Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller

Frédéric Paulin

▶ **To cite this version:**

Frédéric Paulin. Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. 2006. hal-00022450

HAL Id: hal-00022450
https://hal.science/hal-00022450

Preprint submitted on 7 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ccsd-00022450, version 1 - 7 Apr 2006

Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmller

Frdric Paulin

Résumé

The aim of these lecture notes is, after having quickly described various compactifications of the Teichmüller space of a compact connected oriented surface minus finitely many points, to give a construction, by the equivariant Gromov topology introduced by the author, of Thurston's compactification of this Teichmüller space. [1]

Le but de ces notes d'exposs est de donner une construction, par la topologie de Gromov quivariante introduite dans [Pau2], de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmller Teich(S) d'une surface S oriente connexe compacte prive d'un nombre fini de points.

Il existe de nombreuses compactifications (gomtriquement intressantes) de l'espace de Teichmller de S. Avant de donner en dtail notre approche de la compactification de Thurston, nous dcrivons, pour la culture et de manire non exhaustive, les principales compactifications de Teich(S), de manire brive (et donc sans pouvoir donner toutes les explications ncessaires, pour lesquelles nous renvoyons la bibliographie), ainsi que leurs relations, en supposant pour simplifier que S est compacte.

- **Les compactifications de Teichmller** (voir [Abi, Gar, Nag]). Il y en a une pour toute structure de surface de Riemann X fixe sur S, par l'espace des points l'infini des rayons de Teichmller issus de (l'image encore note X dans Teich(S) de) X. La distance de Teichmller est finslrienne complte sur la varit diffrentielle Teich(S), et ces rayons de Teichmller sont les rayons godsiques issus de X pour cette mtrique, ce qui fournit la compactification de Teichmller de Teich(S) associe X. Le bord s'identifie avec l'espace $\mathcal{Q}_1(X)$ des formes diffrentielles quadratiques holomorphes de norme 1 sur X, qui s'identifie la sphre unit de l'espace cotangent de Teich(S) en X.
- **Les compactifications de Bers** (voir par exemple [Ber, Nag, Bro, McM]). Il y en a une pour toute structure de surface de Riemann X fixe sur S, construite comme suit. La surface de Riemann X est isomorphe la surface de Riemann quotient $\Gamma_X\backslash\mathbb{H}$ o $\mathbb{H}\subset\mathbb{C}$ est le demi-plan suprieur, et Γ_X un sous-groupe discret sans torsion du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ des automorphismes complexes de $\mathbb{H}$. Pour toute autre structure de surface de Riemann Y sur S, soit $h : X\to Y$ un homomorphisme quasi-conforme homotope l'identit envoyant la structure de X sur celle de Y. Sa diffrentielle de Beltrami $\overline{\partial}h/\partial h$, qui est presque partout dfinie, se relve en une diffrentielle de Beltrami Γ_X-invariante sur $\mathbb{H}$, qui tendue par 0 sur la sphre de Riemann

[1] **AMS codes :** 57M50, 30F60, 32M50. **Keywords :** Riemann surface ; Thurston compactification ; Teichmller space ; hyperbolic surface ; equivariant Gromov topology.

$\widehat{\mathbb{C}}$, donne une diffrentielle de Beltrami μ sur $\widehat{\mathbb{C}}$, qui est Γ_X-invariante. Le thorme d'Ahlfors-Bers dit qu'il existe un homomorphisme quasi-conforme $f_\mu : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, de diffrentielle de Beltrami μ, uniquement dfini modulo conjugaison au but par un lment de $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, qui conjugue Γ_X un sous-groupe (encore discret et sans torsion) de $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$. Ainsi l'application

$$Y \mapsto \{\gamma \mapsto f_\mu \circ \gamma \circ f_\mu^{-1}\}$$

induit un homomorphisme sur son image, de l'espace de Teichmller de S, vu comme l'espace quotient de l'espace des structures de surfaces de Riemann sur S modulo l'action de $\mathrm{Diff}_0(S)$, valeurs dans l'espace topologique quotient (non spar) $\mathrm{Hom}(\Gamma_X, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))/\mathrm{PSL}(\mathbb{C})$, dont l'image est d'adhrence (spare et) compacte, ce qui fournit une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$.

- **La compactification naturelle de Thurston** (voir [Thu1, FLP] pour la construction originale, ainsi que les rappels ci-dessous). Le bord est l'espace $\mathcal{PMF}(S)$ des classes d'quivalence de feuilletages transversalement mesurs singularits de type selle $k \geq 3$ branches, modulo isotopies, oprations de Whitehead et multiplication par une constante strictement positive de la mesure transverse. Une proprit cruciale de la compactification de Thurston est qu'elle est naturelle (au sens rappel ci-dessous) pour l'action du groupe modulaire de Teichmller $\mathrm{Mod}(S)$. Voir aussi [Wol1, EL] pour une description de cette compactification par les applications harmoniques, et [Wol2] pour la relation entre les applications harmoniques et les actions de groupes de $\pi_1 S$ sur les arbres (rels). Kaimanovich et Mazur [KM] ont montr que le bord de Poisson de nombreuses chaînes de Markov sur l'espace de Teichmller est le bord de Thurston muni d'une mesure de probabilit adquate.
- **La compactification naturelle de Morgan-Shalen** (voir [MS1]). Soit X une composante irrductible de l'ensemble algbrique affine complexe

$$\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))//SL_2(\mathbb{C}) \ ,$$

qui est le quotient algbro-gomtrique (voir [MF], et [CS] pour une description simple) de l'ensemble algbrique affine complexe $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))$ des morphismes de groupes de $\pi_1 S$ dans $SL_2(\mathbb{C})$, par l'action par conjugaison au but de $SL_2(\mathbb{C})$. Pour tout γ dans $\pi_1 S - \{1\}$, l'application polynomiale de $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))$ dans $\mathbb{C}$, dfinie par $\rho \mapsto \mathrm{trace}\ \rho(\gamma)$, induit une application $f_\gamma : X \to \mathbb{C}$, indpendante de la classe de γ dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des classes de conjugaison d'lments non triviaux de $\pi_1 S$. Si $\widehat{X}$ est le compactifi d'Alexandrov de X, alors Morgan et Shalen [MS1] montrent que l'application de X dans $\widehat{X} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{C}})$, dfinie par $x \mapsto (x, \mathbb{R}_+^*(\log(|f_\gamma(x)| + 2))_{\gamma \in \mathcal{C}})$, est un homomorphisme sur son image, qui est ouverte dans son adhrence, et d'adhrence compacte. L'espace de Teichmller de S est homomorphe, de manire quivariante par $\mathrm{Mod}(S)$, une composante connexe de l'ensemble des points rels d'une composante irrductible X de $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))//SL_2(\mathbb{C})$. Morgan et Shalen obtiennent ainsi une compactification naturelle de $\mathrm{Teich}(S)$. Il n'est pas difficile de montrer avec cette dfinition qu'elle est isomorphe la compactification de Thurston. Morgan et Shalen [MS1] montrent aussi (en version plus labore) que tout point du bord est de la forme $(\infty, \mathbb{R}_+^*(\max\{0, -v(f_\gamma)\})_{[\gamma] \in \mathcal{C}})$ o ∞ est le point l'infini de $\widehat{X}$ et $v : F^\times \to \mathbb{R}$ est une valuation relle (pas forcment discrte) sur le corps des fonctions F de X, ainsi que de la forme

$$(\infty, \mathbb{R}_+^*(\min_{x \in T} d(x, \gamma x))_{[\gamma] \in \mathcal{C}})$$

o T est un arbre (rel) muni d'une action isomtrique de $\pi_1 S$, construit partir de l'arbre de Bruhat-Tits de SL_2 sur le corps valu (F, v). Le passage des feuilletages transversalement mesurs sur S aux actions de $\pi_1 S$ sur des arbres (rels) se fait par la notion d'arbre dual, dveloppe dans [MO, MS2], voir aussi [Sko, Ota, LP] par exemple.

- **La compactification naturelle de Bestvina** [Bes1] **et de l'auteur** [Pau1, Pau2], qui est isomorphe celle de Thurston. La prsentation ci-dessous, utilisant la topologie de Gromov quivariante, correspond une partie non publie de la thse de l'auteur [Pau1], mais il est possible de la retrouver aussi en partie dans la littrature actuelle (voir par exemple [Ota, Kap]).
- **La compactification naturelle de Brumfiel** [Bru], voir aussi [Bouz]. Elle utilise comme celle de Morgan-Shalen la description algbrique de l'espace de Teichmller, avec de plus la thorie du spectre rel des anneaux commutatifs. La compactification de Thurston est l'image par une surjection continue, quivariante par $\mathrm{Mod}(S)$, de cette compactification.
- **La compactification naturelle de Bonahon** par les courants godsiques [Bon1], qui est isomorphe celle de Thurston. Le plongement fonctionnel de Thurston de l'espace de Teichmller, dcrit ci-dessous, n'est sans doute pas le plus intressant du point du vue analytique. Le plongement de Bonahon [Bon1] semble plus appropri au calcul infinitsimal (voir [Bon2, Bon3]). Ce plongement est dfini de la manire suivante. Soit $\partial\widetilde{S}$ le bord l'infini de $\widetilde{S}$ pour la mtrique $\widetilde{\sigma}_0$, releve par un revêtement universel $\widetilde{S} \to S$ d'une mtrique hyperbolique fixe σ_0 sur S, muni de son action du groupe de revtement $\pi_1 S$. Remarquons qu' homomorphisme quivariant prs, cet espace ne dpend pas de la mtrique choisie σ_0. Notons $\partial_2\widetilde{S}$ l'espace topologique (mtrisable sparable) localement compact des paires de points distincts de $\partial\widetilde{S}$, muni de l'action diagonale de $\pi_1 S$, et
$$\mathcal{M}(\partial_2\widetilde{S})_{\pi_1 S}$$
l'espace vectoriel topologique (pour la topologie vague) des mesures de Radon $\pi_1 S$-invariantes sur $\partial_2\widetilde{S}$. Pour tout lment σ de $\mathrm{Teich}(S)$, le fibr unitaire tangent de la mtrique releve (d'un reprsentant) de σ sur $\widetilde{S}$, quotient par le changement de signe $v \mapsto -v$, s'envoie dans $\partial_2\widetilde{S}$ par la fibration principale, de fibre $\mathbb{R}$ pour l'action du flot godsique, qui un vecteur unitaire tangent associe la paire d'extrmits de la godsique qu'il dirige. Le relev $T^1\widetilde{S}$ de la mesure de Liouville de (S, σ), qui est invariant par le flot godsique, donne donc un lment λ_σ de $\mathcal{M}(\partial_2\widetilde{S})_{\pi_1 S}$. Le plongement de Bonahon est l'application $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ de $\mathrm{Teich}(S)$ dans $\mathcal{M}(\partial_2\widetilde{S})_{\pi_1 S}$. La compactification de Bonahon est alors obtenue en projectifiant et en prenant l'adhrence.
- Pour des surfaces particulires, il existe d'autres compactifications bien tudies, telle la **compactification de Maskit** de $\mathrm{Teich}(S)$ si S est un tore priv d'un point (voir par exemple [KS], ses dessins et ses rfrences).

Il n'est pas connu de l'auteur si deux compactifications de Teichmller de $\mathrm{Teich}(S)$ ni si deux compactifications de Bers de $\mathrm{Teich}(S)$ (pour deux choix de structures de surface de Riemann non isomorphes sur S) sont isomorphes ou non. Il est montr dans [Ker] (voir aussi [Mas]) que la compactification de Thurston n'est isomorphe aucune compactification de Teichmller. Certes, le bord de Teichmüller s'envoie continûment dans le bord de Thurston par l'application qui une forme diffrentielle quadratique holomorphe associe son feuilletage transversalement mesur horizontal (voir par exemple [Gar]). Mais cette application ne

s'tend pas continûment en un isomorphisme de la compactification de Teichmller considre sur celle de Thurston. Il est montr dans [KT] (voir aussi [Bro]) que la compactification de Thurston n'est pas isomorphe au moins l'une des compactifications de Bers (parce que pour au moins un des plongements de Bers de l'espace de Teichmller, l'action du groupe modulaire ne s'tend pas au bord).

$$+ \text{———————} +$$

Aprs cette disgression, entrons dans le vif du sujet. Soit X un espace topologique localement compact (respectivement un espace topologique localement compact muni d'une action par homomorphismes d'un groupe G). Une *compactification* (respectivement *compactification naturelle*) de X est un couple (i, Y) (ou par abus Y) o Y est un espace topologique compact, et $i : X \to Y$ un homomorphisme sur son image, (par lequel on identifie X et son image dans Y) d'image ouverte et dense, (respectivement un tel couple (i, Y) tel que l'action de G sur X s'tende continuement en une action par homomorphismes de G sur Y). Deux compactifications (respectivement compactifications naturelles) Y, Y' de X sont *isomorphes* si l'identit de X dans X s'tend continuement en un homomorphisme (respectivement un homomorphisme quivariant pour les actions de G) de Y dans Y'.

Par exemple, les compactifications d'Alexandrov et de Stone-Cech (voir par exemple [Dug]) d'un espace localement compact X sont naturelles pour l'action du groupe G de tous les homomorphismes de X. Outre sa naturalit, l'intrêt de la compactification de Thurston des espaces de Teichmller est qu'elle apporte des informations intressantes sur les dgnrescences gomtriques des structures hyperboliques sur les surfaces.

Soit $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ le modle du demi-espace suprieur du plan hyperbolique rel, et $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ le groupe des isomtries prservant l'orientation de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. L'action par homographies de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ induit un isomorphisme (de groupes de Lie) de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ avec $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$, par lequel nous identifions $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$.

Soit S une surface compacte (sans bord) connexe oriente de classe C^∞ prive d'un nombre fini de points, et de caractristique d'Euler strictement ngative. En particulier, S admet au moins une *mtrique hyperbolique* (i.e. mtrique riemannienne courbure constante -1) complte de volume fini (voir par exemple [FLP, Bus]). Notons $\widetilde{S} \to S$ un revêtement universel de S, et $\pi_1 S$ son groupe des automorphismes de revêtement, qui, pour un choix fix de point base dans $\widetilde{S}$, s'identifie au groupe fondamental de S en l'image x_0 de ce point base dans S. Un lment de $\pi_1 S - \{1\}$ sera dit *parabolique* s'il est représentable par un lacet librement homotope dans tout voisinage de l'un des bouts de S.

Notons $\mathrm{Diff}(S)$ le groupe des diffomorphismes f de classe C^∞ de S, muni de la topologie C^∞ (voir par exemple [Hir]), et $\mathrm{Diff}_0(S)$ le sous-groupe distingu ouvert des diffomorphismes de S isotopes l'identit. Tout diffomorphisme f de S induit un isomorphisme de groupes de $\pi_1(S, x_0)$ dans $\pi_1(S, f(x_0))$, donc (par changement de point base, possible par connexit) un isomorphisme $f_* : \pi_1 S \to \pi_1 S$ bien dfini modulo conjugaison. De plus, si f est isotope l'identit, alors $f_* : \pi_1 S \to \pi_1 S$ est une conjugaison.

Rappelons qu'une mtrique riemannienne sur S est une section C^∞ du fibr, not $\otimes^2 T^* S$, des formes bilinaires sur les espaces tangents aux points de S. Notons $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ l'ensemble des mtriques hyperboliques σ sur S, compltes et de volume fini, muni de la topologie induite par la topologie C^∞ sur $\mathrm{C}^\infty(S, \otimes^2 T^* S)$. Le groupe $\mathrm{Diff}(S)$ agit sur $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ par l'action naturelle sur les champs de tenseurs sur S

$$(f, \sigma) \mapsto \left(f_* \sigma : x \in S \mapsto \{(u, v) \in (T_x S)^2 \mapsto \sigma_{f^{-1}(x)}((T_x f)^{-1}(u), (T_x f)^{-1}(v))\}\right) .$$

L'*espace de Teichmller* $\mathrm{Teich}(S)$ de S est l'espace topologique quotient de $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ par l'action de $\mathrm{Diff}_0(S)$. Le *groupe modulaire de Teichmller* (ou « mapping class group ») de S est le groupe discret quotient

$$\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Diff}(S)/\mathrm{Diff}_0(S) .$$

L'action de $\mathrm{Diff}(S)$ sur $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ induit une action du groupe modulaire de Teichmller de S sur l'espace de Teichmller de S. Par abus, nous noterons de la mme manire un lment σ de $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ et son image dans $\mathrm{Teich}(S)$, ainsi qu'un lment σ de $\mathrm{Teich}(S)$ et l'un de ses relevs dans $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$. Notons $\mathrm{Diff}_+(S)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(S)$ prservant l'orientation et $\mathrm{Mod}_+(S) = \mathrm{Diff}_+(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$.

Par le thorme de Cartan-Hadamard (voir par exemple [GHL]), pour tout lment σ de $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$, il existe une isomtrie i prservant l'orientation entre le relev $\widetilde{\sigma}$ au revtement universel orient de S de la mtrique σ et le plan hyperbolique rel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. La conjugaison par une telle isomtrie i fournit une *reprsentation fidle et discrte* (i.e. un morphisme de groupes injectif d'image discrte) $\rho = \rho_\sigma : \pi_1 S \to \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, appele une *reprsentation d'holonomie* de σ, et cette isomtrie i induit par passage au quotient une isomtrie prservant l'orientation de (S, σ) sur la varit hyperbolique quotient $\rho(\pi_1 S)\backslash\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. La reprsentation d'holonomie ρ de σ est indpendante du choix de i modulo conjugaison au but par un lment de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. De plus, ρ *prserve les paraboliques*, i.e. envoie un lment parabolique de $\pi_1 S$ sur un lment parabolique de $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$, ceci par la structure des bouts des surfaces hyperboliques de volume fini (voir par exemple [Bus, Rat]). Pour tout f dans $\mathrm{Diff}(S)$, les reprsentations $\rho_{f_*\sigma}$ et $\rho_\sigma \circ f_*$ sont conjugues. En particulier, si σ et σ' sont dans la mme orbite sous $\mathrm{Diff}_0(S)$, alors leurs reprsentations d'holonomie sont conjugues dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (car un diffomorphisme isotope l'identit induit une conjugaison sur $\pi_1 S$).

Considrons l'espace

$$\mathcal{R}_{fdp}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

des orbites, pour l'action par conjugaison au but de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, des reprsentations fidles et discrtes, prservant les paraboliques, de $\pi_1 S$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Munissons-le de la topologie quotient de la topologie de la convergence simple. L'application $(f, \rho) \mapsto \rho \circ f_*$, pour f dans $\mathrm{Diff}(S)$ et $\rho : \pi_1 S \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, induit donc une action par homomorphismes du groupe $\mathrm{Mod}(S)$ sur l'espace $\mathcal{R}_{fdp}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

On a une application de $\mathrm{Teich}(S)$ valeurs dans cet espace, qui σ associe la classe de conjugaison d'une reprsentation d'holonomie de σ.

Proposition 1 *(Voir par exemple [Gol2]) Cette application est un homomorphisme sur l'une des deux composantes connexes de* $\mathcal{R}_{fdp}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. *Elle est quivariante pour l'action de* $\mathrm{Mod}_+(S)$. □

L'un des points de la preuve de cette proposition est le suivant.

Lemme 2 *Une limite de reprsentations fidles et discrtes, prservant les paraboliques, de* $\pi_1 S$ *dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *est encore fidle et discrte, prservant les paraboliques.*

Preuve. Soit $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de telles reprsentations, qui converge vers ρ. Nous renvoyons par exemple [GM] pour le caractre fidle et la discrtude de ρ. Comme un lment $\pm A$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est parabolique ou l'identit si et seulement si $|\mathrm{tr}\ A| = 2$, le fait que ρ prserve les paraboliques en dcoule par continuit de la trace. □

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison des lments non paraboliques de $\pi_1 S - \{1\}$, qui s'identifie avec l'ensemble des classes d'homotopie libre de lacets de S, homotopiquement non triviaux, et non librement homotopables dans tout voisinage d'un des bouts de S. Pour tout α dans $\mathcal{C}$ et tout σ dans $\mathrm{Teich}(S)$, on note $\ell_\sigma(\alpha)$ la longueur de l'unique godsique ferme pour σ dans la classe d'homotopie libre α (voir par exemple [Bus] pour l'existence et l'unicit de cette godsique). Donc $\ell_\sigma(\alpha) > 0$ est gale la *distance de translation*

$$\ell_\sigma(\alpha) = \inf_{x \in \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}} d(x, \rho(\gamma)x)$$

de $\rho(\gamma)$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, pour ρ une reprsentation d'holonomie de σ et pour n'importe quel $\gamma \in \pi_1 S$ dans la classe α. Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout γ dans $\mathcal{C}$, l'application $\sigma \mapsto \ell_\sigma(\alpha)$ de $\mathrm{Teich}(S)$ dans $\mathbb{R}$ est continue (un moyen rapide est d'utiliser, outre la dfinition de la topologie de $\mathrm{Teich}(S)$, le lemme de fermeture d'Anosov [Ano], enfin une version trs simplifie disant qu'une courbe ferme presque godsique est distance de Hausdorff petite d'une godsique ferme, voir par exemple [BH]).

En notant $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, on a donc une application

$$\begin{array}{rccc} \ell : & \mathrm{Teich}(S) & \to & {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\} \\ & \sigma & \mapsto & (\ell_\sigma(\alpha))_{\alpha \in \mathcal{C}} \quad . \end{array}$$

Notons $\pi : ({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}) = \left({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}\right) / \sim$ la projection canonique pour la relation d'quivalence dfinie par $(x_\alpha)_\alpha \sim (y_\alpha)_\alpha$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_\alpha = \lambda y_\alpha$ pour tout α. On munit l'espace produit ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$ de la topologie produit, et l'espace quotient $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ de la topologie quotient. Le groupe des diffomorphismes de S agit sur $\mathcal{C}$, par l'application qui $(f, \alpha) \in \mathrm{Diff}(S) \times \mathcal{C}$ associe la classe d'homotopie libre de $f(\gamma)$ pour n'importe quel lacet γ dans la classe d'homotopie libre α, et l'action de $\mathrm{Diff}_0(S)$ est triviale. Par consquent $\mathrm{Mod}(S)$ agit sur $\mathcal{C}$, donc agit par homomorphismes sur ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$ par permutation des coordonnes, et donc agit par homomorphismes sur $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ par passage au quotient.

Théorème 3 *(W. Thurston [Thu1]) L'application $\pi \circ \ell : \mathrm{Teich}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ est un homomorphisme sur son image, qui est relativement compacte, et ouverte dans son adhrence. Elle est quivariante pour les actions de* $\mathrm{Mod}(S)$.

Ainsi, le couple $(\pi \circ \ell, \overline{\pi \circ \ell(\mathrm{Teich}(S))}\ )$ est une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$, appele la *compactification de Thurston* de l'espace de Teichmller, qui est naturelle pour l'action de $\mathrm{Mod}(S)$.

Dans cet nonc, nous pourrions remplacer l'ensemble $\mathcal{C}$ par l'ensemble des classes d'homotopie libre de lacets simples, non homotopes 0, ni homotopables dans tout voisinage d'un point enlev de S, comme dans [FLP], ou par l'ensemble de toutes les classes de conjugaison non triviales de $\pi_1 S$, i.e. de toutes les classes d'homotopie libre de lacets non homotopes 0. Les rsultats de [FLP] impliquent les deux autres versions dans ce qui suit.

Preuve du thorme 3. Nous n'utiliserons pas l'approche originale de Thurston [Thu1] expose compltement dans [FLP], mais celle de [Bes1, Pau1, Pau2], aussi prsente sous une forme un peu diffrente dans [Ota]. Voir [Par] pour de profondes gnralisations.

Nous admettrons (voir par exemple [FLP, Bus]) ce qui concerne la description interne de l'espace de Teichmller, rsum dans le fait suivant.

Théorème 4 *Il existe un nombre fini $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ d'lments de $\mathcal{C}$ (que l'on peut mme choisir reprsentables par des lacets simples) tels que l'application* $\mathrm{Teich}(S) \to {\mathbb{R}_+}^N$ *dfinie par*

$$\sigma \mapsto (\ell_\sigma(\gamma_1), \dots, \ell_\sigma(\gamma_N))$$

soit continue, injective, propre, donc un homomorphisme sur son image. En particulier, $\mathrm{Teich}(S)$ *est mtrisable, sparable, et localement compact. De plus* $\mathrm{Teich}(S)$ *est homomorphe* $\mathbb{R}^{6g-6+2b}$ *si g est le genre de S et b le nombre de points enlevs de S.* □

En particulier, l'application continue $\ell : \mathrm{Teich}(S) \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$ est un homomorphisme propre sur son image.

Proposition 5 *L'application $\pi \circ \ell : \mathrm{Teich}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ est un homomorphisme sur son image, quivariant pour les actions de* $\mathrm{Mod}(S)$.

Preuve. (Voir [FLP, expos 7].) Pour montrer l'injectivit de $\pi \circ \ell$, supposons par l'absurde qu'il existe des lments σ et σ' dans $\mathrm{Teich}(S)$ et $t > 1$ tels que $\ell_{\sigma'} = t\ell_\sigma$. Soient a, b dans $\pi_1 S$ tels que $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b), \rho_\sigma(ab), \rho_\sigma(a^{-1}b)$ soient des lments hyperboliques, avec $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b)$ d'axes de translation (transversalement) scants, et tels que $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b)$ se relvent en des matrices A, B de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que les traces $\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(B), \mathrm{tr}(AB), \mathrm{tr}(A^{-1}B)$ soient strictement positives, et de même en remplaant σ par σ'.

Ceci est possible pour σ, par exemple en fixant a d'image par ρ_σ hyperbolique, et en prenant pour b une puissance N suffisamment grande d'un lment de $\pi_1 S$ d'image par ρ_σ hyperbolique, dont le point attractif de l'image par ρ_σ soit dans un voisinage U_+ suffisamment petit de celui de a, et le point fixe rpulsif soit dans un voisinage U_- suffisamment petit, et du bon ct, de celui de a. Ceci est possible par densit des couples de points fixes d'lments hyperboliques de $\rho_\sigma(\pi_1 S)$ dans l'ensemble des couples de points du bord l'infini de $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ (voir par exemple [Gro] dans un cadre bien plus gnral). Rappelons que les actions de $\rho_\sigma(\pi_1 S)$ et $\rho_{\sigma'}(\pi_1 S)$ sur le cercle l'infini $\mathbb{S}^1_\infty$ de $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ sont conjugues, par l'extension continue l'infini du relev $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ de l'application identit de S dans S par les revêtements universels riemanniens $\mathbb{H}^2_\mathbb{R} \to (S, \sigma)$ et $\mathbb{H}^2_\mathbb{R} \to (S, \sigma')$ (voir par exemple [ET] pour une preuve de cette extension y compris en dimension suprieure, souvent faussement attribue Mostow qui s'en sert dans [Mos], et qui dans le cas de $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ devait être dj connue). Donc en choisissant N suffisamment grand et U_+, U_- suffisamment petits, on obtient bien les mêmes proprits pour σ'.

Lemme 6 *La distance de translation $\ell(A)$ dans $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ d'un lment hyperbolique A de* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *vrifie*

$$\cosh \frac{\ell(A)}{2} = \left| \frac{\mathrm{tr}(A)}{2} \right| .$$

Si A et B sont deux lments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$*, alors*

$$\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(A^{-1}B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) .$$

Preuve. Le premier rsultat dcoule du fait que A est conjugue une matrice de la forme $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ o $\lambda > 1$, et que la distance de translation de cette matrice vaut $2 \log \lambda$ (par unicit d'une godsique translate, son axe de translation est l'axe vertical).

Pour montrer le second rsultat, le thorme de Cayley-Hamilton implique que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \mathrm{Id} = 0 ,$$

donc $A + A^{-1} = \mathrm{tr}(A)\mathrm{Id}$, d'o le rsultat en multipliant par B droite et en prenant la trace. □

Maintenant, comme $\ell_{\sigma'} = t\ell_\sigma$, en notant $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ la distance de translation de $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b), \rho_\sigma(ab)$, $\rho_\sigma(a^{-1}b)$ respectivement, on dduit du lemme prcdent que

$$\cosh(\frac{\ell_3}{2}) + \cosh(\frac{\ell_4}{2}) = 2\cosh(\frac{\ell_1}{2})\cosh(\frac{\ell_2}{2}) = \cosh(\frac{\ell_1+\ell_2}{2}) + \cosh(\frac{\ell_1-\ell_2}{2}) \ .$$

Le fait suivant est laiss en exercice au lecteur.

Lemme 7 *Soient u, v, w, x, t des nombres rels strictement positifs, avec $t > 1$, tels que*

$$\cosh u + \cosh v = \cosh w + \cosh x, \quad \cosh tu + \cosh tv = \cosh tw + \cosh tx \ .$$

Alors $\{u, v\} = \{w, x\}$. □

Maintenant, on aurait, quitte changer ab et $a^{-1}b$, l'galit $\ell_3 = \ell_1 + \ell_2$. Comme les axes de translation (des images par ρ_σ) de a et de b se coupent (transversalement), ceci contredit la minimalit de la distance de translation ℓ_3. L'injectivit de $\pi \circ \ell$ en dcoule.

Supposons qu'il existe une suite $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans Teich(S), un lment σ dans Teich(S) et une suite de rels strictement positifs $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tels que $t_i\ell_{\sigma_i}$ converge vers ℓ_σ dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$. Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergeait vers $+\infty$, alors par la propret dans le thorme 4, quitte extraire, la suite $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergerait vers un lment σ' de Teich(S) tel que $\ell_{\sigma'} = 0$, ce qui est impossible. Donc quitte extraire, t_i converge vers $t \geq 0$. Soit s la borne infrieure des $\ell_\sigma(\alpha)$ pour α dans $\mathcal{C}$, qui est strictement positive, par le lemme de Zassenhauss, voir par exemple [Rag], (le lemme de Zassenhauss n'est qu'un cas trs particulier (et antrieur) pour les espaces localement symtriques du lemme de Margulis, voir par exemple [BK]). Comme le volume de σ_i est constant (gal $2\pi|\chi(S)|$), la borne infrieure des $\ell_{\sigma_i}(\alpha)$ pour α dans $\mathcal{C}$ est majore uniformment en i, donc $t > 0$. Par consquent, la suite $(\ell_{\sigma_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{t}\ell_\sigma$. Par la propret dans le thorme 4, quitte extraire, $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un lment σ' dans Teich(S). Par continuit, nous avons $\ell_{\sigma'} = \frac{1}{t}\ell_\sigma$. Par l'injectivit montre ci-dessus, nous avons $t = 1$, et $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sigma' = \sigma$.

Ceci implique que l'application continue injective $\pi \circ \ell$ est un homomorphisme sur son image. La naturalit est vidente. □

Soit Γ un groupe, et $\mathcal{E}$ un ensemble d'espaces mtriques munis d'une action isomtrique de Γ. Pour tout X dans $\mathcal{E}$, pour toute partie finie K de X, pour tout $\epsilon > 0$ et toute partie finie P de Γ, notons $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}(X)$ l'ensemble des lments X' de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe une partie finie K' de X', et une relation $\mathcal{R} \subset K \times K'$, dont les deux projections sur K et K' sont surjectives, telles que

$$\forall\, x, y \in K,\ \forall\, x', y' \in K',\ \forall\, \gamma \in P,\ \text{ si } x\,\mathcal{R}\,x' \text{ et } y\,\mathcal{R}\,y' \text{ alors } |d(x, \gamma y) - d(x', \gamma y')| < \epsilon \ .$$

La *topologie de Gromov quivariante* sur $\mathcal{E}$ est la topologie sur $\mathcal{E}$ (qui existe, voir [Pau2]) dont l'ensemble des $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}(X)$ est un systme fondamental de voisinages de X, pour tout X dans $\mathcal{E}$.

Par exemple, l'ensemble $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ s'identifie, par l'application de relvement $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$, l'ensemble des mtriques hyperboliques compltes sur le revtement universel $\widetilde{S}$ de S, invariantes par l'action du groupe de revtement $\pi_1 S$, telles que tout lment parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isomtrie parabolique sur $\widetilde{S}$.

Proposition 8 *(F. Paulin [Pau2, Prop. 6.2]) La topologie quotient sur* Teich(S) *de la topologie de Gromov sur* $\widetilde{\text{Teich}}(S)$ *coïncide avec la topologie usuelle de* Teich(S).

Preuve. Il est immdiat que la topologie de Gromov quivariante quotient est moins fine que la topologie usuelle. En effet, supposons que deux mtriques hyperboliques compltes de volume fini sur S soient proches. Alors elles ont des voisinages de bouts proches qui sont isomtriques, par la structure des bouts des surfaces hyperboliques. Et sur le compact restant, les distances riemanniennes sont proches. Par passage au revtement universel, on montre bien que pour toute partie finie K de $\widetilde{S}$, pour toute partie finie P de $\pi_1 S$ et tout $\epsilon > 0$, si σ' est suffisamment proche de σ dans Teich(S), alors $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$ appartient $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}((\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}))$.

Rciproquement, montrons que pour tout $\epsilon > 0$ et tout α dans $\mathcal{C}$, si $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$ est suffisamment proche de $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma})$ pour la topologie de Gromov quivariante, alors $|\ell_{\sigma'}(\alpha) - \ell_\sigma(\alpha)| < \epsilon$. Comme $\ell : \text{Teich}(S) \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$ est un homomorphisme sur son image, ceci montrera le rsultat. En effet, soit $\gamma \in \pi_1 S$ un reprsentant de α, et x un point de l'axe de translation de $\rho_\sigma(\gamma)$. Posons $K = \{x\}$ et $P = \{\gamma, \gamma^2\}$. Si $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$ appartient $\mathcal{V}_{\eta,P,K}((\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}))$, alors il existe un point x' de $\widetilde{S}$ tel que, en notant $d_{\widetilde{\sigma}'}$ la distance de la varit riemanienne $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$, on ait

$$|d_{\widetilde{\sigma}'}(x', \gamma x') - \ell_\sigma(\alpha)| < \eta$$

et

$$|d_{\widetilde{\sigma}'}(x', \gamma x') + d_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma x', \gamma^2 x') - d_{\widetilde{\sigma}'}(x', \gamma^2 x')| < 3\eta \ .$$

Par de petites estimes de gomtrie hyperbolique (en fait valable dans n'importe quel espace mtrique CAT(-1), comme les arbres (rels) dfinis ci-dessous, voir par exemple [BH]), un chemin godsique par morceaux, dont la longueur totale est proche (par rapport la longueur des morceaux) de la distance entre ses extrmits, est proche de la godsique entre ses extrmits. Ceci implique en itrant par γ que le chemin godsique par morceaux $c = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\gamma^n x', \gamma^{n+1} x']$ a ses deux points l'infini distincts, et est proche de la godsique $\overline{c}$ entre ces deux points. Comme c est invariante par γ, il en est de même de $\overline{c}$. Ceci implique (ainsi que dans n'importe quel espace mtrique CAT(-1), comme les arbres (rels)), lorsque η est assez petit, que $\rho_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma)$ est hyperbolique, que le point x' est proche de l'axe de translation de $\rho_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma)$, et donc que la distance de translation de $\rho_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma)$ est proche de celle de $\rho_{\widetilde{\sigma}}(\gamma)$. □

Le rsultat clef dans l'tude des dgnrescences de structures hyperboliques sur les surfaces est le thorme 9 suivant, voir [Bes1, Pau2]. La preuve de ce thorme est essentiellement tire de [Pau4] (qui donne un rsultat bien plus gnral pour des actions proprement discontinues de groupes de type fini sur des espaces symtriques de type non compact). Donnons d'abord quelques dfinitions.

Un *arbre (rel)* est un espace mtrique T *godsique* (i.e. pour tous x, y dans T, il existe une isomtrie (appele, ainsi que son image, un *segment godsique* entre x et y) $[a, b] \to T$ envoyant a sur x et b sur y), et 0-*hyperbolique* (i.e. pour tous x, y, z dans T, pour tous les segment godsiques $[x, y]$, $[y, z]$, $[x, z]$ entre respectivement x et y, y et z, x et z, le segment $[x, y]$ est contenu dans la runion $[y, z] \cup [x, z]$).

Rappelons (voir par exemple [Tit]) que dans un arbre (rel) T, toute isomtrie g ou bien admet un point fixe (et on dit que g est *elliptique* dans T) ou bien T possde une unique droite godsique (appele l'*axe de translation* de g) sur laquelle g agit par translation de

distance $\ell_T(g) = \min\{d(x, gx) \ : x \in T\} > 0$ (appele la *distance de translation* de g dans T). Cet axe de translation est construit ainsi : pour tout x dans T, les segments $[x, gx]$ et $[gx, g^2x]$ se rencontrent en un segment $[gx, gu]$ pour $u \in [x, gx]$ par 0-hyperbolicit, et l'axe de translation est alors la runion des segments d'intrieurs disjoints $[g^k u, g^{k+1}u]$. Toute isomtrie de T conjugue g possde la mme distance de translation que g.

Une action de $\pi_1 S$ sur un arbre (rel) T est dite *petits stabilisateurs d'arte* si c'est une action isomtrique, sans point fixe global, dont les fixateurs des segments godsiques non rduits un point sont triviaux ou infinis cycliques, et telle que tout lment parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isomtrie elliptique sur T. Ceci est une dfinition adapte la classe des groupes (munis d'une classe de sous-groupes) que nous considrons.

Voir par exemple [BT, Tit, MS1, MS2, Sha1, Sha2, Mor, Bes2, Pau5, Chi, FJ] pour plus d'informations sur les arbres (rels).

Pour X un espace mtrique de distance d, et $\epsilon > 0$, notons ϵX l'espace mtrique $(X, \epsilon d)$.

Théorème 9 *Soit $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans* Teich(S)*. Alors, quitte extraire, ou bien $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un lment σ de* Teich(S)*, ou bien il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres rels strictement positifs tendant vers 0, et un arbre (rel) T muni d'une action petits stabilisateurs d'arte, de $\pi_1 S$, tels que la suite $(\epsilon_i \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}, \rho_{\sigma_i})$ converge vers T pour la topologie de Gromov quivariante.*

Preuve. Soit $\{s_1, \ldots, s_p\}$ une partie gnratrice finie de $\pi_1 S$.

Lemme 10 *(Voir [Bes1]) Soit $\rho : \pi_1 S \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ une reprsentation fidle et discrte. Alors il existe un point x de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ qui minimize la distance $f_\rho(x) = \max_{1\leq j\leq p} d(x, \rho(s_j)x)$.*

Preuve. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ telle que la suite $f_\rho(x_i)$ converge vers la borne infrieure de f_ρ sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Si x_i reste dans un compact de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, alors, quitte extraire, x_i converge vers un point x qui convient. Sinon, quitte extraire, x_i converge vers un point l'infini x, qui est fixe par $\rho(\pi_1 S)$, ce qui est impossible, car le stabilisateur dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'un point l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est rsoluble, et $\pi_1 S$ contient au moins un groupe libre de rang 2. □

Notons $\rho_i = \rho_{\sigma_i}$, et

$$\lambda_i = \min_{x\in\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}} f_{\rho_i}(x) \ .$$

Fixons $*_i$ un point de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ tel que $f_{\rho_i}(*_i) = \lambda_i$. Alors, quitte extraire, ou bien la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est borne, disons par M, ou bien elle converge vers $+\infty$.

Dans le premier cas, quitte conjuguer ρ_i, nous pouvons supposer que $*_i$ est un point fix $*_0$ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Par compacit de l'ensemble des isomtries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ bougeant $*_0$ d'une distance au plus M, quitte extraire, les $\rho_i(s_j)$ pour $1 \leq j \leq p$ convergent. Donc la suite $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge, et la proposition 1 montre que la suite $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge (il suffit aussi de remarquer que la suite $(\ell_{\sigma_i})_{i\in\mathbb{N}}$, qui ne dpend que de $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$, converge, et d'utiliser le commentaire suivant le thorme 4).

Supposons maintenant que la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

Posons $(X_i, d_i) = \frac{1}{\lambda_i}\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Soit ω un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, plus fin que le filtre de Frchet des complmentaires des parties finies (voir par exemple [Bou]). Pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans un espace topologique, notons $\lim_\omega x_i$ une limite de cette suite pour le filtre image de ω (voir par exemple [Bou]), si elle existe (ce qui est le cas si la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est relativement

compacte ; cette limite est alors unique dans une partie compacte (donc spare) contenant la suite, et c'est une valeur d'adhrence de la suite). Posons

$$X_\infty = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \ : \ \lim_\omega d_i(x_i, *_i) < +\infty\} \ ,$$

muni de la pseudo-distance

$$d_\infty(x, y) = \lim_\omega \ d_i(x_i, y_i) \ .$$

Notons $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ l'espace mtrique point quotient de $(X_\infty, d_\infty, (*_i)_{i\in\mathbb{N}})$ par la relation d'quivalence dfinie par $x \sim y$ si x et y sont pseudo-distance nulle. Pout tout γ dans $\pi_1 S$, l'isomtrie $\rho_i(\gamma)$ de $\frac{1}{\lambda_i}\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ bouge le point $*_i$ d'une distance borne (au plus 1 si $\gamma \in \{s_1, \dots, s_p\}$) pour la distance d_i, donc au plus n si γ s'crit comme un mot de longueur n en $s_1, \dots, s_n$ et leurs inverses. Donc l'action diagonale $(\gamma, (x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto (\rho_i(\gamma)x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\pi_1 S$ sur X_∞ prserve X_∞, est isomtrique pour la pseudo-distance d_∞, donc induit une action isomtrique ρ_ω de $\pi_1 S$ sur X_ω.

Un petit calcul de gomtrie hyperbolique montre que tout ct d'un triangle godsique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est distance au plus $\log(1 + \sqrt{2})$ de la runion des deux autres cts. Donc tout ct d'un triangle godsique de (X_i, d_i) est distance au plus $\log(1 + \sqrt{2})/\lambda_i$ de la runion des deux autres cts. C'est alors un exercice (voir par exemple [KL]) de montrer que l'espace mtrique (X_ω, d_ω) est godsique, et 0-hyperbolique, donc est un arbre (rel). Le même argument montre que toute limite, pour la topologie de Gromov quivariante, d'une suite d'actions isomtriques d'un groupe fix sur des arbres (rels), est encore une action isomtrique de ce groupe sur un arbre (rel). Il n'est pas difficile non plus de montrer que, pour la topologie de Gromov quivariante,

$$\lim_\omega \ (X_i, d_i, \rho_i) = (X_\omega, d_\omega, \rho_\omega) \ .$$

Lemme 11 *L'action de $\pi_1 S$ sur l'arbre (rel) X_ω est petits stabilisateurs d'arte.*

Preuve. Par continuit, le point $*_\omega$ est un point boug le moins par les gnrateurs, et il est boug au moins d'une distance de 1 par l'un des gnrateurs, donc l'action n'a pas de point fixe global.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux points distincts x et y de X_ω, qui soient fixs par un sous-groupe non trivial, non infini cyclique de $\pi_1 S$. Alors ils sont fixs par des lments α, β qui engendrent un sous-groupe libre sur α, β dans $\pi_1 S$.

Soit $\eta > 0$, P l'ensemble des mots en α, β de longueur au plus 6, et $K = \{x, y\}$. Pour tout i suffisamment grand (pour l'ultrafiltre ω), le triplet (X_i, d_i, ρ_i) appartient $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}((X_\omega, d_\omega, *_\omega))$, donc si x est en relation (voir la dfinition de la topologie de Gromov quivariante) avec $x_i \in X_i$ et y avec $y_i \in X_i$, alors pour tout γ dans P,

$$d_{\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}}(x_i, \gamma x_i) \leq \lambda_i \eta \quad \text{et} \quad d_{\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}}(x_i, y_i) \geq \lambda_i (d_\omega(x, y) - \eta) \ .$$

En particulier, si η a t choisi assez petit devant $d_\omega(x, y)$, alors α et β agissent presque comme des translations le long d'un segment de longueur $6\lambda_i\eta$ centr au milieu m du segment godsique $[x_i, y_i]$. Ceci implique que les lments $[\alpha, \beta], [\alpha, \beta^2]$, qui engendrent un groupe libre, bougent le point m d'une distance au plus η. Si η est assez petit, ceci contredit le lemme de Zassenhauss.

Supposons par l'absurde qu'il existe un lment parabolique γ de $\pi_1 S$ qui ne soit pas elliptique dans X_ω. Soit x un point de l'axe de translation de γ dans X_ω. Soient $\eta > 0$,

$K = \{x\}$ et $P = \{\gamma, \gamma^2\}$. Alors, pour i suffisamment grand (pour ω), l'lment (X_i, d_i, ρ_i) appartient $\mathcal{V}_{\eta,P,K}((X_\omega, d_\omega, \rho_\omega))$. Il existe donc x_i dans X_i tel que

$$|d_i(x_i, \rho_i(\gamma)x_i) - \ell_{X_\omega}(\gamma)| < \eta$$

et

$$|d_i(x_i, \rho_i(\gamma)x_i) + d_i(\rho_i(\gamma)x_i, \rho_i(\gamma^2)x_i) - d_i(x_i, \rho_i(\gamma^2)x_i)| < 3\eta \ .$$

Si η est choisi petit devant $\ell_{X_\omega}(\gamma)$, ceci implique, comme dans la fin de la preuve de la proposition 8, que $\rho_i(\gamma)$ est hyperbolique, ce qui est une contradiction. □

Ceci termine la preuve du thorme 9. □

Si T est un arbre (rel), muni d'une action isomtrique du groupe $\pi_1 S$, telle que tout lment parabolique de $\pi_1 S$ soit elliptique dans T, alors notons $\ell_T \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$ l'application $\alpha \mapsto \ell_T(g)$ o $g \in \pi_1 S$ appartient la classe α.

Si $\lim_\omega (X_i, d_i, \rho_i)$ est un arbre (rel) T muni d'une action de isomtrique de $\pi_1 S$, alors le mme argument que pour montrer la rciproque de la proposition 8 montre que la suite $(\frac{1}{\lambda_i}\ell_{\sigma_i}(\alpha))_{\alpha\in\mathcal{C}}$ converge vers l'lment ℓ_T dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$.

Par mtrisabilit de $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$, ceci montre que l'image de $\pi \circ \ell$ est d'adhrence compacte. Montrons qu'elle est ouverte dans son adhrence.

Il dcoule par exemple de [CM] que si $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'arbres (rels) munis d'une action isomtrique de $\pi_1 S$ petits stabilisateurs d'arête, si la suite $(\ell_{T_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$, alors il existe un arbre (rel) T, muni d'une action isomtrique de $\pi_1 S$ petits stabilisateurs d'arête, tel que $\ell = \ell_T$.

Lemme 12 *Si T est un arbre (rel) T, muni d'une action isomtrique de $\pi_1 S$ petits stabilisateurs d'arête, et si σ appartient* Teich(S)*, alors $\ell_T \neq \ell_\sigma$.*

Preuve. Il existe (voir par exemple [CM, Pau3]) deux lments g et h de $\pi_1 S$ qui sont hyperboliques dans T et d'axes de translation disjoints. Donc g et h sont des lments non triviaux, non paraboliques dans $\pi_1 S$, et n'appartiennent pas un mme groupe cyclique. De plus (voir par exemple [CM, Pau3]), pour tous n, m dans $\mathbb{Z} - \{0\}$, la quantit $\ell_T(g^n h^m) - \ell_T(g^n) - \ell_T(g^m)$ est gale la distance entre les axes de translation de g et de h dans T, donc est strictement positive et indpendante de n et m.

Notons A_g et A_h les axes de translations de g et h respectivement dans $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma})$. S'ils sont disjoints dans $\widetilde{S}$, alors ils n'ont pas de point commun l'infini par discrtude de $\rho_\sigma(\pi_1 S)$, et d'aprs [Bea, Theo. 7.38.3], pour tous n, m dans $\mathbb{Z} - \{0\}$ avec $|n|$ et $|m|$ assez grands,

$$\cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n h^m) = \left| \cosh d(A_g, A_h) \ \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \ \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) + \epsilon \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \ \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) \right| ,$$

o ϵ vaut $+1$ ou -1 suivant que g^n et h^m translatent dans la même direction ou pas. Si A_g et A_h se rencontrent dans $\widetilde{S}$, comme g et h ne sont pas dans un même groupe cyclique, leurs axes de translation se coupent avec un angle θ tel que $0 < \theta < \pi$, et d'aprs [Bea, Theo. 7.38.6],

$$\cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n h^m) = \epsilon \cos\theta \ \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \ \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) + \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \ \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) \ ,$$

o ϵ vaut $+1$ ou -1 suivant que θ mesure l'angle entre les points attractifs de g^n et de h^m ou l'angle entre le point attractif de g^n et le point rpulsif de h^m. Si $\ell_T = \ell_\sigma$, ces deux formules contredisent le fait que

$$\ell_\sigma(g^n h^m) - \ell_\sigma(g^n) - \ell_\sigma(g^m)$$

soit indpendants de n, m dans $\mathbb{Z} - \{0\}$. □

Puisque $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ est mtrisable, ce lemme et l'alina le prcdant montrent que l'image de $\pi \circ \ell$ est ouverte dans son adhrence, car ils impliquent que pour toute suite convergente dans la frontire de l'image, sa limite n'est pas dans l'image.

Le thorme 3 en dcoule. □

$$+ \text{———————} +$$

Montrons maintenant comment construire la compactification de Thurston de l'espace de Teichmller directement par la topologie de Gromov quivariante.

Soit $\mathrm{Hyp}(S)$ l'ensemble des classes d'isométrie équivariante de couples (X, α), où X est une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension 2 à courbure sectionnelle strictement négative constante, et α une action propre et libre de $\pi_1 S$ telle que tout lment parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isomtrie parabolique sur X. Munissons $\mathrm{Hyp}(S)$ de la topologie de Gromov quivariante.

Soit $\mathrm{Arb}(S)$ l'ensemble des classes d'isométrie équivariante de couples (X, α), où X est un arbre (rel) et α une action isomtrique de $\pi_1 S$ sur X, petits stabilisateurs d'arte (donc en particulier sans point fixe global, et telle que tout lment parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isomtrie elliptique sur X), et *minimale* (i.e. sans sous-arbre invariant propre non trivial). (Cet ensemble porte d'autres noms dans la littrature, voir par exemple [CM, Sha1, Sha2, Bes2, Mor, Pau4]). Munissons $\mathrm{Arb}(S)$ de la topologie de Gromov quivariante.

Munissons l'ensemble somme disjointe $\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$ de la topologie de Gromov quivariante, qui induit sur chacun des sous-ensembles $\mathrm{Hyp}(S)$ et $\mathrm{Arb}(S)$ leur topologie de Gromov quivariante. L'action de $\mathrm{Mod}(S)$ sur cet ensemble, dfinie par l'application $(f, (X, \alpha)) \mapsto (X, \alpha \circ f_*)$, est une action par homomorphismes. Le groupe topologique $\mathbb{R}_+^*$ agit continment sur $\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$ par l'application $(t, (X, \alpha)) \mapsto (tX, \alpha)$, et les actions de $\mathbb{R}_+^*$ et de $\mathrm{Mod}(S)$ commutent. Notons

$$\mathrm{K}(S) = (\, \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)\,) \,/\, \mathbb{R}_+^*$$

l'espace topologique quotient, muni de l'action quotient de $\mathrm{Mod}(S)$. La projection canonique $p : \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S) \to \mathrm{K}(S)$ est ouverte. Notons $\Theta : \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S) \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$ l'application dfinie par

$$(X, \alpha) \mapsto ([\gamma] \mapsto \min\{d(x, \alpha(\gamma, x)) \ : x \in X\}) \ ,$$

qui est quivariante pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$, et $\overline{\Theta} : \mathrm{K}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ l'application obtenue par passage au quotient, qui est aussi quivariante pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$.

Notons $\iota : \mathrm{Teich}(S) \to \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$ l'application dfinie par $\sigma \mapsto (\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}, \rho_\sigma)$, et $\overline{\iota} : \mathrm{Teich}(S) \to \mathrm{K}(S)$ l'application quotient, qui est quivariante pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$.

Théorème 13 *(F. Paulin [Pau1]) L'espace* $\mathrm{K}(S)$ *est mtrisable compact. L'application* $\overline{\iota} : \mathrm{Teich}(S) \to \mathrm{K}(S)$ *est un homomorphisme sur son image, celle-ci tant ouverte et dense dans* $\mathrm{K}(S)$*. Donc* $(\,\overline{\iota}, \mathrm{K}(S)\,)$ *est une compactification de* $\mathrm{Teich}(S)$ *naturelle pour le groupe modulaire* $\mathrm{Mod}(S)$*.*

L'application $\overline{\Theta} : \mathrm{K}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ *est un homomorphisme sur son image, telle que* $\overline{\Theta} \circ \overline{\iota} = \pi \circ \ell$*, donc la compactification naturelle ci-dessus est isomorphe la compactification de Thurston.*

En utilisant les travaux d'A. Parreau [Par], un rsultat semblable pour des espaces symtriques de type non compact est possible (sauf peut-être la densit de l'image).

Preuve. D'aprs un thorme d'Urysohn (voir par exemple [Dug] page 233), pour montrer qu'un espace topologique Y est mtrisable compact, il suffit de montrer qu'il est spar, base dnombrable d'ouverts, et *squentiellement compact* (i.e. que de toute suite (dénombrable) dans Y, on peut extraire une sous-suite convergente).

Munissons $\mathbb{R}_+^* \times \mathrm{Teich}(S)$ de la topologie produit des topologies usuelles, et de l'action par homomorphismes vidente de $\mathbb{R}_+^*$, dfinie par $t \cdot (t', \sigma) = (tt', \sigma)$, ainsi que celle de $\mathrm{Mod}(S)$, dfinie par $f \cdot (t', \sigma) = (t', f \cdot \sigma)$. En utilisant la proposition 8, il n'est pas difficile de montrer que l'application de $\mathbb{R}_+^* \times \mathrm{Teich}(S)$ dans $\mathrm{Hyp}(S)$, qui (λ, σ) associe $(\lambda \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}, \rho_\sigma)$ est un homomorphisme. Elle induit par passage au quotient un homomorphisme de $\mathrm{Teich}(S)$ sur $p(\mathrm{Hyp}(S))$ quivariant pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$. En particulier, $p(\mathrm{Hyp}(S))$ est sparable.

Il est montr dans [Pau4] que l'application de $\mathrm{Arb}(S)$ dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$, qui T associe ℓ_T, est un homomorphisme sur son image. Elle commute avec les actions de $\mathbb{R}_+^*$ et de $\mathrm{Mod}(S)$. (En fait, dans cette rfrence [Pau4], on ne demandait pas que les distances de translation des lments paraboliques de $\pi_1 S$ soient nulles, et on avait $\pi_1 S$ la place de $\mathcal{C}$, et on travaillait avec des groupes plus gnraux que $\pi_1 S$, mais le rsultat nonc ci-dessus dcoule de ce cas gnral.) Donc l'application $T \mapsto \ell_T$ induit un homomorphisme sur son image de $p(\mathrm{Arb}(S))$ dans $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$, et son image est mtrisable. Par une preuve de mme schma que pour le thorme 9, il est facile de montrer que $p(\mathrm{Arb}(S))$ est squentiellement compact : l'analogue du lemme 10 est obtenu par le fait qu'une action petits stabilisateurs d'arête de $\pi_1 S$ sur un arbre (rel) ne fixe pas de point l'infini de l'arbre (voir par exemple [CM, Pau3]) ; et l'analogue de la premire contradiction dans la preuve du lemme 11 est obtenue par le fait que si η est assez petit, alors $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha, \beta^2]$ fixent un segment non trivial dans un arbre approchant. Donc $p(\mathrm{Arb}(S))$ est mtrisable compact (et en particulier sparable). (Voir [Pau2] pour une autre preuve ; on retrouvait ainsi dans [Pau2] la compacit de l'image de $p(\mathrm{Arb}(S))$ dans $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$, ce qui est un rsultat de [CM, Theo. 5.3].)

Tout arbre (rel) muni d'une action isomtrique, sans point fixe global et minimale, d'un groupe est runion de ses axes de translation (voir par exemple [CM]), donc est sparable si le groupe est dnombrable. Dans tout ensemble $\mathcal{E}$ d'espaces mtriques sparables munis d'une action isomtrique d'un groupe dnombrable Γ, tout lment X possde un systme fondamental dnombrable de voisinages pour la topologie de Gromov quivariante, puisqu'il suffit de prendre les $V_{\epsilon,K,P}(X)$ pour ϵ dans $\mathbb{Q}$ et K une partie (finie) d'une partie dnombrable dense fixe de X. Comme p est ouverte, tout lment de l'espace $\mathrm{K}(S)$ admet donc un systme fondamental dnombrable de voisinages. L'espace $\mathrm{K}(S)$ est de plus sparable, car $p(\mathrm{Hyp}(S))$ et $p(\mathrm{Arb}(S))$ le sont. Donc il est base dnombrable d'ouverts.

Par un argument similaire celui de la rciproque dans la preuve de la proposition 8, l'application Θ est continue. Donc $\overline{\Theta}$ est continue. Elle est injective, car injective en restriction $p(\mathrm{Hyp}(S))$ et $p(\mathrm{Arb}(S))$, et par le lemme 12. Comme $\overline{\Theta}$ est continue, injective valeurs dans un espace spar, l'espace $\mathrm{K}(S)$ est spar. (Voir aussi [Pau1, Chap. IV.2] pour une preuve directe de la sparation de la topologie de Gromov quivariante sur l'ensemble $\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$.)

Remarquons que si une suite d'actions isomtriques de $\pi_1 S$ sur des espaces mtriques converge, pour la topologie de Gromov quivariante, vers un arbre (rel) muni d'une action sans point fixe global, elle converge aussi pour la topologie de Gromov quivariante vers

tout sous-arbre invariant, et en particulier vers son unique sous-arbre minimal (qui est la runion de ses axes de translations, voir par exemple [CM, Pau3]).

L'espace $\mathrm{K}(S)$ est squentiellement compact, car $p(\mathrm{Arb}(S))$ l'est, et par le thorme 9 et la remarque ci-dessus.

Par le thorme d'Urysohn suscit, $\mathrm{K}(S)$ est donc compact. L'application $\overline{\Theta}$, qui est continue injective d'un espace compact dans un espace spar, est donc un homomorphisme sur son image. Comme $p(\mathrm{Arb}(S))$ est compact dans $\mathrm{K}(S)$ spar (ou parce qu'une limite d'une suite d'actions isomtriques d'un groupe fix sur des arbres (rels) est encore une action isomtrique de ce groupe sur un arbre (rel)), le sous-espace $p(\mathrm{Arb}(S))$ est ferm, et donc $p(\mathrm{Hyp}(S))$ est ouvert. Donc $\overline{\iota}$ est un homomorphisme sur son image. Par un thorme de Skora [Sko] (voir aussi [Ota], ce rsultat n'tait pas disponible au moment de l'criture de [Pau1]), l'image de $\overline{\iota}$ est dense dans $\mathrm{K}(S)$. Par consquent, le couple $(\overline{\iota}, \mathrm{K}(S))$ est bien une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$. La naturalit et la relation $\overline{\Theta} \circ \overline{\iota} = \pi \circ \ell$ tant claires par construction, le rsultat en dcoule. □

Nous n'avons dcrit dans ces notes que l'aspect topologique de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmller. Une interprtation des points du bord comme des feuilletages transversalement mesurs (ou des laminations godsiques transversalement mesures), duale l'interprtation par les arbres rels, est cruciale pour de plus amples informations (voir par exemple [FLP, Bon3]).

Références

[Abi] W. Abikoff, *Real analytic theory of Teichmller space*, Lect. Notes in Math. **820**, Springer Verlag, 1980.

[Ano] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math., Amer. Math. Soc., 1969.

[Bea] A. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, 1983.

[Ber] L. Bers, *On boundaries of Teichmller spaces and on Kleinian groups, I*, Ann. of Math. **91** (1970) 570–600.

[Bes1] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J. **56** (1988), 143-161.

[Bes2] M. Bestvina, $\mathbb{R}$*-trees in topology, geometry, and group theory*, Handbook of geometric topology, 55–91, North-Holland, 2002.

[Bon1] F. Bonahon, *The geometry of Teichmller space via geodesic currents*, Inv. Math. **92** (1988) 139-162.

[Bon2] F. Bonahon, *Geodesic laminations with transverse Hlder distributions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **30** (1997) 205-240.

[Bon3] F. Bonahon, *Closed curves on surfaces*, Univ. South. Calif., livre en prparation.

[Bou] N. Bourbaki, *Topologie gnrale*, chap. 1 4, Hermann, Paris, 1971.

[Bouz] T. Bouzoubaa, *Compactification via le spectre réel d'espaces des classes de représentations dans* $SO(n,1)$, Ann. Inst. Four. (Grenoble) **44** (1994) 347-385,

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. bf 319, Springer Verlag (1998).

[Bro] J. Brock, *Iteration of mapping classes on a Bers slice : examples of algebraic and geometric limits of hyperbolic* 3*-manifolds*, Lipa's legacy (New York, 1995), 81–106, Contemp. Math. **211**, Amer. Math. Soc. 1997.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[Bru] G. Brumfiel, *The real spectrum compactification of Teichmüller space*, in "Geometry of group representations (Boulder 1987)", Contemp. Math. **74**, Amer. Math. Soc. (1988) 51-75.

[Bus] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann Surfaces*, Prog. Math. **106**, Birkhaüser, 1992.

[BK] P. Buser, H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque **81**, Soc. Math. France, 1981.

[CEG] R. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, in "Analytical and geometric aspects of hyperbolic space", D.B.A. Epstein ed., p. 3-92 Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series **111**, Cambridge Univ. Press, 1987.

[Chi] I. Chiswell, *Introduction to Λ-trees*, World Scientific, 2001.

[CM] M. Culler, J. Morgan, *Groups actions on $\mathbb{R}$-trees*, Proc. Lond. Math. Soc. **55** (1987) 571-604.

[CS] M. Culler, P.B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983) 109-146.

[Dug] J. Dugundji, *Topology*, Brown Pub., 1989.

[EL] J. Eells, L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988) 385–524.

[ET] V. Efremovitch, E. Tichonirova, *Equimorphisms of hyperbolic spaces*, Izv. Akad. Nauk. CCCP. **28** (1964) 1139-1144.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astrisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.

[FJ] C. Favre et M. Jonsson, *The valuative tree*, Lect. Notes in Math. **1853**, Springer Verlag, 2004.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin. J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer Verlag, 1990.

[Gar] F.P. Gardiner, *Teichmüller theory and quadratic differentials*, Wiley, 1987.

[Gol1] W. Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, dans "Geometry of group representations" (Boulder, 1987), 169–198, Contemp. Math., **74**, Amer. Math. Soc., 1988.

[Gol2] W. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. Math. **93** (1988) 557–607.

[Gol3] W. Goldman, *Convex real projective structures on compact surfaces*, J. Diff. Geom. **31** (1990) 791-845.

[GM] W. Goldman, J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space*, Inv. Math. **88** (1987) 495-520.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.

[Hir] M. Hirsch, *Differential topology*, GTM **33**, Springer Verlag, 1976.

[KM] V. Kaimanovich, H. Masur, *The Poisson boundary of Teichmller space*, J. Funct. Anal. **156** (1998) 301–332.

[Kap] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Prog. Math. **183**, Birkhuser, 2001.

[KL] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of 3-manifolds*, GAFA **5** (1995) 582-603.

[KS] L. Keen, C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmller space of punctured tori*, Topology **32** (1993) 719–749.

[Ker] S. Kerckhoff, *The asymptotic geometry of Teichmller space*, Topology **19** (1980) 23–41.

[KT] S. Kerckhoff, W. Thurston, *Non continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space*, Inv. Math. **100** (1990) 25-47.

[LP] G. Levitt, F. Paulin, *Geometric group actions on trees*, Amer. J. Math. **119** (1997) 83-102.

[McM] C. McMullen, *Cusps are dense*, Ann. of Math. **133** (1991) 217–247.

[Mas] H. Masur, *Two boundaries of Teichmller space*, Duke Math. J. **49** (1982) 183–190.

[MT] K. Matsuzaki, M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Univ. Press, 1998.

[Mor] J. Morgan, Λ-*trees and their applications*, Bull. A.M.S. **26** (1992) 87-112.

[MO] J. Morgan, J.-P. Otal, *Relative growth rate of closed geodesics on a surface under varying hyperbolic structures*, Comm. Math. Helv. **68** (1993) 171-208.

[MS1] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, Ann. of Math. **122** (1985) 398-476.

[MS2] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*, Ann. of Math. **127** (1988) 403-519.

[Mos] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symetric spaces*, Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press, 1973.

[MF] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Springer Verlag 1982.

[Nag] S. Nag, *The complex analytic theory of Teichmller spaces*, Wiley, 1988.

[Ota] J.-P. Otal, *Le thorme d'hyperbolisation pour les varits fibres de dimension 3*, Astrisque **235**, Soc. Math. France (1996).

[Par] A. Parreau, *Dgnrescence de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur les immeubles affines.* Thse, Universit d'Orsay Jan 2000. (voir aussi *Compactification d'espaces de reprsentations de groupes de type fini*, prpublication Grenoble 2003).

[Pau1] F. Paulin, *Topologie de Gromov quivariante, structures hyperboliques et arbres rels*, Thse, Universit Paris XI (Orsay), Dcembre 1987.

[Pau2] F. Paulin, *Topologie de Gromov quivariante, structures hyperboliques et arbres rels*, Invent. Math. **94** (1988), 53-80.

[Pau3] F. Paulin, *The Gromov topology on $\mathbb{R}$-trees*, Topology and its App. **32** (1989), 197-221.

[Pau4] F. Paulin, *Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semisimples*, Comp. Rend. Acad. Scien. Paris **324** Sér. I (1997) 1217-1220.

[Pau5] F. Paulin, *Actions de groupes sur les arbres*, Sém. Bourbaki 48ème année (1995-96) n° 808, Astrisque **241** (1997) 97-137.

[Rag] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer Verlag, 1972.

[Rat] J. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, GTM **149**, Springer Verlag, 1994.

[Sha1] P. Shalen, *Dendrology of groups : an introduction*, Essays in group theory (S.M. Gersten ed.), pp 265-319 M.S.R.I Pub. **8**, Springer Verlag, 1987.

[Sha2] P. Shalen, *Dendrology and its applications*, in "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), pp 543-616, World Scientific, 1991.

[Sko] R. Skora, *Splittings of surfaces*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 605-616.

[Thu1] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988), 417-432.

[Thu2] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Univ. Press 1997.

[Tit] J. Tits, *A "theorem of Lie-Kolchin" for trees*, in "Contributions to Algebra : a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin", pp. 377-388, H. Bass et al eds, Academic Press 1977.

[Wol1] M. Wolf, *The Teichmller theory of harmonic maps*, J. Diff. Geom. **29** (1989) 449–479.

[Wol2] M. Wolf, *Harmonic maps from surfaces to* $\mathbb{R}$*-trees*, Math. Z. **218** (1995) 577–593.

Dpartement de Mathmatiques et Applications
UMR 8553 CNRS
cole Normale Suprieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE.
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr