



**HAL**  
open science

## Compensation de déformations en tomographie dynamique 3D conique

Laurent Desbat, Sébastien Roux, Pierre Grangeat

► **To cite this version:**

Laurent Desbat, Sébastien Roux, Pierre Grangeat. Compensation de déformations en tomographie dynamique 3D conique. 2006. hal-00078645

**HAL Id: hal-00078645**

**<https://hal.science/hal-00078645>**

Preprint submitted on 6 Jun 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Compensation de déformations en tomographie dynamique 3D conique

Laurent Desbat<sup>1</sup>, Sébastien Roux<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup> TIMC-IMAG

In3S, Faculté de Médecine, UJF,  
38706, La Tronche, France  
Laurent.Desbat@imag.fr

Pierre Grangeat<sup>2</sup>

<sup>2</sup> LETI - CEA - DRT,  
CEA/Grenoble, DTBS,  
17 av. des Martyrs,  
38054 Grenoble cedex 9, France.  
pierre.grangeat@cea.fr

23 mai 2006

## Résumé :

L'objet de cette étude est la reconstruction tomographique d'objets ou d'organes qui se déforment au cours de l'acquisition des projections dans un scanner. Notre approche est celle de la compensation analytique des déformations lors de la reconstruction. Nous concentrons ce travail sur la géométrie conique 3D. Nous introduisons une classe de déformations préservant la géométrie conique 3D et nous montrons que les déformations issues de cette classe, beaucoup plus vaste que celle des déformations affines, peuvent être compensées analytiquement. Nous illustrons la compensation de déformations de cette classe par des expérimentations numériques sur des fantômes dynamiques en géométrie conique 3D.

## Abstract :

In dynamic tomography, the measured object or organs are no-longer supposed to be static in the scanner during the acquisition but are supposed to move or to be deformed. Our approach is the analytic deformation compensation during the reconstruction. Our work concentrates on 3D cone beam tomography. We introduce a new large class of deformations preserving the 3D cone beam geometry. We show that deformations from this class can be analytically compensated. We present numerical experiments on phantoms

---

\*Sébastien Roux travaille maintenant à Philips Medical Systems Research Paris

showing the compensation of these deformations in 3D cone beam tomography.

## 1 Introduction et notations

Ce travail est une contribution à la compensation des mouvements en tomographie. Ces dernières années de nombreux travaux ont été effectués sur ce sujet, principalement motivés par l'imagerie tomographique cardiaque. En effet, la reconstruction d'organes en mouvement rapide souffre de nombreux artefacts. Des méthodes de reconstruction synchronisée par l'ECG ont été développées [13, 8]. L'ajustement de paramètres d'acquisition à la période cardiaque ainsi que l'optimisation de schémas d'échantillonnage ont aussi été proposés pour l'amélioration des images reconstruites [20].

Nous concentrons ici notre travail, sur la compensation de déformations en géométrie conique 3D. La transformée en rayon conique 3D (ou Cone-Beam) d'une fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$g_{\mathcal{D}}(t, \vec{\zeta}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}f(t, \vec{\zeta}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}_t f(\vec{\zeta}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(\vec{a}(t) + l\vec{\zeta}) dl, \quad (1)$$

où  $\vec{\zeta} \in S^2$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  ( $S^2$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ ),  $\vec{a}(t) \in \mathbb{R}^3$  est la position de la source de rayons X au temps  $t \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $t$  est alors aussi le paramètre de la trajectoire de la source, en général, une courbe gauche, voir la figure 1. La fonction  $f$  est à support compact et  $\vec{a}(t)$  est à une distance strictement positive du support de  $f$ . Cette transformation apparaît dans les problèmes de reconstructions à partir de mesures de projections de rayons X sur des détecteurs plans ou sur des détecteurs multi-lignes de scanners.  $\vec{\zeta}$  est alors la direction du rayon X joignant la source  $\vec{a}(t)$  et le pixel du détecteur ayant produit la mesure scalaire  $\mathcal{D}_t f(\vec{\zeta})$ . Le paramètre  $t$  de la trajectoire peut être identifié au temps : en effet, la source de rayons-X se déplace au cours du temps et  $\mathcal{D}_t f(\vec{\zeta})$ , à  $t$  fixé, est supposé acquis en un temps négligeable  $\forall \vec{\zeta} \in S^2$ .

Le problème en tomographie conique 3D est celui de la reconstruction de  $f$  à partir de  $g_{\mathcal{D}}$ . De nombreux travaux traitent de ce problème avec, ces dernières années, de riches développements de méthodes exactes et efficaces de reconstruction de  $f$  à partir de  $\mathcal{D}f$ , en particulier sur une trajectoire hélicoïdale de la source  $\vec{a}(t)$  (trajectoire classique des scanners médicaux) mais aussi plus récemment suivant des trajectoires plus générales (voir par exemple [11, 3, 14, 15, 18, 27]). En reconstruction 3D interventionnelle à partir de radiographies, la trajectoire de la source est souvent circulaire [4, 26].

En tomographie dynamique, la fonction à reconstruire dépend aussi du temps  $t$ . Notre approche sur la compensation des déformations suit celle de

Crawford et al [2], comme dans [21]. L'idée est d'introduire un modèle de déformation  $\vec{\Gamma}_t$  (supposé connu) dépendant du temps  $t$  dans la reconstruction.  $\vec{\Gamma}_t$  est ici une bijection sur l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Nous supposons que l'atténuation en  $\vec{x}$  au temps  $t$  peut s'écrire sous la forme  $f_{\vec{\Gamma}_t}(\vec{x}) = f(\vec{\Gamma}_t(\vec{x}))$ , où  $f$  est la fonction d'atténuation de référence (par exemple à  $t = 0$ ) au point  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . Ainsi  $\vec{\Gamma}_t$  transforme simplement  $\vec{x}$  au temps  $t$  en sa position  $\vec{\Gamma}_t(\vec{x})$  au temps de référence ( $t = 0$ ). Nous supposons dans toute la suite que  $\vec{\Gamma}_t$  est une déformation suffisamment régulière ainsi que son inverse.

Le problème que nous considérons est celui de la reconstruction de  $f$  ou de manière équivalente de  $f_{\vec{\Gamma}_t}$  à partir de projections coniques  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_t}$ , cf (1), connaissant la déformation  $\vec{\Gamma}_t$ . Notre objectif est de compenser la déformation  $\vec{\Gamma}_t$  dans les algorithmes de reconstruction, de manière efficace.

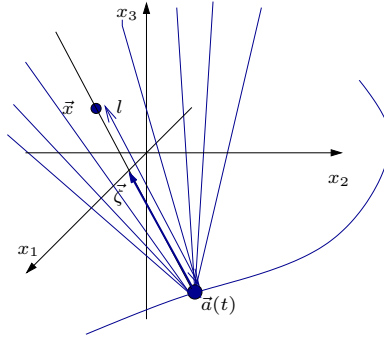


FIG. 1 – Paramètres de la géométrie conique.

Dans [21] la compensation de déformations est incorporée dans l'algorithme de reconstruction analytique. La méthode est exacte pour des déformations affines  $\vec{\Gamma}_t$ , dépendantes du temps d'acquisition, en tomographie 2D+t parallèle et fan-beam (une généralisation en 3D+t est proposée dans [19]). La méthode de reconstruction 2D+t fan-beam avec compensation des déformations affines (dépendantes du temps) de [21] est basée sur l'adaptation de celle proposée par Noo et al [17] pour la reconstruction statique associée à une trajectoire minimale, en particulier dans le cas circulaire. Elle repose sur l'idée majeure que l'espace des droites est invariant par transformation affine.

Pour conserver les "bonnes propriétés" des formules d'inversion FBP en tomographie, il ne semble pas nécessaire que la transformation  $\vec{\Gamma}_t$  laisse globalement invariant l'ensemble de toutes les droites du plan. Par contre, afin de rester dans le cadre de la tomographie, c'est-à-dire de la reconstruction d'une fonction à partir de ses intégrales sur des droites, il est essentiel de préserver la propriété moins forte suivante : les droites d'acquisitions au temps  $t$  sont transformées en droites au temps de référence  $t = 0$  par la déformation

$\vec{\Gamma}_t$ . C'est l'idée de base de ce travail. Nous avons proposé, en tomographie 2D, des classes de déformations qui préservent les droites parallèles d'acquisition (i.e., qui transforment les droites parallèles d'acquisition en droites parallèles à  $t = 0$ ), et celles qui préservent la géométrie des demi-droites en éventail (fan-beam) [6, 7] et nous avons proposé une méthode de compensation analytique d'une sous classe de ces déformations. Ces déformations contiennent, bien entendu, les transformations affines et généralisent [21].

Dans la section 2, nous développons une extension de ces résultats en 3D à la géométrie d'acquisition conique (dénomé CB, dans la suite pour Cone-Beam). C'est la géométrie d'acquisition la plus courante dans les scanners multi-lignes ou dans les systèmes d'imagerie radiologique 3D interventionnelle [4, 26]. Plus précisément, nous construisons une classe de déformations compensables analytiquement en géométrie 3D CB. Nous proposons dans la section 3, des expérimentations numériques illustrant nos méthodes de compensation sur des fantômes numériques en géométrie CB et nous comparons les reconstructions à partir des projections CB de fantômes dynamiques avec ou sans compensation des déformations.

## 2 Déformations en géométrie CB 3D

Dans [21], en 2D, la fonction  $f$  (et donc  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ ) est reconstruite par une méthode analytique de type FBP (Filtered Back-Projection) à partir de la transformée  $\mathcal{T}$ , parallèle ou en éventail,  $\mathcal{T}f_{\vec{\Gamma}_t}$  de  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ , lorsque  $\vec{\Gamma}_t$  est affine. Nous avons proposé dans [6, 7] une généralisation à des classes de déformation préservant la géométrie des droites d'acquisition. L'idée est d'écrire ces déformations  $\vec{\Gamma}_t$  comme la composition d'une déformation globale affine  $\vec{A}_t$ , compensable par l'approche de [21] et d'une déformation  $\vec{\Delta}_t$  compensable directement dans les projections. Nous rappelons que pour  $\vec{\Gamma}_t = \vec{A}_t \circ \vec{\Delta}_t$  nous avons

$$f_{\vec{\Gamma}_t}(\vec{x}) = f_{\vec{A}_t \circ \vec{\Delta}_t}(\vec{x}) = f\left(\vec{A}_t\left(\vec{\Delta}_t(\vec{x})\right)\right) = f_{\vec{A}_t}\left(\vec{\Delta}_t(\vec{x})\right) = f_{\vec{A}_t \vec{\Delta}_t}(\vec{x}) \quad (2)$$

Ainsi, si nous savons compenser la déformation  $\vec{\Delta}_t$  directement dans les projections  $\mathcal{T}f_{\vec{A}_t \circ \vec{\Delta}_t}$  alors nous savons calculer  $\mathcal{T}f_{\vec{A}_t}$  à partir de  $\mathcal{T}f_{\vec{A}_t \circ \vec{\Delta}_t}$ , la compensation de  $\vec{A}_t$  étant ensuite traitée par [21].

Dans la suite de cette partie nous proposons de développer cette idée dans le cadre de la transformation 3D conique.

### 2.1 Géométrie 3D conique

Une déformation  $\vec{\Gamma}_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  préservera la géométrie conique d'acquisition si elle transforme le point source  $\vec{a}(t) \in \mathbb{R}^3$  au temps  $t$  en un point source virtuel  $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t))$  au temps de référence (typiquement  $t = 0$ )

d'une part et si elle transforme une demi-droite issue de  $\vec{a}(t)$  en une demi-droite issue de  $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t))$  d'autre part. Introduisons les coordonnées sphériques  $(l, \vec{\zeta}) \in \mathbb{R}^+ \times S^2$  de  $\vec{x} - \vec{a}(t)$ , i.e.,  $\vec{x} = \vec{a}(t) + l\vec{\zeta}$ . Nous notons la demi-droite issue de  $\vec{a}(t)$  et de direction  $\vec{\zeta}$  sous la forme  $\vec{a}(t) + \mathbb{R}\vec{\zeta}$  (en effet, c'est l'ensemble  $\{\vec{y} \in \mathbb{R}^3, \text{ tels que } \exists l \in \mathbb{R}^+, \vec{y} = \vec{a}(t) + l\vec{\zeta}\}$ ). Par définition, le point  $\vec{x}$  est élément de la demi-droite  $\vec{a}(t) + \mathbb{R}^+\vec{\zeta}$ .  $\vec{\Gamma}_t$  préserve la géométrie conique si

$$\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t) + \mathbb{R}^+\vec{\zeta}) = \vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) + \mathbb{R}^+\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}), \forall t \in I, \forall \vec{\zeta} \in S^2, \quad (3)$$

où  $\vec{\Gamma}_{S^2,t}$  est un difféomorphisme (bijection bi-régulière) de la sphère unité :

$$\begin{array}{ccc} \vec{\Gamma}_{S^2,t} : S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ & \vec{\zeta} \longrightarrow & \vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}) \end{array}$$

qui associe à une direction  $\vec{\zeta}$  au temps  $t$  une direction  $\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta})$  au temps de référence. Plus précisément, la déformation suivante préserve la géométrie conique 3D :

$$\vec{\Gamma}_t(\vec{x}) = \vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t) + l\vec{\zeta}) = \vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) + \Gamma_{t,\vec{\zeta}}(l)\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}), \quad (4)$$

où  $\Gamma_{t,\vec{\zeta}}$  est une fonction bijective bi-régulière sur  $\mathbb{R}^+$  telle que  $\Gamma_{t,\vec{\zeta}}(0) = 0$ . En pratique nous choisirons  $\Gamma_{t,\vec{\zeta}}$  *linéaire* afin de rester dans le cadre de la transformée en rayon conique (une bijection plus complexe induirait un Jacobien dans (8) qui conduirait à des transformations coniques généralisées qu'on ne sait pas inverser analytiquement). Posons donc  $\Gamma_{t,\vec{\zeta}}(l) = c_{t,\vec{\zeta}}l$  avec  $c_{t,\vec{\zeta}} > 0$  pouvant dépendre du temps  $t$  bien entendu, mais aussi de la direction  $\vec{\zeta}$ . Nous pouvons alors écrire (4) sous la forme (voir la figure 2) :

$$\vec{\Gamma}_t(\vec{x}) = \vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) + c_{t,\vec{\zeta}}l\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}) \quad (5)$$

Nous notons maintenant  $\vec{v}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) - \vec{a}(t)$ . Nous pouvons donc décomposer la transformation  $\vec{\Gamma}_t$  de (5) sous la forme :

$$\vec{\Gamma}_t = \vec{T}_{\vec{v}(t)} \circ \vec{\Delta}_t, \quad (6)$$

où  $\vec{T}_{\vec{v}(t)}$  est la translation de vecteur  $\vec{v}(t)$  ( $\vec{T}_{\vec{v}(t)}(\vec{x}) = \vec{v}(t) + \vec{x}$ ) et

$$\vec{\Delta}_t(\vec{x}) = \vec{a}(t) + c_{t,\vec{\zeta}}l\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}). \quad (7)$$

Nous pouvons alors remarquer que la déformation  $\vec{\Delta}_t$  peut être compensée analytiquement directement dans chacune des projections à  $t$  fixé. En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t f_{\vec{\Delta}_t}(\vec{\zeta}) &= \int_0^{+\infty} f(\vec{a}(t) + c_{t,\vec{\zeta}}l\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta})) dl \\ &= \frac{1}{c_{t,\vec{\zeta}}} \mathcal{D}_t f(\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta})). \end{aligned} \quad (8)$$

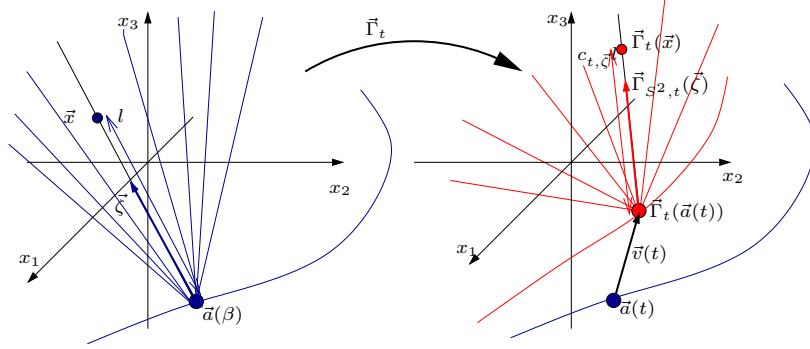


FIG. 2 – Déformation  $\vec{\Gamma}_t$  en géométrie 3D conique (Cone-Beam)

Donc d'après (8) nous avons

$$\mathcal{D}_t f(\vec{\zeta}) = c_{t, \vec{\Gamma}_{S^2, t}^{-1}(\vec{\zeta})} \mathcal{D}_t f_{\vec{\Delta}_t}(\vec{\Gamma}_{S^2, t}^{-1}(\vec{\zeta})). \quad (9)$$

En combinant maintenant (2) et (6) et (9) nous avons

$$\mathcal{D}_t f_{\vec{T}_{\vec{v}(t)}}(\vec{\zeta}) = c_{t, \vec{\Gamma}_{S^2, t}^{-1}(\vec{\zeta})} \mathcal{D}_t f_{\vec{T}_{\vec{v}(t)} \circ \vec{\Delta}_t}(\vec{\Gamma}_{S^2, t}^{-1}(\vec{\zeta})). \quad (10)$$

Ainsi, il est très simple de compenser la déformation  $\vec{\Delta}_t$  dans la projection  $\mathcal{D}_t f_{\vec{T}_{\vec{v}(t)} \circ \vec{\Delta}_t}$  c'est-à-dire dans  $\mathcal{D}_t f_{\vec{\Gamma}_t}$  afin de calculer  $\mathcal{D}_t f_{\vec{T}_{\vec{v}(t)}}$ . Puis la compensation de la translation  $\vec{T}_{\vec{v}(t)}$  devient extrêmement simple puisqu'il s'agit de reconstruire la fonction  $f$  non plus à partir de l'acquisition 3D conique suivant la trajectoire réelle  $\vec{a}(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ , mais à partir de la trajectoire virtuelle  $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) = \vec{a}(t) + \vec{v}(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ . En effet, d'après la définition (1)

$$\mathcal{D}_t f_{\vec{T}_{\vec{v}(t)}}(\vec{\zeta}) = \int_0^{+\infty} f(\vec{a}(t) + \vec{v}(t) + l\vec{\zeta}) dl = \int_0^{+\infty} f(\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) + l\vec{\zeta}) dl.$$

Ainsi, les conditions de Tuy-Grangeat [25, 10] de la reconstruction d'un point  $\vec{x}$  se liront simplement sur la trajectoire virtuelle  $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t))$  de même que la possibilité d'utilisation des algorithmes modernes de reconstruction CB efficaces récents, par exemple [16, 18, 22].

### 3 Expérimentations numériques

Dans la suite, nous illustrons la formule (10) dans le cas de la géométrie cone-beam. Nous supposons que le support de l'objet mesuré est contenu dans la boule unité (de rayon  $\rho = 1$ ).

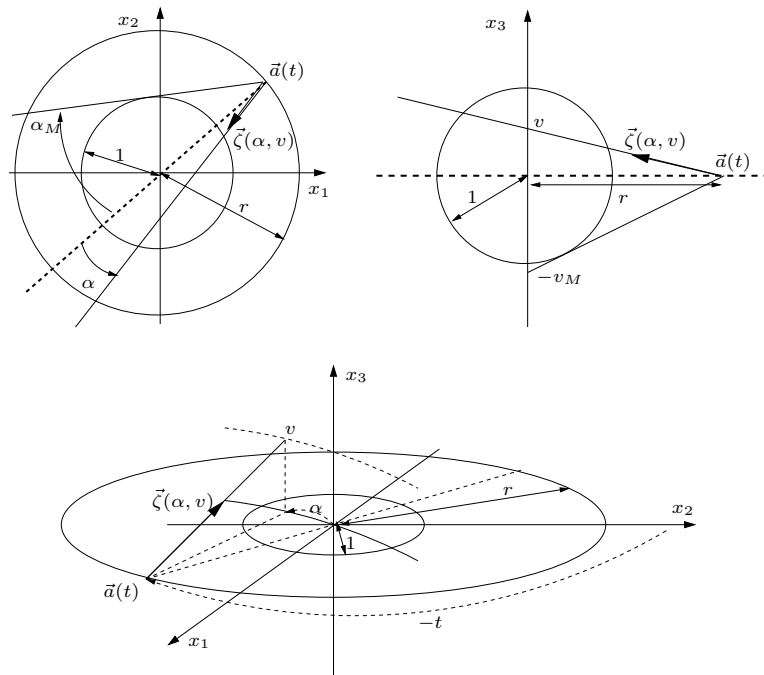


FIG. 3 – Paramètres d’acquisition en géométrie CB sur un détecteur cylindrique virtuel passant par l’axe de rotation (le détecteur virtuel ne sert qu’à repérer les données par  $(t, \alpha, v)$ , le détecteur réel est en général diamétralement opposé à la source, sur le même cercle de rotation).



### 3.1 Géométrie d'acquisition

Nous considérons une géométrie d'acquisition telle que la source décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r = 3$  dans le plan  $Ox_1x_2$ . Nous avons simulé un tour de scanner, c'est-à-dire  $t \in I = [0, 2\pi[$ ,  $\vec{a}(t) = r(\cos t, \sin t, 0)$ , avec un échantillonnage angulaire de  $n_t$  projections par tour ( $\Delta t = \frac{2\pi}{n_t}$ ). Chaque projection est mesurée suivant un détecteur à géométrie cylindrique centré sur l'axe de rotation du scanner (c'est la géométrie d'un détecteur multiligne). Chaque pixel de détection est repéré suivant son angle  $\alpha$  dans la géométrie en éventail et sa coordonnée  $v$  suivant la direction de l'axe de rotation (identique sur chaque ligne du détecteur multiligne), voir la figure 3. Nous avons  $\alpha \in [-\alpha_M, \alpha_M]$  avec  $\alpha_M = \arcsin(1/r)$  et échantillonnée régulièrement suivant  $n_\alpha$  mesures ( $\Delta_\alpha = \frac{2\alpha_M}{n_\alpha}$ ). De même nous échantillonnons régulièrement suivant  $v$  avec  $v \in [-v_M, v_M]$  et  $v_M = \frac{r}{\sqrt{r^2-1}}$  pour un détecteur cylindrique virtuel passant par l'axe de rotation  $\vec{e}_3$  (vecteur unitaire suivant l'axe  $Ox_3$ ). Le détecteur virtuel est donc sur une portion du cylindre de rayon  $r$  et d'axe la droite passant par la source de direction  $\vec{e}_3$ . Les directions  $\vec{\zeta} \in S^2$  sont donc paramétrées par le couple  $(\alpha, v)$  et échantillonnées régulièrement en  $\alpha$  et  $v$ .

Plus précisément (avec un petit abus de notation) nous avons simulé

$$\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_{t_p}}(t_p, \alpha_j, v_k) = \mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_{t_p}}\left(t_p, \vec{\zeta}(\alpha_j, v_k)\right)$$

avec  $t_p = p2\pi/n_t, p = 0, \dots, n_t - 1$ ;  $\alpha_j = -\alpha_M + 2(j + 0,5)\alpha_M/n_\alpha, j = 0, \dots, n_\alpha - 1$  et  $v_k = -v_M + 2(k + 0,5)v_M/n_v, k = 0, \dots, n_v - 1$ .

### 3.2 Compensation des déformations

Pour nos expérimentations numériques, nous considérons une déformation  $\vec{\Gamma}$  de la forme (5) avec  $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) = \vec{a}(t)$  c'est-à-dire  $\vec{v}(t) = \vec{0}$  (translation nulle  $\forall t \in I$ , donc la trajectoire circulaire est conservée par  $\vec{\Gamma}_t$ ), et

$$\vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}) = \vec{\Gamma}_{S^2,t}(\vec{\zeta}(\alpha, v)) = \vec{\zeta}(\Gamma_{A,t}(\alpha), \Gamma_{V,t}(v))$$

avec  $\Gamma_{A,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\Gamma_{V,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux bijections monodimensionnelles. La déformation  $\vec{\Gamma}_{S^2,t}$  des directions  $\vec{\zeta}(\alpha, v)$  est donc construite comme la déformation produit de deux déformations monodimensionnelles suivant chacun des axes : ce choix de la séparation des variables  $(\alpha, v)$  n'est pas nécessaire mais rend le calcul de l'inverse de la déformation beaucoup plus simple puisque  $\vec{\Gamma}_{S^2,t}^{-1}(\vec{\zeta}(\alpha, v)) = \vec{\zeta}(\Gamma_{t,A}^{-1}(\alpha), \Gamma_{t,V}^{-1}(v))$ . De plus, les déformations  $\Gamma_{A,t}(\alpha)$  et  $\Gamma_{V,t}(v)$  sont choisies ici proche de l'identité, impaires, strictement croissantes, linéaires par morceau et définies respectivement par  $\Gamma_{A,t}(\alpha_M/2) = 0, 5\alpha_M/2$ ,  $\Gamma_{A,t}(\alpha_M) = \alpha_M$  et  $\Gamma_{V,t}(v_M/4) = 0, 8v_M/4$ ,  $\Gamma_{V,t}(v_M) = v_M$ . Ici encore, le choix de fonctions linéaires par morceau est guidé par le souci de simplicité. On peut remarquer en effet que l'inverse de

telles applications impaires, croissantes, linéaires par morceau est impaire, croissante, linéaire par morceau et trivialement donnée par les points de contrôle, c'est-à-dire ici  $\Gamma_{\mathbf{A},t}^{-1}(0,5\alpha_M/2) = \alpha_M/2$  et  $\Gamma_{\mathbf{A},t}^{-1}(\alpha_M) = \alpha_M$  d'une part et  $\Gamma_{\mathbf{V},t}^{-1}(0,8v_M/4) = v_M/4$ ,  $\Gamma_{\mathbf{V},t}^{-1}(v_M) = v_M$  d'autre part. Par simplicité, nous choisissons  $c_{t,\vec{\zeta}} = 1$ ,  $\forall t \in [0, 2\pi[$  and  $\forall \vec{\zeta} \in S^2$ . Même si dans ce cas,  $c_{t,\vec{\zeta}}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{A},t}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{V},t}$  et  $\vec{v}(t)$  sont indépendants de  $t$ ,  $\vec{\Gamma}_t$  dépend de  $t$  car elle est définie relativement à  $\vec{a}(t)$ .

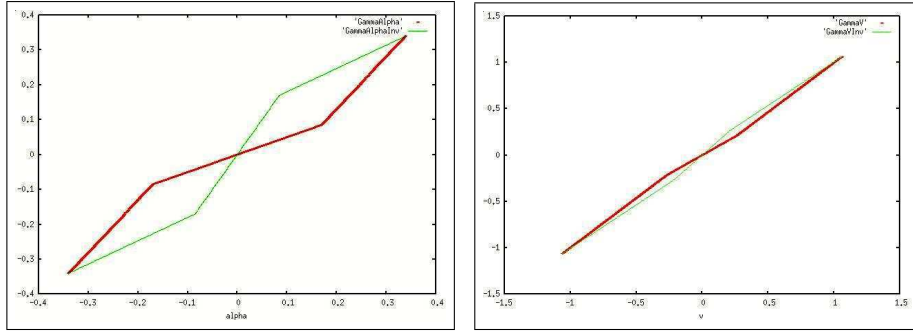


FIG. 4 – Déformations  $\Gamma_{\mathbf{A},t}$  (gauche) et  $\Gamma_{\mathbf{V},t}$  (droite), ainsi que leur inverse dans le même graphe en pointillé.

### 3.2.1 Correction des projections CB

Notre premier fantôme numérique  $f$  est l'image  $256 \times 256 \times 256$  voxelisée de la somme des indicatrices de 6 couches sphériques concentriques de rayons intérieur et extérieur respectifs  $(0,07;0,1)$ ,  $(0,17;0,2)$ ,  $(0,27;0,3)$ ,  $(0,37;0,4)$ ,  $(0,57;0,6)$  et  $(0,77;0,8)$ , donc chacune d'épaisseur  $0,03$ , voir la figure 5. Ces couches sphériques concentriques sont voxelisées dans un cube  $[-1;1]^3$  échantillonné suivant un schéma standard régulier de  $256^3$  voxels : notre fantôme est la combinaison linéaire d'indicatrices des voxels de l'image. Le coefficient de l'indicatrice d'un voxel est 1 si le centre du voxel est contenu dans l'épaisseur d'une des 6 sphères, 0 sinon.

Dans la figure 6, nous représentons les déformations du fantôme à différents  $t$  ( $t = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ ), c'est-à-dire l'image de  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ , ainsi que les projections dynamiques  $\mathcal{D}_t f_{\vec{\Gamma}_t}(\alpha_j, v_k)$ ,  $j = 0, \dots, 255$ ;  $k = 0, \dots, 255$  associées. Nous représentons les projections obtenues par compensation de la déformation par la formule (10) (implémentée par simple interpolation linéaire). Nous constatons visuellement que la déformation est corrigée dans les données en comparant avec la projection du fantôme statique de la figure 5.

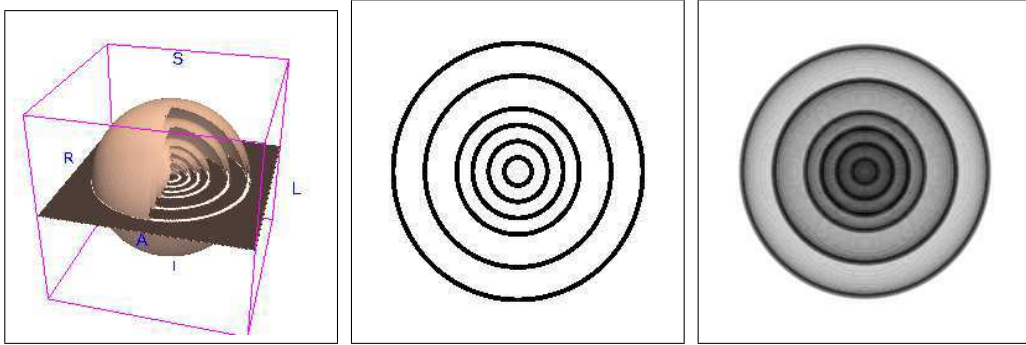


FIG. 5 – Fantôme statique : vue 3D du cube  $[-1, 1]^3$  échantillonné régulièrement sur  $256^3$  voxels (gauche), coupe en  $Z = 1/256$  (centre) et projection radiographique associée (droite). Comme le Fantôme est à symétrie sphérique, toutes les projections sont identiques (ce n’est pas strictement vrai car le fantôme est voxelisé, mais elles sont visuellement semblables et numériquement proches)

### 3.2.2 Reconstruction en 3D CB dynamiques

Comme nous l’avons vu, les déformations que nous considérons peuvent être compensées par une correction directe sur chacune des projections et un changement de trajectoire (reconstruction sur la trajectoire virtuelle  $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t))$  au lieu de  $\vec{a}(t)$ ). Ces traitements sont bien adaptés aux méthodes de reconstructions analytiques modernes qui sont particulièrement efficaces [14, 18, 27]. Cependant, d’une part les méthodes de reconstructions algébriques ont connu récemment un vif regain d’intérêt [24, 23], d’autre part, nous avons choisi une trajectoire circulaire dans le plan  $Ox_1x_2$  de la source  $\vec{a}(t)$  qui ne satisfait pas les conditions de Tuy [25] : “une région d’intérêt peut être reconstruite de manière stable et exacte si tout plan coupant la région d’intérêt coupe également la trajectoire de la source de manière non tangentielle” (en effet, en dehors du plan  $Ox_1x_2$ , tous les points  $\vec{x}$  du volume reconstruit rencontrent un plan qui ne coupe pas la trajectoire de la source, par exemple le plan parallèle à  $Ox_1x_2$  passant par  $\vec{x}$ , ce qui viole la condition de Tuy). Cette trajectoire très simple est fréquente en imagerie interventionnelle. Or la déformation que nous testons ne modifie pas la trajectoire ( $\vec{\Gamma}_t(\vec{a}(t)) = \vec{a}(t)$ ) ; la trajectoire virtuelle ne satisfait donc pas les conditions de Tuy. Dans ces conditions, les méthodes analytiques exactes ne sont pas applicables, et un algorithme algébrique permet de formuler le problème de la reconstruction comme celui de la meilleure approximation de la solution à partir des données mesurées. Nous disposons de codes algébriques 3D facilement adaptables pour la prise en compte des corrections de déformations. Enfin, les codes algébriques offrent des perspectives plus

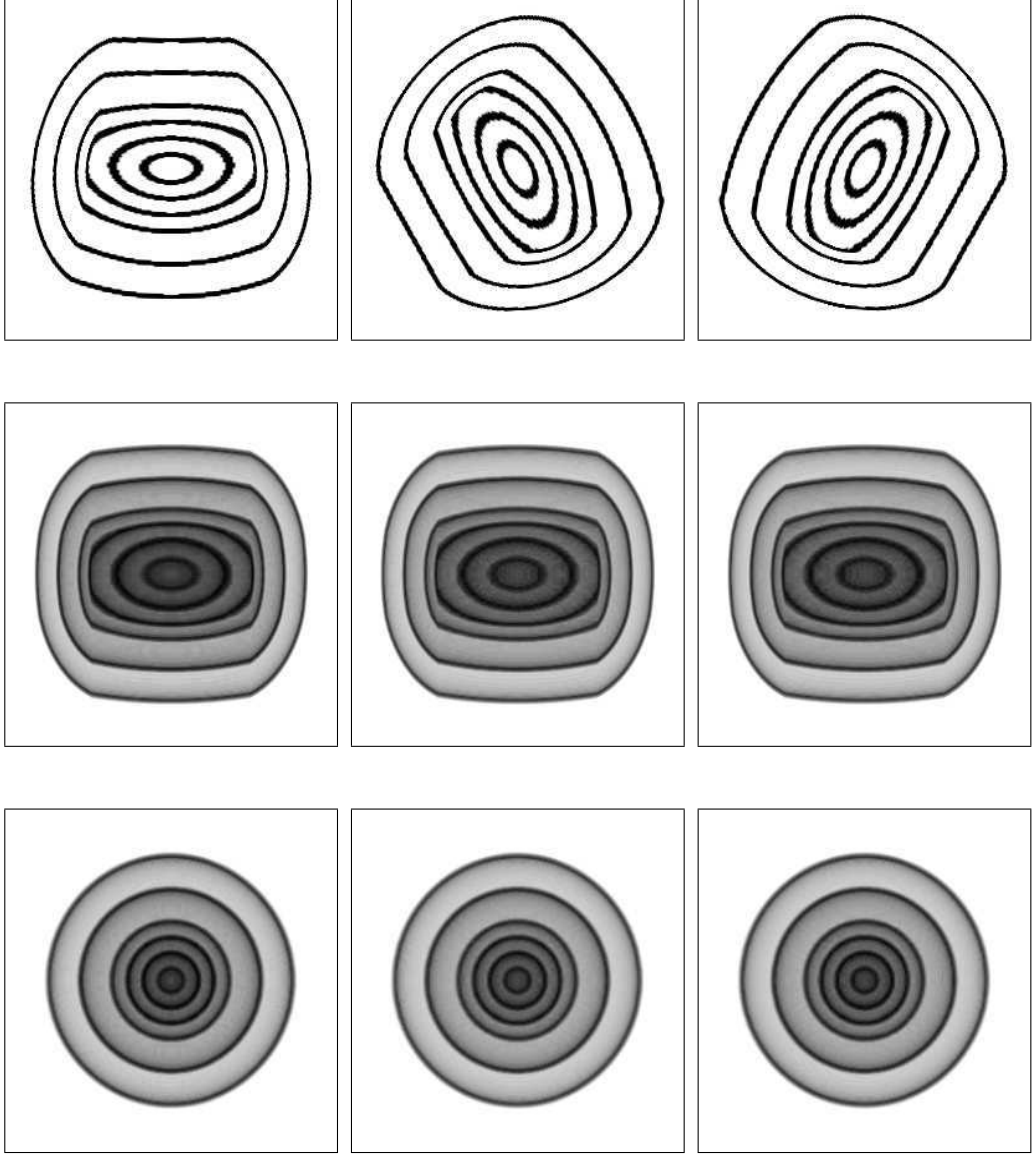


FIG. 6 – Première ligne : coupe du fantôme  $f_{\Gamma_t}$  à  $Z = 1/256$  à  $t = 0$  (gauche), à  $t = 2\pi/3$  (centre), à  $t = 4\pi/3$  (droite). Deuxième ligne : projection  $\mathcal{D}_t f_{\Gamma_t}(\alpha_j, v_k)$  du fantôme  $f_{\Gamma_t}$  à  $Z = 1/256$  à  $t = 0$  (gauche), à  $t = 2\pi/3$  (centre), à  $t = 4\pi/3$  (droite). Troisième ligne : Compensation des déformations dans les projections  $\mathcal{D}_t f_{\Gamma_t}(\alpha_j, v_k)$  (de ligne précédente) en utilisant l'équation (10), à  $t = 0$  (gauche), à  $t = 2\pi/3$  (centre), à  $t = 4\pi/3$  (droite). Nous constatons visuellement (cf. figure 5) que la correction de la déformation est de très bonne qualité.

larges de prise en compte de déformations générales, par exemple par une discrétisation directe du modèle  $\mathcal{D}f_{\vec{\Gamma}_t}(t, \vec{\zeta})$ .

L'algorithme que nous utilisons ici est basé sur une formulation algébrique régularisée par un opérateur de type Laplacien. Plus précisément, la fonction inconnue  $f$  est discrétisée comme une somme d'indicatrices de voxels  $f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n^3} f_j v_j(\vec{x})$ , où  $v_j$  est l'indicatrice du voxel  $j$  et  $f_j \in \mathbb{R}$  est le coefficient de  $f$  dans ce voxel. Soit  $L_i$  une droite de mesure correspondant à un point discret  $(t, \alpha, v)_i$  de l'espace des droites de mesure, nous modélisons l'intégrale conique correspondante (1) par

$$g_i = \int_{L_i} \sum_{j=1}^{n^3} f_j v_j(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{j=1}^{n^3} f_j \int_{L_i} v_j(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Nous résolvons les équations précédentes (autant que de données) au sens des moindres carrés régularisés par la méthode du gradient conjugué :

$$\min_{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n^3}} \|\mathbf{D}\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \tau \|\mathbf{R}\mathbf{f}\|^2,$$

où

- Le vecteur  $\mathbf{g}$  contient les données, éventuellement corrigées des déformations dynamiques selon (10).
- La matrice  $\mathbf{D}$ , de discrétisation de l'opérateur  $\mathcal{D}$ , est une matrice creuse :  $\mathbf{D}_{i,j} = \int_{L_i} v_j(\vec{x}) d\vec{x}$  est non nul seulement si la droite de mesure  $L_i$  intersecte le voxel  $j$  (en dimension 3, il est facile de montrer que  $\mathbf{D}$  a au plus  $3n - 2$  éléments non nul par ligne de longueur  $n^3$  car  $3n - 2$  est le nombre maximal de voxels intersectés par une droite dans un cube de  $n \times n \times n$  voxels).
- la matrice de régularisation  $\mathbf{R}$  est ici une matrice semi-définie positive qui pénalise les irrégularités par différence d'un voxel avec ses voisins dans la grille 3D ( $\mathbf{R}_{i,i} = 6$ ,  $\mathbf{R}_{i,i\pm 1} = -1$ ,  $\mathbf{R}_{i,i\pm n} = -1$  et  $\mathbf{R}_{i,i\pm n^2} = -1$  sauf pour  $i$  correspondant à un voxel sur le bord où  $\mathbf{R}_{i,i\pm 1}$ ,  $\mathbf{R}_{i,i\pm n}$  ou  $\mathbf{R}_{i,i\pm n^2}$  peuvent ne pas être définis : on adapte alors la valeur de  $\mathbf{R}_{i,i}$  de telle sorte que la somme des éléments d'une ligne soit nulle).
- $\tau > 0$  est un paramètre de régularisation choisi par une méthode de validation croisée généralisée stochastique [9, 5].

Dans la figure 8, nous comparons les reconstructions 3D d'un fantôme numérique dynamique à partir de données dynamiques corrigées et non corrigées à celle de la reconstruction à partir de données statiques. Comme dans le paragraphe précédent, nous avons choisi un fantôme numérique dont les coupes ont la forme de mires et permettent de bien visualiser les déformations. Il s'agit ici d'une somme d'indicatrices de quatre couches sphériques concentriques centrées en  $(0, 1; 0, 0)$  et de rayon intérieur et extérieur respectifs  $(0, 1; 0, 2)$ ,  $(0, 3; 0, 4)$ ,  $(0, 5; 0, 6)$ ,  $(0, 7; 0, 8)$ . Le fantôme est voxelisé sur un cube  $[-1; 1]^3$  de  $n^3$  voxels avec ici  $n = 100$ . Il est présenté dans la figure 7

ainsi qu’une projection statique, la projection dynamique correspondante et la projection corrigée suivant (9). Nous utilisons la même déformation  $\vec{\Gamma}_t$  que dans le paragraphe précédent, c’est-à-dire, celle décrite au début de la section 3.2. La simulation numérique de l’acquisition des données met en œuvre la même géométrie conique 3D que celle décrite à la section 3.1 (cercle de la source de rayon  $r = 3$  et détecteur cylindrique) suivant  $n_t = 161$  projections sur un tour, chaque projection étant  $100 \times 100$ .

Nous constatons, dans la figure 7, que la compensation de la déformation dans la projection produit une projection très semblable à celle associée à un fantôme statique. Nous pouvons voir que notre compensation, principalement basée sur des interpolations bi-linéaires dans chaque plan de projection, produit une estimation lissée de la projection du fantôme statique. Nous retrouvons cette légère perte de résolution dans la reconstruction à partir de projections dynamiques corrigées, en particulier dans la figure 9. Nous notons ici que la validation croisée généralisée a estimé la même valeur du paramètre de régularisation  $\tau = 0.01$  pour les trois reconstructions des figures 8 et 9. Nous constatons qualitativement dans la figure 8, mais aussi plus quantitativement dans la figure 9, que la compensation de la déformation améliore sensiblement les performances de la reconstruction en tomographie dynamique. Cette impression est confirmée par la distance euclidienne  $\|\mathbf{f}_{\text{est}} - \mathbf{f}\|_2$  entre chaque reconstruction  $\mathbf{f}_{\text{type}}$ ,  $\text{type} \in \{\text{Static}, \text{Dynamic}, \text{DynamicCorr}\}$  présenté dans la figure 8 et le fantôme à reconstruire  $\mathbf{f}$  présenté dans la figure 7. Nous avons  $\|\mathbf{f}_{\text{Static}} - \mathbf{f}\|_2 = 9,7 \times 10^{-2}$ ,  $\|\mathbf{f}_{\text{DynamicCorr}} - \mathbf{f}\|_2 = 13,1 \times 10^{-2}$  et  $\|\mathbf{f}_{\text{Dynamic}} - \mathbf{f}\|_2 = 40,0 \times 10^{-2}$ . L’erreur en norme Euclidienne est, dans ce cas, trois fois plus grande pour la reconstruction à partir de données dynamiques non corrigées que pour la reconstruction à partir de données dynamiques corrigées.

## 4 Discussion

Dans ce travail, nous avons montré qu’une classe bien plus vaste de déformations que la simple classe des déformations affines peut être compensée analytiquement en tomographie 3D CB dynamique. Il s’agit de la classe des déformations qui préservent la géométrie conique de mesure, c’est-à-dire, celle qui transforme le faisceau de demi-droites convergentes de mesures à l’instant  $t$  en un faisceau convergent à l’instant de référence. Nous avons montré que ces déformations peuvent se décomposer en une translation composée à une déformation sur la sphère unité des directions des demi-droites d’intégration combinée à une déformation le long de chaque direction d’intégration. Afin de préserver les formules analytiques d’inversion, nous restreignons les déformations le long des demi-droites d’intégration à être linéaires (par contre ces dernières peuvent dépendre de la direction d’intégration). Toutes ces déformations peuvent, bien entendu, varier dans le temps. Nous

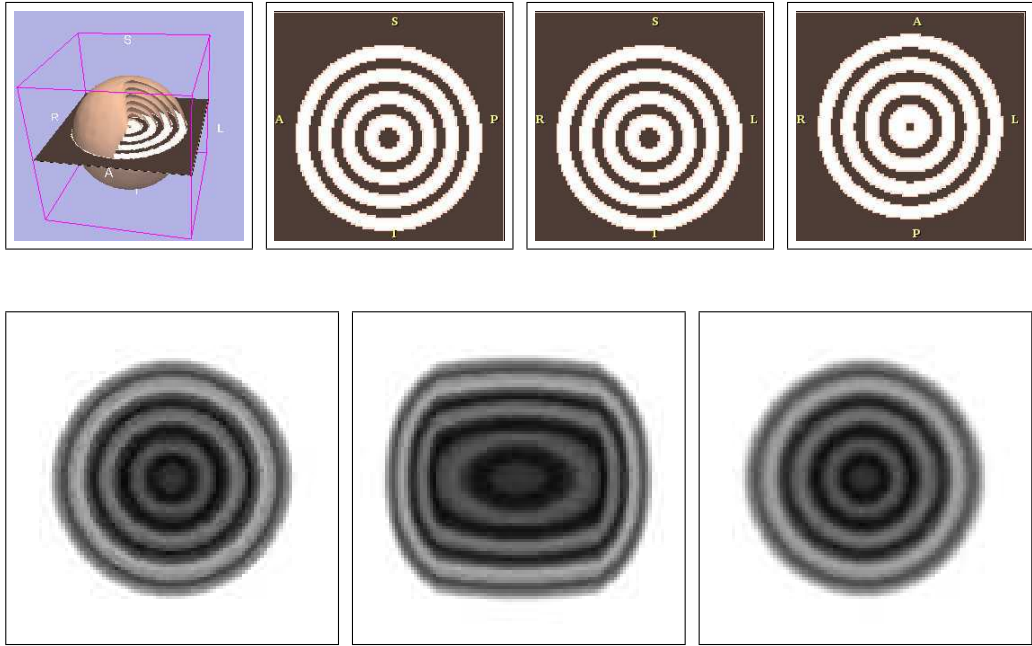


FIG. 7 – Première ligne : visualisation qualitative du fantôme statique  $f$  : vue 3D (gauche), coupe à  $Z = 1/100$  (centre gauche), coupe à  $Y = 1/100$  (centre droit), coupe à  $X = 1/100$  (droite). Deuxième ligne : projections à  $t = 0$ ,  $\mathcal{D}_t f$  du fantôme statique  $f$  (centre),  $\mathcal{D}_t f_{\vec{\Gamma}_t}$  du fantôme dynamique  $f_{\vec{\Gamma}_t}$ , et projection compensée suivant la formule (9) (droite). Ces trois projections sont représentées dans la même échelle de niveau de gris linéaire avec comme convention ici : 0 est attribué au blanc et 1 au noir.

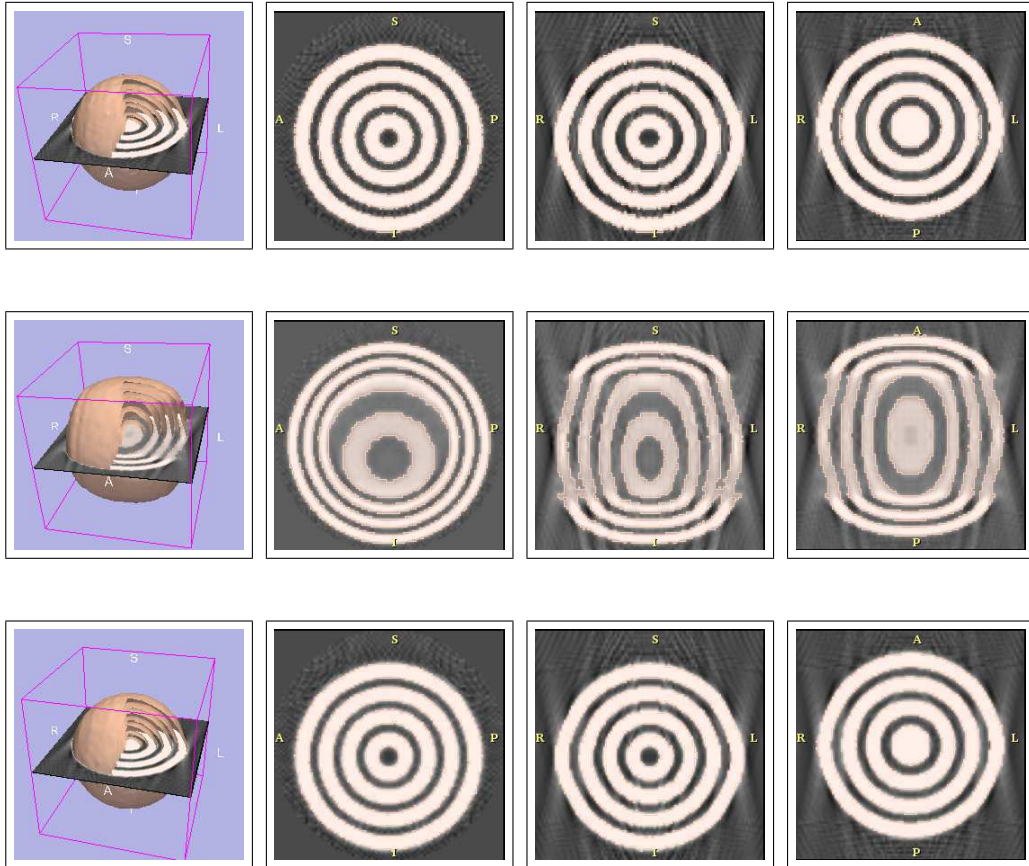


FIG. 8 – Représentation qualitative des solutions. Première ligne : solution  $f_{\text{Static}}$  à partir des données statiques suivant la même organisation que la première ligne de la figure (7). Deuxième ligne : solution  $f_{\text{Dynamic}}$  à partir des données dynamiques. Troisième ligne : solution  $f_{\text{DynamicCorr}}$  à partir des données dynamiques corrigées avec (9).



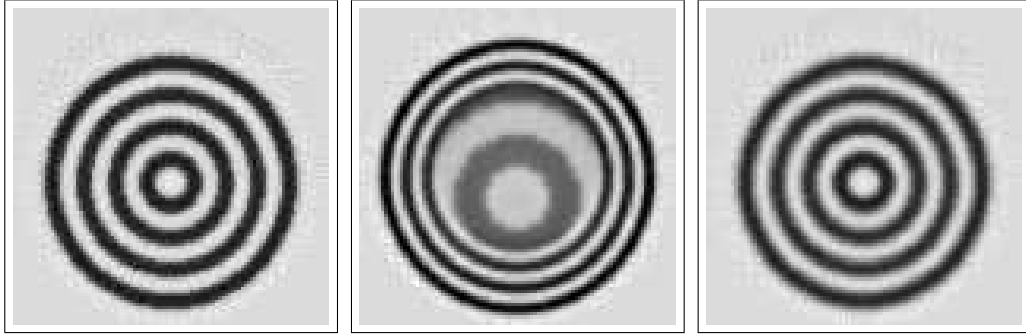


FIG. 9 – Coupe  $Z=1/100$  des reconstructions à partir des projections du fantôme statique (gauche), à partir du fantôme dynamique sans compensation des déformations (centre), du fantôme dynamique avec compensation des déformations avec l'équation (9) (droite). Ces trois coupes sont représentées avec la même échelle de niveaux de gris linéaire : blanc pour  $-0,2$  et noir pour  $1,2$ . Nous pouvons constater visuellement que la compensation de la déformation selon (9) améliore sensiblement la qualité de la solution à partir de données du fantôme dynamique et la rend semblable à une reconstruction à partir de données du fantôme statique. En pratique, l'interpolation pour la compensation des déformations a fait perdre de la résolution sur la reconstruction.

avons donné une méthode et des formules pour compenser une déformation issue de cette classe en géométrie CB 3D et nous avons illustré ce travail par des expérimentations numériques sur des fantômes.

Parmi les perspectives immédiates de poursuite de ce travail, nous souhaitons coupler nos méthodes de compensation de déformation à des algorithmes de reconstruction analytique en géométrie CB 3D suivant des trajectoires plus générales et mieux adaptées aux méthodes analytiques que la trajectoire circulaire. En particulier, il faudrait éviter de procéder en deux étapes comme actuellement : compensation à l'intérieur de chaque projection par interpolation puis reconstruction suivant la trajectoire virtuelle. Cette méthode a l'avantage d'être extrêmement simple et de permettre de réutiliser des codes de reconstruction existants avec des modifications mineures. Cependant, l'intégration de la compensation de la déformation au cœur de l'algorithme de reconstruction pourrait permettre de gagner une interpolation sur les données et donc d'améliorer légèrement la résolution des reconstructions.

L'identification des déformations est un problème sensiblement plus difficile. Nous pouvons envisager, comme dans [12, 1], une identification de la déformation dynamique dans des reconstructions successives à basse résolution (en supposant que la déformation est limitée en fréquence spatiale et

temporelle), puis de compenser ses effets à plus haute résolution spatiale et temporelle. Une autre voie consiste à utiliser des modèles paramétrés de la déformation des organes mesurés et d'identifier les paramètres de la déformation dans les données disponibles (les projections radiographiques mais aussi éventuellement en utilisant des capteurs de formes supplémentaires : localisateur 3D et marqueurs sur la peau pour la respiration par exemple).

Lorsque la déformation est complexe et ne préserve pas du tout les droites de mesure, il est probable que les méthodes algébriques de reconstruction adaptées à des intégrales pondérées sur des courbes, produisent de meilleures reconstructions que les méthodes analytiques. Cependant, il est essentiel de connaître les limites des méthodes analytiques de compensation des déformations. Il conviendra en particulier de résoudre le problème de la meilleure approximation de la déformation identifiée dans la classe des déformations que nous savons compenser analytiquement et de mesurer l'effet de la compensation analytique de cette meilleure approximation dans la reconstruction.

## Remerciements

Ce travail a bénéficié en partie de soutiens du CNRS et du CEA (bourse BDI de S. Roux) et du projet CIMENT (<http://ciment.ujf-grenoble.fr/>). Laurent Desbat remercie l'ACI GRID (projet CIMENT GRID), la Région Rhône Alpes (projet RAGTIME) et l'ANR (projet ToRIID) pour leur soutien.

## Références

- [1] S. Bonnet, A. Koenig, S. Roux, P. Hugonnard, R. Guillemaud, and P. Grangeat. Dynamic X-ray computed tomography. *Proceedings of the IEEE*, 91(10) :1574–87, October 2003.
- [2] C.R. Crawford, K.F. King, C.J. Ritchie, and J.D. Godwin. Respiratory compensation in projection imaging using a magnification and displacement model. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15 :327–332, 1996.
- [3] M. Defrise, R. Clack, and D. Townsend. The solution to the 3D image reconstruction problem from 2D parallel projections. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10 :869–877, 1993.
- [4] L. Desbat, M. Fleute, M. Defrise, X. Liu, C. Huberson, R. Laouar, R. Martin, J. Guillou, and S. Lavallée. Minimally Invasive Interventional Imaging for Computer Assisted Orthopedic Surgery. In *SURGETICA'2002*, pages 288–295. Sauramps médical, 2002. (best conference paper).
- [5] L. Desbat and D. Girard. The “minimum reconstruction-error” choice of regularization parameters : some more efficient methods and their application to deconvolution problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(6) :1387–1403, 1995.
- [6] L. Desbat, S. Roux, and P. Grangeat. Compensation de déformations en tomographie dynamique. In *GRETSI 2005 abstract book*, page 51. (+4 pages sur CD), 2005.

- [7] L. Desbat, S. Roux, and P. Grangeat. Compensation of some time dependent deformations in tomography. *submitted to IEEE MI (revision)*, 2005.
- [8] T. Flohr and B. Ohnesorge. Heart rate adaptative optimization of spatial and temporal resolution for electrocardiogram-gated multislice spiral CT of the heart. *Journal of Computer Assisted Tomography*, 25(6) :907–923, 2001.
- [9] D.A. Girard. Asymptotic optimality of the fast randomized versions of GCV and  $C_L$  in ridge regression and regularisation. *Ann. of Stat.*, 19(4) :1950–1963, 1991.
- [10] P. Grangeat. *Analyse d'un système d'imagerie 3D par reconstructions à partir de radiographies X en géométrie conique*. PhD thesis, ENST, 1987.
- [11] P. Grangeat. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. *Mathematical Methods in Tomography, G.T. Herman, A.K. Louis, F. Natterer, Lecture Notes in Mathematics*, pages 66–97, 1991.
- [12] P. Grangeat, A. Koenig, T. Rodet, and S. Bonnet. Theoretical framework for a dynamic cone-beam reconstruction algorithm based on a dynamic particle model. *Phys. Med. Biol.*, 47(15) :2611–2625, August 2002.
- [13] M. Kachelriess and W. A. Kalender. Electrocardiogram-correlated image reconstruction from subsecond spiral computed tomography scans of the heart. *Medical Physics*, 25(12) :2417–2431, December 1998.
- [14] A. Katsevich. Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone beam CT. *Phys. Med. Biol.*, 47 :2583–98, 2002.
- [15] A. Katsevich. Theoretically exact filtered back-projection type inversion algorithm for spiral CT. *SIAM. J. Appl. Math.*, 62 :2012–26, 2002.
- [16] A. Katsevich. A general scheme for constructing inversion algorithms for cone beam CT. *International journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 21 :1305–1321, 2003.
- [17] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short-scan. *Phys. Med. Biol.*, 47 :2525–2546, July 2002.
- [18] J.D. Pack and F. Noo. Cone-beam reconstruction using 1d filtering along the projection of m-lines. *Inverse Problems*, 21(3) :1105–1120, 2005.
- [19] S. Roux. *Modèles dynamiques en tomographie. Application à l'imagerie cardiaque*. Phd thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble 1, France, 2004.
- [20] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Efficient acquisition for periodic dynamic CT. *IEEE Transactions on Nuclear Sciences*, 50(5) :1672–77, October 2003.
- [21] S. Roux, L. Desbat, A. Koenig, and P. Grangeat. Exact reconstruction in 2D dynamic CT : compensation of time-dependent affine deformations. *Phys. Med. Biol.*, 49(11) :2169–82, June 2004.
- [22] E.Y Sidky and X. Pan. A minimum data FBP-type algorithm for image reconstruction in cone-beam CT. In *Fully 3D image reconstruction in radiology and medicine proceeding*, pages 291–294, Salt Lake City, 2005.
- [23] A. Sitek, R.H. Huesman, and G.T. Gullberg. Tomographic iterative reconstruction using unconstrained grids. In *Fully 3D image reconstruction in radiology and medicine proceeding*, pages 275–278, Salt Lake City, 2005.

- [24] J.B. Thibault, K. Sauer, C. Bouman, and J. Hsieh. Three-dimensional statistical modeling for image quality improvements in multi-slice helical CT. In *Fully 3D image reconstruction in radiology and medicine proceeding*, pages 271–274, Salt Lake City, 2005.
- [25] H.K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM J. Appl. Math.*, 43(3) :546–552, 1983.
- [26] K. Wiesent, K. Barth, N. Navab, P. Durlak, T. Brunner, O. Schuetz, and W. Seissler. Enhanced 3-d-reconstruction algorithm for c-arm systems suitable for interventional procedures. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 19(5) :391–403, 2000.
- [27] Y. Zou and X. Pan. Image reconstruction on PI-lines by use of filtered back-projection in helical cone-beam CT. *Phys. Med. Biol.*, 49 :2717–2731, 2004.