



HAL
open science

Automorphismes de groupes libres, tresses et morphismes épisturmiens

Eddy Godelle

► **To cite this version:**

Eddy Godelle. Automorphismes de groupes libres, tresses et morphismes épisturmiens. 2006. hal-00022410

HAL Id: hal-00022410

<https://hal.science/hal-00022410>

Preprint submitted on 7 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Automorphismes de groupes libres, tresses et morphismes épisturmiens

EDDY GODELLE

mercredi 16 mars 2006

Abstract : In a recent article, C. Kassel and C. Reutenauer studied the connection between the 4 strand braid group and Sturmian morphisms in word combinatorics. The aim of the current work is to extend this approach into a general connection between braid groups (of any index) and episturmian morphisms, a natural generalization of sturmian morphisms. Our key tool consists in associating with every graph a certain finite family of automorphisms of a free group. In the case of a complete graph, we recover some well-known family of episturmian morphisms. Now, considering the path of length n , we deduce a seemingly new representation of the braid group B_n in $\text{Aut}(F_n)$. By considering some other graphs, we similarly obtain representations of various Artin-Tits groups, in particular some affine braid groups. Our representation is faithful for B_3 and B_4 ; for other cases, the question of faithfulness remains open.

1 Motivations, perspectives et résultats

Dans [5], Christian Kassel et Christophe Reutenauer jettent un pont entre le monde des tresses (plus précisément, le groupe B_4 des tresses à 4 brins) et le monde des mots et morphismes sturmiens. Ils montrent en particulier que B_4 quotienté par son centre se plonge dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$, c'est-à-dire dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_2 . L'image dans $\text{Aut}(F_2)$ des générateurs standards du groupe B_4 sont certains morphismes sturmiens (ou leur inverse) bien connus. Les tresses, d'une part, et les morphismes sturmiens, d'autre part, sont les objets de recherches actives. Ce lien amène à se poser le problème de l'existence d'une connection plus générale entre les groupes des tresses et les morphismes sturmiens (ou les morphismes épisturmiens, qui sont leur généralisation). C'est l'objet principal de ce travail.

Notre motivation générale est l'étude des groupes d'Artin-Tits, et en particulier du groupe des tresses. L'étude des représentations des groupes des tresses est le thème de nombreuses publications (voir, par exemple [1],[3],[6],[14]). Nous allons définir dans cet article une représentation des tresses, comme automorphismes de groupe libre, qui nous semble nouvelle.

L'une des motivations pour la recherche d'une telle représentation provient de la théorie des noeuds. Tout entrelac peut être réalisé comme la tresse fermée $L(b)$ associée à une tresse b à n brins. Dans ce cas, le groupe fondamental $\pi_1(S^3 - L(b))$ a pour présentation

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid \alpha(b)(x_i) = x_i ; i = 1, \dots, n \rangle$$

où α est un certain homomorphisme de B_n dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_n à n générateurs x_1, \dots, x_n . Une question naturelle est alors de se demander quelles sont les représentations du groupe des tresses, et plus généralement d'un groupe d'Artin-Tits, dans le groupe des automorphismes d'un groupe libre de rang fini. Masaaki Wada dans [14] s'est intéressé à cette question en recherchant par ordinateur les automorphismes d'un certain type, qu'il appelle automorphismes de décalage. Notre travail peut être vu comme une contribution à la résolution de cette question.

Notre seconde motivation est liée à deux conjectures énoncées, il y aura bientôt quarante ans, par Jacques Tits. La première conjecture, prouvée depuis par John Crisp et Luis Paris ([2]), donne une présentation du sous-groupe d'un groupe d'Artin-Tits engendré par les carrés des générateurs de la présentation standard du groupe. En fait, Crisp et Paris ont déterminé la présentation d'un sous-groupe engendré par un ensemble quelconque de puissances strictes (ou leurs inverses) des générateurs standards du groupe des tresses. La seconde conjecture, prouvée par Luis Paris dans [10], donne une présentation du sous-monoïde d'un groupe d'Artin-Tits engendré par les générateurs standards. Une question naturelle se pose alors : Que peut on dire du sous-monoïde d'un groupe d'Artin-Tits engendré par une partie des générateurs standards et par l'inverse des autres générateurs standards ? Plus précisément, peut on donner une présentation finie de ce monoïde ? Il est assez facile de voir que si l'on note s_1 et s_2 les générateurs standards du groupe des tresses à trois brins B_3 , alors le sous-monoïde de B_3 engendré par s_1 et s_2^{-1} est un monoïde libre de base s_1 et s_2^{-1} . Dans la section 3.4, nous énonçons une conjecture (Conjecture 3.14) qui tente d'apporter une réponse à la seconde question posée ci-dessus. Pour prouver cette conjecture, il semble nécessaire de trouver de nouvelles techniques. En effet, la vérification par des méthodes classiques de la validité de la présentation donnée dans la conjecture semble assez difficile, même dans le cas du groupe des tresses à quatre brins ! La représentation que nous construisons se révèle un outils

efficace pour prouver partiellement la conjecture (*cf.* Proposition 1.4).

Dans cet article, nous allons associé à tout graphe Γ (sans boucle ni arête multiple) à n sommets, un ensemble Λ_Γ de $2n$ automorphismes du groupe libre F_n , deux pour chaque sommet du graphe. Parmi les graphes connexes, il y a deux graphes singuliers, le graphe linéaire et le graphe complet. Nous allons voir que dans le premier cas, le groupe engendré par ces automorphismes induit une représentation (semble-t-il nouvelle) du groupe B_{n+1} des tresses à $n + 1$ brins. Dans le second cas, les automorphismes obtenus sont des morphismes épisturmiens. Plus précisément, si $\mathcal{F}^+(\Lambda_n)$ désigne le sous-monoïde de $\text{Aut}(F_n)$ engendré par Λ_n et $\text{Aut}(\Gamma)$ désigne le groupe des automorphismes du graphe Γ alors nous allons voir que :

Proposition 1.1 *Si Γ désigne le graphe complet à n sommets alors le monoïde des morphismes épisturmiens sur n lettres est isomorphe à $\text{Aut}(\Gamma) \ltimes \mathcal{F}^+(\Lambda_n)$.*

Ceci expliquera en particulier le lien entre le groupe B_4 et les morphismes sturmiens. Nous montrons le résultat suivant :

Proposition 1.2 *Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple. on note S l'ensemble des sommets de Γ , et on note L_x et R_x les deux automorphismes dans Λ_Γ associés au sommet x . On note $J(x)$ l'ensemble des sommets de Γ reliés à x par une arête.*

Pour tous sous-ensemble X de Λ_Γ ne contenant aucune paire L_x, R_x , le sous-monoïde des automorphismes du groupe libre F_n engendré par X possède la présentation de monoïde suivante :

$$\left\langle X \left| \begin{array}{l} L_x R_y = R_y L_x \quad \text{si } L_x, R_y \in X; x \notin J(y) \\ L_x L_y = L_y L_x \quad \text{si } L_x, L_y \in X; x \notin J(y) \text{ et } J(x) \cap J(y) = \emptyset \\ R_x R_y = R_y R_x \quad \text{si } R_x, R_y \in X; x \notin J(y) \text{ et } J(x) \cap J(y) = \emptyset \end{array} \right. \right\rangle^+.$$

En particulier, ce monoïde est un monoïde partiellement commutatif.

La famille des groupes d'Artin-Tits constitue l'une des généralisations naturelles des groupes des tresses. Notre construction nous amène à considérer une sous-famille particulière de la famille des groupes d'Artin-Tits, que nous appelons la famille des groupes d'Artin-Tits $(2, 3, \infty)$ -représentable. Cette famille contient en particulier les groupes des tresses et certains groupes des tresses affines. A chaque groupe de cette famille, nous associons une (ou plusieurs) représentation(s) à valeurs dans les automorphismes d'un groupe libre. Ceci se fait en utilisant son graphe de Coxeter. Nous appelons les représentations ainsi construites des *représentations par transvection*. La

représentation par transvection φ_3 de B_4 peut être vue comme le redressement de celle obtenue dans [5] et s'en distingue par le fait que,

Proposition 1.3 *La représentation par transvection φ_3 du groupe des tresses à 4 brins B_4 dans $\text{Aut}(F_3)$ est fidèle.*

Nous remarquons que, dans le cas du groupe des tresses à n brins, les représentations que nous obtenons sont distinctes de celles décrites par Wada.

En étudiant les propriétés de ces représentations, nous déduisons de la proposition 1.2 le résultat suivant qui va dans le sens de la conjecture 3.14 :

Proposition 1.4 *Soit B_{n+1} le groupe des tresses à $n + 1$ brins ; notons $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ses générateurs standards. Considérons $S_1 = \{\sigma_{2i} \mid 1 \leq 2i \leq n\}$ et $S_2 = \{\sigma_{2i+1} \mid 1 \leq 2i + 1 \leq n\}$. Alors le sous-monoïde de B_{n+1} engendré par $S_1 \cup S_2^{-1}$ possède la présentation suivante:*

$$\left\langle S_1 \cup S_2^{-1} \left| \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-1} \sigma_i & \text{pour } \sigma_i \in S_1, \sigma_j \in S_2 \text{ et } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{pour } \sigma_i \in S_1, \sigma_j \in S_1 \\ \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} & \text{pour } \sigma_i \in S_2, \sigma_j \in S_2 \end{array} \right. \right\rangle^+.$$

En fait nous verrons dans la partie 4 que ce résultat s'étend à d'autres groupes d'Artin-Tits.

L'organisation de notre article reflète les deux aspects de notre travail : automorphismes de groupes libres et de monoïdes libres, et groupes d'Artin-Tits. La partie 2 concerne les automorphismes des groupes libres et des monoïdes libres. En particulier, nous construisons la famille Λ_Γ et nous prouvons les propositions 1.1 et 1.2. Dans la partie 3, nous définissons la famille des groupes d'Artin-Tits $(2, 3, \infty)$ -représentables et les représentations par transvection. Nous étudions la fidélité des représentations obtenues et prouvons les propositions 1.3 et 1.4.

2 Automorphismes de transvection

2.1 Automorphismes du groupe libre

L'étude des automorphismes du groupe libre est un sujet d'étude à lui seul et de nombreuses questions restent ouvertes. Néanmoins, on connaît depuis des travaux de Nielsen ([9]) et de Neumann ([8]) des présentations du groupe des automorphismes du groupe libre à n générateurs (voir [7] chapitre 3 paragraphe 5). On peut en particulier définir quatre familles $E_{i,j}$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ et τ_i d'automorphismes élémentaires (voir définition 2.1).

Commençons par poser quelques notations. Si (a, b, \dots) est un ensemble fini de lettres, on note $F(a, b, \dots)$ le groupe libre de base a, b, \dots . Par F_n on désignera le groupe libre de base x_1, x_2, \dots, x_n . De même, on notera respectivement $F^+(a, b, \dots)$ et F_n^+ les monoïdes libres de base a, b, \dots et x_1, x_2, \dots, x_n . On identifie dans la suite $F^+(a, b, \dots)$ à son image dans $F(a, b, \dots)$. Les éléments de $F(a, b, \dots)$ sont appelés les *mots* sur l'*alphabet* a, b, \dots . Les mots de $F^+(a, b, \dots)$ sont dit *positifs*. Chaque mot de $F(a, b, \dots)$ possède un unique *représentant réduit*, c'est-à-dire une unique représentant de longueur minimal. la *longueur* d'un mot de $F(a, b, \dots)$ est par définition la longueur de son représentant réduit. Enfin, on note $\Phi(a, b, \dots)$ et Φ_n les groupes d'automorphismes respectifs des groupes $F(a, b, \dots)$ et F_n .

Définition 2.1 (i) Pour i dans $\{1, \dots, n\}$, on définit un élément τ_i de Φ_n en posant

$$\tau_i(x_i) = x_i^{-1} \text{ et } \tau_i(x_k) = x_k$$

pour k différent de i dans $\{1, \dots, n\}$.

(ii) Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts, on définit un élément $E_{i,j}$ de Φ_n en posant

$$E_{i,j}(x_i) = x_j ; E_{i,j}(x_j) = x_i \text{ et } E_{i,j}(x_k) = x_k$$

pour k distinct de i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

(iii) Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts, on définit un élément $L_{i,j}$ de Φ_n en posant

$$L_{i,j}(x_i) = x_i ; L_{i,j}(x_j) = x_i x_j \text{ et } L_{i,j}(x_k) = x_k$$

pour k distinct de i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

(iv) Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts, on définit un élément $R_{i,j}$ de Φ_n en posant

$$R_{i,j}(x_i) = x_i ; R_{i,j}(x_j) = x_j x_i \text{ et } R_{i,j}(x_k) = x_k$$

pour k distinct de i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

Nielsen a montré dans [9] que l'ensemble des $E_{i,j}, L_{i,j}, R_{i,j}$ et τ_i forme une famille génératrice de Φ_n à partir de laquelle on peut obtenir une présentation finie de Φ_n . Ces générateurs sont appelés les générateurs de Nielsen de Φ_n . Dans le cas $n = 2$, le monoïde St des morphismes sturmiens est le sous-monoïde de Φ_2 engendré par $E_{1,2}, R_{1,2}$ et $R_{2,1}$ ([5]). Il est facile de voir que ce sous-monoïde est aussi engendré par $E_{1,2}, L_{1,2}$ et $L_{2,1}$. Dans [5], les auteurs ont montré que le quotient du groupe des tresses B_4 par son centre est isomorphe au sous-groupe de Φ_2 engendré par $R_{1,2}, R_{2,1}, L_{1,2}$ et $L_{2,1}$. Si l'on note σ_1, σ_2 et σ_3 les générateurs standards du groupe B_4 , un isomorphisme envoie σ_1, σ_2 et σ_3 sur $L_{1,2}, L_{2,1}^{-1}$ et $R_{1,2}$ respectivement.

2.2 Automorphismes associés à un graphe

Nous allons maintenant associé à tout graphe fini sans boucles ni arêtes multiples de sommets x_1, \dots, x_n une famille de $2n$ éléments de Φ_n .

Pour nous, un *graphe fini* est un triplet (S, V, t) où S et V sont deux ensembles finis, avec S non vide, et t est une application de V dans l'ensemble des parties non vides de S à au plus deux éléments. Les éléments de S s'appellent *les sommets* du graphe et les éléments de V sont *les arêtes*. On dira que deux sommets x et y sont *connectés par une arête* si $t^{-1}(\{x, y\})$ est non vide. On dira que le graphe (S, V, t) est *sans boucle* si aucun sommet n'est connecté à lui-même par une arête. On dira que (S, V, t) est *sans arête multiple* si deux sommets quelconques sont connectés par au plus une arête; dans ce cas, on peut identifier V à $t(V)$. Si Γ est un graphe sans boucle ni arête multiple de sommets x_1, \dots, x_n , on note $J_\Gamma(x_i)$, l'ensemble des sommets de Γ connectés à x_i par une arête. Par définition, x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$ si et seulement si x_i est dans $J_\Gamma(x_j)$. Nous dirons que le sommet x_i est *isolé* si $J_\Gamma(x_i)$ est vide. On utilise pour les figures la représentation géométrique standard d'un graphe. Le graphe sera dit connexe si cette représentation est connexe.

Définition 2.2 Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple de sommets x_1, \dots, x_n . Pour i dans $\{1, \dots, n\}$, on appelle *ième automorphisme de transvection à gauche de F_n associé à Γ* , l'automorphisme $L_{i,\Gamma}$ définit comme le produit des $L_{i,j}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$. Autrement dit

$$L_{i,\Gamma}(x_i) = x_i ; L_{i,\Gamma}(x_j) = x_i x_j \text{ et } L_{i,\Gamma}(x_k) = x_k$$

pour j, k dans $\{1, \dots, n\}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$ et x_k n'y est pas.

On définit de façon similaire le *ième automorphisme de transvection à droite de F_n associé à Γ* comme l'automorphisme $R_{i,\Gamma}$ obtenu comme le produit des $R_{i,j}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$.

Le terme de transvection nous est inspiré par [11]. Lorsque le contexte sera clair, nous écrirons $J(x_i)$, L_i et R_i à la place de $J_\Gamma(x_i)$, $L_{i,\Gamma}$ et $R_{i,\Gamma}$ afin de ne pas alourdir inutilement les notations.

Dans la suite de l'article, l'ensemble $\{L_1, \dots, L_n\} \cup \{R_1, \dots, R_n\}$ est noté Λ_Γ ; on note $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ et $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ respectivement le sous-groupe et le sous-monoïde de Φ_n engendrés par l'ensemble Λ_Γ .

Si l'on se donne un ensemble fini de sommets S et que l'on considère les graphes connexes de sommets S , alors on a deux cas extrêmes: le graphe complet et le graphe simplement connexe. Dans le premier cas, les automorphismes L_i et R_i que l'on obtient correspondent aux morphismes épisturmiens

Ψ_i et $\bar{\Psi}_i$ définis dans [4]. Dans le second cas, le graphe est le diagramme de Coxeter du groupe des tresses B_{n+1} . Nous allons voir que le sous-groupe $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ de Φ_n est fortement lié au groupe B_{n+1} .

Lemme 2.3 *Soit Γ un graphe sans boucles ni arêtes multiples de sommets x_1, \dots, x_n . Soit i et j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts.*

(i) *Si x_i n'est pas dans $J(x_j)$, on a $L_i R_j = R_j L_i$.*

(ii) *Si x_i n'est pas dans $J(x_j)$ et $J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset$, alors*

$$L_i L_j = L_j L_i \text{ et } R_i R_j = R_j R_i.$$

(iii) *Si x_i est dans $J(x_j)$ alors*

$$\begin{aligned} L_i L_j^{-1} L_i &= L_j^{-1} L_i L_j^{-1}; \\ R_i R_j^{-1} R_i &= R_j^{-1} R_i R_j^{-1}; \\ L_i R_j^{-1} L_i &= R_j^{-1} L_i R_j^{-1}. \end{aligned}$$

Preuve: Si x_i n'est pas dans $J(x_i)$:

	$L_i(x)$	$R_j(x)$	$L_i R_j(x)$	$R_j L_i(x)$
$x \in J(x_i) \cap J(x_j)$	$x_i x$	$x x_j$	$x_i x x_j$	$x_i x x_j$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_i x$	$x_i x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x x_j$	$x x_j$	$x x_j$

Si x_i n'est pas dans $J(x_i)$ et $J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset$:

	$L_i(x)$	$L_j(x)$	$L_j L_i(x)$	$L_i L_j(x)$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_i x$	$x_i x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x_j x$	$x_j x$	$x_j x$

Si x_i est dans $J(x_i)$:

	$L_i(x)$	$L_j^{-1}(x)$	$L_i L_j^{-1} L_i(x)$	$L_j^{-1} L_i L_j^{-1}(x)$
$x \in J(x_i) \cap J(x_j)$	$x_i x$	$x_j^{-1} x$	$x_j^{-2} x$	$x_j^{-2} x$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_j^{-1} x_i x$	$x_j^{-1} x_i x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x_j^{-1} x$	$x_j^{-1} x_i^{-1} x$	$x_j^{-1} x_i^{-1} x$

	$L_i(x)$	$R_j^{-1}(x)$	$L_i R_j^{-1} L_i(x)$	$R_j^{-1} L_i R_j^{-1}(x)$
$x \in J(x_i) \cap J(x_j)$	$x_i x$	$x x_j^{-1}$	$x_i x_j^{-1} x x_j^{-1} x_i^{-1}$	$x_i x_j^{-1} x x_j^{-1} x_i^{-1}$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_i x_j^{-1} x$	$x_i x_j^{-1} x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x x_j^{-1}$	$x x_j^{-1} x_i^{-1}$	$x x_j^{-1} x_i^{-1}$

Les deux derniers cas se déduisent de la symétrie entre L et R et des cas traités. \square

Proposition 2.4 *Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple, et de sommets x_1, \dots, x_n . Soit X une partie des sommets de Γ . On suppose que l'ensemble $\bigcap_{x \in X} J(x)$ est non vide.*

(i) *Le sous-monoïde de Φ_n engendré par l'ensemble $\{R_i \mid x_i \in X\}$ est libre, de rang le cardinal de X . En particulier, tous x_i, x_j dans X distincts, les automorphismes R_i et R_j ne commutent pas. De même, le sous-monoïde de Φ_n engendré par l'ensemble $\{L_i \mid x_i \in X\}$ est libre.*

(ii) *Supposons qu'aucune arête du graphe Γ ne relie deux sommets de X . Alors, le sous-groupe du groupe Φ_n engendré par l'ensemble $\{R_i \mid x_i \in X\}$ est un groupe libre de rang le cardinal de X ; de même, le sous-groupe du groupe Φ_n engendré par l'ensemble $\{L_i \mid x_i \in X\}$ est un groupe libre de rang le cardinal de X . Si y est dans $\bigcap_{x \in X} J(x)$ et $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ est un mot de $F(X)$, alors $R_{i_1}^{\epsilon_1} \circ R_{i_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ R_{i_k}^{\epsilon_k}(y) = yw$.*

Preuve : (i) Soit $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\ell}$ dans X tels que $R_{i_1} \circ R_{i_2} \circ \dots \circ R_{i_k} = R_{j_1} \circ R_{j_2} \circ \dots \circ R_{j_\ell}$. Choisissons y dans $\bigcap_{x \in X} J(x)$. On montre par récurrence sur k que $k = \ell$ et que pour tout m , on a $i_m = j_m$. On remarque que dans le mot $R_{i_1} \circ R_{i_2} \circ \dots \circ R_{i_k}(y)$, toute lettre y est immédiatement suivie de la lettre x_{i_1} . On en déduit, par symétrie, que si $k = 0$ alors $\ell = 0$ et que sinon, on a $x_{i_1} = x_{j_1}$. On a alors $R_{i_2} \circ R_{i_2} \circ \dots \circ R_{i_k} = R_{j_2} \circ R_{j_2} \circ \dots \circ R_{j_\ell}$ dans Φ_n , et on conclut par hypothèse de récurrence.

(ii) On montre, de nouveau par récurrence sur k , que l'image de y par l'automorphisme $R_{i_1}^{\epsilon_1} \circ R_{i_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ R_{i_k}^{\epsilon_k}(y)$ est yw . Ceci prouve que le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{R_i \mid x_i \in X\}$ est libre. Le reste de l'énoncé se déduit par symétrie : $L_{i_1}^{\epsilon_1} \circ L_{i_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ L_{i_k}^{\epsilon_k}(y) = x_{i_k}^{\epsilon_k} \dots x_{i_2}^{\epsilon_2} x_{i_1}^{\epsilon_1} y$. \square

On rappelle que si (S, V, t) est un graphe fini, alors un automorphisme de (S, V, t) est une bijection simpliciale $f : V \cup S \rightarrow V \cup S$; c'est-à-dire une bijection telle que : $f(V) = V$; $f(S) = S$ et pour toute arête v , on a $t(f(v)) = f(t(v))$. On note $\text{Aut}(\Gamma)$ le groupe des automorphismes du graphe Γ .

Proposition 2.5 *Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple, et de sommets x_1, \dots, x_n .*

(i) *Tout élément f de $\text{Aut}(\Gamma)$ induit un automorphisme \bar{f} du groupe $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$, défini par $\bar{f}(L_i) = L_{f(i)}$ et $\bar{f}(R_i) = R_{f(i)}$.*

(ii) *Il existe un morphisme de groupes de $\text{Aut}(\Gamma) \times \mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ dans Φ_n , injectif sur $\text{Aut}(\Gamma)$, et dont la restriction à $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ est l'identité.*

Preuve : Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de permutations des sommets de Γ , et le sous-groupe de Φ_n engendré par les éléments $E_{i,j}$ de la définition 2.1 est naturellement isomorphe au groupe des permutations S_n . On peut donc plonger naturellement le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ dans le sous-groupe de Φ_n engendré par les $E_{i,j}$. On peut alors faire agir les éléments de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ via ce plongement. En effet, si f est une permutation $\text{Aut}(\Gamma)$ vue comme un élément de Φ_n , alors par simplicialité, on a $f \circ L_i \circ f^{-1}(x_j) = L_{f(i)}(x_j)$ et $f \circ R_i \circ f^{-1}(x_j) = R_{f(i)}(x_j)$.

2.3 Automorphismes positifs associés à un graphe

Dans cette partie, on fixe un graphe Γ sans boucle ni arête multiple, et de sommets x_1, \dots, x_n .

Nous allons étudier maintenant le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. Au passage, nous prouverons le corollaire 2.11 qui permettra de démontrer la proposition 1.4 dans la partie 3.

Bien que les automorphismes L_i et R_j soient relativement naturels, on peut s'interroger sur l'intérêt d'étudier le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. En fait, ce monoïde apparaît naturellement dans deux domaines mathématiques : les groupes de tresses et les morphismes épisturmiens. En effet,

Proposition 2.6 *Notons Γ le graphe complet à n sommets, alors :*

- (i) *le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ est le monoïde des morphismes épisturmiens sur n lettres qui préservent l'ordre lexicographique sur les mots infinis.*
- (ii) *Le monoïde des morphismes épisturmiens sur n lettres est isomorphe au monoïde $\text{Aut}(\Gamma) \times \mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$.*

Preuve : le (i) est une simple réécriture de la Proposition 6.2 de [13] dans le contexte des automorphismes de transvection.

(ii). On a vu dans la partie précédente que l'on a un morphisme naturel de $\text{Aut}(\Gamma) \times \mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ dans Φ_n . Lorsque le graphe Γ est complet avec n sommets, le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ est simplement le groupe des permutations S_n . D'autre part l'intersection du monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ avec le groupe S_n , vu comme sous-groupe de Φ_n est triviale car tout automorphisme non trivial de $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ augmente strictement la longueur du mot $x_1 \cdots x_n$. \square

Nous verrons dans la partie 3 que le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ associé au graphe simplement connexe à n sommets est un sous-monoïde singulier du groupe des tresses B_{n+1} .

On suppose dans la suite de cette partie qu'aucun sommet du graphe Γ n'est isolé (*i.e.* $J_\Gamma(x_i)$ n'est jamais vide); dans le cas contraire, on a les

égalités $R_i = L_i = Id_{F_n}$ et $R_j(x_i) = L_j(x_i) = x_i$ pour tout j ; on peut donc oublier le sommet x_i .

Proposition 2.7 Soit $M_{i_1} \cdots M_{i_r}$ et $M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}$ deux mots du groupe libre $F(\Lambda_\Gamma)$ avec M_i et M'_i dans $\{L_i, R_i\}$.

Si $M_{i_1} \cdots M_{i_r} = M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}$ dans $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ alors :

- (i) on a $\{i_1, \dots, i_r\} = \{j_1, \dots, j_s\}$;
- (ii) il existe $j \in \{j_1, \dots, j_s\}$ tel que $M'_j = M_{i_1}$;
- (iii) soit $k = \inf\{\ell \mid M'_{j_\ell} = M_{i_1}\}$. Si k est différent de 1, alors pour tout ℓ dans $\{1, \dots, k-1\}$ on a l'un des cas suivants:

- (a) $x_{i_1} \notin J(x_{j_\ell})$ et $M_{i_1} M'_{j_\ell} = M'_{j_\ell} M_{i_1}$;
- (b) $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$, $M_{i_1} = L_{i_1}$ et $M'_{j_\ell} = R_{j_\ell}$;
- (c) $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$, $M_{i_1} = R_{i_1}$ et $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$.

De plus, dans le cas (b), il existe $m \in \{1, \dots, \ell-1\}$ tel que $M'_{j_m} = R_{i_1}$; en particulier $\ell \neq 1$. De même, dans le cas (c), il existe $m \in \{1, \dots, \ell-1\}$ tel que $M'_{j_m} = L_{i_1}$; en particulier $\ell \neq 1$.

Pour prouver cette proposition, nous allons avoir besoin de quelques lemmes techniques, dont les démonstrations sont immédiates et laissées au lecteur. Rappelons que si w est un mot du groupe $F(a, b, \dots)$, on appelle *support* de w l'ensemble des lettres de l'alphabet a, b, \dots qui apparaissent dans l'écriture réduite de w . On note $\text{supp}(w)$ cet ensemble.

Lemme 2.8 Soit w un mot positif dans F_n^+ et i dans $\{1, \dots, n\}$.

- (i) Les mots $L_i(w)$ et $R_i(w)$ sont positifs.
- (ii) Si $x_j \in \text{supp}(w)$, alors $x_j \in \text{supp}(L_i(w))$ et $x_j \in \text{supp}(R_i(w))$.
- (iii) Si $x_j \notin \text{supp}(w)$, alors

$$x_j \in \text{supp}(L_i(w)) \iff i = j \text{ et } J(x_i) \cap \text{supp}(w) \neq \emptyset \iff x_j \in \text{supp}(R_i(w)).$$

- (iv) Si $\text{supp}(w) \cap J(x_i)$ est non vide, alors toute lettre de l'écriture réduite de $L_i(w)$ (resp. de $R_i(w)$) appartenant à $J(x_i)$ est immédiatement précédée (resp. suivie) de la lettre x_i dans l'écriture réduite de $L_i(w)$ (resp. de $R_i(w)$).

Preuve : \square

Lemme 2.9 Soit w un mot positif dans l'ensemble F_n^+ et i dans $\{1, \dots, n\}$.

On suppose que $w = w_1 x_p w_2$ avec x_p dans $J(x_i)$ et w_1, w_2 dans F_n^+ tels que $x_i \notin \text{supp}(w_1)$.

- (i) Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$ distinct de i , on a $L_j(w) = w'_1 x_q w'_2$ avec x_q dans $J(x_i)$ et w'_1, w'_2 dans F_n^+ tels que $x_i \notin \text{supp}(w'_1)$.
- (ii) Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, on a $R_j(w) = w'_1 x_q w'_2$ avec x_q dans $J(x_i)$ et w'_1, w'_2 dans F_n^+ tels que $x_i \notin \text{supp}(w'_1)$.

Preuve : \square

Lemme 2.10 *Soit w un mot positif dans l'ensemble F_n^+ et i dans $\{1, \dots, n\}$. On suppose que $w = w_1 x_p z x_q w_2$ avec w_1, w_2, z des mots positifs tels que la lettre x_i n'est pas dans le support de z , et avec x_p, x_q tels que $x_p \notin J(x_i) \cup \{x_i\}$ et $x_q \in J(x_i)$.*

(i) *Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ distinct de i , on a $L_j(w) = w'_1 x_{p'} x_{q'} w'_2$ tel que w'_1, w'_2 sont des mots positifs avec $x_{p'} \notin J(x_i) \cup \{x_i\}$ et $x_{q'} \in J(x_i)$.*

(ii) *Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, on a $R_j(w) = w'_1 x_{p'} x_{q'} w'_2$ tel que w'_1, w'_2 sont des mots positifs avec $x_{p'} \notin J(x_i) \cup \{x_i\}$ et $x_{q'} \in J(x_i)$.*

Preuve : On remarque que l'on peut supposer sans restriction que $z = 1$. Le résultat est alors immédiat. \square

Preuve de la proposition 2.7: Supposons $M_{i_1} \cdots M_{i_r} = M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}$.

(i) Soit i_ℓ dans i_1, \dots, i_r . Nous montrons grâce au lemme 2.8(ii) et (iii), que $i_\ell \in \{j_1, \dots, j_s\}$. Soit x_k dans $J_\Gamma(x_{i_\ell})$; la lettre x_k est dans le support de $M_{i_{\ell+1}} \cdots M_{i_r}(x_k)$ et la lettre x_{i_ℓ} est dans le support de $M_{i_\ell} \cdots M_{i_r}(x_k)$. Donc la lettre x_{i_ℓ} est dans le support de $M_{i_1} \cdots M_{i_r}(x_k)$. Puisque $k \neq i_\ell$ et $M_{i_1} \cdots M_{i_r} = M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}$, il existe $j_{\ell'}$ tel que la lettre x_{i_ℓ} est dans le support de $M'_{j_{\ell'}} \cdots M'_{j_s}(x_k)$ mais n'est pas dans le support de $M'_{j_{\ell'+1}} \cdots M'_{j_s}(x_k)$. Ceci implique que $j_{\ell'}$ est égal à i_ℓ et que i_ℓ est dans $\{j_1, \dots, j_s\}$. On en déduit l'inclusion $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$, et par symétrie l'égalité voulue.

(ii) Supposons que $M'_j \neq M_{i_1}$ pour tout j . Par symétrie, on peut supposer sans restriction que $M_{i_1} = L_{i_1}$. Soit $x_k \in J_\Gamma(x_{i_1})$. Par récurrence sur l'entier s et en appliquant le lemme 2.9 (i) et (ii), le mot $M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}(x_k)$ est de la forme $w_1 x_{k'} w_2$ avec $x_{k'} \in J_\Gamma(x_{i_1})$ et $w'_1, w'_2 \in F_n^+$ tels que $x_{i_1} \notin \text{supp}(w'_1)$. Mais ceci est impossible, car dans l'écriture réduite de $L_{i_1}(M_{i_2} \cdots M_{i_r}(x_k))$ toute lettre dans $J_\Gamma(x_{i_1})$ est immédiatement précédée par la lettre x_{i_1} d'après le lemme 2.8(ii) et (iv).

(iii) Par symétrie, on peut supposer sans restriction que $M_{i_1} = L_{i_1}$. Soit un indice j_ℓ dans $\{j_1, \dots, j_{k-1}\}$. On doit montrer que l'on est dans le cas (a) ou le cas (b). Supposons que cela n'est pas le cas. On est alors dans l'un des deux cas suivants : $x_{i_1} \notin J(x_{j_\ell})$, $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$ et $J(x_{i_1}) \cap J(x_{j_\ell}) \neq \emptyset$; ou bien $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$ et $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$ (cf. Lemme 2.3 (i) et (ii)).

Supposons $x_{i_1} \notin J(x_{j_\ell})$ et $J(x_{i_1}) \cap J(x_{j_\ell}) \neq \emptyset$. Soit $x_k \in J(x_{i_1}) \cap J(x_{j_\ell})$. Par le lemme 2.8 (i) et (iv), le mot $M'_{j_\ell} \cdots M'_{j_s}(x_k)$ est de la forme $w_1 x_{j_\ell} x_k w_2$ avec w_1 et w_2 dans F_n^+ . Par le lemme 2.10 (i) et (ii), le mot $M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}(x_k)$ est de la forme $w_1 x_j x_{k'} w_2$ avec w_1 et w_2 dans F_n^+ , $x_j \neq x_{i_1}$ et $x_{k'} \in J(x_{i_1})$. Ce qui est impossible (cf. la conclusion de (ii)).

Supposons $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$ et $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$. Par le lemme 2.8 (ii) et (iii) la lettre x_{i_1} est dans le support de $M'_{j_k} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$, et donc aussi dans le support

de $M'_{j_{\ell-1}} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$. Par le lemme 2.8 (iv), on sait que toute lettre x_{i_1} de l'écriture réduite de $M'_{j_\ell} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ est immédiatement précédée de la lettre x_{j_ℓ} . Puisque $M'_j \neq L_{i_1}$ pour $j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\}$, dans l'écriture réduite de $M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ toute lettre x_{i_1} est précédée (pas forcément immédiatement) par la lettre x_ℓ . Ce qui est impossible (cf. la conclusion de (ii)).

D'où, si $M_{i_1} = L_{i_1}$, alors on a bien le cas (a) ou le cas (b) pour tout ℓ dans $\{1, \dots, k-1\}$. Supposons toujours que $M_{i_1} = L_{i_1} = M'_{j_k}$, et maintenant que l'on est dans le cas (b), c'est-à-dire que $M'_{j_\ell} = R_{j_\ell}$ avec $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$ pour un ℓ dans $\{1, \dots, k-1\}$. Par les mêmes arguments que ci-dessus, la lettre x_{j_ℓ} est dans le support de $M'_{j_k} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$, et toute lettre x_{j_ℓ} dans l'écriture réduite de $M'_{j_k} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ est immédiatement précédée par la lettre x_{i_1} . Mais, dans l'écriture réduite de $M'_{j_\ell} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ toute lettre x_{i_1} est immédiatement suivie par la lettre x_{j_ℓ} ; plus précisément, on a $M'_{j_\ell} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell}) = \cdots x_{i_1} x_{j_\ell} \omega x_{j_\ell} \cdots$ où ω désigne un mots positif, éventuellement trivial, ne contenant pas la lettre x_{i_1} dans son support. Puisque, dans le mot $M'_{j_1} \cdots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ toute lettre x_{j_ℓ} est précédée de la lettre x_{i_1} , et que la lettre x_{i_1} n'est pas dans le support du mot ω , on déduit du lemme 2.9(iii) qu'il existe m dans $\{1, \dots, \ell-1\}$ tel que $j_m = i_1$. Par définition de j_k , on a alors $M'_{j_m} = R_{i_1}$. \square

Pour M dans l'ensemble Λ_Γ , on note M^* l'unique élément de Λ_Γ tel que l'on a $\{M, M^*\} = \{L_i, R_i\}$ pour un certain i ; si X est une partie de Λ_Γ , on note X^* l'ensemble $\{M^* \mid M \in X\}$. On note $\mathcal{F}^+(X)$ le sous-monoïde Φ_n engendré par X , pour X dans Λ_Γ .

Corollaire 2.11 *Soit X une partie non vide de Λ_Γ telle que $X \cap X^*$ est vide. Le sous-monoïde $\mathcal{F}^+(X)$ de Φ_n engendré par X possède la présentation de monoïde suivante :*

$$\left\langle X \left| \begin{array}{l} L_i R_j = R_j L_i, \quad L_i, R_j \in X; \quad x_i \notin J(x_j) \\ L_i L_j = L_j L_i, \quad L_i, L_j \in X; \quad x_i \notin J(x_j); \quad J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset \\ R_i R_j = R_j R_i, \quad R_i, R_j \in X; \quad x_i \notin J(x_j); \quad J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset \end{array} \right. \right\rangle^+ \quad (*)$$

En particulier, ce monoïde est un monoïde partiellement commutatif, et donc un monoïde d'Artin-Tits.

Preuve: Notons \sim la relation d'équivalence, sur les mots sur l'alphabet X , induite par les relations de la présentation (*). Soit W et Z deux mots sur l'alphabet X . Il est clair que si $W \sim Z$ alors ils ont même image dans $\mathcal{F}^+(X)$ (cf. Lemme 2.3(i)(ii)). Réciproquement, supposons que W et Z ont la même image dans $\mathcal{F}^+(X)$. On montre par récurrence sur la longueur de W que $W \sim Z$. Si W est le mot vide, alors il en est de même de Z par la proposition 2.7 (ii). Supposons que W n'est pas le mot vide

et écrivons $W = MW_1$ avec M dans X . D'après la proposition 2.7 (ii), on a $Z = M'_1 \cdots M'_{k-1} M M'_{k+1} \cdots M'_s$ avec les M'_i dans X . Par hypothèse, on a $X \cap X^* = \emptyset$ et en particulier tous les M'_i sont différent de M^* . on déduit alors de la proposition 2.7 (iii), que $M'_i M = M M'_i$ pour tout i dans $\{1, \dots, k-1\}$. D'où $Z \sim M M'_1 \cdots M'_{k-1} M'_{k+1} \cdots M'_s$ (cf. Lemme 2.3(i)(ii) et proposition 2.4(i)). Mais, $\mathcal{F}^+(X)$ est évidemment simplifiable puisque c'est un sous-monoïde d'un groupe. Donc W' et $M'_1 \cdots M'_{k-1} M'_{k+1} \cdots M'_s$ ont même image dans $\mathcal{F}^+(X)$. Par hypothèse de récurrence, on a alors $W' \sim M'_{k-1} M'_{k+1} \cdots M'_s$ et finalement $W \sim Z$. \square

Corollaire 2.12 *Si Γ est le graphe complet, alors le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ a pour présentation*

$$\langle \Lambda_\Gamma \mid L_i L_{i_1} \cdots L_{i_k} R_i = R_i R_{i_1} \cdots R_{i_k} L_i, k \in \mathbb{N}; i_j \neq i \rangle^+$$

Preuve : Commençons par vérifier les relations de la présentation. On a bien $R_i L_i = L_i R_i$. D'autre part, il est facile de voir que si j est distinct de i alors $R_i R_j L_i = L_i L_j R_i$ dans le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. En effet, $R_i R_j L_i(x_i) = L_i L_j R_i(x_i) = x_i x_j x_i$; $R_i R_j L_i(x_j) = L_i L_j R_i(x_j) = x_i x_j x_i x_j x_i$, et pour ℓ distinct de i et j , on a $R_i R_j L_i(x_\ell) = L_i L_j R_i(x_\ell) = x_i x_j x_i x_\ell x_i x_j x_i$. On en déduit par récurrence sur k que les relations $L_i L_{i_1} \cdots L_{i_k} R_i = R_i R_{i_1} \cdots R_{i_k} L_i$, avec k dans \mathbb{N} , sont vraies dans le groupe Φ_n , et donc aussi dans le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$: par exemple pour $k = 2$, on a la suite d'égalité $L_i L_{i_1} L_{i_2} R_i = L_i L_{i_1} R_i R_{i_2}^{-1} L_{i_2} R_i = R_i R_{i_1} L_i R_{i_2}^{-1} L_{i_2} R_i = R_i R_{i_1} R_{i_2}^{-1} L_i L_{i_2} R_i = R_i R_{i_1} R_{i_2}^{-1} R_i R_{i_2} L_i = R_i R_{i_1} R_{i_2} L_i$. Notons \sim la relation d'équivalence induite sur $F^+(\Lambda_\Gamma)$ par les relations de la présentation de l'énoncé. Considérons deux mots W et Z du monoïde libre $F^+(\Lambda_\Gamma)$ et supposons qu'ils ont même image dans $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. On doit montrer que l'on a $W \sim Z$. On le fait par récurrence sur la longueur de W . Si $W = 1$, alors il en est de même de Z par la proposition 2.7(i). Supposons que L_i divise W dans $F^+(\Lambda_\Gamma)$. Si L_i divise aussi Z dans $F^+(\Lambda_\Gamma)$ alors on conclut par hypothèse de récurrence, car le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ est simplifiable en tant que sous-monoïde d'un groupe. Sinon, d'après la proposition 2.7(i), on a, puisque le graphe est complet,

$$Z = R_i R_{i_1} \cdots R_{i_{k_1}} R_i R_{i_{k_1+1}} \cdots R_{i_{k_2}} R_i R_{i_{k_2+1}} \cdots R_{i_{k_{s-1}+1}} \cdots R_{i_{k_s}} L_i \cdots$$

où les i_j sont tous distincts de i . On est alors ramené au premier cas, car on a $Z \sim L_i L_{i_1} \cdots L_{i_{k_1}} R_i L_{i_{k_1+1}} \cdots L_{i_{k_2}} R_i L_{i_{k_2+1}} \cdots R_i L_{i_{k_{s-1}+1}} \cdots L_{i_{k_s}} R_i \cdots$. \square Ce corollaire et la proposition 2.6 permettent de retrouver le résultat de la proposition 6.5 de [12], qui donne une présentation du monoïde des morphismes épisturmiens. Réciproquement, à partir de cette proposition, on peut obtenir assez facilement le corollaire 2.12.

3 Représentation du groupe des tresses

Nous allons construire dans cette section une nouvelle représentation des groupes des tresses. Commençons par rappeler les définitions et notations relatives aux groupes d'Artin-Tits dont nous aurons besoin. Si u et v sont deux mots et m désigne en entier positif, la notation $[u, v]^m$ désignera le mot $\underbrace{uvu \cdots}_{m \text{ termes}}$ obtenu par concaténation.

$m \text{ termes}$

3.1 Groupes d'Artin-Tits

Soit S un ensemble fini et $M = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ une matrice symétrique telle que $m_{s,s} = 1$ pour s dans S et $m_{s,t}$ est dans $\{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$ pour s et t dans S et distincts. Le système d'Artin-Tits associé à M est la paire (A, S) où A est le groupe défini par la présentation suivante :

$$A = \langle S \mid [s, t]^{m_{s,t}} = [t, s]^{m_{s,t}}, s, t \in S ; s \neq t ; m_{s,t} \neq \infty \rangle. \quad (\dagger)$$

Les relations $[s, t]^{m_{s,t}} = [t, s]^{m_{s,t}}$ sont appelées les *relations de tresse* et le groupe A est appelé le *groupe d'Artin-Tits associé à la matrice M* . Par exemple, si $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ avec $m_{s_i, s_j} = 3$ pour $|i - j| = 1$ et $m_{s_i, s_j} = 2$ pour i et j distincts, alors le groupe d'Artin-Tits associé est le groupe B_{n+1} des tresses à $n + 1$ brins. Si l'on ajoute les relations $s^2 = 1$ à la présentation de groupe (\dagger) , on obtient le groupe de Coxeter W associé à A . On dit que A est de *type sphérique* lorsque W est fini. Par exemple, le groupe de Coxeter de B_{n+1} est le groupe symétrique S_{n+1} , qui est fini.

La matrice M peut être encodée dans un graphe étiqueté Γ_S , appelé *graphe de Coxeter associé*. Ses sommets sont les éléments de S , et deux sommets sont reliés par une arête lorsque $m_{s,t} \geq 3$. Dans ce cas on indexe l'arête par $m_{s,t}$. Lorsque $m_{s,t} = 3$ on omet l'indexation, pour alléger les notations. Ainsi le graphe de Coxeter du groupe des tresses à $n + 1$ brins est

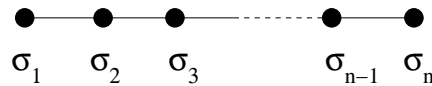


Figure 1: Graphe de Coxeter de B_{n+1}

On dit que le groupe A (ou simplement S) est *indécomposable* lorsque le graphe de Coxeter associé est connexe.

Le groupe A possède une famille de sous-groupes remarquables, les *sous-groupes paraboliques standards*. Il s'agit des sous-groupes qui sont engendrés par les parties de S . Un tel sous-groupe est canoniquement un groupe

d'Artin-Tits ; son graphe de Coxeter est le sous-graphe plein de Γ_S dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des éléments de S qui engendre le sous-groupe.

Le groupe B_{n+1} des tresses à $n + 1$ brins possède un élément particulier, appelé élément de Garside, que l'on notera Δ_n . Avec les notations de la figure 1, on a $\Delta_n = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_n) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$. Le quasi-centre $QZ(B_{n+1})$ de B_{n+1} , qui est le sous-groupe $\{b \in B_{n+1} \mid bSb^{-1} = S\}$, est engendré par Δ_n et le centre $Z(B_{n+1})$ de B_{n+1} est engendré par Δ_n^2 . En d'autres termes, et avec les notations de la figure 1, on a $QZ(B_{n+1}) = \{\Delta_n^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $Z(B_{n+1}) = \{\Delta_n^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dans la suite de l'article, lorsque l'on parlera du groupe B_{n+1} , on adoptera les notations de la figure 1.

Dans [2], Crisp et Paris considèrent la famille des *groupes d'Artin-Tits de type petit*. Il s'agit des groupes d'Artin-Tits dont la matrice associée n'a que des coefficients 2 ou 3 hors de la diagonale. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des groupes d'Artin-Tits dont la matrice associée n'a que des coefficients 2, 3 ou ∞ hors de la diagonale. Dans ce cas, nous dirons que le système (A, S) (ou simplement que le groupe A) est *de type $(2, 3, \infty)$* .

3.2 Représentation des groupes d'Artin-Tits

Définition 3.1 Soit (A, S) un système d'Artin-Tits de type $(2, 3, \infty)$. Notons s_1, \dots, s_n les éléments de S .

(i) On appelle 3-graphe de A le graphe Γ obtenu à partir du graphe de Coxeter de A en ne conservant que les arêtes indexées par l'entier 3. Le sommet de Γ correspondant au générateur s_i sera noté x_i .

(ii) Nous dirons que le groupe A est *de type $(2, 3, \infty)$ -représentable* s'il existe une représentation φ de A dans $\text{Aut}(F_n)$ telle que $\varphi(s_i)$ est égal à $L_{i,\Gamma}$, $R_{i,\Gamma}$, $L_{i,\Gamma}^{-1}$, ou $R_{i,\Gamma}^{-1}$. Dans ce cas, nous dirons que φ est *une représentation de A obtenue par transvection*.

Proposition 3.2 Pour tout entier $n \geq 2$:

- (i) le groupe des tresses B_{n+1} est $(2, 3, \infty)$ -représentable;
- (ii) le groupe des tresses affine à $4n$ brins \tilde{B}_{4n} est $(2, 3, \infty)$ -représentable.

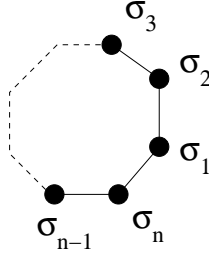


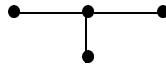
Figure 2: Graphe de Coxeter de \tilde{B}_n

Preuve: Avec les notations des figures 1 et 2, on pose $\varphi(\sigma_1) = L_1$; $\varphi(\sigma_2) = L_2^{-1}$; $\varphi(\sigma_3) = R_3$; $\varphi(\sigma_4) = R_4^{-1}$; $\varphi(\sigma_5) = L_5 \cdots$. D'après le lemme 2.3, on obtient bien une représentation de B_n . Si n est un multiple de 4 et $\sigma_1\sigma_n\sigma_1 = \sigma_n\sigma_1\sigma_n$, on obtient encore une représentation de \tilde{B}_n . \square

Dans la suite, nous notons φ_n la représentation de B_{n+1} définie dans la preuve de la proposition 3.2.

Donner une caractérisation des groupes de type $(2, 3, \infty)$ -représentable à partir de leur graphe est certainement possible mais très technique et peu parlant. Nous préférons donc énoncer des conditions nécessaires et donner des exemples afin que le lecteur se fasse une idée de ce qu'est un groupe de type $(2, 3, \infty)$ -représentable.

Nous rappelons qu'un graphe Γ est dit *bipartite* lorsqu'il existe une partition $S_1 \cup S_2$ de ses sommets telle que les éléments de S_1 , d'une part, et les éléments de S_2 , d'autre part, commutent deux à deux. Nous rappelons aussi qu'un graphe est dit de type D_4 , s'il est de la forme



Proposition 3.3 Soit (A, S) un système d'Artin-Tits indécomposable de type $(2, 3, \infty)$. Si A est de type $(2, 3, \infty)$ -représentable alors :

- (i) Le graphe de Coxeter Γ_S du groupe A ne contient pas de sous-graphe complet de type D_4 .
- (ii) Le 3-graphe du groupe A est bipartite.
- (iii) Tout sous-groupe parabolique standard du groupe A est aussi de type $(2, 3, \infty)$ -représentable.

Preuve: le (iii) est immédiat. Prouvons (i) et (ii). Supposons que φ est une représentation de A par transvection et notons Γ le 3-graphe du groupe A . Soit s_i et s_j dans S . En utilisant le lemme 2.3(iii), on constate

que si $\varphi(s_i)$ est le (*resp.* est l'inverse du) i ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ et si les sommets x_i et x_j sont reliés par une arête dans Γ alors, l'automorphisme $\varphi(s_j)$ est l'inverse du (*resp.* est le) j ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ . On en déduit que si $\varphi(s_i)$ est le (*resp.* est l'inverse du) i ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ , alors pour tout sommet x_k situé à un nombre impair (*resp.* pair) d'arêtes de x_i , l'automorphisme $\varphi(s_k)$ est l'inverse du (*resp.* est le) k ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ . Par conséquent, Γ est bi-partite. Maintenant, supposons que x_j, x_k et x_ℓ sont reliés à x_i dans le graphe Γ . Si $\varphi(s_i)$ est le (*resp.* est l'inverse du) i ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ alors, les automorphismes $\varphi(s_j), \varphi(s_k)$ et $\varphi(s_\ell)$ sont les inverses respectifs des (*resp.* sont respectivement les) j ème, k ème et ℓ ème automorphismes de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ . Mais alors $\varphi(s_j), \varphi(s_k)$ et $\varphi(s_\ell)$ ne peuvent tous commuter deux à deux d'après la proposition 2.4(ii), puisque le 3-graphe est bi-partite. Par conséquent, les générateurs s_j, s_k et s_ℓ ne peuvent pas tous commuter deux à deux. \square

De l'énoncé précédent et de sa preuve nous déduisons le résultat suivant :

Corollaire 3.4 *Soit (A, S) un système d'Artin-Tits indécomposable de type $(2, 3, \infty)$ -représentable.*

- (i) *Si la matrice de Coxeter de A ne possède pas de coefficient infini alors A est un groupe des tresses à n brins ou un groupe des tresses affine à $4n$ brins.*
- (ii) *les seuls sous-groupes paraboliques standards indécomposables du groupe A sans relation ∞ sont des groupes des tresses et des groupes des tresses affines à $4n$ brins.*

Terminons cette section par deux exemples de graphes de groupes d'Artin-Tits $(2, 3, \infty)$ -représentable.

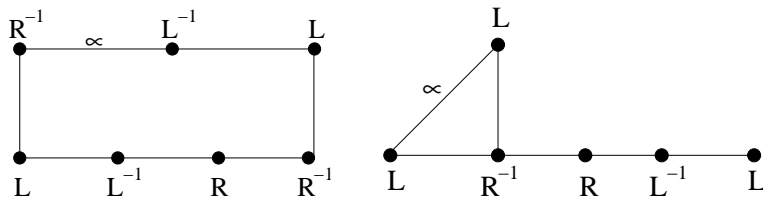


Figure 3: deux graphes de groupes $(2, 3, \infty)$ -représentables

3.3 Fidélité de la représentation φ_n

Il est immédiat que certaines représentations obtenues par transvection ne sont pas fidèles. Par exemple, la représentation du groupe libre obtenue par transvection est triviale (notons que l'on peut obtenir une représentation par transvection de F_2 qui est fidèle, en utilisant le résultat de la proposition 2.4 et en regardant F_2 comme un sous-groupe parabolique standard du groupe $\langle s, t, u \mid sts = tst; tut = utu \rangle$). Plus généralement si le 3-graphe possède des sommets isolés, la représentation ne peut être fidèle. Un cas essentiel est celui des représentations du groupe B_{n+1} . Dans cette partie, nous nous concentrons sur ce cas particulier.

Théorème 3.5 *Pour tout entier n avec $n \geq 2$, la restriction de φ_n au quasi-centre $QZ(B_{n+1})$ de B_{n+1} est fidèle.*

Pour prouver ce résultat, nous allons tout d'abord établir un certain nombre de résultats techniques. Dans la suite de cette partie, pour b dans le groupe B_{n+1} et x dans le groupe libre F_n , on écrit $b(x)$ pour $\varphi_n(b)(x)$. Pour k dans \mathbb{N} avec $k \geq 1$, on pose $\delta_k = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$.

Lemme 3.6 *Soit n dans \mathbb{N} avec $n \geq 3$.*

(i) *Pour tout i dans $\{1, \dots, n-1\}$, on a $\delta_n(x_i) = x_{i+1}^{(-1)^i}$.*

(ii) *De plus*

$$\begin{aligned} \delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \cdots x_{n-3}^{-1} x_{n-1}) & \text{si } n \equiv 0[4]; \\ \delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_5 x_3^{-1})x_1(x_2 x_4^{-1} \cdots x_{n-3} x_{n-1}^{-1}) & \text{si } n \equiv 1[4]; \\ \delta_n(x_n) &= (x_{n-1} x_{n-3}^{-1} \cdots x_5 x_3^{-1})x_1 x_2 (x_4^{-1} x_6 \cdots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 2[4]; \\ \delta_n(x_n) &= (x_{n-1}^{-1} x_{n-3} \cdots x_6^{-1} x_4)x_2^{-1} x_1^{-1} x_3 (x_5^{-1} x_7 \cdots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 3[4]. \end{aligned}$$

Preuve : Le (i) est un calcul que nous laissons au lecteur. Pour montrer (ii), nous remarquons $\delta_n(x_n) = \delta_{n-1}(x_n)$ et que

$$\begin{aligned} \delta_{n-1}(x_n) &= x_n \delta_{n-2}(x_{n-1}) & \text{si } n \equiv 0[4]; \\ \delta_{n-1}(x_n) &= x_n \delta_{n-2}(x_{n-1}^{-1}) & \text{si } n \equiv 1[4]; \\ \delta_{n-1}(x_n) &= \delta_{n-2}(x_{n-1}) x_n & \text{si } n \equiv 2[4]; \\ \delta_{n-1}(x_n) &= \delta_{n-2}(x_{n-1}^{-1}) x_n & \text{si } n \equiv 3[4]. \end{aligned}$$

Le résultat en découle par récurrence sur n . □

Proposition 3.7 *Soit n dans \mathbb{N} avec $n \geq 2$. Alors*

$$\begin{aligned} \Delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1}) x_1^{-1} (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1})^{-1} & \text{si } n \equiv 0[4]; \\ (i) \quad \Delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_5 x_3^{-1}) x_1 (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_5 x_3^{-1})^{-1} & \text{si } n \equiv 1[4]; \\ \Delta_n(x_n) &= (x_2 x_4^{-1} x_6 \cdots x_{n-2}^{-1} x_n)^{-1} x_1 (x_2 x_4^{-1} x_6 \cdots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 2[4]; \\ \Delta_n(x_n) &= (x_3 x_5^{-1} x_7 \cdots x_{n-2}^{-1} x_n)^{-1} x_1^{-1} (x_3 x_5^{-1} x_7 \cdots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 3[4]. \end{aligned}$$

(ii) $\Delta_n(x_1) = x_n^{(-1)^k}$ où k est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Preuve: (i) Rappelons que l'on a $\Delta_n = (\sigma_1 \cdots \sigma_n)(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 = \delta_n \delta_{n-1} \cdots \delta_2 \delta_1$. Par conséquence, on a $\Delta_n(x_n) = \delta_n \delta_{n-1}(x_n)$. Puisque $\delta_{n-1}(x_n) = \delta_n(x_n)$, le résultat découle du lemme 3.6 (i) et (ii): nous traitons le cas $n \equiv 0[4]$ et laissons les autres cas au lecteur. On a alors,

$$\begin{aligned} \Delta_n(x_n) &= \delta_n \delta_{n-1}(x_n) = \delta_n((x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \cdots x_{n-3}^{-1} x_{n-1})) \\ &= \delta_n(x_n) \delta_n((x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \cdots x_{n-3}^{-1} x_{n-1})) = (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1}) \\ &\quad (x_1^{-1} x_3 \cdots x_{n-3}^{-1} x_{n-1})(x_{n-1}^{-1} \cdots x_5 x_3^{-1})(x_2 x_4^{-1} \cdots x_{n-2} x_n^{-1}) \\ &= (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1}) x^{-1} (x_n x_{n-2}^{-1} \cdots x_4 x_2^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

(ii) s'obtient par récurrence sur n en utilisant le lemme 3.6(i) et les égalités $\Delta_n = \delta_n \delta_{n-1} \cdots \delta_2 \delta_1 = \delta_n \Delta_{n-1}$. \square

Remarque 3.8 *Des résultats précédents, nous pouvons déduire facilement $\Delta_n(x_i)$ pour $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Par exemple, pour $i \equiv 0[4]$, on a $\Delta_n(x_i) =$*

$$\left(x_n^{(-1)^k} x_{n-2}^{-(-1)^k} \cdots x_{n-i+4}^{(-1)^k} x_{n-i+2}^{-(-1)^k} \right) x_{n-i+1}^{(-1)^\ell} \left(x_n^{(-1)^k} x_{n-2}^{-(-1)^k} \cdots x_{n-i+4}^{(-1)^k} x_{n-i+2}^{-(-1)^k} \right)^{-1}$$

avec $\ell = E(\frac{n-i+1}{2})$ et $k = E(\frac{n-i}{2})$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Lemme 3.9 *Soit ϵ, η et ν dans $\{-1, 1\}$ et $\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)} : F_2 \rightarrow F_2$ définie par $x \mapsto y^\epsilon$ et $y \mapsto y^\nu x^\eta y^{-\nu}$. Pour tout entier positif k on a $\mathcal{L}(\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^k(y)) = 2k+1$ où \mathcal{L} désigne la longueur sur l'alphabet $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$.*

Preuve: Nous montrons pour tout entier k , et par récurrence sur k , que : $\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^k(y) = z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \cdots z_{2k+1}^{\mu_{2k+1}}$ avec μ_i dans $\{-1, 1\}$ pour tout i , et tel que $z_{2i} = x$ et $z_{2i+1} = y$. Ceci prouve le lemme. Pour $k = 0$ et $k = 1$, l'hypothèse de récurrence est vraie. Supposons $k \geq 2$ et l'affirmation vraie au rang $k-1$. Alors $\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^{k-1}(y) = y_1^{\xi_1} x^{\xi_2} y^{\xi_3} \cdots x_{2k-2}^{\xi_{2k-2}} y^{\xi_{2k-1}}$ avec ξ_i dans $\{-1, 1\}$ pour tout i dans $\{1, \dots, 2k-1\}$. On a alors

$$\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^k(y) = \psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}(\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^{k-1}(y)) = \psi(y_1^{\xi_1} x^{\xi_2} y^{\xi_3} \cdots x^{\xi_{2k-2}} y^{\xi_{2k-1}})$$

$$\begin{aligned}
&= y^\nu x^{\eta \times \xi_1} y^{-\nu} y^{\xi_2} y^\nu x^{\eta \times \xi_3} y^{-\nu} \dots y^{\xi_{2k-2}} y^\nu x^{\eta \times \xi_{2k-1}} y^{-\nu} \\
&= y^\nu x^{\eta \times \xi_1} y^{\xi_2} x^{\eta \times \xi_3} \dots y^{\xi_{2k-2}} x^{\eta \times \xi_{2k-1}} y^{-\nu}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang k et le lemme. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.5 :

Le sous-groupe $QZ(B_n)$ est engendré par Δ_n . Donc, pour prouver le théorème 3.5, il suffit de montrer que pour tout entier positif non nul k , les éléments $\Delta_n^k(x_n)$ et x_n sont différents. Soit $\psi : F_n \rightarrow F(x, y)$ le morphisme de groupes défini par $\psi(x_1) = x$, $\psi(x_n) = y$ et pour i dans $\{2, \dots, n-1\}$, $\psi(x_i) = 1$. Supposons $n \equiv 0[4]$. D'après la proposition 3.7, on a $\psi \circ \varphi_n(\Delta_n) = \psi_{(1,-1,1)} \circ \psi$ où $\psi_{(1,-1,1)}$ est défini comme dans le lemme 3.9. Donc, pour tout entier positif non nul k , on a $\psi(\Delta_n^k(x_n)) = \psi_{(1,-1,1)}^k(y)$. Mais $\psi_{(1,-1,1)}^k(y)$ est différent de y d'après le lemme 3.9. Donc $\Delta_n^k(x_n)$ ne peut pas être égal à x_n . Les cas $n \equiv 1, 2, 3[4]$ sont similaires et nous laissons la vérification au lecteur. \square

Corollaire 3.10 *La représentation φ_3 de B_4 , obtenue en envoyant σ_1, σ_2 et σ_3 respectivement sur L_1, L_2^{-1} et R_3 , est fidèle.*

Il découle naturellement de ce résultat que la représentation par transvection φ_2 de B_3 est aussi fidèle.

Preuve: Considérons $F(y_1, y_2)$, le groupe libre de rang 2 de base y_1, y_2 . Soit Γ la graphe constitué d'une seule arête reliant les sommets y_1 et y_2 . Dans le lemme 2.6 de [5], Kassel et Reutenauer remarquent que l'on définit un morphisme φ de B_4 dans $\text{Aut}(F_2)$ en posant $\varphi(\sigma_1) = L_{1,\Gamma}$, $\varphi(\sigma_2) = L_{2,\Gamma}^{-1}$ et $\varphi(\sigma_3) = R_{1,\Gamma}$. De plus, ils prouvent que le noyau de φ est le centre de B_4 (cf. [5] corollaire 2.9). Posons $\psi : F_3 \rightarrow F(y_1, y_2)$ défini par $\psi(x_1) = \psi(x_3) = y_1$ et $\psi(x_2) = y_2$. On vérifie facilement, sur σ_1, σ_2 et σ_3 , que ψ est un opérateur d'entrelacement (surjectif) entre φ_3 et φ , c'est-à-dire que pour toute tresse b dans B_4 , on a $\psi \circ \varphi_3(b) = \varphi(b) \circ \psi$. Il en découle que $\text{Ker} \varphi_3$ est inclus dans $\text{Ker} \varphi$, c'est-à-dire le centre de B_4 . Maintenant, il est clair que le centre de B_4 est inclus dans son quasi-centre. D'où, $\text{Ker} \varphi = \{1\}$ d'après le théorème 3.5. \square

Motivé par le corollaire 3.10 et la preuve de la proposition 3.15 ci-dessous, nous conjecturons que

Conjecture 3.11 *Pour tout entier n au moins égal à 2, le groupe B_{n+1} possède une représentation par transvection qui est fidèle.*

La représentation candidate est, bien entendu, la représentation φ_n . Dans le cas général, on peut se demander quelles sont les groupes d'Artin-Tits

qui possède une représentation par transvection fidèle. En nous inspirant de la construction de la représentation φ_n de B_{n+1} , nous pouvons donner une condition nécessaire :

Définition 3.12 Soit (A, S) un système d'Artin-Tits. On dira que A est de type $(2, 3, \infty)$ bien représentable s'il est de type $(2, 3, \infty)$ -représentable avec un 3-graphe sans point isolé et qu'il possède une représentation par transvection φ telle que pour tous s, t dans S avec $m_{s,t} = \infty$, le sous-groupe de Φ_n engendré par $\varphi(s)$ et $\varphi(t)$ est un groupe libre de rang 2 de base $(\varphi(s), \varphi(t))$. Dans ce cas, on dira que φ est une *bonne représentation* du groupe A .

La définition 3.12 doit être rapprochée du lemme 2.3 et de la proposition 2.4. D'après ces lemmes, on voit que si le groupe A est de type $(2, 3, \infty)$ bien représentable, alors pour tous éléments s_i, s_j de S tels que $m_{i,j} = \infty$, il existe un élément s_k de S tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 3$. D'autre part, si φ est une bonne représentation et $m_{i,j} = \infty$, alors on a l'un des cas suivants : $(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) = (L_i^\epsilon, L_j^\epsilon)$ avec $\epsilon = \pm 1$, ou $(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) = (R_i^\epsilon, R_j^\epsilon)$ avec $\epsilon = \pm 1$.

Les groupes des tresses, les groupes des tresses affines à $4n$ brins sont de type $(2, 3, \infty)$ bien représentable. Il existe cependant des groupes d'Artin-Tits de type $(2, 3, \infty)$ représentable sans point isolé dans leur 3-graphe qui ne sont pas de type $(2, 3, \infty)$ bien représentable. Le premier exemple de la figure 3 donne un exemple du graphe de Coxeter d'un tel groupe.

Proposition 3.13 Soit (A, S) un système d'Artin-Tits de type. On suppose que le groupe A est $(2, 3, \infty)$ représentable. Soit φ une représentation de A par transvection. Si φ est fidèle, alors φ est une bonne représentation du groupe A . En particulier, le groupe A est de type $(2, 3, \infty)$ bien représentable.

Preuve : \square

3.4 Application

On rappelle que la notation $[u, v]^m$ a été définie au début de la partie 3. Dans l'introduction de cet article, nous nous sommes posé le problème de déterminer la présentation de certains sous-monoïdes des groupes d'Artin-Tits. Nous pensons que la réponse à ce problème est la suivante :

Conjecture 3.14 Soit (A, S) un système d'Artin-Tits associé à la matrice de Coxeter $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ et $S_1 \cup S_2$ une partition de S . Le sous-monoïde de A engendré par $S_1 \cup S_2^{-1}$ possède la présentation (de

monoïde) suivante :

$$\left\langle S_1 \cup S_2^{-1} \left| \begin{array}{ll} st^{-1} = t^{-1}s & s \in S_1 ; t \in S_2 ; m_{s,t} = 2 \\ [s, t]^{m_{s,t}} = [t, s]^{m_{s,t}} & s, t \in S_1 ; s \neq t ; m_{s,t} \neq \infty \\ [s^{-1}, t^{-1}]^{m_{s,t}} = [t^{-1}, s^{-1}]^{m_{s,t}} & s, t \in S_2 ; s \neq t ; m_{s,t} \neq \infty \end{array} \right. \right\rangle^+$$

Dans cette section nous allons déduire la proposition 3.15 du corollaire 2.11. Cette proposition va dans le sens de la conjecture 3.14 qui, jusqu'à présent, n'était prouvée que dans le cas où le groupe A est le groupe B_3 .

Proposition 3.15 *Soit (A, S) un système d'Artin-Tits de type $(2, 3, \infty)$ bien représentable, et $S_1 \cup S_2$ une partition bi-partite, relativement au 3-graphe, de S . Alors le sous-monoïde de A engendré par $S_1 \cup S_2^{-1}$ possède la présentation suivante:*

$$\langle S_1 \cup S_2^{-1} \mid s^\epsilon t^\nu = t^\nu s^\epsilon, \quad s, t \in S ; s^\epsilon, t^\nu \in S_1 \cup S_2 \text{ et } m_{s,t} = 2 \rangle^+ \quad (\ddagger)$$

Ceci prouve en particulier la proposition 1.4. Ce résultat s'applique aussi au groupe des tresses affines \tilde{B}_{4n} et second exemple de la figure 3.

Preuve : On peut sans restriction, supposé le graphe de Coxeter de A connexe. Puisque A est bien représentable, ceci implique que le 3-graphe de A est aussi connexe (*cf.* le commentaire qui suit la définition 3.12). Notons G^+ le sous-monoïde de A engendré par $S_1 \cup S_2^{-1}$ et Γ le 3-graphe de A . Les relations de la présentation (\ddagger) sont vraies dans A et donc dans G^+ . Soit φ une bonne représentation par transvection de A . Soit s_i dans S_1 , et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\varphi(s_i) = L_i^\epsilon$ ou $\varphi(s_i) = R_i^\epsilon$. Puisque pour tout x_k dans l'ensemble $J_\Gamma(x_i)$ on a $m_{i,k} = 3$, on a $\varphi(s_k) = L_k^{-\epsilon}$ ou $\varphi(s_k) = R_k^{-\epsilon}$. Puisque le graphe Γ est connexe et bi-partite, de proche en proche, on trouve que pour tout s_j de S_1 , on a $\varphi(s_j) = L_j^\epsilon$ ou $\varphi(s_j) = R_j^\epsilon$, et que pour tout s_k de S_2 on a $\varphi(s_k) = L_k^{-\epsilon}$ ou $\varphi(s_k) = R_k^{-\epsilon}$. Quitte à remplacer φ par $s_i \mapsto (\varphi(s_i))^{-1}$, on peut supposer que $\epsilon = 1$. Posons $X = \varphi(S_1) \cup \varphi(S_2)^{-1}$. Par construction $X \cap X^* = \emptyset$ et d'après le corollaire 2.11, le monoïde $\mathcal{F}^+(X)$ a pour présentation la présentation $(*)$ de ce corollaire. Mais, puisque φ est une bonne représentation, si $m_{i,j} = \infty$, on a $J_\Gamma(x_i) \cap J_\Gamma(x_j) \neq \emptyset$ et on ne peut avoir $(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) = (R_i^\epsilon, L_j^\nu)$ avec $\epsilon, \nu = \pm 1$ (*cf.* le commentaire suivant la définition 3.12). On en déduit que le monoïde $\mathcal{F}^+(X)$ a pour présentation

$$\left\langle X \left| \begin{array}{ll} R_i L_j = L_j R_i & \text{pour } R_i, L_j \in X \text{ et } m_{i,j} = 2 \\ R_i R_j = R_j R_i & \text{pour } R_i, R_j \in X \text{ et } m_{i,j} = 2 \\ L_i L_j = L_j L_i & \text{pour } L_i, L_j \in X \text{ et } m_{i,j} = 2 \end{array} \right. \right\rangle^+$$

On en déduit un morphisme de monoïdes ψ de $\mathcal{F}^+(X)$ dans B_n qui envoie $\varphi(s_i)$ sur s_i , pour s_i dans S_1 , et qui envoie $\varphi(s_j)^{-1}$ sur s_j^{-1} pour s_j dans

s_2 . L'image de ψ est G^+ et $\varphi \circ \psi$ est l'identité. Donc le monoïde G^+ est isomorphe à $\mathcal{F}^+(X)$. \square

References

1. BIGELOW, S. The Burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geom. Topol.* 3 (1999) 397–404.
2. CRISP, J. ET PARIS, L. The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group. *Math. Invent.* 145 (2001) 19–36.
3. CRISP, J. ET PARIS, L. Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links, and Garside groups. *Pacific J. Math.* 221 (2005) 1–28.
4. DROUBAY X., JUSTIN, J. ET PIRILLO, G. Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy. *Theoret. Comput. Sci.* 255 (2001) 539–553.
5. KASSEL, C. ET REUTENAUER, C. Sturmian morphisms, the braid group B_4 , Christoffel words and bases of F_2 . À paraître dans *Ann. Mat. Pura Appl.*
6. KRAMMER, D. Braid groups are linear. *Ann. of Math. (2)* 155 (2002) 131–156.
7. MAGNUS, W., KARRASS, A. ET SOLITAR, D. Combinatorial Group Theory *Dover publications* New York 2004.
8. NEUMANN, B.H. Die automorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.* 91 (1924) 169–209.
9. NIELSEN, J. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.* 107 (1932) 367–386.
10. PARIS, L. Artin monoids inject in their groups. *Comment. Math. Helv.* 77 (2002) 609–637.
11. PIOLLET, D. Sur le groupe d'automorphismes du groupe libre. I : Transvections. *J. Algebra* 222 (1999) 621–677.
12. RICHOMME, G. Lyndon morphisms. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society* 10 (2003) 761–785.

13. RICHOMME, G. On morphisms preserving infinite Lyndon words. À paraître dans *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*.
14. WADA, M. Group invariants of links. *Topology* 31 (1992) 399–406.