HAL open science

Inégalités de Harnack et Phénomène de Concentration.

Samy Skander Bahoura

To cite this version:

Samy Skander Bahoura. Inégalités de Harnack et Phénomène de Concentration.. 2006. hal-00023510

HAL Id: hal-00023510

https://hal.science/hal-00023510v1

Preprint submitted on 28 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00023510, version 1 - 28 Apr 2006

Inégalités de Harnack et phénomène de concentration.

Samy Skander Bahoura *

Université de Patras, Département de Mathématiques, Patras 26500 Grèce

Résumé. Nous prouvons des inégalités concernant le produit $\sup u \times \inf u$ pour des opérateurs elliptiques d'ordre 2 et 4. Ces inégalités et le phénomène de concentration nous permettent d'obtenir le comportement asymptotique des solutions de ces EDP.

Abstract. We proove some inequalities concerning the product $\sup u \times \inf u \leq c$, $\sup u \times \inf u \geq c$ for some elliptic operators of order 2 and 4. Those inequalities and the concentration phenomena we can describe the asymptotic behavior of those PDE solutions.

Mots-cles: $\sup \times \inf$, laplacien et bilaplacien, point de concentration, comportement asymptotique.
Keywords: $\sup \times \inf$, laplacian and bilaplacian, concentration point, asymptotic behavior.

Cet article correspond à la Note aux Comptes Rendus Mathématiques de l'Academie des Sciences [B 3].

Dans la suite nous notons le laplacien géométrique par $\Delta = -\nabla^i \nabla_i$.

On s'occupe de certaines inégalités de Harnack de type $\sup \times \inf$ et leurs applications aux phénomènes de concentration dans le cas d'opérateurs elliptiques d'ordre 2. Ce type de problèmes est bien connu voir par exemple, [B1], [B2] [C-L], [DLN], [GT], [H], [He] [L1], [L2], [M] et les résultats obtenus utilisent les téchniques de symétrie voir [GNN].

Les phénomènes de concentration et leurs conséquences ont beaucoup été étudiées, precisément dans la recherche de meilleurs constantes dans les inégalités de Sobolev voir par exemple [Au], [Au, D, He], [DHR] et [He,V]. En ce qui nous concerne, ce type d'inégalités ($\sup \times \inf$) et le phénomène de concentration, nous permettent de décrire le comportement asymptotic de certaines solutions d'EDP.

*Adresses e-mails: samybahoura@yahoo.fr, bahoura@ccr.jussieu.fr

Considérons une suite de réels positifs $(\epsilon_i)_{i\geq 0}$ avec $\epsilon_i \to 0$ et une suite de fonctions $v_{\epsilon_i} > 0$ sur $\mathbb{S}_n$, telles que:

$$\Delta v_{\epsilon_i} + \frac{n(n-2)}{4} v_{\epsilon_i} = \frac{n-2}{4(n-1)} V_{\epsilon_i} {v_{\epsilon_i}}^{N-1-\epsilon_i},$$

avec, $N = \dfrac{2n}{n-2}$, $0 < a \leq V_{\epsilon_i}(x) \leq b < +\infty, \forall\, x \in \mathbb{S}_n$ et $||\nabla V_{\epsilon_i}||_\infty \leq A$.

On suppose que pour tout i que les fonctions V_{ϵ_i} et v_{ϵ_i} sont régulières.

Théorème1. Sous ces hypothèses la suite (v_{ϵ_i}) vérifie,

$$\epsilon_i^{(n-2)/2} \left(\sup_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} \right)^{1/4} \times \inf_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} \to 0. \qquad (1)$$

On s'intéresse aussi au problème suivant:

$$\Delta u_i = V_i(|x|) {u_i}^{N-1-\epsilon_i} \text{ dans } B_1(0) \text{ et } u_i = 0 \text{ sur } \partial B_1(0).$$

Où $B_1(0)$ est la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et V_i est une fonction décroissante de $|x|$ qui vérifie $0 < a \leq V_i(|x|) \leq b < +\infty$ pour tout x. On suppose que les fonctions u_i et V_i sont régulières pour tout i.

Thórème 2. Pour tout compact K de $B_1(0)$,

$$\sup_{B_1(0)} u_i \times \inf_K u_i \geq c = c(a, b, K, \Omega, n) > 0.$$

<u>Application:</u>

Considérons le problème suivant:

$$\Delta u_{\epsilon_i} = n(n-2) {u_{\epsilon_i}}^{N-1-\epsilon_i}, \;\; u_{\epsilon_i} > 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u_{\epsilon_i} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \qquad (E),$$

avec, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Pour ce type d'équation il existe de nombreux résultats de compacité et de comportement asymptotique voir par exemple, [BP], [H], [He]

Nous avons,

Théorème 3. 1) Il existe $c_1 = c_1(n, \Omega) > 0, c_2 = c_2(n, \Omega) > 0$ telles que:

$$c_2 \leq ||u_{\epsilon_i}||_{H^1(\Omega)} \leq c_1.$$

2) Si Ω est étoilé, alors, il existe une sous-suite (u_{ϵ_j}) pour laquelle, il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ et un nombre fini de points de concentrations $x_1, x_2, ..., x_m \in \Omega$ tels que:

$$i) \lim_{\epsilon_j \to 0} u_{\epsilon_j} = 0 \text{ dans } \mathcal{C}^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots x_m\}),$$

$\forall\ k \in \{1, \ldots, m\},\ \exists\ (x_{j,k})$ *avec* , $x_{j,k} \to x_k$ *et* $u_{\epsilon_j}(x_{j,k}) \to +\infty$.

$$ii)\ \lim_{\epsilon_j \to 0} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \delta_{x_i} \text{ avec } \mu_i \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Ici la convergence est au sens des distributions.

iii) Pour tout compact K *de* $\Omega - \{x_1, \ldots, x_m\}$*, il existe une constante positive* $c = c(K, \Omega, n) > 0$ *telle que:*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{K} u_{\epsilon_j} \leq c.$$

iv) Il existe un voisinage ω *du bord* $\partial\Omega$ *et une constante positive* $\bar{c} = \bar{c}(\omega, \Omega, n)$ *tels que:*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \bar{c}.$$

v) il existe deux constantes positives, β_1 *et* β_2 *telles que:*

$$\beta_1 \leq \epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \leq \beta_2,$$

plus précisément, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\partial\Omega)$*, telle que,*

$$\epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \right)^2 \to \frac{c_n \int_{\partial\Omega} < x|\nu(x) > [\partial_\nu g(\sigma)]^2 d\sigma}{\sum_{k=1}^{m} \mu_k}.$$

vi) il existe m *réels positifs* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, $\gamma_k \geq n(n-2)\frac{\omega_n}{2^n}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, *tels que:*

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times u_{\epsilon_j}(x) \to \sum_{k=1}^{m} \gamma_k G(x_k, x) \text{ dans } \mathcal{C}^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}),$$

où G *est la fonction de Green du laplacien avec condition de Dirichlet. On peut prendre,* $g = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k G(x_k, .)$ *dans le v).*

Remarque: On verra que dans le cas où Ω n'est pas étoilé, les points i), ii), iii), iv) et vi) se conservent.

Concernant certains opérateurs d'ordre 4, il existe des résultats comme [C 1], [C 2], [C-G] et [V]. Nous nous occupons maintenant de savoir si pour certains d'entre eux des minorations du produit sup $\times$ inf sont possibles.

Sur une variété Riemannienne compacte (M, g) de dimension $n \geq 5$, on considère l'équation suivante:

$$\Delta^2 u_i + b\Delta u_i + c u_i = V_i {u_i}^{(n+4)/(n-4)},\ u_i > 0 \text{ sur } M \qquad (E')$$

avec, $b, c > 0$, $c \leq \dfrac{b^2}{4}$ et $0 \leq V_i(x) \leq A$.

La condition $0 < c \leq \dfrac{b^2}{4}$ est trés utile pour obtenir notre estimation, elle permet d'avoir une fonction de Green avec d'intéréssantes propriétés et est utilisée pour appliquer le principe du maximum voir [C 2].

Théorème 4. Il existe une constante positive $k = k(b, c, A, M, g)$, telle que,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq k \ \forall \ i,$$

où u_i est solution de (E')

Autre résultat sur un ouvert Ω strictement convexe de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 5$, considérons l'équation:

$$\Delta^2 u_\epsilon = {u_\epsilon}^{p-\epsilon}, \ \ u_\epsilon > 0 \ \text{ dans } \Omega, \ \text{ et } u_\epsilon = \Delta u_\epsilon = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \qquad (E'')$$

avec, $p = \dfrac{n+4}{n-4}$ et $0 < \epsilon \leq \dfrac{4}{n-4}$.

Théorème 5. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c = c(K, \Omega, n) > 0$ telle que pour toute solution u_ϵ de (E''), on ait:

$$\sup_\Omega u_\epsilon \times \inf_K u_\epsilon \geq c.$$

Pour les opérateur d'ordre 4, il existe une identité de Pohozaev comme pour ceux d'ordre 2([P]), voir [C-G], et l'équation (E''), avec $\epsilon = 0$, ne possède pas de solutions lorsque l'ouvert Ω est étoilé. Ceci nous pousse à étudier (E'') avec $\epsilon > 0$.

Pour l'équation (E''), il est important de remarquer que les points x_ϵ où les solutions u_ϵ sont maximum, restent loin du bord $\partial\Omega$. Ceci est important pour estimer ces solutions prés du bord. Ce fait important est réalisé pour les ouverts Ω strictement convexes, la méthode utilisée est celle de symétrie de [GNN] et la transformation de Kelvin. Pour le laplacien d'ordre 2, l'équation reste invariante par la transformation de Kelvin, ce qui n'est pas le cas pour (E'') et la condition de stricte convexité du domaine peut attenuer la non invariance par cette transformation, voir [C-G].

Preuve du Théorème 1:

Supposons par l'absurde que (1) ne soit pas vraie, alors:

$$\limsup_{\epsilon_i \to 0} \left[{\epsilon_i}^{(n-2)/2} \left(\sup_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} \right)^{1/4} \times \inf_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} \right] \geq c > 0.$$

Soit x_{ϵ_i} le point où v_{ϵ_i} atteint son maximum. On considère la projection stéographique de pôle y_{ϵ_i} point diamètralement opposé à x_{ϵ_i}.

On a:

Si $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}_n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ l'image de x par la projection stéréographique, alors:

$$x_i = \frac{2y_i}{1+|y|^2}, \ \ 1 \leq i \leq n, x_{n+1} = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1},$$

et,

$$y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}, \ \ 1 \leq i \leq n.$$

$$g_0 = \left(\frac{2}{1+|y|^2} \right)^2 dy^2, \ \text{ et } \ u_{\epsilon_i} = \left(\frac{2}{1+|y|^2} \right)^{(n-2)/2} v_{\epsilon_i}.$$

Soit $\mathcal{E}$ la métrique euclidienne et $\Delta_{\mathcal{E}}$ le laplacien pour cette métrique, on obtient:

$$\Delta_{\mathcal{E}} u_{\epsilon_i} = \frac{n-2}{4(n-1)} H^{\epsilon_i} V_i {u_{\epsilon_i}}^{N-1-\epsilon_i}, \ \text{ avec } \ H(y) = \left(\frac{2}{1+|y|^2} \right)^{(n-2)/2}.$$

et,

$$u_{\epsilon_i}(0) = 2^{(n-2)/2} \max_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i} = \max_{B_1(0)} u_{\epsilon_i}, \ \text{ et } \ \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \geq \inf_{\mathbb{S}_n} v_{\epsilon_i},$$

On en déduit que,

$$\limsup_{\epsilon_i \to 0} \left[{\epsilon_i}^{(n-2)/2} \left[u_{\epsilon_i}(0) \right]^{1/4} \times \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \right] \geq \tilde{c} > 0.$$

On se retrouve dans le cas du Théorème 1 de [B 1], les étapes de la preuve de ce Théorème 1 se conservent ici, mais il faut vérifier si le lemme 2 de l'étape 2-3 se conserve.

On a, $a_{\epsilon_i} = 0$ pour tout entier i et,

$$\tilde{V}_{\epsilon_i}(t, \theta) = e^{(n-2)\epsilon_i t/2} [H(t)]^{\epsilon_i} V_{\epsilon_i}(e^t \theta), \ \text{ avec } \ H(t) = \left(\frac{2}{1+e^{2t}} \right)^{(n-2)/2}.$$

Comme,

$${\epsilon_i}^{[2/(n-2) - \epsilon_i/2]^{-1}} \left[u_{\epsilon_i}(0) \right]^{1/4} \geq \tilde{c} > 0,$$

ce qui s'écrit,

$$\log \epsilon_i \geq -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{n-2} - \frac{\epsilon_i}{2}\right) \log u_{\epsilon_i}(0) + \log \tilde{\tilde{c}} = t_i.$$

et donc,

$$\partial_t \tilde{V}_{\epsilon_i} \geq 0, \text{ sur }]-\infty, t_i] \times \mathbb{S}_{n-1}.$$

Donc, le lemme 2 de l'étape 2-3 du Théorème 1 de [B 1] se conserve et la conclusion de la preuve de ce Théorème 1 reste la même ici, à savoir,

$$[u_{\epsilon_i}(0)]^{1/4} \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \leq \bar{c}, \text{ pour tout } i,$$

Or, d'après notre hypothèse de départ,

$$[u_{\epsilon_i}(0)]^{1/4} \inf_{B_1(0)} u_{\epsilon_i} \geq \frac{\tilde{c}}{{\epsilon_i}^{(n-2)/2}} \to +\infty.$$

<u>Preuve du Théorème 2:</u>

D'après le Théorème 1' de Gidas-Ni-Nirenberg [GNN], la méthode moving-plane assure que u_i est radiale. Considérons la fonction de Green G du laplacien, on peut ecrire:

$$\max_{B_1(0)} u_i = u_i(0) = \int_{B_1(0)} G(0,y) V_i(|x|) u_i(y)^{N-1-\epsilon_i} \leq b \left[\int_{B_1(0)} G(0,y)dy\right] (\max_{B_1(0)} u_i)^{N-1-\epsilon_i},$$

Ce qui donne:

$$[u_i(0)]^{4/(n-2)-\epsilon_i} \geq c > 0,$$

avec, $c = \dfrac{1}{b\left[\int_{B_1(0)} G(0,y)dy\right]}$.

Comme dans le Théorème 2 de [B-2], on utilise la représentation par la fonction de Green pour prouver que l'énergie tend vers 0, puis par le procédé d'itération de Moser, on prouve que $u_i(0) \to 0$ ce qui est contradictoire.

<u>Preuve du Théorème 3:</u>

<u>Preuve de 1):</u>

D'après l'inégalité de Harnack du type sup $\times$ inf (voir [C-L], [L1] ou adapter la méthode qui se trouve dans [B 1] avec les $V_i \equiv 1$), pour tout compact K d'un ouvert $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, il existe une constante positive $\bar{c} = \bar{c}(K, \Omega_0, \Omega, n)$ telle que :

$$\sup_K u_\epsilon \times \inf_{\Omega_0} u_\epsilon \leq c,$$

On sait que (voir [H] pages 164-165) pour $\delta = \delta_0 > 0$ assez petit:

$$u_\epsilon(x) \leq M = M(\delta, \Omega, n) \ \forall\ x \in \{y, d(y, \partial\Omega) \leq \delta\}.$$

δ_0 dépend de Ω mais pas de $\epsilon > 0$.

On prend, $\Omega_0 = \{x, d(x, \partial\Omega) > \frac{\delta_0}{2}\}$ et $K = \{x, d(x, \partial\Omega) \geq \frac{2\delta_0}{3}\}$.

Soit G la fonction de Green du laplacien avec condition de Dirichelet, alors:

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega G(x,y) u_\epsilon^{N-1-\epsilon}(y) dy.$$

En appliquant le principe du maximum à G, on a pour $\delta_0 > 0$,

$$G(x,y) \geq c_1 = c_1(\delta_0, \Omega, n) > 0 \text{ sur } \{x, d(x,\partial\Omega) \geq 2\delta_0/3\} \times \{y, d(y, \partial\Omega) \geq \delta_0/2\},$$

ce qui donne,

$$\bar{c} \geq \sup_K u_\epsilon \times \inf_{\Omega_0} u_\epsilon \geq \int_{\{x, d(x,\partial\Omega) \geq 2\delta_0/3\}} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y) dy.$$

Comme,

$$||u_\epsilon||_{N-\epsilon}^{N-\epsilon} = \int_{\{x, d(x,\partial\Omega) \leq 2\delta_0/3\}} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y) dy + \int_{\{x, d(x,\partial\Omega) \geq 2\delta_0/3\}} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y) dy.$$

On en déduit que:

$$||u_\epsilon||_{N-\epsilon}^{N-\epsilon} \leq c(n, \Omega).$$

En multipliant (E) par $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ et en intègrant par parties, on obtient:

$$||u_\epsilon||_{H_0^1(\Omega)} \leq c(n, \Omega).$$

D'autre part, en utilisant l'injection de Sobolev, puis en multipliant l'équation (E) par u_ϵ, en intégrant par parties et en utilisant l'inégalité de Holder, on obtient:

$$K_1 ||u_\epsilon||_{N-\epsilon}^2 \leq K_2 ||u_\epsilon||_N^2 \leq \int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2 = n(n-2) \int_\Omega u_\epsilon^{N-\epsilon} = n(n-2) ||u_\epsilon||_{N-\epsilon}^{N-\epsilon},$$

Ce qui donne,

$$||u_\epsilon||_{N-\epsilon} \geq \tilde{K}_1 > 0 \text{ et } ||u_\epsilon||_{H^1} \geq \tilde{K}_2 > 0.$$

<u>Preuve de 2):</u>

<u>Point i):</u>
Comme u_ϵ est bornée dans H^1, on peut en extraire une sous-suite $u_{\epsilon'} \to u$ et la convergence est presque partout, dans $L^{N-(1/2)}$ fort et dans H^1 faible.

La fonction $u \geq 0$ vérifie, $\Delta u = n(n-2)u^{N-1}$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. De plus $||u||_{H^1(\Omega)} \leq \liminf_{\epsilon \to 0} ||u_{\epsilon_i}||_{H^1(\Omega)} \leq c(n, \Omega)$.

1') Régularité de u au bord:

On sait (voir [H] pages 164-165), qu'il existe un voisinage ω du bord $\partial\Omega$ et constante positive M telle que:

$$u_{\epsilon_i}(x) \leq M \ \forall \ x \in \omega.$$

En utilisant le lemme 2 de [H] (ou le lemme 8 de [He]), on en déduit que la suite (u_{ϵ_i}) est uniformément bornée dans $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ au voisinage du bord. En utilisant le théorème d'Ascoli, la suite (u_{ϵ_i}) converge vers une fonction $\mathcal{C}^1$ et donc u est $\mathcal{C}^1$ au voisinage du bord.

2') Régularité de u à l'intérieur de Ω:

En utilisant les arguments de régularité locale de Trudinger (voir [T] théorème 3 et lemme page 268) et le théorème de Ladyzenskaya-Ural'ceva (voir [Au] théorème 4.40), on en déduit que u est au moins de classe $\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Finalement $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. D'aprés le principe du maximum $u \equiv 0$ ou $u > 0$. Comme Ω est étoilé, en utilisant la formule de Pohozaev [P], on conclut que $u \equiv 0$.

Remarque: On peut se passer du fait que Ω est étoilé. On sait que les points x_{ϵ_i} où u_{ϵ_i} est maximum restent loin du bord, alors, soit u_{ϵ_i} est uniformément borné dans $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ et on a donc un résultat de compacité, soit, il existe une sous-suite de u_{ϵ_i} notée encore u_{ϵ_i} telle que $u_{\epsilon_i}(x_{\epsilon_i}) \to +\infty$ et dans ce cas l'inégalité de Harnack du type $\sup \times \inf$ et les estimations de Schauder (au voisinage du bord), nous permettent d'avoir l'existence d'un point a_0 trés proche du bord sans être sur le bord (où u_{ϵ_i} est uniformément bornée) tel que $u(a_0) = 0$, le principe du maximum appliqué à u implique que $u \equiv 0$.

On définit un point de concentration x_0 comme suit,

$$\forall \ \delta > 0 \ \liminf_{\epsilon_i \to 0} \int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i}(x)dx > 0.$$

On prend la $\liminf$ au lieu de $\limsup$, dans la définition d'un point de concentration, pour pouvoir compter tous les points de concentrations, on verra plustard qu'il est plus simple de compter les points de concentrations (qui serons en nombre fini).

En utilisant le Lemme 1 dans [He] (avec la modification $\limsup$ devient $\liminf$), on en déduit que si x_0 est un point de concentration, alors:

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \int_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} u_\epsilon^{N-\epsilon}(y)dy \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Comme $u_\epsilon(x) \leq M$ sur $\{x, d(x, \partial\Omega) \leq \delta\}$, par les estimations elliptiques on en déduit que $||\nabla u_\epsilon||_{L^\infty(\omega)} \leq M'$. où ω est un voisisnage du bord $\partial\Omega$. On conclut grâce au Théorème d'Ascoli que u_ϵ converge uniformément vers 0 sur un voisinage du bord et donc il n'y a pas de points de concentration au voisinage

du bord. De plus en utilisant le le lemme 2 de [H] ou lemme 8 de [He] et le théorème 6.6 de [GT], on déduit que $||u_\epsilon||_{\mathcal{C}^2(\omega)}$ converge vers 0 au voisinage ω du bord.(on prend une couronne C voisinage du bord, les bords ∂C de C sont, $\partial\Omega$ et $\partial(\Omega_{\epsilon_0})$, on prend η une fonction telle que $\eta \equiv 0$ sur $\partial(\Omega_{\epsilon_0})$ et $\eta \equiv 1$ dans un voisinage de $\partial\Omega$, puis on s'occupe de l'équation $\Delta(\eta u_\epsilon) = f_\epsilon \in \mathcal{C}^{0,\beta}(C)$ et $\eta u_\epsilon = 0$ sur ∂C).

Comme (u_{ϵ_i}) est bornée dans $H^1(\Omega)$, par le théorème de Rellich-Kondrachov, pour tout $q \in [1, N[$, il existe une sous- suite notée encore (u_{ϵ_i}) qui converge vers 0 dans L^q. En prenant une suite $q \to N$ et en utilisant le procédé diagonal, on déduit qu'il existe une sous-suite notée encore (u_{ϵ_i}) qui conevrge vers 0 dans tous les L^q avec $q \in [1, N[$.

En première conclusion, on obtient, une sous-suite notée (u_{ϵ_i}) telle que $||u_{\epsilon_i}||_{\mathcal{C}^2(\omega)} \to 0$ et $\forall\ q \in [1, N[$, $||u_{\epsilon_i}||_{L^q(\Omega)} \to 0$, avec ω un voisinage du bord.

Comme u_{ϵ_i} est bornée dans L^N, on en déduit que si il y a des points de concentration alors ils sont en nombre fini $x_1, \dots x_m$. De plus m est borné par un réel ne dépendant que de Ω et n.

On va voir que la suite u_{ϵ_i} a au moins un point de concentration. Supposons le contraire, soit alors K un compact de Ω tel que $\Omega - K \subset \omega$, où ω est un voisinage du bord tel que, $||u_{\epsilon_i}||_{\mathcal{C}^2(\omega)} \to 0$, alors $\sup_K u_{\epsilon_i} = u_{\epsilon_i}(y_{\epsilon_i})$ avec $y_{\epsilon_i} \to y \in K$. Aprés passage à une sous-suite, il existe $\delta_y > 0$ tel que, $\liminf_{\epsilon_i \to 0} \int_{B(y,\delta_y)} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i}(x)dx = 0.$, on en déduit gráce au procédé d'itération de Moser que $\sup_{B(y,\delta_y/2)} u_{\epsilon_i} \to 0$ et donc $||u_{\epsilon_i}||_{L^\infty(K)} \to 0$. Ainsi, $||u_{\epsilon_i}||_{L^\infty(\bar{\Omega})} \to 0$, or ceci contredit le fait que $||u_{\epsilon_i}||_{L^N(\Omega)} \geq c > 0$, pour tout i.

Pour la suite (u_{ϵ_i}), on a un nombre fini de points de concentration de Ω, on considère alors, une sous-suite (u_{ϵ_j}) de (u_{ϵ_i}) qui a le maximum de points de concentration, soit $x_1, x_2, \dots, x_m$ tous les points de concentration de (u_{ϵ_j}). Alors toute sous-suite de (u_{ϵ_j}) a au plus m points de concentrations.

D'après le lemme 1(modifié, $\limsup \to \liminf$) de [He], on a:

$$\forall\ k \in \{1, \dots, m\}\ \forall\ \delta > 0\ \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)dx \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

et,

$$\forall\ x \in \Omega - \{x_1, \dots, x_m\}\ \exists\ \delta_y > 0\ \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(y,\delta_y)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)dx = 0.$$

Soit K un compact de $\bar{\Omega} - \{x_1, \dots, x_m\}$, on a, $\sup_K u_{\epsilon_j} = u_{\epsilon_j}(y_j)$ avec, par compacité, $y_j \to y \in K$. En utlisant le même raisonnement que [He] dans le lemme 4 et le lemme 8 et les estimations elliptiques (théorème 9.11 de [GT]), puis les estimations de Schauder on en déduit qu'il existe une sous-suite $u_{\epsilon_{j_r}}$ qui tend vers 0 dans $\mathcal{C}^2(K)$. De plus cette sous-suite vérifie:

$$\forall\ k \in \{1, \dots, m\}\ \forall \delta > 0\ \liminf_{\epsilon_{j_r} \to 0} \int_{B(x_k,\delta)} u_{\epsilon_{j_r}}^{N-\epsilon_{j_r}}(x)dx \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

Ce qui revient à dire que la nouvelle sous-suite a au moins m points de concentrations, d'aprés la définition de m, cette sous-suite a exactement m points concentrations $x_1, \ldots, x_m$. On obtient:

$$\forall\ y \in \Omega - \{x_1, \ldots, x_m\}\ \exists\ \delta_y > 0\ \liminf_{\epsilon_{j_r} \to 0} \int_{B(y,\delta_y)} u_{\epsilon_{j_r}}^{N-\epsilon_{j_r}}(x)dx = 0.$$

En considérant une suite exhaustive de compacts (K_n) de $\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}$, $K_n \subset \dot{K}_{n+1}$, $\cup_n K_n = \bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}$ et en utilisant le procédé diagonal, on en déduit qu'il existe une sous-suite notée u_{ϵ_j} qui a exactement m points de concentrations $x_1, \ldots, x_m$ et qui converge vers 0 dans $\mathcal{C}^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\})$.

Soit x_1 un point de concentration, alors, il existe une suite $j_n \to +\infty$ et $x_{j_n,1} \to x_1$ avec $u_{\epsilon_{j_n}}(x_{j_n,k}) \to +\infty$. En appliquant le même procédé pour x_2 puis pour x_k, k allant de 3 à m, on extrait une sous-suite notée encore (u_{ϵ_j}) et des suites de points $(x_{j,k})$, k allant de 1 à m tels que, $u_{\epsilon_j}(x_{j,k}) \to +\infty$ et $x_{j,k} \to x_k$.

Ainsi, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, il existe une suite $y_{j,k} \to x_k$ et $u_{\epsilon_j}(y_{j,k}) \to +\infty$.

On pouvait remarquer que,

$$|B(x_k, \delta)| \sup_{B(x_k,\delta)} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i} \geq \int_{B(x_k,\delta)} u_{\epsilon_i}^{N-\epsilon_i}(x)dx \geq \frac{\omega_n}{2^{n+1}} \text{ pour } i \geq i_0.$$

puis, on fait tendre δ vers zéro.

<u>Point ii):</u>

Soit x_k un point de concentration, alors:

$$\mu_k = \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta_0)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)dx \geq \frac{\omega_n}{2^n},$$

avec, $\delta_0 = \min_{\{i \neq j, i,j=1,\ldots,m\}} \dfrac{d(x_i, x_j)}{2}$.
Alors, pour $0 < \delta \leq \delta_0$, on a:

$$\mu_k = \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta_0)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)dx = \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)dx.$$

En considérant une sous-suite et en prenant $\phi \in \mathcal{C}(\Omega)$, on obtient:

$$\int_\Omega u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)\phi(x)dx = \sum_{k=1}^m \int_{B(x_k,\delta)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)\phi(x)dx + \int_{\Omega - [\cup_{k=1}^m B(x_k,\delta)]} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)\phi(x)dx,$$

En prenant δ assez petit et en utilisant le point i) du Théorème, on en déduit que:

$$\lim_{\epsilon_j \to 0} \int_\Omega u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j}(x)\phi(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \phi(x_k), \;\; \mu_k \geq \frac{\omega_n}{2^n}.$$

<u>Point iii):</u>

Soit $x_{\epsilon_j} \in \Omega$ tel que $u_{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}) = \sup_\Omega u_{\epsilon_j}$, aprés extraction d'une sous-suite, on peut supposer que $x_{\epsilon_j} \to x_0 \in \Omega$. Il est clair que x_0 est un point de concentration et donc x_0 est l'un des x_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, on peut supposer que $x_0 = x_1$.

Soit K un compact de $\Omega - \{x_1, \ldots, x_m\}$, alors il existe $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_m > 0$ tels que, $K \subset \tilde{\Omega} = \Omega_1 - [\cup_{i=1}^m \bar{B}(x_i, \alpha_i)]$, où Ω_1 est un ouvert relativement compact de Ω. D'aprés le point $i)$, $u_{\epsilon_j} \to 0$ uniformément sur $\bar{\tilde{\Omega}}$.

Considérons l'opérateur $L = -\Delta + n(n-2){u_{\epsilon_j}}^{N-2-\epsilon_j}$, alors, $Lu_{\epsilon_j} = 0$ et l'inégalité de Harnack usuelle est vérfiée pour cet opérateur (voir [GT]). Ainsi, pour tout $\hat{\Omega} \subset\subset \tilde{\Omega}$, il existe $c = c(\hat{\Omega}, \tilde{\Omega}, n) > 0$ telle que:

$$\sup_{\hat{\Omega}} u_{\epsilon_j} \leq c \inf_{\hat{\Omega}} u_{\epsilon_j}.$$

On prend $\hat{\Omega}$ contenant K et tel que son bord extérieur (bord le plus proche de $\partial\Omega$) soit le bord d'un ouvert $\mathcal{O}$ contenant une boule de centre x_1 et de rayon $\alpha > 0$. Comme u_{ϵ_j} est sous-harmonique, on obtient:

$$\inf_{\hat{\Omega}} u_{\epsilon_j} \leq \inf_{\partial\mathcal{O}} u_{\epsilon_j} = \inf_{\mathcal{O}} u_{\epsilon_j}.$$

Comme, $\bar{B}(x_1, \alpha) \in \mathcal{O}$, en utilisant l'inégalité de Harnack du type $\sup \times \inf$, on a:

$$\sup_{B(x_1,\alpha)} u_{\epsilon_j} \times \inf_{\mathcal{O}} u_{\epsilon_j} \leq c = c(\mathcal{O}, \alpha, n).$$

Or, $\sup_\Omega u_{\epsilon_j} = \sup_{B(x_1,\alpha)} u_{\epsilon_j}$, en combinant ces inégalités, on obtient:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \sup_{K} u_{\epsilon_j} \leq c = c(K, \Omega, n).$$

<u>Point vi):</u>

<u>Méthode 1</u>:

On sait (voir [H] pages 164-165) qu'il existe un voisinage du bord ω, un ouvert $\Omega' \subset\subset \Omega$ et une constante positive $c' = c'(n, \Omega)$ tels que:

$$\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq c' \int_{\Omega'} u_{\epsilon_j}(x)dx.$$

On peut (quitte à grandir Ω'), supposer qu'il existe $R > 0$ tel que, $B(x_k, R) \subset \Omega', \; k \in \{1, \ldots, m\}$.

Comme u_{ϵ_j} est sous-harmonique d'après l'inégalité de Moser-Harnack, il existe $0 < R' < R$ et une constante positive $\tilde{c} = \tilde{c}(n, \Omega, R')$ tels que:

$$\int_{B(x_k,R')} u_{\epsilon_j}(x)dx \leq \tilde{c} \inf_{B(x_k,R')} u_{\epsilon_j} = \tilde{c} \inf_{\partial B(x_k,R')} u_{\epsilon_j},\ k \in \{1,\dots,m\}.$$

D'après le point iii) , on a:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\partial B(x_k,R')} u_{\epsilon_j} \leq \tilde{c}_k.$$

Ce qui donne:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \int_{B(x_k,R')} u_{\epsilon_j}(x)dx \leq \bar{c}(R',\Omega,k,n).$$

On se place maintenant sur $\Omega' - \{\cup_{k=1}^m B(x_k,R'/2)\}$. Sur cet ouvert on a d'après le point i), $u_{\epsilon_j} \leq 1$ à partir d'un certain rang, on peut appliquer l'inégalité de Harnack usuelle à la fonction u_{ϵ_j} solution de $Lu_{\epsilon_j} = 0$ où $L = -\Delta + n(n-2)u_{\epsilon_j}^{N-2-\epsilon_j}$. Il existe $\hat{c} = \hat{c}(R',\Omega,n)$ telle que:

$$\sup_{\Omega'-\{\cup_{k=1}^m B(x_k,R')\}} u_{\epsilon_j} \leq \hat{c} \inf_{\Omega'-\{\cup_{k=1}^m B(x_k,R')\}} u_{\epsilon_j} = \hat{c} \inf_{\partial(\Omega'-\{\cup_{k=1}^m B(x_k,R')\})} u_{\epsilon_j} \leq \hat{c} \inf_{\partial\Omega'} u_{\epsilon_j} = \hat{c} \inf_{\Omega'} u_{\epsilon_j}.$$

En utilisant l'inégalité de Harnack du type sup $\times$ inf, on obtient:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \inf_{\Omega'} u_{\epsilon_j} = \sup_{B(x_1,R')} u_{\epsilon_j} \times \inf_{\Omega'} u_{\epsilon_j} \leq c(\Omega',\Omega,n).$$

Finalement, on obtient:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \int_{\Omega'-\{\cup_{k=1}^m B(x_k,R')\}} u_{\epsilon_j}(x)dx \leq \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\Omega'-\{\cup_{k=1}^m B(x_k,R')\}} u_{\epsilon_j} \leq c(\Omega,R',\Omega,n).$$

En combinant, toutes ces inégalités, on obtient,

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq c' \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \int_{\Omega'} u_{\epsilon_j}(x)dx \leq c(\omega,\Omega,n).$$

<u>Méthode 2:</u>

D'aprés l'inégalité d'Alexandrov-Bakelman-Pucci (voir [Au]), on a:

$$\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} + C||u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}||_{L^n(\omega)}.$$

Donc,

$$\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} + C||u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}||_{L^n(\omega)} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} + C(\sup_{\omega} u_{\epsilon_j})^{N-1-\epsilon_j}.$$

D'aprés le point i), $\sup_\omega u_{\epsilon_j} \to 0$, d'où:

$$(1-k)\sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} \text{ avec } 0 < k < 1.$$

En utilisant iii), on conclut que:

$$\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \times \sup_{\omega} u_{\epsilon_j} \leq \frac{1}{1-k} \sup_{\Omega} u_{\epsilon_j} \sup_{\partial\omega} u_{\epsilon_j} \leq c(\omega, \Omega, n).$$

<u>Point v):</u>

D'après la formule de Pohozaev (voir [P] ou [H]), on a:

$$\epsilon_j \int_{\Omega} u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}(x)dx = c_n \int_{\partial\Omega} < (x-y)|\nu(x) > \left[\partial_\nu u_{\epsilon_j}(\sigma)\right]^2 d\sigma.$$

D'où,

$$\epsilon_j \left(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j}\right)^2 \int_{\Omega} u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}(x)dx = c_n \int_{\partial\Omega} < x|\nu(x) > \left[\partial_\nu[(\sup_{\Omega} u_{\epsilon_j})u_{\epsilon_j}](\sigma)\right]^2 d\sigma.$$

Posons, $g_{\epsilon_j} = (\sup_\Omega u_{\epsilon_j})u_{\epsilon_j}$ et $f_{\epsilon_j} = n(n-2)(\sup_\Omega u_{\epsilon_j})u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j}$. Alors, on a:

$$\Delta g_{\epsilon_j} = f_{\epsilon_j} \text{ dans } \Omega \text{ et } g_{\epsilon_j} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

D'après le point iv) , $||g_{\epsilon_j}||_{L^\infty(\omega)} \leq c(\omega, \Omega, n)$, avec ω un voisinage du bord $\partial\Omega$.

D'après la formule de représentation de la fonction Green, on a:

$$g_{\epsilon_j}(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f_{\epsilon_j}(y)dy \geq \int_{\Omega-\omega} G(x,y) f_{\epsilon_j}(y)dy.$$

D'après le point iii) , on a, $g_{\epsilon_j}(x) \leq c(x, \Omega, n)$ pour $x \in \Omega - \{x_1, \ldots, x_m\}$ et d'aprés le point $iv)$ et $i)$, $||f_{\epsilon_j}||_{L^\infty(\omega)} \leq c(\omega, \Omega, n)$.

D'aprés le principe du maximum, $G(x,y) \geq c(x, \Omega-\omega, \Omega, n) > 0$ pour $x \in \Omega$.

Finalement,

$$\int_{\Omega} f_{\epsilon_j}(y)dy \leq c \ \forall \ j.$$

On veut prouver qu'il existe une constante $c = c(\Omega, n) > 0$ telle que pour toute solution positive u_i de,

$$\Delta u_i = {u_i}^{N-1-\epsilon_i}, \text{ dans } u_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

on a,

$$\int_{\Omega} f_i \leq c,$$

On sait qu'il existe un voisinage ω du bord tel que $\sup_\omega u_i \leq c(\omega, \Omega, n)$, on considère l'opérateur $L = -\Delta + n(n-2){u_i}^{N-2-\epsilon_i}$ dans l'ouvert ω, pour cet opérateur on peut appliquer l'inégalité de Harnack usuelle (voir [GT], chapitre 8). On obtient,

$$\sup_{\tilde{\omega}} u_i \leq \hat{c} \inf_{\tilde{\omega}} u_i,$$

pour tout ouvert $\tilde{\omega}$ relativement compact dans ω et $\hat{c} = c(\tilde{\omega}, \omega, n)$.

On sait aussi, qu'il existe $\delta = \delta(\Omega, n) > 0$ tel que $d(x_i, \partial\Omega) \geq \delta$, avec $u_i(x_i) = \sup_\Omega u_i$. On prend alors, $\tilde{\omega}$ tel que son bord extérieur soit $\partial\tilde{\Omega}$, et $\tilde{\Omega}$ contient strictement les x_i. On a ω dépend de Ω et de n, de même $\tilde{\omega} \subset\subset \omega$, est choisi à partir de ω et donc dépend (il le doit) de Ω et de n.

$$\sup_{\Omega} u_i \times \sup_{\tilde{\omega}} u_i \leq \hat{c} \sup_{\Omega} u_i \inf_{\tilde{\omega}} u_i \leq \hat{c} \sup_{\Omega} u_i \inf_{\partial_{exterieur}\tilde{\omega}} u_i = \hat{c} u_i(x_i) \times \inf_{\partial\tilde{\Omega}} u_i = \hat{c} u_i(x_i) \times \inf_{\tilde{\Omega}} u_i,$$

car, u_i est sous-harmonique et l'inf sur l'ouvert est atteint sur le bord (principe du maximum).

On utilise l'inégalité de Harnack du type $\sup \times \inf$ pour obtenir,

$$\sup_{\Omega} u_i \times \inf_{\tilde{\Omega}} u_i \leq c(\tilde{\Omega}, \tilde{\omega}, n),$$

Donc,

$$g_i(x) \leq c(\tilde{\omega}, \Omega, n) \text{ sur } \tilde{\omega}. \qquad (*)$$

D'aprés, l'inégalité d'Alexandrov-Bekelman-Pucci,

$$\sup_{\omega} u_i \leq \sup_{\partial\omega} u_i + C||u_i^{N-1-\epsilon_i}||_{L^n(\omega)} \leq \sup_{\partial\omega} u_i + \tilde{C}||u_i||_{L^n(\omega)},$$

En multipliant par $\sup_\Omega u_i$ à droite et à gauche, on obtient,

$$\sup_{\omega} g_i \leq \sup_{\partial\omega} g_i + C||g_i||_{L^n(\omega)},$$

On peut écrire,

$$||g_i||_{L^n(\omega)} \leq ||g_i||_{L^n(\omega-\omega_\epsilon)} + ||g_i||_{L^n(\omega_\epsilon)},$$

avec, ω_ϵ un ouvert de ω qui est voisinage de $\partial\Omega$,

$$||g_i||_{L^n(\omega_\epsilon)} \leq \sup_{\omega_\epsilon} g_i |\omega_\epsilon|^{1/n} \leq \sup_{\omega} g_i |\omega_\epsilon|^{1/n},$$

ainsi,

$$\sup_{\omega} g_i (1 - \tilde{C}|\omega_\epsilon|^{1/n}) \leq \sup_{\partial\omega} g_i + \bar{C} \sup_{\omega-\omega_\epsilon} g_i,$$

En prenant ω_ϵ voisin de $\partial\Omega$ de mesure trés petite $|\omega_\epsilon| < \tilde{C}^{-n}$, puis en utilisant $(*)$ avec $\tilde{\omega} = \omega - \omega_\epsilon$ puis $\tilde{\omega} = \partial\omega$, on obtient,

$$||g_i||_{L^\infty}(\omega) \leq c(\Omega, n).$$

Grâce à la fonction de Green du laplacien,

$$g_i(x) = \int_\Omega G(x,y) f_i(y) dy \geq \int_{\Omega-\omega} G(x,y) f_i(y) dy,$$

Par le principe du maximum, $G(x,y) \geq c(\partial\omega - \partial\Omega, \Omega - \omega, \Omega, n))$ pour $x \in \partial\omega - \partial\Omega$ et $y \in \Omega - \omega$.

Donc,

$$\int_{\Omega-\omega} f_i \leq c(\Omega, n),$$

or, $f_i = n(n-2) g_i \times {u_i}^{N-2-\epsilon_i} \leq c(\Omega, n)$ sur ω, d'où le résultat.

En utilisant, le lemme 8 de [He] ou le lemme 2 de [H],il existe une constante positive $c = c(\omega, \Omega, n)$ telle que pour $\beta \in]0,1]$, pour tout voisinage $\omega' \subset\subset \omega$ du bord $\partial\Omega$, on a:

$$||g_{\epsilon_j}||_{W^{1,q}(\Omega)} + ||\nabla g_{\epsilon_j}||_{\mathcal{C}^{0,\beta}(\omega')} \leq c, \ 1 \leq q < \frac{n}{n-2}.$$

En utilisant le théorème d'Ascoli, on peut extraire de g_{ϵ_j} une sous-suite qu'on note encore g_{ϵ_j} qui converge uniformément dans $\mathcal{C}^1(\omega')$ vers $g \geq 0$. D'aprés le principe du maximum de Hopf, $\sup_{\partial\Omega} |\partial_\nu g| > 0$, en utilisant le point 1) et l'identité de Pohozaev (voir [H]), on conclut qu'il existe deux constantes positives β_1 et β_2 telles que::

$$\beta_1 \leq \epsilon_j \left(\sup_\Omega u_{\epsilon_j} \right)^2 \leq \beta_2.$$

Plus précisément,

$$\epsilon_j \left(\sup_\Omega u_{\epsilon_j} \right)^2 \to \frac{c_n \int_{\partial\Omega} < x|\nu(x) > [\partial_\nu g(\sigma)]^2 d\sigma}{\sum_{k=1}^m \mu_k}.$$

Sur un voisinage ω de $\partial\Omega$, en passant aux sous-suites, on peut supposer que g_{ϵ_j} converge uniformément vers g_ω dans $\mathcal{C}^2(\omega)$.

<u>Point vi):</u>

Considérons une suite exhaustive de compacts (K_n) de $\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}$. Sur tout compact K de $\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}$ le point iii) donne $||g_{\epsilon_j}||_{L^\infty(K)} \leq c(K, \Omega, n)$. En utilisant les estimations elliptiques et le lemme 2 de [H] ou le lemme 8 de [He] et le théorème d'Ascoli, on peut extraire de (g_{ϵ_j}) une sous-suite qui converge dans $\mathcal{C}^1(K)$ vers une fonction g_K. Comme $\nabla f_{\epsilon_j} = n(n-2)(N-1-\epsilon_j) u_{\epsilon_j}^{N-2-\epsilon_j} \nabla g_{\epsilon_j}$, en appliquant ce procédé á la suite de compacts (K_n) et en utilisant le procédé diagonal et l'unicité des limites, on construit de proche en proche une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\})$ et une sous-suite notée encore g_{ϵ_j} qui converge vers g dans $\mathcal{C}^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\})$. En prolonge g et ∇g en $\tilde{g}$ et $\tilde{\nabla} g$ sur $\bar{\Omega}$ par 0 (par exemple) sur $\{x_1, \ldots, x_m\}$. $\tilde{g}$ reste une fonction mesurable sur $\bar{\Omega}$ et comme $||g_{\epsilon_j}||_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c(n, \Omega)$ avec $1 < q < \dfrac{n}{n-1}$. Grâce à l'injection de Sobolev $W^{1,q}$ dans L^r $1 \leq r \leq q^*$ et l'injection compacte de Khondrakov

pour $1 \leq r < q^*$, on a $g_{\epsilon_j} \to \bar{g}$ dans L^r et $\bar{g} = \tilde{g}$ presque partout(on compare g et $\bar{g}$ sur K_n, puis on passe á la limite en n). Donc, $\tilde{g} \in L^r(\Omega)$ avec $r > 1$ et est solution (au sens des distributions) de:

$$\int_\Omega \tilde{g}\Delta\phi = \sum_{k=1}^m \gamma_k \delta_{x_k} \ \forall \ \phi \in \ \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \cap \dot{H}_1^2(\Omega),$$

avec, $\gamma_k = \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta_0)} f_{\epsilon_j}(x)dx$ et $\delta_0 = \min_{i \neq j, i,j \in \{1,\ldots,m\}} \dfrac{d(x_i,x_j)}{2}$. En utilisant les points i), iii) et iv),la suite (f_{ϵ_j}) converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Or, la fonction G de Green du laplacien avec condition de Dirichlet, vérifie:

$$\int_\Omega G(x_k, x)\Delta\phi = \delta_{x_k} \ \forall \ \phi \in \ \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \cup \dot{H}_1^2(\Omega).$$

Donc,

$$\int_\Omega [\tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x)]\Delta\phi = 0 \ \forall \ \phi \in \ \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \cap \dot{H}_1^2(\Omega)$$

et,

$$\tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

En utilisant le théorème de régularité d'Agmon (voir théorème 8.2 pp 444 de [Ag]ou [Au]), on conclut que, $u = \tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, x)$ presque partout avec $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Comme $\tilde{g} - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, .)$ est $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\})$, on en déduit que $u = g - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, .)$ partout sur $\Omega - \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Soit alors, w la fonction qui vaut u dans $B(x_k, \epsilon)$, $k = 1...m$ et $g - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, .)$ partout ailleurs sur $\bar{\Omega}$, w est $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ égale á $u - \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, .)$ presque partout sur Ω et donc, $\int_\Omega w\Delta\phi = 0$ au sens des distributions et $w \equiv 0$ sur le bord $\partial\Omega$. Finalement $w \equiv 0$ sur Ω; d'oú $\tilde{g} \equiv \sum_{k=1} \gamma_k G(x_k, .)$ sur $\bar{\Omega} - \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Ainsi, on a:

$$\sup_\Omega u_{\epsilon_j} u_{\epsilon_j} \to \sum_{k=1}^m \gamma_k G(x_k, .) \text{ dans } \mathcal{C}^2_{loc}(\bar{\Omega} - \{x_1, \ldots, x_m\}).$$

On a:

$$\gamma_k = \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta_0)} f_{\epsilon_j} \text{ et } \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta_0)} u_{\epsilon_j}^{N-\epsilon_j} = \mu_k \geq \frac{\omega_n}{2^n},$$

donc,

$$\gamma_k = n(n-2) \liminf_{\epsilon_j \to 0} \int_{B(x_k,\delta_0)} \left[(\sup_\Omega u_{\epsilon_j}) u_{\epsilon_j}^{N-1-\epsilon_j} \right] \geq n(n-2)\mu_k.$$

Preuve du Théorème 4:

Les conditions $b, c > 0$, et $c \leq \dfrac{b^2}{4}$, nous permettent d'avoir l'existence d'une fonction de Green G pour l'opérateur $\Delta^2 + b\Delta + c$, telle que,

$$\frac{C'(M,g)}{d_g(x,y)^{n-4}} \geq G(x,y) \geq \frac{C(M,g)}{d_g(x,y)^{n-4}},$$

avec, $C(M,g), C'(M,g) > 0$.

On écrit alors,

$$\min_M u_i = u_i(x_i) = \int_M G(x,y)V_i(y)u_i(y)^{(n+4)/(n-4)}dV_g(y),$$

et,

$$\min_M u_i \geq \bar{C}\int_M V_i(y)u_i(y)^{(n+4)/(n-4)}dV_g(y),$$

d'où,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq \int_M V_i {u_i}^{2n/(n-4)}.$$

On multiplie l'équation (E) par u_i puis on intègre par parties, on obtient,

$$\int_M V_i {u_i}^{2n/(n-2)} = \int_M [(\Delta u_i)^2 + b|\nabla u_i|^2 + c{u_i}^2] \geq K||u_i||^2_{H_2^2(M)},$$

On utilise l'injection de Sobolev $H_2^2(M)$ dans $L^{2n/(n-4)}(M)$ et le fait que $0 \leq V_i(x) \leq A$ sur M pour obtenir,

$$A||u_i||^{2n/(n-4)}_{L^{2n/(n-4)}} \geq K'||u_i||^2_{L^{2n/(n-4)}},$$

donc,

$$||u_i||_{L^{2n/(n-4)}} \geq K'' > 0, \ \ \forall\ i$$

ainsi,

$$\sup_M u_i \times \inf_M u_i \geq \int_M V_i {u_i}^{2n/(n-2)} \geq \tilde{K} > 0\ \forall\ i.$$

Preuve du Théorème 5:

Supposons par l'absurde que:

$$\sup_\Omega u_i \times \inf_K u_i \to 0.$$

Alors, pour $\delta > 0$ assez petit, on a:

$$\sup_\Omega u_i \times \inf_{\{x, d(x,\partial\Omega)\geq\delta\}} u_i \to 0.$$

D'après la preuve de la proposition 2.4 de [C-G], on a pour $\delta > 0$ assez petit,

$$\sup_{\{x,d(x,\partial\Omega)\leq\delta\}} u_i \leq M = M(n,\Omega).$$

On a,

$$u_i(x) = \int_\Omega G(x,y)u_i(y)^{p-\epsilon_i}dy,$$

Soient, K' un autre compact de Ω, en utilisant le principe du maximum, on obtient:

$$\exists\ c_1 = c_1(K,K',n,\Omega) > 0,\ \text{ tel que } G(x,y) \geq c\ \ \forall\ x \in K,\ \ y \in K',$$

donc,

$$\inf_K u_i = u_i(x_i) \geq c_1 \int_{K'} u_i(y)^{p-\epsilon_i}dy,$$

En prenant, $K = K_\delta = \{x, d(x,\partial\Omega) \geq \delta\}$, il existe $c_2 = c_2(\delta,n,K,\Omega) > 0$ telle que:

$$\inf_K u_i \geq c_2 \int_{K_\delta} u_i(y)^{p-\epsilon_i}dy,$$

d'où,

$$\sup_\Omega u_i \times \inf_K u_i \geq c_2 \int_{K_\delta} u_i(y)^{p+1-\epsilon_i}dy.$$

On en déduit que:

$$||u_i||_{p+1-\epsilon_i}^{p+1-\epsilon_i} = \int_{\{x,d(x,\partial\Omega)\leq\delta\}} {u_i}^{p+1-\epsilon_i} + \int_{\{x,d(x,\partial\Omega)\geq\delta\}} {u_i}^{p+1-\epsilon_i},$$

Ce qui donne,

$$||u_i||_{p+1-\epsilon_i}^{p+1-\epsilon_i} \leq \sup_\Omega u_i \times \inf_{\{x,d(x,\partial\Omega)\geq\delta\}} u_i + mes(\{x,d(x,\partial\Omega)\leq\delta\})M^{p+1-\epsilon_i},$$

en faisant tendre, i vers l'infini et en prenant δ assez petit, on conclut que,

$$||u_i||_{p+1-\epsilon_i} \to 0.$$

Or, d'après l'injection de Sobolev (voir [V]), $H_2^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^{p+1}(\Omega)$, en multipliant (E) par u_ϵ , en intègrant par parties et en utilisant l'inégalité de H$'$older, on obtient,

$$K_1||u_i||_{p+1-\epsilon_i}^2 \leq K_2||u_i||_{p+1}^2 \leq \int_\Omega (\Delta u_i)^2 = \int_\Omega {u_i}^{p+1-\epsilon_i} = ||u_i||_{p+1-\epsilon_i}^{p+1-\epsilon_i}.$$

De $0 < \epsilon_i \leq \dfrac{4}{n-4}$ et de l'inégalité précédente, on a la contradiction suivante,

$$||u_i||_{p+1-\epsilon_i} \geq K_3 > 0,$$

Remerciements

Ce travail à été fait pendant le séjour de l'auteur en Grèce. L'auteur tiens à remercier le Département de Mathématiques de l'Université de Patras, surtout le Professeur Athanase Cotsiolis et la Fondation IKY pour leur acceuil.

Bibliographie:

[Ag] S. Agmon. The L_p Approach to the Dirichlet Problem. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13, (1958) 405-448.

[Au] T. Aubin. Some nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer Verlag 1998.

[Au, D, He] T.Aubin, O. Druet, E. Hebey, Best constants in Sobolev inequalities for compact manifolds of nonpositive curvature. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, 326 (1998), no 9 1117-1121.

[B 1] S.S Bahoura. Majorations du type $\sup u \times \inf u \leq c$ pour l'équation de la courbure scalaire prescrite sur un ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$. J.Math.Pures Appl.(9) 83 (2004), no.9, 1109-1150.

[B-2] S.S Bahoura. Estimations du type $\sup \times \inf$ sur une variété compacte (à paraitre).

[B 3] S.S Bahoura. Inégalités de Harnack pour les opérateurs d'ordre 2 et 4 et phénomène de concentration. C.R.A.S.

[BP] H. Brézis, L. A. Peletier, Asymptotic for elliptic equations involving critical growth. Partial eifferential equations and calculus of variation, vol.I, 149-192, Progr.Nonlinear Differential Equations Appl.,1, Birkhauser Boston, Boston,MA,1989.

[C 1] D. Caraffa. Etude des problèmes elliptiques non linéaires du quatrieme ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanninnes compactes. J. Math. Pures. Appl. (9) 83, (2004), no.1, 115-136.

[C 2] D. Caraffa. Equations elliptiques du quatrième ordre avec exposants critiques sur les variétés riemanniennes compactes. J. Math. Pures. Appl. (9) 80, (2001) no.9, 941-960.

[C-L] C-C Chen, C-S Lin. Estimates of the conformal scalar curvature equation via the mathod of moving planes. Comm. Pure Appl. Math. 37 (1997) 0971-1017.

[C-G] K-S. Chou, D. Geng. Asymptotics Of Positive Solutions For A Biharmonic Equation Involving Critical Exponent. Difftial and Integral Equations. Volume 13 (7-8) July-September 2000, pp. 921-940.

[DLN] D.G. De Figueiredo, P.L. Lions, R.D. Nussbaum, A priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations, J. Math. Pures et Appl., vol 61, 1982, pp.41-63.

[D H R] O.Druet, E.Hebey, F.Robert, Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian Geometry. Mathematical Notes, 45. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.

[GNN] B. Gidas, W. Ni, L. Nirenberg, Symmetry and Related Propreties via the Maximum Principle, Comm. Math. Phys., vol 68, 1979, pp. 209-243.

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.

[H] Z-C. Han, Assymptotic Approach to singular solutions for Nonlinear Elleptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent. Ann. Inst. Henri Poincaré. Analyse Non-linéaire. 8(1991) 159-174.

[He] E. Hebey. Asymptotics for some quasilinear elliptic equations. Diff and Int Eq. Volume 9, Number 1, (1996), pp. 71-88.

[He,V] E. Hebey, M. Vaugon, The best constant problem in the Soboblev embedding theorem for complete riemannian Manifolds. Duke Math.J. 79 (1995), no 1, 235-279.

[L1] Y.Y Li. Prescribing Scalar Curvature on $\mathbb{S}_n$ and related Problems. I. J. Differential Equations 120 (1995), no. 2, 319-410.

[L2] Y.Y Li. Prescribing Scalar Curvature on $\mathbb{S}_n$ and related Problems. II. Comm. Pure. Appl. Math. 49(1996), no.6, 541-597.

[M] J. Moser. On Harnack's Theorem for Elliptic Differential Equations. Comm. Pure Appl Math. vol 15, 577-591 (1961).

[P] S. Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Soviet. Math. Dokl., vol. 6 (1965), 1408-1411.

[T] N.S. Trudinger, Remarks Concerning The Conformal Deformation of Riemannian Structures On Compact Manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 22 (1968) 265-274.

[V] R.C.A.M. van der Vorst. Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1$ into $L^{2N/(N-4)}(\Omega)$. Diff. Int. Eq., 6 (1993), 259-276.