HAL open science

Variétés de type Togliatti

Jean Vallès

▶ To cite this version:

Jean Vallès. Variétés de type Togliatti. Comptes Rendus. Mathématique, 2006, 343 (6), pp.411-414. hal-00022124v2

HAL Id: hal-00022124
https://hal.science/hal-00022124v2

Submitted on 23 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Variétés de type Togliatti

Jean Vallès

Géométrie Algébrique

Abstract : The Del Pezzo surface S_6 obtained by blowing up the projective plane along three points (non aligned) has the following nice property : its osculating hyperplanes have a common point. For that reason S_6 is also called Togliatti surface. In this paper we give two explanations of this fact. After what we obtain two different families of varieties with an analogous property.

Résumé : La surface de Del Pezzo $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ de degré 6 obtenue par l'éclatement de trois points non alignés du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$ (par le système linéaire des cubiques) possède une propriété spectaculaire : ses hyperplans osculateurs ont un point commun dans l'espace ambiant. Pour cette raison la surface est appelée surface de Togliatti. Nous donnons deux explications de ce phénomène. Nous en déduisons alors deux familles différentes de variétés possèdant une propriété analogue.

1 Introduction

La surface de Del Pezzo $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ de degré 6 obtenue par l'éclatement de trois points non alignés du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$ (par le système linéaire des cubiques) possède une propriété spectaculaire : ses hyperplans osculateurs ont un point commun dans l'espace ambiant. Autrement dit la surface "osculatrice" dans l'espace dual $\mathbb{P}^{\vee 6}$ est dégénérée. On dit alors qu'elle vérifie une équation de Laplace. Comme cette propriété a été démontrée par Togliatti, la surface S_6 hérite du nom de surface de Togliatti (voir [1], [4], [3] et [5]).

La surface de Togliatti est une projection de la surface de Veronese $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(3)))$ mais elle peut aussi être définie comme section hyperplane générale de la variété de Segre $Seg(1,3) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(1,1,1)))$.

Dans une première partie je reviens rapidement sur ces deux descriptions.

Dans les deuxième et troisième parties je montre que les espaces $2n$-tangents (voir les notations ci-dessous) des projections bien choisies des Veronese $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(2n+1)))$ et des sections hyperplanes générales des Segre $Seg(1,2n+1) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^1\times\cdots\times\mathbb{P}^1}(1,\cdots,1)))$ ont un point commun (voir les théorèmes 3.1 et 4.3). Le point clé est la polarité par rapport aux courbes rationnelles normales et par rapport aux produits de $\mathbb{P}^1$.

Notations. On note $T_xX \subset \mathbb{P}^N$ l'espace tangent d'une variété projective intègre $X \subset \mathbb{P}^N$ au point x et plus généralement, $T_x^kX \subset \mathbb{P}^N$ son espace $k-$tangent au point x (étant donnée une représentation paramétrique locale au point x, c'est l'espace engendré par x et les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k); on dira plutôt tangent au lieu de 1-tangent et osculateur au lieu de 2-tangent. La variété duale $X^\vee \subset \mathbb{P}^{N\vee}$ est définie comme la clôture de Zariski de l'ensemble $\{H \mid T_xX \subset H, X \text{ lisse en } x\}$. On définit de la même manière les variétés duales supérieures

$$X^{k\vee} = \overline{\{H \mid T_x^kX \subset H, X \text{ lisse en } x\}}$$

2 Surface de Togliatti

Définition 2.1. *La surface rationnelle, image du plan projectif par l'application décrite ci-dessous*

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^6, (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0x_1x_2, x_0^2x_1, x_0^2x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_0x_1^2, x_0x_2^2)$$

est appelée Surface de Togliatti.

Les sept formes cubiques du vecteur image s'annulant simultanément aux points

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1),$$

cette surface est la surface de Del Pezzo, notée S_6, obtenue en éclatant $\mathbb{P}^2$ le long de ces trois points par le système linéaire des cubiques. L'hyperplan osculateur en un point $P = (x_0, x_1, x_2)$ s'interprète alors comme une cubique passant par les points e_1, e_2, e_3 et triple au point P, plus précisément comme la réunion des trois droites joignant P aux trois points base; une équation étant

$$(x_2X_1 - x_1X_2)(x_2X_0 - x_0X_2)(x_1X_0 - x_0X_1) = 0.$$

Comme l'ont remarqué Lanteri et Mallavibarena (voir [4], pages 357-359), cette équation développée ne s'exprime qu'avec les 6 formes cubiques suivantes

$$X_0^2X_1, X_0^2X_2, X_1^2X_2, X_1X_2^2, X_0X_1^2, X_0X_2^2.$$

Notons V l'espace vectoriel engendré par ces six formes cubiques. Alors, dans l'espace projectif $\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}((X_0X_1X_2 \oplus V)^\vee)$ des cubiques s'annulant aux points e_1, e_2, e_3, les hyperplans osculateurs de S_6 passent par le point $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Nous venons de rappeler comment est définie la surface de Togliatti ainsi que la propriété d'incidence de ses hyperplans osculateurs. Cette surface peut aussi être décrite comme une section hyperplane générale de $Seg(1, 3) \subset \mathbb{P}^7$ qui est l'image par le morphisme de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposition 2.2. *Soit H un hyperplan général de $\mathbb{P}^7$. Alors $H \cap Seg(1, 3) \simeq S_6$.*

Preuve. Sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'équation de H est de la forme suivante

$$\phi((X_iY_jZ_k)_{0\leq i,j,k\leq 1}) = (\sum a_{i,j}Y_iZ_j)X_0 + (\sum b_{i,j}Y_iZ_j)X_1$$

Comme les biformes $\sum a_{i,j}Y_iZ_j$ et $\sum b_{i,j}Y_iZ_j$ s'annulent simultanément en deux points, la surface $H \cap Seg(1, 3)$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le long de deux points, i.e. l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en trois points (non alignés). $\square$

Remarque : Le théorème de bidualité (voir par exemple [2] thm 15.24) ne s'étend pas trivialement aux ordres supérieurs de tangence. La surface de Togliatti, par exemple, ne vérifie pas un résultat attendu de "biosculation" car la surface de ses hyperplans osculateurs est dégénérée. Cette dernière est, à ma connaissance le seul exemple un peu élaboré de surface de $\mathbb{P}^6$ telle que $(S^{2\vee})^{2\vee} \neq S$.

3 Polarité par rapport à une courbe rationnelle normale

Théorème 3.1. *Soient $2n + 1$ points de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ en position générale, $\mathfrak{P} = \mathbb{P}^{2n}$ l'espace projectif qu'ils engendrent et $S_{2n(2n+1)}$ l'image de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ par la projection de centre $\mathfrak{P}$. Sous ces hypothèses, les hyperplans $2n$-tangents de $S_{2n(2n+1)}$ ont un point commun.*

Preuve. Soient $l_0, \cdots, l_{2n+1}$ des formes linéaires en position générale. Afin de montrer que les hyperplans $2n$-tangents de $S_{2n(2n+1)}$ ont un point commun on montre que l'espace projectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}(l_0^{2n+1}, \cdots, l_{2n+1}^{2n+1}, \prod_i \overline{l_i})$ rencontre tous les espaces $2n$-tangents de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$. L'image de $\mathbb{P}$ est le point commun recherché.

Soit l une forme linéaire sur $\mathbb{P}^2$ et L la droite d'équation $l = 0$. En un point l^{2n+1} de la Veronese l'espace $2n$-tangent est donné par l'ensemble des formes de degré $2n+1$ qui sont divisibles par l i.e. par les formes de degré $2n$. Notons $U \simeq \mathbb{C}^2$ un espace vectoriel tel que $L = \mathbb{P}U$ et $C_{2n+1} \subset \mathbb{P}S^{2n+1}U$ l'image de L par le plongement de Veronese. On note $\bar{l}_i$ la restriction des formes linéaires modulo l. D'après le résultat bien connu de polarité des courbes rationnelles normales (qui affirme que le point d'intersection des hyperplans $2n$-tangents de C_{2n+1} en $(2n+1)$ points généraux distincts appartient au $\mathbb{P}^{2n}$ engendré par ces $(2n+1)$ points) le sous espace projectif de dimension $2n$ de $\mathbb{P}S^{2n+1}U$ engendré par les $(2n+1)$ points $(\bar{l}_0^{2n+1}, \cdots, \bar{l}_{2n+1}^{2n+1})$ contient le point $\prod_i \overline{l_i}$ d'intersection des $(2n+1)$ hyperplans $2n$-tangents de C_{2n+1}. Modulo l les $2n+1$ formes sont donc liées, ce qui prouve le théorème. □

4 Polarité par rapport à un produit de droites projectives

Soit U un espace vectoriel complexe de dimension 2. Notons $Seg(1,n) \subset \mathbb{P}U^{\otimes n}$ l'image de $\mathbb{P}U \times \cdots \times \mathbb{P}U$ par le plongement de Segre.

Lemma 4.1. $Seg(1,n)^{(n-1)\vee} \simeq Seg(1,n)$.

Preuve. Pour s'en convaincre donnons-en une preuve détaillée pour $Seg(1,3)$. Notons

$$\mathbb{P}^7 = \mathbb{P}(\mathbb{C}[X_0Y_0Z_0, X_0Y_0Z_1, X_0Y_1Z_0, X_0Y_1Z_1, X_1Y_0Z_0, X_1Y_1Z_0, X_1Y_1Z_1])$$

L'hyperplan d'équation $\phi(X_iY_jZ_k) = \sum \alpha_{i,j,k} X_iY_jZ_k = 0$ est osculateur au point $(x_iy_jz_k)$ si et seulement si

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X_i \partial Y_j}(x_iy_jz_k) = 0, \frac{\partial^2\phi}{\partial X_i \partial Z_k}(x_iy_jz_k) = 0, \frac{\partial^2\phi}{\partial Y_j \partial Z_k}(x_iy_jz_k) = 0$$

On obtient immédiatement $\phi(X_iY_jZ_k) = (x_1X_0 - x_0X_1)(y_1Y_0 - y_0Y_1)(z_1Z_0 - z_0Z_1)$.

Plus généralement, notons $\underline{X}_i$ (resp. $\underline{x}_i$) les coordonnées $X_{i,0}, X_{i,1}$ (resp. les nombres $x_{i,0}, x_{i,1}$). L'espace n-tangent en un point de $Seg(1,n)$ est donné par les dérivées $(n-1) - ièmes$ d'un système de coordonnées locales qui est, essentiellement, le produit des variables. Ainsi la forme multilinéaire $\phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \cdots, \underline{X}_n)$ est la trace sur $Seg(1,n)$ d'un hyperplan n-tangent $H \subset \mathbb{P}^{2^n-1}$ au point $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \cdots, \underline{x}_n)$ si et seulement si

$$\phi(\underline{x}_1, \underline{X}_2, \cdots, \underline{X}_n) = \phi(\underline{X}_1, \underline{x}_2, \cdots, \underline{X}_n) = \cdots = \phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \cdots, \underline{X}_{n-1}, \underline{x}_n) = 0$$

Après un calcul élémentaire on en déduit

$$\phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \cdots, \underline{X}_n) = \prod_{i=1,\cdots,n} (x_{i,1}X_{i,0} - x_{i,0}X_{i,1})$$

Ce qui prouve le lemme. □

La polarité point-hyperplan par rapport à C_n permet d'étendre l'isomorphisme $C_n^{n\vee} \simeq C_n$ au $\mathbb{P}^n$ ambiant. D'une façon similaire (une sorte de 'polarité' par rapport au Segre) l'isomorphisme $Seg(1,n)^{(n-1)\vee} \simeq Seg(1,n)$ s'étend aux espaces projectifs ambiants. Ici aussi il faudra distinguer le cas pair du cas impair.

Proposition 4.2. *L'isomorphisme $Seg(1,n) \simeq Seg(1,n)^{(n-1)\vee}$ qui à un point du Segre associe l'hyperplan n-tangent au Segre en ce point sétend aux espace projectifs $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$ et $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$ de la manière suivante : Au point $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on associe le point d'intersection des hyperplans n-tangents aux points de $x^\vee \cap Seg(1,n)^{(n-1)\vee}$. Lorsque n est impair, ce point image appartient à $x^\vee$. Lorsque n est pair, les points $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ pour lesquels le point image appartient à $x^\vee$ forment une hyperquadrique.*

Preuve. L'isomorphisme $m^{\otimes n} : U^{\otimes n} \to U^{*\otimes n}$ donné par la matrice $m^{\otimes n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\otimes n}$ est symétrique pour n pair et antisymétrique pour n impair. Pour $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on note $x^\vee$ l'équation de l'hyperplan correpondant dans $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$. Notons $\xi \in x^\vee \cap Seg(1,n)^{(n-1)\vee}$ le point générique de l'intersection. On a par définition $< x, \xi >= 0$, où $< .,. >$ est le crochet de dualité. Comme $m^{\otimes n}$ est inversible il existe un unique $x_\xi \in Seg(1,n)$ tel que $\xi = m^{\otimes n}(x_\xi)$. On en déduit, en utilisant les propriétés de symétrie de la matrice $m^{\otimes n}$, que $< x, m^{\otimes n}(x_\xi) >=< x_\xi, m^{\otimes n}(x) >= 0$, c'est à dire que le point $m^{\otimes n}(x)$ appartient à l'hyperplan n-tangent générique de la variété $x^\vee \cap Seg(1,n)^{(n-1)\vee}$. Enfin lorsque n est impair, la matrice $m^{\otimes n}$ étant antisymétrique, on a $< x, m^{\otimes n}(x) >= 0$ pour tout $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$. Lorsque n est pair la matrice est symétrique et les point $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ tels que $< x, m^{\otimes n}(x) >= 0$ forment une quadrique de $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$. $\square$

Théorème 4.3. *Soit X_{2n} une section hyperplane générale de $Seg(1, 2n+1)$. Les hyperplans $2n$-tangents de X_{2n} ont un point commun.*

Preuve. Les hyperplans $2n$-tangents de X_{2n} sont les hyperplans tangents de $Seg(1, 2n+1)$ coupés par l'hyperplan considéré. Le théorème est alors une conséquence immédiate de la proposition 4.2. $\square$

References

[1] D.Franco; G. Ilardi, *On a theorem of Togliatti* preprint n.9 (2001) Università degli studi di Napoli "Federico II".

[2] J.Harris, *Algebraic geometry : A First course*, **133**, Springer Verlag, 1992.

[3] G. Ilardi, *Rational varieties satisfying one or more Laplace equations*, Ricerche di Matematica vol.XLVIII, fasc. 1, (1999), 123-137

[4] A.Lanteri, R.Mallavibarrena, *Osculatory behavior and second dual varities of Del Pezzo surfaces*, Advances in Geometry Vol 2, Issue 4 (2002)

[5] Togliatti, E. *Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un'equazione di Laplace,* Comm.Math.Helv. vol I (1929), 255-272

Jean Vallès
Laboratoire de Mathématiques appliquées
de Pau et des Pays de l'Adour
Avenue de l'université
64000 Pau, France
jean.valles@univ-pau.fr