



HAL
open science

Variétés de type Togliatti

Jean Vallès

► **To cite this version:**

Jean Vallès. Variétés de type Togliatti. Comptes Rendus. Mathématique, 2006, 343 (6), pp.411-414.
hal-00022124v1

HAL Id: hal-00022124

<https://hal.science/hal-00022124v1>

Submitted on 3 Apr 2006 (v1), last revised 23 Jan 2019 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Variétés de type Togliatti

Jean Vallès

1 Introduction

La surface de Del Pezzo $S_6 \subset \mathbb{P}^6$ de degré 6 obtenue par l'éclatement de trois points non alignés du plan projectif complexe \mathbb{P}^2 (par le système linéaire des cubiques) possède une propriété spectaculaire : ses hyperplans osculateurs (espace engendré par les dérivées partielles secondes d'une représentation paramétrique) ont un point commun dans l'espace ambiant. Autrement dit la surface "osculatrice" dans l'espace dual \mathbb{P}^{v6} est dégénérée. On dit alors qu'elle vérifie une équation de Laplace. Comme cette propriété a été démontrée par Togliatti, la surface S_6 hérite du nom de surface de Togliatti (voir [1], [4] et [5]).

La surface de Togliatti est une projection de la surface de Veronese $v_3(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(3)))$ mais elle peut aussi être définie comme section hyperplane générale de la variété de Segre $Seg(1, 3) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1, 1, 1)))$.

Dans une première partie je reviens rapidement sur ces deux descriptions et je donne une preuve d'une version simplifiée du théorème de Togliatti (voir théorème 2.3).

Dans les deuxième et troisième parties on montre que les espaces $2n$ -tangents (voir ci-dessous) des projections bien choisies des Veronese $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^2}(2n+1)))$ et des sections hyperplanes générales des Segre $Seg(1, 2n+1) \subset \mathbb{P}(H^0(O_{\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1}(1, \dots, 1)))$ ont un point commun (voir les théorèmes 3.1 et 4.3). Le point clé est la polarité par rapport aux courbes rationnelles normales et par rapport au produit de \mathbb{P}^1 .

Notations. On note $T_x X \subset \mathbb{P}^N$ l'espace tangent d'une variété projective intègre $X \subset \mathbb{P}^N$ au point x et plus généralement, $T_x^k X \subset \mathbb{P}^N$ son espace k -tangent au point x (étant donnée une représentation paramétrique locale au point x , c'est l'espace engendré par x et les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k). La variété duale $X^\vee \subset \mathbb{P}^{N^\vee}$ est définie comme la clôture de Zariski de l'ensemble $\{H \mid T_x X \subset H, X \text{ lisse en } x\}$. On définit de la même manière les variétés duales supérieures

$$X^{k\vee} = \overline{\{H \mid T_x^k X \subset H, X \text{ lisse en } x\}}$$

2 Surface de Togliatti

Définition 2.1. *La surface rationnelle, image du plan projectif par l'application décrite ci-dessous*

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^6, (x_0, x_1, x_2) \longmapsto (x_0 x_1 x_2, x_0^2 x_1, x_0^2 x_2, x_1^2 x_2, x_1 x_2^2, x_0 x_1^2, x_0 x_2^2)$$

est appelée Surface de Togliatti.

Les sept formes cubiques du vecteur image s'annulant simultanément aux points

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1),$$

cette surface est la surface de Del Pezzo, notée S_6 , obtenue en éclatant \mathbb{P}^2 le long de ces trois points par le système linéaire des cubiques. L'hyperplan osculateur en un point $P = (x_0, x_1, x_2)$ s'interprète alors comme une cubique passant par les points e_1, e_2, e_3 et triple au point P , plus précisément comme la réunion des trois droites joignant P aux trois points base ; une équation étant

$$(x_2X_1 - x_1X_2)(x_2X_0 - x_0X_2)(x_1X_0 - x_0X_1) = 0.$$

Comme l'ont remarqué Lanteri et Mallavibarena (voir [4], pages 357-359), cette équation développée ne s'exprime qu'avec les 6 formes cubiques suivantes

$$X_0^2X_1, X_0^2X_2, X_1^2X_2, X_1X_2^2, X_0X_1^2, X_0X_2^2.$$

Notons V l'espace vectoriel engendré par ces six formes cubiques. Alors, dans l'espace projectif $\mathbb{P}^6 = \mathbb{P}((X_0X_1X_2 \oplus V)^\vee)$ des cubiques s'annulant aux points e_1, e_2, e_3 , les hyperplans osculateurs de S_6 passent par le point $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Nous venons de rappeler comment est définie la surface de Togliatti ainsi que la propriété d'incidence de ses hyperplans osculateurs. Cette surface peut aussi être décrite comme une section hyperplane générale de $Seg(1, 3) \subset \mathbb{P}^7$ qui est l'image par le morphisme de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Proposition 2.2. *Soit H un hyperplan général de \mathbb{P}^7 . Alors $H \cap Seg(1, 3) \simeq S_6$.*

Preuve. Sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ l'équation de H est de la forme suivante

$$\phi((X_iY_jZ_k)_{0 \leq i,j,k \leq 1}) = \left(\sum a_{i,j} Y_i Z_j \right) X_0 + \left(\sum b_{i,j} Y_i Z_j \right) X_1$$

Comme les biformes $\sum a_{i,j} Y_i Z_j$ et $\sum b_{i,j} Y_i Z_j$ s'annulent simultanément en deux points, la surface $H \cap Seg(1, 3)$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ le long de deux points, i.e. l'éclatement de \mathbb{P}^2 en trois points (non alignés). \square

Remarque : Le théorème de bidualité (voir par exemple [2] thm 15.24) ne s'étend pas trivialement aux ordres supérieurs de tangence. La surface de Togliatti, par exemple, ne vérifie pas un résultat attendu de "biosculation" car la surface de ses hyperplans osculateurs est dégénérée. Cette dernière est, à ma connaissance le seul exemple un peu élaboré de surface de \mathbb{P}^6 telle que $(S^{3\vee})^{3\vee} \neq S$.

Le **théorème de Togliatti** classe les réseaux de cubiques $\Lambda \subset H^0 O_{\mathbb{P}^2}(3)$ pour lesquels la surface image de la surface de Veronese $v_3(\mathbb{P}^2)$ via la projection $\mathbb{P}^9 \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^6$ vérifie une équation de Laplace (i.e. ses hyperplans osculateurs ont un point commun). Deux cas se présentent : soit le réseau possède une conique fixe soit non. Le premier cas est résolu aisément. Le second n'est pas du tout trivial et Togliatti montre que la projection de $v_3(\mathbb{P}^2)$ vérifie une équation de Laplace si et seulement si ce réseau est engendré par les cubes de trois formes linéaires (voir [1] et [5]).

Le théorème ci-dessous est une formulation simplifiée du théorème de Togliatti. Seul le cas du réseau non tangent y est traité et on suppose même que le \mathbb{P}^3 contenant le réseau

(qui se projette sur le point commun des hyperplans osculateurs) n'a pas de lieu base (Pour une exploration exhaustive voir le papier [1] de D.Franco et G. Ilardi). Déterminer les projections de $v_3(\mathbb{P}^2)$ qui vérifient une équation de Laplace revient alors à classifier les $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}(H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3))$ qui coupent la variété des cubiques décomposées le long d'une surface.

Théorème 2.3. *Soient $f_i \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2], i = 0, \dots, 3$ quatre polynômes homogènes de degré 3 sans zéro commun. Supposons que pour toute droite d'équation $l = 0$ il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}$ tel que l divise $\sum \alpha_i f_i$. Alors il existe des formes linéaires l_0, l_1, l_2 telles que*

$$\text{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) = \text{vect}(l_0^3, l_1^3, l_2^3, l_0 l_1 l_2)$$

Preuve. Considérons le morphisme $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$ donnée par les quatre formes cubiques. Comme pour toute droite $L \subset \mathbb{P}^2$ d'équation $l = 0$ il existe une cubique du système linéaire d'équation $lq = 0$ où $q = 0$ est l'équation d'une conique $C \subset \mathbb{P}^2$ on en déduit que l'image de L , ainsi que l'image de C est une cubique plane donc une cubique singulière. Par conséquent sur toute droite deux points ont la même image. Le degré du morphisme est donc au moins égal à 2 (un système linéaire ne contractant pas de courbe et le cardinal d'une fibre est minimal sur un ouvert). Comme ce degré doit diviser 9 on en déduit qu'il est égal à 3 (9 est exclu sinon nous avons un réseau de cubiques passant par 9 points).

Montrons que la fibre d'un point général est formée de trois points non alignés.

S'ils étaient alignés, quitte à changer de coordonnées nous aurions

$$\text{vect}(f_0, f_1, f_2, f_3) = \text{vect}(x_0 q, g_1, g_2, g_3)$$

avec q de degré 2, g_i de degré 3 et $g_1(0, x_1, x_2) = g_2(0, x_1, x_2) = g_3(0, x_1, x_2)$. Ceci implique $g_i(x_0, x_1, x_2) = x_0 q_i(x_0, x_1, x_2) + g(x_0, x_1, x_2)$ avec g de degré 3, q_i de degré 2. Mais alors les quatre formes f_0, f_1, f_2, f_3 ont un zéro commun sur $x_0 = 0$.

Les trois droites joignant les trois points de la fibre ont alors pour image la cubique singulière. On en déduit que C est formée des deux autres droites. Comme l'application de L sur la cubique singulière image Γ est birationnelle l'application de la conique résiduelle C sur Γ est un revêtement double (i.e. à chaque point de l on associe deux points sur C).

Si le revêtement triple $\mathbb{P}^2 \rightarrow S$, où S est la cubique image, est galoisien son groupe de Galois est $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dans une base adaptée, en tant qu'automorphisme de \mathbb{P}^2 , il est diagonalisable et est engendré par

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

Comme $\mathbb{P}^3 = \text{Proj} \mathbb{C}[X_0^3, X_1^3, X_2^3, X_0 X_1 X_2]$ est le seul \mathbb{P}^3 de cubiques sur lequel le groupe ci-dessus agisse trivialement le résultat est prouvé lorsque l'extension est galoisienne.

Si l'extension n'est pas galoisienne, on considère la clôture galoisienne $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$. C'est un revêtement double de \mathbb{P}^2 ramifié et un revêtement de degré 6 de la cubique image S ,

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^2 \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \pi^{-1}(S) & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

Comme X est normale l'image inverse $\pi^{-1}(L)$ d'une droite générale de \mathbb{P}^2 est irréductible d'après le théorème de Bertini (thm 8.18 page 179 [3]). On considère la transposition σ qui échange les deux points de la fibre par π . L'image par π de la courbe $\sigma(\pi^{-1}(L))$ est une courbe irréductible telle que $\pi(\sigma(\pi^{-1}(L)) \cup \pi^{-1}(L)) = p^{-1}(p(L)) = L \cup C$, il s'agit donc de C . En effet au dessus de chaque point de L la fibre est constituée des deux points tels que le triplet est la fibre par p . Mais ceci contredit le fait que C est formée de deux droites. \square

Corollaire 2.4. *Soit E le fibré vectoriel de la suite exacte ci-dessous*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\nu}}^4 \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\nu}}(3) \longrightarrow 0$$

Soit l une droite générale de \mathbb{P}^2 . Alors $E|_l = \mathcal{O}_l \oplus \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathcal{O}_l(-2)$ si et seulement s'il existe trois formes linéaires l_0, l_1, l_2 telles que

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow O_{\mathbb{P}^{2\nu}}^4 \xrightarrow{(l_0^3, l_1^3, l_2^3, l_0 l_1 l_2)} O_{\mathbb{P}^{2\nu}}(3) \longrightarrow 0$$

3 Polarité par rapport à une courbe rationnelle normale

Théorème 3.1. *Soient $2n + 1$ points de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ en position générale, $\mathfrak{P} = \mathbb{P}^{2n}$ l'espace projectif qu'ils engendrent et $S_{2n(2n+1)}$ l'image de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$ par la projection de centre \mathfrak{P} . Sous ces hypothèses, les hyperplans $2n$ -tangents de $S_{2n(2n+1)}$ ont un point commun.*

Preuve. Soient l_0, \dots, l_{2n+1} des formes linéaires en position générales. Afin de montrer que les hyperplans $2n$ -tangents de $S_{2n(2n+1)}$ ont un point commun on montre que l'espace projectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}(l_0^{2n+1}, \dots, l_{2n+1}^{2n+1}, \prod_i \bar{l}_i)$ rencontre tous les espaces $2n$ -tangents de $v_{2n+1}(\mathbb{P}^2)$. L'image de \mathbb{P} est le point commun recherché.

Soit l une forme linéaire sur \mathbb{P}^2 et L la droite d'équation $l = 0$. En un point l^{2n+1} de la Veronese l'espace $2n$ -tangent est donné par l'ensemble des formes de degré $2n + 1$ qui sont divisibles par l i.e. par les formes de degré $2n$. Notons $U \simeq \mathbb{C}^2$ un espace vectoriel tel que $L = \mathbb{P}U$ et $C_{2n+1} \subset \mathbb{P}S^{2n+1}U$ l'image de L par le plongement de Veronese. On note \bar{l}_i la restriction des formes linéaires modulo l . D'après le résultat bien connu de polarité des courbes rationnelles normales (qui affirme que le point d'intersection des hyperplans $2n$ -tangents de C_{2n+1} en $(2n + 1)$ points généraux distincts appartient au \mathbb{P}^{2n} engendré par ces $(2n + 1)$ points) le sous espace projectif de dimension $2n$ de $\mathbb{P}S^{2n+1}U$ engendré par les $(2n + 1)$ points $(\bar{l}_0^{2n+1}, \dots, \bar{l}_{2n+1}^{2n+1})$ contient le point $\prod_i \bar{l}_i$ d'intersection des $(2n + 1)$ hyperplans $2n$ -tangents de C_{2n+1} . Modulo l les $2n + 1$ formes sont donc liées, ce qui prouve le théorème. \square

4 Polarité par rapport à un produit de droites projectives

Soit U un espace vectoriel complexe de dimension 2. Notons $Seg(1, n) \subset \mathbb{P}U^{\otimes n}$ l'image de $\mathbb{P}U \times \dots \times \mathbb{P}U$ par le plongement de Segre.

Lemma 4.1. $Seg(1, n)^{(n-1)\vee} \simeq Seg(1, n)$.

Preuve. Pour s'en convaincre donnons-en une preuve détaillée pour $Seg(1, 3)$. Notons

$$\mathbb{P}^7 = \mathbb{P}(\mathbb{C}[X_0 Y_0 Z_0, X_0 Y_0 Z_1, X_0 Y_1 Z_0, X_0 Y_1 Z_1, X_1 Y_0 Z_0, X_1 Y_1 Z_0, X_1 Y_1 Z_1])$$

L'hyperplan d'équation $\phi(X_i Y_j Z_k) = \sum \alpha_{i,j,k} X_i Y_j Z_k = 0$ est osculateur au point $(x_i y_j z_k)$ si et seulement si

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X_i \partial Y_j}(x_i y_j z_k) = 0, \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_i \partial Z_k}(x_i y_j z_k) = 0, \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y_j \partial Z_k}(x_i y_j z_k) = 0$$

On obtient immédiatement $\phi(X_i Y_j Z_k) = (x_1 X_0 - x_0 X_1)(y_1 Y_0 - y_0 Y_1)(z_1 Z_0 - z_0 Z_1)$.

Plus généralement, notons \underline{X}_i (resp. \underline{x}_i) les coordonnées $X_{i,0}, X_{i,1}$ (resp. les nombres $x_{i,0}, x_{i,1}$). L'espace n -tangent en un point de $Seg(1, n)$ est donné par les dérivées $(n-1)$ -ièmes d'un système de coordonnées locales qui est, essentiellement, le produit des variables. Ainsi la forme multilinéaire $\phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n)$ est la trace sur $Seg(1, n)$ d'un hyperplan n -tangent $H \subset \mathbb{P}^{2^n-1}$ au point $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ si et seulement si

$$\phi(\underline{x}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n) = \phi(\underline{X}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{X}_n) = \dots = \phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_{n-1}, \underline{x}_n) = 0$$

Après un calcul élémentaire on en déduit

$$\phi(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \dots, \underline{X}_n) = \prod_{i=1, \dots, n} (x_{i,1} X_{i,0} - x_{i,0} X_{i,1})$$

Ce qui prouve le lemme. \square

La polarité point-hyperplan par rapport à C_n permet d'étendre l'isomorphisme $C_n^{\vee} \simeq C_n$ au \mathbb{P}^n ambiant. D'une façon similaire (une sorte de 'polarité' par rapport au Segre) l'isomorphisme $Seg(1, n)^{(n-1)\vee} \simeq Seg(1, n)$ s'étend aux espaces projectifs ambiants. Ici aussi il faudra distinguer le cas pair du cas impair.

Proposition 4.2. *L'isomorphisme $Seg(1, n) \simeq Seg(1, n)^{(n-1)\vee}$ qui à un point du Segre associe l'hyperplan n -tangent au Segre en ce point s'étend aux espaces projectifs $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$ et $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$ de la manière suivante : Au point $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on associe le point d'intersection des hyperplans n -tangents aux points de $x^\vee \cap Seg(1, n)^{(n-1)\vee}$. Lorsque n est impair, ce point image appartient à x^\vee . Lorsque n est pair, les points $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ pour lesquels le point image appartient à x^\vee forment une hyperquadrique.*

Preuve. L'isomorphisme $m^{\otimes n} : U^{\otimes n} \rightarrow U^{*\otimes n}$ donné par la matrice $m^{\otimes n} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\otimes n}$

est symétrique pour n pair et antisymétrique pour n impair. Pour $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ on note x^\vee l'équation de l'hyperplan correspondant dans $\mathbb{P}(U^{*\otimes n})$. Notons $\xi \in x^\vee \cap Seg(1, n)^{(n-1)\vee}$ le point générique de l'intersection. On a par définition $\langle x, \xi \rangle = 0$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité. Comme $m^{\otimes n}$ est inversible il existe un unique $x_\xi \in Seg(1, n)$ tel que $\xi = m^{\otimes n}(x_\xi)$. On en déduit, en utilisant les propriétés de symétrie de la matrice $m^{\otimes n}$, que $\langle x, m^{\otimes n}(x_\xi) \rangle = \langle x_\xi, m^{\otimes n}(x) \rangle = 0$, c'est à dire que le point $m^{\otimes n}(x)$ appartient à l'hyperplan n -tangent générique de la variété $x^\vee \cap Seg(1, n)^{(n-1)\vee}$.

Enfin lorsque n est impair, la matrice $m^{\otimes n}$ étant antisymétrique, on a $\langle x, m^{\otimes n}(x) \rangle = 0$ pour tout $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$. Lorsque n est pair la matrice est symétrique et les points $x \in \mathbb{P}(U^{\otimes n})$ tels que $\langle x, m^{\otimes n}(x) \rangle = 0$ forment une quadrique de $\mathbb{P}(U^{\otimes n})$. \square

Théorème 4.3. *Soit X_{2n} une section hyperplane générale de $Seg(1, 2n+1)$. Les hyperplans $2n$ -tangents de X_{2n} ont un point commun.*

Preuve. Les hyperplans $2n$ -tangents de X_{2n} sont les hyperplans tangents de $Seg(1, 2n+1)$ coupés par l'hyperplan considéré. Le théorème est alors une conséquence immédiate de la proposition 4.2. \square

Références

- [1] D.Franco ; G. Ilardi, *On a theorem of Togliatti* preprint n.9 (2001) Università degli studi di Napoli “Federico II”.
- [2] J.Harris, *Algebraic geometry, a first course*, Springer Verlag, **133**
- [3] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics 52 Springer-Verlag 1977.
- [4] A.Lanteri, R.Mallavibarrena, *Osculatory behavior and second dual varieties of Del Pezzo surfaces*, Advances in Geometry Vol 2, Issue 4 (2002)
- [5] Togliatti, E. *Alcuni esempi di superficie algebriche degli iperspazi che rappresentano un'equazione di Laplace*, Comm.Math.Helv.1(1929),255-272)

Jean Vallès

Laboratoire de Mathématiques appliquées

de Pau et des Pays de l'Adour

Avenue de l'université

64000 Pau, France

jean.valles@univ-pau.fr compilé le 3 avril 2006