n .

Prouvons ce fait. Soit $s \in \Gamma(X; bL) - \{0\}$. Pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$, notons $\mu_i(s)$ le plus grand entier μ tel que le diviseur $\text{div}(s) - \mu D_i$ soit effectif. Puisque les fermés D_{j_v} et D_{l_v} n'ont pas de composante commune, le diviseur $\text{div}(s) - \mu_{j_v}(s)D_{j_v} - \mu_{l_v}(s)D_{l_v}$ est encore effectif. Ceci implique l'inégalité

$$-\ln \|s(P_n)\|_v \geq -\mu_{j_v}(s) \ln \|1_{D_{j_v}}(P_n)\|_v - \mu_{l_v}(s) \ln \|1_{D_{l_v}}(P_n)\|_v - O(1) \quad .$$

On écrit cette inégalité pour $s = s_{kv}$, puis on somme sur k . En observant que pour $i \in \{j_v; l_v\}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \mu_i(s_{kv}) &= \sum_{\mu \geq 0} \left[h^0(X; bL - \mu D_i) - h^0(X; bL - (\mu + 1)D_i) \right] \mu \\ &= \sum_{\mu \geq 1} h^0(X; bL - \mu D_i) \geq (q + q\varepsilon)m_i b \quad , \end{aligned}$$

on trouve alors

$$-\sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + q\varepsilon)b \left[m_{j_v} \ln \|1_{D_{j_v}}(P_n)\|_v + m_{l_v} \ln \|1_{D_{l_v}}(P_n)\|_v \right] - O(1) \quad .$$

Le fait énoncé s'en déduit en remarquant que $\ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v = O(1)$ pour tout $i \in \{1; \dots; r\} - \{j_v; l_v\}$.

Maintenant, l'ensemble \mathcal{E} est S -entier sur Y , donc pour tout $n \geq 0$, on a

$$h_{bL}(P_n) = -\sum_{v \in S} \ln \|1_{bL}(P_n)\|_v + O(1) \quad .$$

En utilisant la minoration (1), on obtient (pour tout $n \geq 0$)

$$-\sum_{v \in S} \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq (q + q\varepsilon)h_{bL}(P_n) - O(1) \quad .$$

D'où une contradiction avec la proposition 3.1 (*i.e.* le théorème du sous-espace). \square

Démonstration du théorème 1.1 : Il suffit d'appliquer la proposition 2.3 (avec $r = 4$) puis le théorème 3.2. \square

Références

- [1] *P. Corvaja, U. Zannier* : On integral points on surfaces. *Annals of Math.* **160** (2004), 705-726.
- [2] *J.P. Demailly* : L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. *Lecture Notes in Math.* **1646** (1996), 1-97.
- [3] *G. Faltings* : Diophantine approximation on abelian varieties. *Annals of Math.* **133** (1991), 549-576.

- [4] *W. Fulton* : Algebraic curves. W.A. Benjamin, Inc. (1969).
- [5] *W. Fulton* : Intersection theory (second edition). Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **2** (1998).
- [6] *S. Lang* : Number theory III. Encyclopaedia of Math. Sciences **60** (1991).
- [7] *R. Lazarsfeld* : Positivity in algebraic geometry I. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **48** (2004).
- [8] *H.P. Schlickewei* : The p -adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem. Archiv der Math. **29** (1977), 267-270.
- [9] *W.M. Schmidt* : Diophantine approximation. Lecture Notes in Math. **785** (1980).
- [10] *J.P. Serre* : Lectures on the Mordell-Weil theorem (third edition). Aspects of Math. **15** (1997).
- [11] *P. Vojta* : Diophantine approximations and value distribution theory. Lecture Notes in Math. **1239** (1987).
- [12] *P. Vojta* : Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I. Inventiones Math. **126** (1996), 133-181.

Pascal Autissier. I.R.M.A.R., Université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.

pascal.autissier@univ-rennes1.fr