



HAL
open science

Theorie de Lubin-Tate non-abelienne et representations elliptiques

Jean-Francois Dat

► **To cite this version:**

Jean-Francois Dat. Theorie de Lubin-Tate non-abelienne et representations elliptiques. 2006. hal-00022116

HAL Id: hal-00022116

<https://hal.science/hal-00022116>

Preprint submitted on 2 Apr 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques

J.-F. Dat

3 avril 2006

Résumé

Non abelian Lubin-Tate theory studies the cohomology of some moduli spaces for p -divisible groups, the broadest definition of which is due to Rapoport-Zink, aiming both at providing explicit realizations of local Langlands functoriality and at studying bad reduction of Shimura varieties. In this paper we consider the most famous examples ; the so-called Drinfeld and Lubin-Tate towers. In the Lubin-Tate case, Harris and Taylor proved that the supercuspidal part of the cohomology realizes both the local Langlands and Jacquet-Langlands correspondences, as conjectured by Carayol. Recently, Boyer computed the remaining part of the cohomology and exhibited two defects : first, the representations of GL_d which appear are of a very particular and restrictive form ; second, the Langlands correspondence is not realized anymore. In this paper, we study the cohomology complex in a suitable equivariant derived category, and show how it encodes Langlands correspondence for *elliptic* representations. Then we transfer this result to the Drinfeld tower via an enhancement of a theorem of Faltings due to Fargues. We deduce that Deligne's weight-monodromy conjecture is true for varieties uniformized by Drinfeld's coverings of his symmetric spaces. This completes the computation of local L -factors of some unitary Shimura varieties.

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Un peu d'histoire	2
1.2	Cet article	4
2	Représentations elliptiques et correspondances	6
2.1	Correspondance de Jacquet-Langlands locale	6
2.2	Correspondance de Langlands locale	12
3	Espaces modulaires de Drinfeld	15
3.1	La tour de Drinfeld	15
3.2	La tour de Lubin-Tate	18
3.3	Définition du $R\Gamma_c$	21
3.4	Le théorème de Faltings-Fargues	24
3.5	Variantes et décompositions	24
4	Réalisation cohomologique des correspondances	28
4.1	Description de la cohomologie, d'après Boyer	28
4.2	Scindages et endomorphismes de $R\Gamma_c[\rho]$	29
4.3	Action de W_K sur $R\Gamma_c[\rho]$	30
4.4	Preuve du théorème A	33
5	Monodromie et variétés de Shimura	35
5.1	Variétés de Harris-Taylor	35
5.2	Uniformisation p -adique et conjecture de pureté	43

1 Introduction

1.1 Un peu d’histoire

Soit K un corps local de caractéristique résiduelle p , K^{ca} une clôture algébrique et W_K le groupe de Weil associé. Dans leur article [39] de 1965, Lubin et Tate se sont inspirés de la théorie de la multiplication complexe des courbes elliptiques pour expliciter de manière exclusivement locale la loi de réciprocité du corps de classes d’Artin pour K . Ils ont pour cela étudié certains groupes formels munis d’une action de l’anneau des entiers \mathcal{O}_K de K . Sur une clôture algébrique k^{ca} du corps résiduel k de \mathcal{O}_K , les \mathcal{O}_K -modules formels de dimension 1 sont classifiés par leur “hauteur” d . Les auteurs montrent que celui de hauteur $d = 1$ se relève uniquement à isomorphisme près sur la complétion $\widehat{K^{nr}} = \mathbb{W}(k^{ca})$ de l’extension non-ramifiée maximale de K ; le \mathcal{O}_K -module formé par les K^{ca} -points de \mathcal{O}_K -torsion d’un tel relèvement est isomorphe à K/\mathcal{O}_K et muni d’une action de l’inertie $I_K \subset W_K$, d’où un morphisme $I_K \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$ qui s’avère induire l’isomorphisme du corps de classes (restreint à l’inertie).

La “théorie de Lubin-Tate non-abélienne”, ainsi baptisée par Carayol dans [15], vise à expliciter de manière locale certaines *correspondances* appartenant au vaste programme de généralisation non-abélienne de la théorie du corps de classes proposé par Langlands, dès 1967. On s’intéresse ici en particulier à

- la *correspondance de Langlands* qui pour tout entier $d > 0$ met en bijection les classes de représentations *lisses* irréductibles de $GL_d(K)$ et les classes de représentations *continues* de dimension d de W_K ; nous la noterons $\pi \mapsto \sigma_d(\pi)$ et renvoyons à [38] [31] [33] [35] et 2.2.
- La *correspondance de Jacquet-Langlands* qui pour tout entier $d > 0$ met en bijection les classes de représentations *lisses* irréductibles du groupe des inversibles de l’algèbre à division D_d de centre K et invariant $1/d$ avec les “séries discrètes” de $GL_d(K)$. Nous la noterons $\rho \mapsto JL_d(\rho)$ ainsi que $\pi \mapsto LJ_d(\pi)$ son “inverse”, et renvoyons à [20] [3] et 2.1.

Les coefficients des représentations sont ici l -adiques pour un premier $l \neq p$. Rappelons néanmoins que ces correspondances sont définies initialement en termes de représentations *complexes* (et en remplaçant W_K par le groupe de Weil-Deligne), qu’elles sont caractérisées par des propriétés de préservation d’invariants de nature arithmético-analytique, mais qu’elles se transfèrent (presque) sans ambiguïté à tout corps de coefficients abstraitement isomorphe à \mathbb{C} , cf 2.2.

Comme dans la théorie de Lubin-Tate abélienne, la réalisation explicite de ces correspondances est obtenue grâce aux points de torsion d’un certain \mathcal{O}_K -module formel, sauf que celui-ci va désormais vivre sur un $\widehat{K^{nr}}$ -espace analytique de dimension $d - 1$. Il y a en fait deux constructions d’un tel \mathcal{O}_K -module formel.

- La première est une généralisation directe de la situation abélienne ; lorsque $d > 1$, Lubin et Tate dans [40] montrent que “le” \mathcal{O}_K -module formel \mathbb{H}_d de dimension 1 et hauteur d sur k^{ca} ne se relève plus de manière unique à $\widehat{K^{nr}}$ mais que son foncteur des déformations est représentable par un anneau de séries formelles à $d - 1$ variables sur $\widehat{K^{nr}}$. Ainsi la boule unité ouverte $\widehat{K^{nr}}$ -analytique de dimension $d - 1$ est munie d’un \mathcal{O}_K -module formel “universel” dont les points de torsion forment un \mathcal{O}_K -module (ind)étale dont les fibres sont isomorphes à $(K/\mathcal{O}_K)^d$. Le classifiant des trivialisations de cet \mathcal{O}_K -module est donc un (pro)revêtement galoisien de groupe $GL_d(\mathcal{O}_K)$ qui, par functorialité, est aussi muni d’une action commutante du groupe des inversibles de l’anneau des endomorphismes de \mathbb{H}_d , lequel se trouve être l’anneau des entiers \mathcal{O}_{D_d} de D_d . Notons $\mathcal{M}_{LT}^{d,ca}$ le changement de base de ce pro-revêtement à la complétion $\widehat{K^{ca}}$ de K^{ca} ; celui-ci est donc muni d’une action de $GL_d(\mathcal{O}_K) \times \mathcal{O}_{D_d}^\times \times I_K$, et Drinfeld a expliqué dans [21], cf 3.2.4 comment prolonger cette action¹ à $GL_d(K) \times D_d^\times \times W_K$.
- La deuxième construction est entièrement due à Drinfeld, qui a introduit dans [22] un autre problème de “déformations” de \mathcal{O}_K -modules formels, où les rôles de $GL_d(K)$ et D_d^\times sont inversés. Il considère des \mathcal{O}_K -modules formels de dimension d et hauteur d^2 munis d’une action de \mathcal{O}_{D_d} “spéciale”. Sur k^{ca} , il existe un tel objet, disons \mathbb{X}_d qui est unique à quasi-isogénie près, et dont le groupe des quasi-

¹On triche un peu ici ; il faut déformer par isogénies pour avoir une action du produit triple en entier.

isogénies est $GL_d(K)$. Le problème de “déformations par quasi-isogénies” de \mathbb{X}_d est représentable par un schéma formel dont la fibre générique est le fameux espace symétrique de Drinfeld Ω^{d-1} ($\mathbb{P}_{\widehat{K}^{nr}}^{d-1}$ privé des hyperplans K -rationnels) qui, par le jeu des trivialisations des points de torsion du \mathcal{O}_{D_d} -module universel, se voit donc muni d’un pro-revêtement de groupe $\mathcal{O}_{D_d}^\times$. Notons encore $\mathcal{M}_{D_r}^{d,ca}$ le changement de base à \widehat{K}^{ca} d’icelui; il est muni d’une action de $I_K \times \mathcal{O}_{D_d}^\times \times GL_d(K)$ que l’on peut prolonger à $GL_d(K) \times D_d^\times \times W_K$.

On dispose maintenant de plusieurs théories cohomologiques pour linéariser $\mathcal{M}_{LT}^{d,ca}$ et $\mathcal{M}_{D_r}^{d,ca}$; nous adopterons ici la “cohomologie l -adique à supports compacts” de Berkovich. Notons que dans le cas LT , elle est duale des cycles évanescents étudiés par Harris-Taylor et Boyer. Les $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espaces obtenus sont de dimension infinie et l’action de $GL_d(K) \times D_d^\times$ y est lisse, par des résultats généraux de Berkovich. Pendant longtemps, ces espaces ont été étudiés de chaque côté (LT et Dr) de manière indépendante. Mais dans un très court article [24], Faltings a esquissé une preuve de ce que les mathématiciens impliqués commençaient à soupçonner : *il existe des isomorphismes $GL_d(K) \times D_d^\times \times W_K$ -équivariants²*

$$H_c^i(\mathcal{M}_{LT}^{d,ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq H_c^i(\mathcal{M}_{D_r}^{d,ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Les arguments de Faltings sont repris et complétés par Fargues dans [27], ainsi que par Genestier et V. Lafforgue en égales caractéristiques (travail en cours). Dans la suite de cette introduction, on fixe l’entier d et on se contente de désigner par $H_c^i(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ ou même H_c^i ces espaces de cohomologie.

Rappelons que par la correspondance de Langlands, les représentations *irréductibles* de W_K correspondent aux représentations *supercuspidales* de $GL_d(K)$, lesquelles sont caractérisées par la propriété d’être *projectives* et *injectives* dans la catégorie des représentations lisses de $GL_d(K)$ à caractère central. La partie *supercuspidale* des espaces $H_c^*(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est donc à la fois la plus importante et la plus maniable à étudier. Elle a été explorée dans les quatre articles [29] [11] [31] [32], chacun de ces articles concernant le côté LT ou le côté Dr en caractéristique nulle ou en égales caractéristiques. Ils démontrent en particulier la fameuse conjecture que Carayol a énoncée dans [15] à la suite de travaux pionniers de Deligne et Drinfeld pour $d = 2$: soit π une représentation supercuspidale l -adique de $GL_d(K)$, de caractère central d’ordre fini; alors on a, en normalisant convenablement les actions, cf [30],

$$\mathrm{Hom}_{GL_d(K)}(H_c^i(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi) \underset{D_d^\times \times W_K}{\simeq} \begin{cases} LJ_d(\pi) \otimes \sigma_d(\pi)(?) & \text{si } i = d - 1 \\ 0 & \text{si } i \neq d - 1 \end{cases}$$

où (?) désigne une certaine torsion à la Tate. Précisons aussi que Harris et Taylor dans [31] prouvent cette formule en même temps que l’existence même de la correspondance de Langlands. Les méthodes employées dans ces articles reposent sur la propriété d’uniformisation p -adique de certaines variétés globales (de Shimura ou de Drinfeld) par ces espaces, les suites spectrales de type Hochschild-Serre ou de cycles évanescents associées, et des arguments de formule des traces. Elles ne permettent donc en général que d’obtenir des informations sur la somme alternée des H_c^i .

Pendant longtemps, seul le calcul de Schneider-Stuhler dans [44] pour l’espace symétrique de Drinfeld fournissait des renseignements sur la partie non-cuspidale de la cohomologie. Ce calcul a inspiré à Harris une conjecture (non publiée) sur la forme explicite des groupes de cohomologie individuels du côté Dr . Récemment, Boyer [12] a annoncé une preuve de cette conjecture, en travaillant du côté LT . Son résultat peut s’exprimer “qualitativement” comme ceci : *Soit π une représentation irréductible de contribution non-nulle à H_c^i , alors π est elliptique et*

$$\mathrm{Hom}_{GL_d(K)}(H_c^i(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi) \underset{D_d^\times \times W_K}{\simeq} LJ_d(\pi) \otimes \sigma'(\pi)(?)$$

où (?) désigne une certaine torsion à la Tate.

Quelques explications sur cette formule : π est dite *elliptique* si la semi-simplifiée de sa correspondante de Langlands est de la forme $\sigma_d(\pi)^{ss} = \sigma'(\pi) \oplus \sigma'(\pi)(1) \oplus \dots \oplus \sigma'(\pi)(d')$ pour une certaine représentation l -adique irréductible $\sigma'(\pi)$ (voir 2.1.6 pour d’autres caractérisations plus intrinsèques). Pour une telle représentation, on note $LJ_d(\pi)$ le transfert de Jacquet-Langlands de l’unique série discrète dont la correspondante de Langlands a la même semi-simplifiée que $\sigma_d(\pi)$.

²Il faut faire attention à la normalisation des actions pour obtenir l’équivariance.

1.2 Cet article

La description obtenue par Boyer montre deux défauts de la cohomologie des espaces \mathcal{M}^{ca} :

- parmi les représentations elliptiques, seules *certaines* apportent une contribution non-nulle (et d’ailleurs, ce phénomène apparaît déjà dans le calcul de Schneider et Stuhler pour Ω).
- si la correspondance de Jacquet-Langlands (convenablement étendue) est bien réalisée, il n’en va pas de même de la correspondance de Langlands. On voit en particulier que l’opérateur de monodromie (celui que l’on sait associer à toute représentation l -adique continue de dimension finie de W_K par le théorème de Grothendieck) est toujours nul sur les composantes isotypiques des H_c^i .

L’idée principale de ce texte, qui fait suite à [17], est que pour corriger ces défauts il faut enrichir la cohomologie, ou plutôt lui restituer sa richesse perdue, en considérant “le” complexe de cohomologie $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ vu comme objet de la catégorie dérivée de la catégorie abélienne des $\overline{\mathbb{Q}}_l(GL_d(K) \times D_d^\times)$ -représentations lisses. Oublions un instant les difficultés de définition et d’étude que cela pose et énonçons notre théorème principal :

Théorème A *Pour toute représentation lisse irréductible π de $GL_d(K)$, on a*

$$\mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{D^b(GL_d(K))}(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi)) \underset{D_d^\times \times W_K}{\simeq} L J_d(\pi) \otimes \sigma_d(\pi) | - |^{\frac{d-1}{2}}.$$

Faisons quelques remarques sur les deux termes de cet isomorphisme :

- Du côté gauche : les complexes $R\Gamma_c \in D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(GL_d(K))$ et (par conséquent) $R\mathrm{Hom}_{D^b(GL_d)}(R\Gamma_c, \pi) \in D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l)$, sont munis d’une action de $D_d^\times \times W_K$. La notation \mathcal{H}^* désigne l’équivalence de catégorie $\mathcal{H}^* : \mathcal{C}^\bullet \in D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l) \mapsto \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}^i(\mathcal{C}^\bullet)$ entre $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ et la catégorie des espaces vectoriels à graduation de support fini, convenablement triangulée. Ainsi le terme de gauche est un espace vectoriel gradué muni d’une action de $D_d^\times \times W_K$, mais on oublie la graduation pour se retrouver avec une honnête représentation linéaire de $D_d^\times \times W_K$.
- Du côté droit : seule la notation $L J_d$ demande une explication que voici, cf 2.1 : la correspondance de Jacquet-Langlands fournit un plongement des groupes de Grothendieck $R(D_d^\times) \hookrightarrow R(GL_d(K))$ qui induit un isomorphisme $R(D_d^\times) \xrightarrow{\sim} \overline{R}(GL_d(K))$ où \overline{R} désigne le quotient par les combinaisons linéaires d’induites paraboliques. D’où une rétraction canonique $R(GL_d(K)) \twoheadrightarrow R(D_d^\times)$ que nous notons³ $L J_d$. On vérifie alors que pour toute π irréductible, $L J_d(\pi)$ est non-nulle si et seulement si π est elliptique, et dans ce cas, la notation est cohérente avec celle introduite plus haut, au signe près. En particulier, le théorème A ne fournit une construction de la correspondance de Langlands que pour les elliptiques.

Il est raisonnable de penser que les espaces \mathcal{M}^{ca} ne peuvent pas donner de réalisation, en quelque sens cohomologique que ce soit⁴, de la correspondance de Langlands pour les représentations non-elliptiques, et donc de se demander quels espaces pourraient fournir une telle réalisation. Les candidats sont naturellement à chercher parmi les espaces de Rapoport-Zink [42] qui, rappelons-le, font toujours intervenir deux groupes. Dans cette perspective, on peut reformuler le théorème A en introduisant le groupe $GD := (GL_d(K) \times D_d^\times) / \Delta$ où $\Delta = \{(z, z), z \in K^\times\}$ sous la forme : *pour toutes représentations irréductibles π de $GL_d(K)$ et ρ de D_d^\times , on a*

$$\mathcal{H}^*(R\mathrm{Hom}_{D^b(GD)}(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l), \pi \otimes \rho)) \underset{W_K}{\simeq} \begin{cases} \sigma_d(\pi) | - |^{\frac{d-1}{2}} & \text{si } \rho = L J_d(\pi^\vee) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La notation ${}^\vee$ désigne la contragrédiente de la représentation $?$. Dans le cas qui nous intéresse ici, les deux formes sont équivalentes car les représentations de D_d^\times sont “essentiellement” semi-simples, mais pour des raisons de symétrie, c’est la seconde qu’il semble plus naturel de vouloir généraliser.

Décrivons maintenant la stratégie que nous suivons : la première chose à faire est bien-sûr de définir convenablement les deux $R\Gamma_c$, ce que nous faisons au paragraphe 3.3 et passerons sous silence ici, pour

³Cette notation est empruntée à Badulescu qui a défini dans [2] des retractions similaires dans des situations plus compliquées où D_d est remplacée par une algèbre centrale simple quelconque.

⁴comme l’indiquent les calculs de traces de [23]

ne pas effrayer les éventuels lecteurs. Les définitions sont faites pour que, d'après Fargues [27], il existe un isomorphisme $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans $D^b(GD)$, compatible aux actions de W_K .

Une fois le complexe $R\Gamma_c$ bien défini, on est en présence d'un objet *a priori* compliqué. Le miracle est que cet objet est en fait "aussi simple qu'il peut l'être" puisqu'il est *scindable* :

Proposition 1.3 *Il existe un isomorphisme (pas unique) dans $D^b(GD)$,*

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} H_c^i(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[-i].$$

Ce fait repose sur la description de Boyer et peut se prouver de deux manières : soit par un argument de théorie des représentations de $GL_d(K)$ (le calcul complet des groupes d'extensions $Ext_{GL_d}^i(\pi, \pi')$ pour les couples de représentations elliptiques π et π' de $GL_d(K)$), soit en utilisant l'action d'un relèvement de Frobenius sur les H_c^i .

Fixons une irréductible ρ de D_d^\times , notons $\omega_\rho : K^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ son caractère central, et $D_{\omega_\rho}^b(GL_d)$ la catégorie dérivée bornée de la catégorie des représentations lisses de GL_d de caractère central ω_ρ . Le complexe $R\Gamma_c[\rho] := R\Gamma_c \otimes_{D_d^\times}^L \rho \in D_{\omega_\rho}^b(GL_d)$ est scindable en $R\Gamma_c[\rho] \simeq \bigoplus_i H_c^i[\rho][-i]$ où $H_c^i[\rho] := H_c^i \otimes_{D_d^\times} \rho$. Notons que du côté *Dr*, ce complexe s'interprète géométriquement comme le complexe de cohomologie $R\Gamma_c(\Omega^{d-1}, \mathcal{L}_\rho)$ du système local l -adique \mathcal{L}_ρ associé à ρ via les structures de niveau de Drinfeld.

La propriété de scindage permet de décrire l'algèbre des endomorphismes de $R\Gamma_c[\rho]$ sous la forme :

$$End_{D_{\omega_\rho}^b(GL_d)}(R\Gamma_c[\rho]) \simeq \bigoplus_{i \geq j} Ext_{GL_d, \omega_\rho}^{i-j}(H_c^i[\rho], H_c^j[\rho]),$$

le produit sur le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel de droite étant donné par le \cup -produit. Grâce à la théorie de Bushnell-Kutzko et au théorème 1.3 de [17], on peut décrire complètement ce \cup -produit. Notons $(\sigma_\rho, V_{\sigma_\rho})$ la représentation l -adique de W_K associée à ρ par correspondance de Langlands et functorialité de Jacquet-Langlands : il s'agit d'une représentation indécomposable de dimension d et l'algèbre engendrée par l'image de W_K dans $End_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma_\rho})$ est une algèbre triangulaire par blocs que nous noterons \mathcal{A}_ρ . Le calcul de \cup -produits mentionné ci-dessus montre alors (cf 4.2.6)

Proposition 1.4 *Tout scindage de $R\Gamma_c$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -algèbres*

$$End_{D_{\omega_\rho}^b(GL_d)}(R\Gamma_c[\rho]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{\rho^\vee}.$$

On veut ensuite élucider l'action de W_K sur le membre de gauche. Nous commençons par montrer que l'inertie agit potentiellement par son quotient l -adique et que l'on peut définir la "partie unipotente de la monodromie" $N_\rho \in End_{D_{\omega_\rho}^b(GL_d)}(R\Gamma_c[\rho])$. Pour décrire précisément ce N_ρ , nous aurons besoin de minorer son ordre de nilpotence. *À ce point nous avons besoin des résultats globaux de Boyer* : nous utiliserons sa description du gradué pour la filtration de monodromie du complexe des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura (ou de Drinfeld). En notant $\gamma_\rho : W_K \rightarrow End_{D_{\omega_\rho}^b(GL_d)}(R\Gamma_c[\rho])^\times$ le morphisme de groupes donnant l'action de W_K sur $R\Gamma_c[\rho]$, on obtient la description suivante, cf 4.3.1

Proposition 1.5 *Il existe un scindage de $R\Gamma_c$ pour lequel l'isomorphisme d'algèbres précédent rend le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} End_{D_{\omega_\rho}^b(GL_d)}(R\Gamma_c[\rho]) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_{\rho^\vee} \\ \gamma_\rho \uparrow & \nearrow \sigma_{\rho^\vee} & \\ W_K & & \end{array}$$

À partir de cette proposition, le théorème A se prouve en utilisant à nouveau le calcul explicite des extensions entre représentations elliptiques et de leurs \cup -produits.

Dans le cas $\rho = 1$, le complexe à étudier est simplement $R\Gamma_c(\Omega_K^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Nous l'avons déjà étudié dans [17] en suivant la même stratégie et les mêmes étapes que ci-dessus. Le point essentiel où les arguments

divergent est l'étude de l'ordre de nilpotence du N_ρ . Dans [17], nous avons utilisé la suite spectrale de Rapoport-Zink et l'uniformisation p -adique, alors qu'ici nous utilisons les résultats de Boyer, et donc *in fine* la géométrie du côté Lubin-Tate. Notons d'ailleurs que toutes les étapes qui précèdent s'appliquent à la tour de Lubin-Tate indépendamment du théorème de Faltings-Fargues. Ce dernier intervient en dernier lieu pour transférer cette étude du côté Drinfeld, ce qui nous amène à notre deuxième résultat principal

Théorème B *Les variétés uniformisées par les revêtements de l'espace symétrique de Drinfeld Ω satisfont la conjecture monodromie-poids de Deligne.*

Ceci termine le calcul du facteur L local des variétés de Shimura unitaires étudiées dans [29], [15] et [41] en une place où l'algèbre à division et involution globale associée reste totalement ramifiée.

Décrivons brièvement le contenu des différentes parties. Dans la partie 2 on définit et caractérise les représentations elliptiques et on explicite leur comportement à travers les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands. Dans la partie 3 on précise la version des espaces de Drinfeld et Lubin-Tate utilisée pour les énoncés cohomologiques principaux, puis on définit leur complexe de cohomologie, ainsi que plusieurs variantes utiles par la suite. On y énonce la version du théorème de Faltings-Fargues pertinente pour cet article. La partie 4 contient la preuve du théorème A sous l'hypothèse que l'opérateur N_ρ introduit ci-dessus est d'ordre assez grand ; la stratégie est la même que dans la partie 4.2 de [17]. Enfin la partie 5 s'occupe de monodromies : d'une part on prouve l'estimation nécessaire à la partie 4 en se raccrochant aux résultats globaux de Boyer au prix d'acrobaties techniques mêlant topos fibrés, faisceaux pervers et formalisme l -adique. D'autre part on prouve le théorème B ci-dessus. Enfin l'appendice contient un résultat technique, mais d'intérêt indépendant utilisé dans la partie 5.

2 Représentations elliptiques et correspondances

Dans cette partie, nous rappelons des faits bien connus sur les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands, d'autres un peu moins connus mais qui le sont certainement des spécialistes, puis nous explicitons le cas des représentations elliptiques. Nous abrègerons $G_d := GL_d(K)$.

2.1 Correspondance de Jacquet-Langlands locale

2.1.1 Notations : Il sera commode de considérer des représentations à coefficients dans un corps C abstraitement isomorphe au corps des complexes \mathbb{C} . Ce corps pourra parfois être \mathbb{C} ou un $\overline{\mathbb{Q}}_l$, selon les besoins topologiques qu'on aura. Pour tout groupe H localement profini, nous notons $Irr_C(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de C -représentations lisses irréductibles de H . Pour le groupe G_d , on isole certains sous-ensembles remarquables :

- i) On désigne par $Cusp_C(G_d) \subseteq Irr_C(G_d)$ le sous-ensemble des représentations *cuspidales*, *i.e.* dont les coefficients sont à support compact-modulo-le-centre. Parmi les irréductibles, elles se caractérisent aussi comme étant les objets injectifs et projectifs de la catégorie des représentations lisses de G_d à caractère central.
- ii) On note $Disc_C(G_d) \subseteq Irr_C(G_d)$ le sous-ensemble des représentations “de la série discrète”, *i.e.* dont les coefficients sont de carré intégrable (au sens complexe) modulo-le-centre. Malgré cette définition de nature analytique, il se trouve que la notion de “série discrète” de G_d est invariante par automorphismes du corps \mathbb{C} ; c'est une conséquence des théorèmes de multiplicités limites de [43], ou plus prosaïquement une conséquence de la classification de Bernstein-Zelevinski [51, Thm 9.3]. Cela nous permet d'isoler sans ambiguïté un sous-ensemble $Disc_C(G_d) \subseteq Irr_C(G_d)$ dont nous appellerons les membres “séries discrètes” par abus de langage.

On peut considérer la correspondance de Jacquet-Langlands comme le reflet spectral de la correspondance “géométrique” bien connue entre classes de conjugaison elliptiques semi-simples régulières de G_d et de D_d^\times , donnée par l'égalité des polynômes caractéristiques. L'énoncé spectral classique concerne les représentations complexes :

Théorème 2.1.2 (*Correspondance de Jacquet-Langlands, [20],[3]*) *Il existe une bijection*

$$JL_d : \text{Irr}_{\mathbb{C}}(D_d^{\times}) \xrightarrow{\sim} \text{Disc}_{\mathbb{C}}(G_d)$$

caractérisée par l'égalité de caractères $\chi_{JL_d(\rho)}(g) = (-1)^{d-1} \chi_{\rho}(x)$ pour toutes classes elliptiques $g \in G_d, x \in D_d^{\times}$ se correspondant (i.e. ayant même polynôme minimal de degré d).

Remarquons que l'égalité de caractères de cet énoncé peut se tester sur les fonctions localement constantes à support compact dans l'ensemble (ouvert) des elliptiques réguliers, et ne fait donc intervenir que le caractère-distribution des représentations de $\text{Disc}_{\mathbb{C}}(G_d)$. Ce caractère-distribution est défini sur n'importe quel corps de coefficients, en particulier sur \mathbb{C} . Compte tenu de ce que l'ensemble $\text{Disc}_{\mathbb{C}}(G_d)$ et la condition d'égalité des caractères sont stables par l'action des automorphismes du corps \mathbb{C} , l'énoncé ci-dessus se transfère sans ambiguïté à un énoncé formellement analogue sur le corps C . Nous noterons encore $JL_d : \text{Irr}_C(D_d^{\times}) \xrightarrow{\sim} \text{Disc}_C(G_d)$ la bijection obtenue.

2.1.3 Groupes de Grothendieck : Notons maintenant $R(G_d)$ et $R(D_d^{\times})$ les groupes de Grothendieck des C -représentations de longueur finies. La bijection de Jacquet-Langlands induit une injection $R(D_d^{\times}) \hookrightarrow R(G_d)$, vérifiant l'égalité de caractères du théorème 2.1.2 sur les classes de conjugaison elliptiques se correspondant. On veut définir une rétraction pour cette injection, vérifiant la même égalité de caractères. Soit χ un caractère lisse de K^{\times} , notons $R(G_d, \chi)$, resp. $R(D_d^{\times}, \chi)$, le sous-groupe de $R(G_d)$, resp. $R(D_d^{\times})$, engendré par les irréductibles de caractère central χ . Les décompositions selon le caractère central $R(G_d) = \bigoplus_{\chi} R(G_d, \chi)$, resp. $R(D_d^{\times}) = \bigoplus_{\chi} R(D_d^{\times}, \chi)$, sont respectées par l'application JL . De plus, les groupes $R(G_d, \chi)$ et $R(D_d^{\times}, \chi)$ sont munis de formes bilinéaires entières, voir [45],

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : R(G_d, \chi) \times R(G_d, \chi) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (\pi, \pi') &\mapsto \sum_i (-1)^i \dim(\text{Ext}_{G_d, \chi}^i(\pi, \pi')) \end{aligned}$$

et respectivement pour D_d^{\times} . Ces formes bilinéaires en induisent une sur la somme directe $R(G_d)$, resp. $R(D_d^{\times})$, que l'on note de la même manière. Dans le cas de D_d^{\times} , cette forme est non dégénérée et on a simplement $\langle \rho, \rho' \rangle = \dim \text{Hom}_{D_d^{\times}}(\rho, \rho')$. Dans le cas de G_d , la situation est sensiblement plus compliquée. Notons $R_I(G_d)$ le sous-groupe de $R(G_d)$ engendré par les induites paraboliques de représentations de sous-groupes de Levi propres et $\overline{R}(G_d)$ le quotient $R(G_d)/R_I(G_d)$.

Lemme 2.1.4 $\overline{R}(G_d)$ est libre sur \mathbb{Z} et la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'y descend et y est non-dégénérée, une base orthonormale étant donnée par les images de séries discrètes.

Preuve : Pour cette preuve, nous pouvons identifier C et \mathbb{C} . L'énoncé est alors une conséquence des trois propriétés suivantes :

- i) La classification de Zelevinski [51](ou celle dite du quotient de Langlands) montre que

$$R(G_d) = \bigoplus_{(M, \sigma, \psi)} \mathbb{Z}[i_M^{G_d}(\sigma\psi)]$$

où $[?]$ est l'élément de $R(G_d)$ associé à la représentation $?$, les triplets (M, σ, ψ) sont formés d'un sous-groupe de Levi standard de G_d (c'est-à-dire un produit de GL_{d_i} diagonaux), d'une représentation tempérée de M et d'un caractère non-ramifié de M "dans la chambre de Weil positive", et sont pris à G_d -conjugaison près. Le signe $i_M^{G_d}$ est l'induction parabolique normalisée le long du parabolique triangulaire supérieur dont le Levi est M . Comme on sait de plus que les représentations tempérées de G_d sont soit induites, soit des séries discrètes, on en déduit

$$R(G_d) = \left(\bigoplus_{\pi \in \text{Disc}_C(G_d)} \mathbb{Z}[\pi] \right) \bigoplus R_I(G_d),$$

ce qui montre que $\overline{R}(G_d)$ est libre sur \mathbb{Z} et qu'une base en est donnée par les images des séries discrètes.

- ii) Soit M un sous-groupe de Levi standard de G_d et π une représentation admissible de G_d . Alors pour toute représentation admissible de G_d , un argument de déformation attribué à Kazhdan dans [45] montre que

$$\langle \pi, i_M^{G_d}(\sigma) \rangle = \langle i_M^{G_d}(\sigma), \pi \rangle = 0.$$

- iii) Soit π, π' deux séries discrètes de G_d , on a par [50]

$$\langle \pi, \pi' \rangle = \delta_{\pi\pi'}.$$

□

D'autre part, la formule des caractères induits de Van Dijk [47] montre que l'application qui à un élément $x \in R(G_d)$ associe la restriction de son caractère-distribution aux éléments elliptiques réguliers se factorise à travers le quotient $\overline{R}(G_d)$. On déduit alors du théorème 2.1.2 le

Corollaire 2.1.5 *L'application $R(D_d^\times) \xrightarrow{JL_d} R(G_d)$ induit un isomorphisme isométrique*

$$R(D_d^\times) \xrightarrow{\sim} \overline{R}(G_d)$$

caractérisé par l'égalité de caractères du théorème 2.1.2.

En conséquence, on a un morphisme dans l'autre sens $R(G_d) \longrightarrow \overline{R}(G_d) \xrightarrow{\sim} R(D_d^\times)$ que nous noterons LJ_d . Cette notation est due à I. Badulescu qui a défini dans [2] des rétractions similaires dans des situations plus générales. D'après [2], ces rétractions n'envoient généralement pas irréductibles sur irréductibles, même au signe près. Dans le cas présent, le lemme suivant montre que l'image d'une irréductible est soit nulle, soit une irréductible au signe près.

Lemme 2.1.6 *Pour une représentation irréductible π de G_d , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) π a le même support cuspidal qu'une série discrète.*
- ii) π a un caractère non nul sur les éléments elliptiques semi-simples réguliers.*
- iii) L'image de π dans $\overline{R}(G_d)$ est non nulle.*

Une représentation satisfaisant ces propriétés sera dite elliptique. Son image par JL_d coïncide au signe près avec celle de la série discrète de même support cuspidal.

Rappelons que le support cuspidal d'une représentation irréductible π est l'unique classe de conjugaison de couples (M, τ) formés d'un sous-groupe de Levi M et d'une représentation cuspidale irréductible τ de M qui apparaît dans le module de Jacquet normalisé de π le long d'un parabolique de Levi M .

Preuve : L'implication $ii) \Rightarrow iii)$ est une conséquence de la formule de Van Dijk [47] qui montre que le caractère d'une induite parabolique en un élément semi-simple régulier elliptique est nul.

Pour voir l'implication $iii) \Rightarrow i)$, écrivons $[\pi] = \sum_{(M, \sigma)} [i_M^{G_d}(\sigma)]$ (somme d'induites de représentations essentiellement tempérées) comme nous le permet la classification par le quotient de Langlands. On peut supposer que les supports cuspidaux de chaque σ sont contenus dans celui de π . Comme les tempérées sont soit induites, soit des séries discrètes, on voit que si $\pi \notin R_I(G_d)$, alors il y a une série discrète de même support cuspidal que π . Donc $iii) \Rightarrow i)$.

Pour l'implication $i) \Rightarrow ii)$, on peut utiliser la combinatoire de la classification de Zelevinski. Soit π^{disc} l'unique série discrète de même support cuspidal que π . Avec les notations de [51], on sait qu'il existe un (unique) segment $\Delta = [\tau, \tau']$ où τ est une cuspidale irréductible de $G_{d'}$ avec d' diviseur de d , de sorte que

- i) L'ensemble partiellement ordonné des multisegments de support $[\tau, \tau']$ a pour plus petit élément $a_{min} = \{\Delta\}$ et plus grand élément $a_{max} = \{\{\tau'\}, \dots, \{\tau\}\}$.*
- ii) $\pi^{disc} = \langle a_{max} \rangle$ et toutes les représentations de même support cuspidal sont de la forme $\langle a \rangle$ pour un multisegment a de support $[\tau, \tau']$.*
- iii) La représentation irréductible $\langle b \rangle$ associée à b apparaît comme sous-quotient de la représentation induite $\pi(a)$ associée à a si et seulement si $b \leq a$, et dans ce cas sa multiplicité est 1.*

Supposons maintenant que $\pi = \langle a \rangle$. Pour $b < a$ notons $d(b, a)$ la longueur d'une chaîne maximale $b < m_1 < \dots < a$ (i.e le nombre d'opérations "élémentaires" au sens de [51, 7] pour passer de a à b), on obtient donc l'égalité dans $R(G_d)$

$$[\langle a \rangle] = \sum_{b \leq a} (-1)^{d(b, a)} [\pi(b)]$$

Or, pour $b = a_{min}$, on a $\langle a_{min} \rangle = \pi(a_{min})$ (c'est la représentation de Speh associée à Δ et c'est l'image de la série discrète π^{disc} par l'involution de Zelevinski) et pour $a_{min} \neq b$, la représentation $\pi(b)$ est une induite "propre". On obtient donc la congruence $[\pi] = \pm [\langle a_{min} \rangle] \pmod{R_I(G_d)}$ dans $R(G_d)$. En l'appliquant aussi à π^{disc} , on obtient

$$[\pi] = \pm [\pi^{disc}] \pmod{R_I(G_d)}.$$

La formule de Van Dijk montre alors que les caractères de π et π^{disc} coïncident au signe près sur les éléments elliptiques. Or, les formules d'orthogonalité pour les séries discrètes montrent que le caractère d'une série discrète sur ces éléments est non nul. □

Nous noterons $Ell_C(G_d) \subset Irr_C(G_d)$ le sous-ensemble des classes de représentations elliptiques. On a bien-sûr

$$Cusp_C(G_d) \subset Disc_C(G_d) \subset Ell_C(G_d).$$

Nous allons donner une classification de ces représentations adaptée aux besoins de ce texte. Auparavant, nous devons faire quelques rappels de théorie des représentations de groupes linéaires p -adiques.

2.1.7 Rappels sur la théorie de Bernstein [8] : Si G est un groupe réductif p -adique, $Mod_C(G)$ désigne la catégorie abélienne de toutes les C -représentations lisses de G . Soit (M, τ) une paire Levi-cuspidale, définissons $\mathfrak{B}_{M, \tau}^G$ la sous-catégorie pleine de $Mod_C(G)$ formée des objets dont tous les sous-quotients irréductibles contiennent $(M, \tau\psi)$ dans leur support cuspidal, pour un certain caractère non-ramifié ψ de M . On sait que la catégorie $\mathfrak{B}_{M, \tau}^G$ est un "facteur direct indécomposable" (que nous appellerons bloc de Bernstein associé à (M, τ)) de $Mod_C(G)$ et qu'on a une décomposition

$$Mod_C(G) \simeq \bigoplus_{(M, \tau)/\sim} \mathfrak{B}_{M, \tau}^G$$

où $(M, \tau) \sim (M', \tau')$ si et seulement si il existe $g \in G$ et ψ caractère non ramifié de M tels que $M' = M^g$ et $\tau' = (\tau\psi)^g$ (équivalence "inertielle"). En particulier, les idempotents centraux primitifs de $Mod_C(G)$ sont en bijection avec les classes inertielles de paires (M, τ) .

Pour un produit de groupes linéaires, lorsque $M = T$ est un tore maximal et τ est un caractère non-ramifié de T , on appelle parfois le bloc associé $\mathfrak{B}_{T, 1}^G$ le "bloc unipotent" de G .

2.1.8 Rappels sur la théorie de Bushnell-Kutzko : Cette théorie permet de décrire les blocs de Bernstein dans le cas où G est un groupe linéaire. On s'intéresse ici au cas particulier suivant : on fixe un entier n et une représentation supercuspidale irréductible τ de $G_n = GL_n(K)$. Pour tout entier $e \geq 1$, on voit le groupe produit $(G_n)^e$ comme un Levi standard (diagonal) dans G_{ne} , d'où une paire Levi-cuspidale $((G_n)^e, \tau^e)$ pour $(G_n)^e$. Si K' désigne un autre corps local, nous noterons aussi $G'_n := GL_n(K')$.

Fait 2.1.9 La théorie de Bushnell-Kutzko nous fournit une extension K' de K , de degré n et degré résiduel le nombre f_τ de caractères non ramifiés $\chi : K^\times \rightarrow C^\times$ tels que $(\chi \circ \det) \otimes \tau \simeq \tau$, et une famille d'équivalences de catégories

$$\alpha_\tau^e : \mathfrak{B}_{(G_n)^e, \tau^e}^{G_{ne}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}_{(G'_1)^e, 1^e}^{G'_{ne}}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) Normalisation : $\alpha_\tau^1(\tau) = 1$.
- ii) Compatibilité à l'induction parabolique normalisée⁵ : si $e = \sum_{i=1}^r e_i$ est une partition de e alors

$$\alpha_\tau^{e_1} \times \dots \times \alpha_\tau^{e_r} \simeq \alpha_\tau^e \circ i_{(G_n)^{e_1} \times \dots \times (G_n)^{e_r}}^{G_{ne}}$$

⁵On rappelle que les paraboliques standards sont les paraboliques triangulaires supérieurs,

iii) *Compatibilité à la torsion* : si $\chi : K^\times \longrightarrow C^\times$ est un caractère, alors pour toute $\pi \in \mathfrak{B}_{(G_n)^e, \tau^e}^{G_n^e}$, on a

$$\alpha_\tau^e((\chi \circ \det) \otimes \pi) \simeq (\chi \circ N_{K'|K} \circ \det) \otimes \alpha_\tau^e(\pi).$$

iv) *Compatibilité aux caractères centraux* : pour toute représentation $\pi \in \mathfrak{B}_{(G_n)^e, \tau^e}^{G_n^e}$ telle que $\pi(\varpi_K)$ soit un scalaire, $\alpha_\tau^e(\pi)(\varpi_K)$ est aussi un scalaire et on a $\alpha_\tau^e(\pi)(\varpi_K) = \pi(\varpi_K)\tau(\varpi_K)^{-1}$.

Preuve : On utilise les notations de [13, Thm (7.6.20)]. L'équivalence α_τ^1 est donnée par ce qui est noté $\mathfrak{Ad}(\Psi_1)^{-1}$ dans *loc. cit.*, le choix de Ψ_1 étant fixé par notre propriété i). Pour chaque $e > 1$ on définit alors $\alpha_\tau^e := \mathfrak{Ad}(\Psi)^{-1}$, donné par [13, Cor (7.6.21)]. En fait, pour être un peu plus précis, l'équivalence de catégories donnée par *loc. cit.* ne concerne que les représentations admissibles de longueur finie. Pour obtenir l'équivalence des blocs "en entier", il faut utiliser aussi [14]. La compatibilité à la torsion par les caractères se déduit de [13, (7.5.12)]. La propriété iv) est mentionnée en [13, (7.7.6)] pour les représentations admissibles. Elle se généralise aux autres représentations, en utilisant la discussion de [13, (7.5.9)] par exemple. La compatibilité à l'induction parabolique est explicite [13, 7.6.21] dans le cas "minimal" $e = 1 + \dots + 1$. Dans le cas général, elle est donnée par [14]. \square

Notation 2.1.10 Soit $\rho \in \text{Irr}_C(D_d^\times)$. Nous noterons

- $d_\rho \in \mathbb{N}^*$ l'unique diviseur de d et π_ρ l'unique représentation cuspidale irréductible de G_{d/d_ρ} tels que $JL_d(\rho)$ apparaisse dans l'induite parabolique standard normalisée $|\det|^{-\frac{1-d_\rho}{2}} \pi_\rho \times \dots \times |\det|^{-\frac{d_\rho-1}{2}} \pi_\rho$. L'existence de d_ρ et π_ρ est assurée par la classification des séries discrètes de G_d par Bernstein-Zelevinski, [51, Thm 9.3].
- M_ρ le sous-groupe de Levi standard $(G_{d/d_\rho})^{d_\rho}$ et $\bar{\pi}_\rho$ la représentation supercuspidale irréductible $\pi_\rho |\det|^{(1-d_\rho)/2} \otimes \dots \otimes \pi_\rho |\det|^{(d_\rho-1)/2}$ de M_ρ . Ainsi la paire $(M_\rho, \bar{\pi}_\rho)$ est un représentant du support cuspidal de $JL_d(\rho)$

D'après la caractérisation 2.1.6 iii) des représentations elliptiques et la propriété 2.1.9 ii), l'équivalence de catégories $\alpha_{\pi_\rho}^{d_\rho}$ induit une bijection entre l'ensemble $\text{Ell}_C(\mathfrak{B}_{M_\rho, \pi_\rho}^{G_d})$ des représentations elliptiques de G_d dans le bloc $\mathfrak{B}_{M_\rho, \bar{\pi}_\rho}^{G_d}$ et l'ensemble $\text{Ell}_C(\mathfrak{B}_{T_{d_\rho, 1}}^{G'_{d_\rho}})$ des représentations elliptiques de G'_{d_ρ} dans son bloc unipotent. Notons que toute famille d'équivalences de catégories 2.1.9 satisfaisant les propriétés i) à iv) induit la même bijection. Par ailleurs, π_ρ a été choisie pour que cette bijection envoie $JL_d(\rho)$ sur la représentation de Steinberg de G'_{d_ρ} .

2.1.11 Classification des représentations elliptiques : Rappelons tout d'abord la classification des elliptiques du bloc unipotent de G_d que nous avons utilisée dans [17, 2.1.3]. Notons S_d l'ensemble des racines simples du tore diagonal de G_d dans le Borel supérieur. Tout sous-ensemble $I \subseteq S_d$ détermine un sous-groupe de Levi diagonal M_I et un parabolique P_I triangulaire supérieur, dont l'induite droite $\text{Ind}_{P_I}^{G_d}(1)$ possède un unique quotient irréductible que nous noterons π_1^I . Celui-ci est elliptique, et l'application

$$I \subseteq S_d \mapsto \pi_1^I \in \text{Ell}_C(\mathfrak{B}_{(G_1)^d, 1^d}^{G_d})$$

est une bijection. En termes d'induites normalisées, on a $\pi_1^I = \text{Cosoc}\left(i_{M_I}^{G_d}\left(\text{Soc}\left(i_{T_d}^{M_I}(\bar{\pi}_1)\right)\right)\right)$.

Pour $\rho \in \text{Irr}_C(D_d^\times)$, on introduit l'ensemble S_ρ des racines simples du centre de M_ρ dans l'algèbre de Lie du parabolique triangulaire supérieur P_ρ de Levi M_ρ , et pour $I \subseteq S_\rho$, on note $M_{\rho, I}$ le centralisateur du noyau commun des $\alpha \in I$. La représentation

$$(2.1.12) \quad \pi_\rho^I := \text{Cosoc}\left(i_{M_{\rho, I}}^{G_d}\left(\text{Soc}\left(i_{M_\rho}^{M_{\rho, I}}(\bar{\pi}_\rho)\right)\right)\right)$$

de G_d est irréductible et elliptique, par compatibilité de l'équivalence $\alpha_{\pi_\rho}^{d_\rho}$ aux inductions et torsions, et l'application

$$I \subseteq S_\rho \mapsto \pi_\rho^I \in \text{Ell}_C(\mathfrak{B}_{M_\rho, \pi_\rho^{d_\rho}}^{G_d})$$

est une bijection. Notons que $JL_d(\rho) = \pi_\rho^\emptyset$.

Convention 2.1.13 Bien que cela paraisse moins intrinsèque, nous devons numéroter S_ρ , i.e. choisir une bijection $S_\rho \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, d_\rho - 1\}$ pour la suite. Nous choisissons de numéroter les racines simples des paraboliqes triangulaires supérieurs de haut en bas.

En décorant de signes ' les objets relatifs au corps K' de l'équivalence $\alpha_{\pi_\rho}^{d_\rho}$ de 2.1.9, la convention ci-dessus permet en particulier d'identifier S_ρ et S'_{d_ρ} , et on a pour tout $I \subseteq S_\rho$

$$\alpha_{\pi_\rho}^{d_\rho}(\pi_\rho^I) \simeq \pi'^I_1.$$

Remarque 2.1.14 Pour tous $\rho \in \text{Irr}_C(D_d^\times)$ et $I \subseteq S_\rho$, on a dans $\overline{R}(G_d)$ l'égalité $[\pi_\rho^I] = (-1)^{|I|}[\pi_\rho^\emptyset]$. Par conséquent on a aussi $LJ_d[\pi_\rho^I] = (-1)^{|I|}[\rho]$ dans $R(D_d^\times)$.

Preuve : Grâce aux équivalences de catégories 2.1.9 on est ramené au bloc unipotent, c'est-à-dire au cas $\rho = 1$. Dans ce cas, le lemme X.4.6 de [9] montre que dans $R(G_d)$, on a

$$[\pi_1^I] = \sum_{I \subseteq J \subseteq S_d} (-1)^{|J \setminus I|} [\text{Ind}_{P_I}^{G_d}(1)].$$

En appliquant ceci à I et \emptyset , on obtient $[\pi_1^I] = (-1)^{d-1-|I|}[1_{G_d}] = (-1)^{|I|}[\text{St}_{G_d}]$. □

Remarque 2.1.15 La duale de π_ρ^I est $\pi_\rho^{\overline{I}}$, où l'on identifie $S_\rho = S_{\rho^\vee}$ et \overline{I} est l'image de I par l'involution $i \mapsto d_\rho - i$ de S_ρ numéroté comme en 2.1.13.

Preuve : Par compatibilité de la correspondance de Jacquet-Langlands avec le passage à la contragrédiente, on a $JL_d(\rho^\vee) = JL_d(\rho)^\vee$, et donc $M_{\rho^\vee} = M_\rho$ et $\vec{\tau}_{\rho^\vee} \simeq (\vec{\tau}_\rho)^\vee$. En dualisant la définition de π_ρ^I , on obtient

$$(\pi_\rho^I)^\vee = \text{Soc} \left(i_{M_\rho, I}^{G_d} \left(\text{Cosoc} \left(i_{M_\rho}^{M_\rho, I} ((\vec{\tau}_\rho)^\vee) \right) \right) \right).$$

Appliquant l'équivalence $\alpha_{\pi_{\rho^\vee}}^{d_\rho}$ de 2.1.9 et identifiant S_ρ à S'_{d_ρ} grâce à 2.1.13, on obtient $\alpha_{\pi_{\rho^\vee}}^{d_\rho} ((\pi_\rho^I)^\vee) = (\pi'^I_1)^\vee$ qui d'après [17, 2.3.3 iv)] n'est autre que $\pi^{\overline{I}}_1$ (le ' renvoie au corps K' de 2.1.9). □

2.1.16 Extensions entre représentations elliptiques : Nous identifierons les centres de G_d et D_d^\times à K^\times par les plongements canoniques. En particulier le caractère central d'une représentation de G_d ou D_d^\times sera vu comme un caractère de K^\times . Avec cette convention les caractères centraux de $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D_d^\times)$ et $JL_d(\rho) \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G_d)$ sont égaux. Dans la proposition suivante, la notation $\text{Ext}_{G_d, \omega}$ désigne les groupes d'extensions calculés dans la catégorie des représentations lisses de G_d de caractère central ω .

Proposition 2.1.17 Soient $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D_d^\times)$ de caractère central ω et $I \subseteq S_\rho$.

i) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et toute $\pi \in \text{Irr}_\omega(G_d)$, on a en notant $\delta(I, I') = |I \cup I'| - |I \cap I'|$

$$\text{Ext}_{G_d, \omega}^i(\pi_\rho^I, \pi) = \begin{cases} \overline{\mathbb{Q}}_l & \text{si } \pi \simeq \pi_\rho^{I'} \text{ et } i = \delta(I, I') \\ 0 & \text{si le contraire} \end{cases}.$$

ii) Soient I, J, K trois sous-ensembles de S_ρ tels que $\delta(I, J) + \delta(J, K) = \delta(I, K)$, alors le cup-produit

$$\cup : \text{Ext}_{G_d, \omega}^{\delta(I, J)}(\pi_\rho^I, \pi_\rho^J) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \text{Ext}_{G_d, \omega}^{\delta(J, K)}(\pi_\rho^J, \pi_\rho^K) \longrightarrow \text{Ext}_{G_d, \omega}^{\delta(I, K)}(\pi_\rho^I, \pi_\rho^K)$$

est un isomorphisme.

Preuve : Rappelons que si π, π' sont deux représentations irréductibles de même caractère central ω mais de supports cuspidaux distincts, alors $\text{Ext}_{G_d, \omega}^i(\pi, \pi') = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, voir par exemple [50, 6.1]. Ceci montre la nullité des Ext lorsque π n'est pas elliptique de type ρ .

Pour le reste du théorème, nous allons nous ramener au théorème 1.3 de [17] grâce à l'équivalence $\alpha_{\pi_\rho}^{d_\rho}$. Pour cela, remarquons que par les propriétés i) et iv) de 2.1.9, celle-ci induit une équivalence entre

la sous-catégorie pleine des objets de $\mathfrak{B}_{M_\rho, \bar{\pi}_\rho}^{G_d}$ où ϖ agit par le scalaire $\omega(\varpi)$ et la sous-catégorie pleine des objets de $\mathfrak{B}_{(G'_1)^{d_\rho}, \bar{1}}^{G'_1}$ où ϖ agit trivialement. Comme la première contient la sous-catégorie pleine des objets de caractère central ω comme *facteur direct* (par compacité de \mathcal{O}_K^\times) et la seconde contient la sous-catégorie des objets de caractère central trivial comme *facteur direct* aussi (par compacité de $\mathcal{O}_{K'}^\times$), et que par conséquent de chaque côté les Ext sont les mêmes dans l'une ou l'autre sous-catégorie pleines en question, il s'ensuit que

$$\text{Ext}_{G_d, \omega}^*(\pi_\rho^I, \pi_\rho^J) = \text{Ext}_{PC'_{d_\rho}}^*(\pi'_1{}^I, \pi'_1{}^J)$$

où l'on identifie S_ρ et S'_{d_ρ} par 2.1.13 et où le ' renvoie au corps K' de 2.1.9. Il ne reste plus qu'à appliquer [17, 1.3] \square

Remarque 2.1.18 *Comme le montre la preuve ci-dessus, on peut dans la proposition précédente remplacer les $\text{Ext}_{G_d, \omega}$ par les Ext calculés dans la sous-catégorie pleine des objets de $\text{Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G_d)$ où ϖ agit par le scalaire $\omega(\varpi)$.*

2.2 Correspondance de Langlands locale

Soit K^{nr} la sous-extension non ramifiée maximale de K dans K^{ca} et \widehat{K}^{nr} sa complétion. On note toujours $I_K := \text{Gal}(K^{ca}/K^{nr}) \subset W_K$ le groupe d'inertie de K .

2.2.1 Formulation à la Weil-Deligne : Rappelons qu'une "représentation de Weil-Deligne" σ de W_K à valeurs dans le corps C est un triplet $(\sigma^{ss}, N_\sigma, V_\sigma)$ où

- V_σ est un espace vectoriel de dimension finie sur C ,
- $\sigma^{ss} : W_K \longrightarrow GL(V_\sigma)$ est une représentation continue (pour la topologie discrète de C) et semi-simple de W_K .
- $N_\sigma \in \text{End}_C(V_\sigma)$ est un endomorphisme nilpotent de V tel que pour tout $w \in W_K$, on a

$$(2.2.2) \quad \sigma^{ss}(w)N_\sigma\sigma^{ss}(w)^{-1} = |w|N_\sigma,$$

où $|\cdot|$ désigne le caractère non ramifié de W_K qui envoie les Frobenius arithmétiques sur l'ordre q du corps résiduel de K .

Notons $\text{Rep}_C^d(WD_K)$ l'ensemble des classes d'équivalences des C -représentations de Weil-Deligne de dimension d . La correspondance de Langlands sur K est une famille de bijections $(\sigma_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$

$$\sigma_d : \text{Irr}_C(GL_d(K)) \xrightarrow{\sim} \text{Rep}_C^d(WD_K)$$

qui vérifie un certain nombre de propriétés suffisantes pour la rendre unique (compatibilité avec la théorie du corps de classe qui donne aussi le cas $d = 1$, préservation de certains invariants de nature arithmético-analytique (facteurs L et ϵ de paires), etc...). Nous renvoyons à [33],[35] pour l'énoncé précis de ces propriétés caractéristiques que nous n'utiliserons pas en totalité. Nous utiliserons sans commentaires particuliers la compatibilité à la contragrédiente et la compatibilité à la torsion par les caractères qui dans le cas des caractères non ramifiés s'exprime formellement ainsi :

$$\forall \pi \in \text{Irr}_C(G_d), \forall a \in \mathbb{C}^\times, \quad \sigma_d(|\det|^a \pi) = |a| \sigma_d(\pi)$$

(en particulier, on a normalisé le corps de classes de manière à ce que les uniformisantes correspondent aux Frobenius géométriques). Rappelons par ailleurs que

$$\sigma_d(\text{Cusp}_C(G_d)) = \{\sigma \in \text{Rep}_C^d(WD_K) \text{ irréductibles}\}.$$

En fait, la correspondance est déterminée par sa restriction aux représentations cuspidales de G_d et irréductibles de W_K , la classification de Zelevinski [51] et la classification des représentations de Weil-Deligne en fonction des irréductibles de W_K .

La géométrie algébrique réalise plutôt une variante de la correspondance de Langlands, appelée parfois correspondance de Hecke et qui se déduit de celle de Langlands par une simple torsion "à la Tate" par le

caractère $w \mapsto |w|^{\frac{1-d}{2}}$. Il est sous-entendu ici que l'on choisit toujours (si besoin) la racine carrée positive de q dans \mathbb{C} pour définir une puissance demi-entière de $|\cdot|$. Pour les représentations cuspidales, cette variante se trouve être compatible aux actions des automorphismes de \mathbb{C} des deux côtés, cf [34, (7.4)]. L'extension aux représentations non cuspidales respecte cette compatibilité, comme nous allons le préciser maintenant en suivant [34, (7.4)]. Si τ est un automorphisme de \mathbb{C} et $\sigma = (\sigma^{ss}, N, V)$ une représentation de Weil-Deligne, notons $\sigma^\tau := (\sigma^{ss} \otimes 1, N \otimes 1, V \otimes_{\mathbb{C}, \tau} \mathbb{C})$. Cela définit une action de $\text{Aut}(\mathbb{C})$ sur $\text{Rep}_{\mathbb{C}}^d(WD_K)$ et de même on en définit une autre sur $\text{Irr}_{\mathbb{C}}(G_d)$.

Fait 2.2.3 *Pour tout automorphisme τ du corps \mathbb{C} et toute représentation $\pi \in \text{Irr}_{\mathbb{C}}(G_d)$, on a*

$$|\cdot|^{(1-d)/2} \sigma_d(\pi^\tau) = (|\cdot|^{(1-d)/2} \sigma_d(\pi))^\tau.$$

Preuve : Le cas le plus difficile est celui où π est cuspidale ; il est prouvé dans [34, (7.4)] (et cela repose sur des compatibilités avec des cas de correspondance globale). Le cas général découle certainement de la version rationnelle de la classification de Langlands de [16, Prop. 3.2]. Pour le confort du lecteur nous donnons une preuve complète.

Modifions un peu l'énoncé en introduisant la notation $\varepsilon_\tau = \tau(\sqrt{q})/\sqrt{q} \in \{\pm 1\}$ et les caractères

$$\varepsilon_\tau : g \in G_d \mapsto \varepsilon_\tau^{\text{val}_\tau \det(g)} \quad \text{et} \quad \varepsilon_\tau : w \in W_K \mapsto \varepsilon_\tau^{\log_q |w|}.$$

L'énoncé que l'on veut prouver se reformule en

$$(2.2.4) \quad \sigma_d(\pi^\tau) = \varepsilon_\tau^{d-1} \sigma_d(\pi)^\tau.$$

Étant données π_1, \dots, π_r des représentations de G_{d_1}, \dots, G_{d_r} , notons $\pi_1 \times \dots \times \pi_r$ la représentation de $G_{d_1 + \dots + d_r}$ induite parabolique standard normalisée. Alors si $d = d_1 + \dots + d_r$, on calcule

$$(\pi_1 \times \dots \times \pi_r)^\tau = \varepsilon_\tau^{d-d_1} \pi_1^\tau \times \dots \times \varepsilon_\tau^{d-d_r} \pi_r^\tau.$$

Supposons maintenant que cette induite est irréductible et que (2.2.4) est connu pour chaque π_i . On sait alors que

$$\sigma_d(\pi_1 \times \dots \times \pi_r) = \sigma_{d_1}(\pi_1) \oplus \dots \oplus \sigma_{d_r}(\pi_r)$$

et on en tire immédiatement l'énoncé pour l'induite. D'après la classification de Zelevinski, cela nous ramène au cas où π est l'unique quotient irréductible de

$$\text{St}_{k_1}(|\det|^{n_1} \pi_g) \times \dots \times \text{St}_{k_r}(|\det|^{n_r} \pi_g)$$

avec $n_1 \geq \dots \geq n_r \in \mathbb{Z}$ et $\pi_g \in \text{Cusp}_{\mathbb{C}}(G_g)$. On a noté ici $\text{St}_k \pi_g$ l'unique quotient irréductible de $\pi_g |\det|^{(1-k)/2} \times \dots \times \pi_g |\det|^{(k-1)/2}$ (k facteurs, on passe au suivant en multipliant par $|\det|$). Remarquons que $(\text{St}_k \pi_g)^\tau = \text{St}_k(\varepsilon_\tau^{kg-g-k+1} \pi_g^\tau)$. Par ailleurs, d'après [35, 2.7], on a $\sigma_{kg}(\text{St}_k \pi_g) = \sigma_g(\pi_g) \otimes \sigma_k(\text{St}_{G_k})$. On calcule donc

$$\begin{aligned} \sigma_{kg}((\text{St}_k \pi_g)^\tau) &= \sigma_{kg}(\text{St}_k(\varepsilon_\tau^{kg-g-k+1} \pi_g^\tau)) &= \varepsilon_\tau^{kg-g-k+1} \sigma_g(\pi_g^\tau) \otimes \sigma_k(\text{St}_{G_k}) \\ &= \varepsilon_\tau^{kg-g-k+1} \varepsilon_\tau^{1-g} \varepsilon_\tau^{1-k} (\sigma_g(\pi_g) \otimes \sigma_k(\text{St}_{G_k}))^\tau \\ &= \varepsilon_\tau^{1-kg} \sigma_{kg}(\text{St}_k \pi_g)^\tau \end{aligned}$$

compte tenu de ce que l'on sait déjà pour π_g et St_{G_k} . Ainsi (2.2.4) est vérifié pour les représentations du type $\text{St}_k(\pi_g)$. Revenons à notre représentation irréductible π et rappelons que selon [35, 2.9], il lui est associé la représentation galoisienne

$$\sigma_d(\pi) = \sigma_{k_1 g}(\text{St}_{k_1}(|\det|^{n_1} \pi_g)) \oplus \dots \oplus \sigma_{k_r g}(\text{St}_{k_r}(|\det|^{n_r} \pi_g)).$$

Remarquons par ailleurs que π^τ est l'unique quotient irréductible de la représentation

$$\varepsilon_\tau^{d-k_1 g} (\text{St}_{k_1}(|\det|^{n_1} \pi_g))^\tau \times \dots \times \varepsilon_\tau^{d-k_r g} (\text{St}_{k_r}(|\det|^{n_r} \pi_g))^\tau$$

qui n'est autre que la représentation

$$\mathrm{St}_{k_1}(\varepsilon_\tau^{d-k_1g} \varepsilon_\tau^{k_1g-g-k_1-1} |\det|^{n_1} \pi_g^\tau) \times \cdots \times \mathrm{St}_{k_r}(\varepsilon_\tau^{d-k_rg} \varepsilon_\tau^{k_rg-g-k_r-1} |\det|^{n_r} \pi_g^\tau).$$

Il lui est donc associé la représentation

$$\sigma_d(\pi^\tau) = \sigma_{k_1g}(\mathrm{St}_{k_1}(\varepsilon_\tau^{d-g-k_1-1} |\det|^{n_1} \pi_g^\tau)) \oplus \cdots \oplus \sigma_{k_rg}(\mathrm{St}_{k_r}(\varepsilon_\tau^{d-g-k_r-1} |\det|^{n_r} \pi_g^\tau))$$

qui n'est autre que

$$\varepsilon_\tau^{d-k_1g} \sigma_{k_1g}((\mathrm{St}_{k_1}(|\det|^{n_1} \pi_g))^\tau) \oplus \cdots \oplus \varepsilon_\tau^{d-k_rg} \sigma_{k_rg}((\mathrm{St}_{k_r}(|\det|^{n_r} \pi_g))^\tau).$$

Ainsi, par le cas déjà traité des représentations St , on en déduit (2.2.4) pour π . □

La compatibilité aux automorphismes de \mathbb{C} permet de transposer sans ambiguïté la correspondance de Langlands tordue à la Hecke au corps abstrait C . Pour obtenir une correspondance de Langlands sur C , il faut alors choisir (si besoin) une racine du cardinal du corps résiduel de K .

2.2.5 Formulation continue l -adique : Lorsque $C = \overline{\mathbb{Q}_l}$, nous avons besoin d'une formulation en termes de représentations continues l -adiques de W_K plutôt que de représentations de Weil-Deligne. Voici brièvement le lien entre les deux formulations expliqué par Deligne dans [19, 8]. Rappelons que W_K est muni de la topologie définie par la topologie profinie de I_K et la topologie discrète de $W_K/I_K \simeq \mathbb{Z}$. On note alors $\mathrm{Rep}_l^d(W_K)$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentations Frobenius-semisimples et continues de W_K .

Notons $\mathbb{Z}_l(1) := \varprojlim \mu_{l^n}$ et $t_l : I_K \rightarrow \mathbb{Z}_l(1)$ le l -quotient de l'inertie modérée, donné par l'action sur les l^n -èmes racines d'une uniformisante. À tout progénérateur μ de $\mathbb{Z}_l(1)$, est donc associé un morphisme surjectif $t_\mu : I_K \xrightarrow{t_l} \mathbb{Z}_l(1) \xrightarrow{\mu^*} \mathbb{Z}_l$. Soit $(\sigma^{ss}, N_\sigma, V_\sigma)$ une $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentation de Weil-Deligne comme dans le paragraphe précédent et soit ϕ un relèvement de Frobenius géométrique dans W_K . L'équation 2.2.2 montre que la formule

$$(2.2.6) \quad \sigma^\phi(w) := \sigma^{ss}(w) \exp(N_\sigma t_\mu(i_\phi(w))), \quad \text{où } w = \phi^{\nu(w)} i_\phi(w) \in \phi^\mathbb{Z} \rtimes I_K$$

définit une représentation continue et Frobenius-semisimple de W_K sur l'espace V_σ . Le théorème "de la monodromie l -adique" de Grothendieck montre que l'application $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}^d(WD_K) \rightarrow \mathrm{Rep}_l^d(W_K)$ ainsi obtenue est une bijection. Deligne a montré qu'elle ne dépend pas des choix de ϕ et μ . L'opérateur nilpotent $N_\sigma \in \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(V_\sigma)$ est appelé "monodromie" et contrôle le défaut de semi-simplicité de la représentation σ . En particulier la semisimplifiée de σ n'est autre que σ^{ss} .

La correspondance de Langlands locale, tordue à la Hecke, fournit donc une correspondance entre représentations irréductibles de G_d et représentations l -adiques et c'est cette dernière que la géométrie (*i.e.* la cohomologie l -adique) peut prétendre réaliser. Moyennant le choix d'une racine du cardinal du corps résiduel dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$, on obtient la "vraie" correspondance, que nous noterons toujours

$$\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(G_d) \mapsto \sigma_d(\pi) \in \mathrm{Rep}_l^d(W_K).$$

2.2.7 Représentations elliptiques : Pour expliquer ce qu'il advient des représentations elliptiques de G_d à travers la correspondance de Langlands, rappelons que

$$\sigma_d(\mathrm{Disc}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(G_d)) = \{\sigma \in \mathrm{Rep}_l^d(W_K) \text{ indécomposables}\}.$$

Comme le support cuspidal d'une représentation elliptique est aussi celui d'une série discrète, la compatibilité de la correspondance de Langlands à l'induction parabolique donne la caractérisation

$$\sigma_d(\mathrm{Ell}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(G_d)) = \{\sigma \in \mathrm{Rep}_l^d(W_K), \exists \sigma' \text{ indécomposable telle que } \sigma^{ss} = \sigma'^{ss}\}.$$

Ainsi pour toute représentation elliptique π de type ρ , on a

$$\sigma_d(\pi)^{ss} = \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \tau_{d_\rho}^{ss} \left| - \left| \frac{1-d_\rho}{2} \right. \right.$$

où $\tau_{d_\rho}^{ss} := \overline{\mathbb{Q}}_l \oplus \overline{\mathbb{Q}}_l(1) \oplus \cdots \oplus \overline{\mathbb{Q}}_l(d_\rho - 1)$. Pour tout sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, d_\rho - 1\}$, introduisons la représentation l -adique $\tau_{d_\rho}^{I, \phi}$ associée à la représentation de Weil-Deligne $(\tau_{d_\rho}^{ss}, N_I)$ par la formule 2.2.6, et où N_I est l'opérateur de monodromie $\tau_{d_\rho}^{ss} \rightarrow \tau_{d_\rho}^{ss}(-1)$ donné par la matrice $\sum_{i \in I^c} E_{i, i-1}$, où I^c est le complémentaire de I (voir [17, 4.1.1] pour plus de détails). Nous noterons simplement $\tau_{d_\rho}^I$ la classe d'isomorphisme de cette représentation.

Lemme 2.2.8 *Soit $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D)$ et $I \subseteq S_\rho$. Utilisant les notations 2.1.10 et la convention 2.1.13, on a*

$$\sigma_d(\pi_\rho^I) \simeq \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \sigma_{d_\rho}(\pi_1^I) \simeq \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \tau_{d_\rho}^I \otimes |\cdot|^{\frac{1-d_\rho}{2}}.$$

Preuve : Dans la preuve de [17, 4.1.2], nous exhibons des entiers d_1, \dots, d_r de somme d_ρ , et $n_1 \geq \dots \geq n_r$ tels que la représentation π_1^I soit l'unique quotient de l'induite

$$|\det|_K^{n_1} \text{St}_{G_{d_1}} \times \cdots \times |\det|_K^{n_r} \text{St}_{G_{d_r}}.$$

Ces entiers sont indépendants du corps K , de sorte que via l'équivalence de catégories 2.1.9 et la convention 2.1.13, on en déduit que π_ρ^I est l'unique quotient de l'induite

$$|\det|^{n_1} \text{St}_{d_1}(\pi_\rho) \times \cdots \times |\det|^{n_r} \text{St}_{d_r}(\pi_\rho),$$

ce qui nous fournit les paramètres de Langlands de π_ρ^I . Alors d'après [35, 2.9], on a

$$\begin{aligned} \sigma_d(\pi_\rho^I) &= | - |^{n_1} \sigma_{dd_1/d_\rho}(\text{St}_{d_1}(\pi_\rho)) \oplus \cdots \oplus | - |^{n_r} \sigma_{dd_r/d_\rho}(\text{St}_{d_r}(\pi_\rho)) \\ &= | - |^{n_1} \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \sigma_{d_1}(\text{St}_{G_{d_1}}) \oplus \cdots \oplus | - |^{n_r} \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \sigma_{d_r}(\text{St}_{G_{d_r}}) \\ &= \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \sigma_{d_\rho}(\pi_1^I) \end{aligned}$$

d'où la première égalité de l'énoncé. La seconde découle de [17, 4.1.2]. \square

3 Espaces modulaires de Drinfeld

Dans cette section, nous précisons la version des espaces de modules de groupes formels que nous utilisons pour les énoncés cohomologiques principaux. Pour les spécialistes, il suffira de dire qu'on ne fixe pas la hauteur des quasi-isogénies qui rigidifient les problèmes de modules (suivant en cela Rapoport-Zink). La cohomologie des espaces obtenus n'est donc pas admissible mais seulement admissible modulo le centre. On définit ensuite les complexes de cohomologie $R\Gamma_c$ qui jouent évidemment un rôle central dans ce texte. On fixe dorénavant un entier $d \geq 1$, et on note $G := GL_d(K)$ et D l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, précédemment notée D_d .

3.1 La tour de Drinfeld

La définition du complexe de cohomologie repose sur la description formelle suivante :

3.1.1 *La tour de Drinfeld est un système $\cdots \mathcal{M}_{D_r, n} \xrightarrow{\pi_{n, n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_{1, 0}} \mathcal{M}_{D_r, 0} \xrightarrow{\xi_{D_r}} \Omega_K^{d-1}$, où*

i) Les $\mathcal{M}_{D_r, n}$, $n \in \mathbb{N}$ sont des \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques munis

(a) d'une action de G continue au sens de [5, par. 6].

(b) d'une action de D^\times dont la restriction à \mathcal{O}_D^\times fait de $\pi_{n, 0} := \pi_{1, 0} \circ \cdots \circ \pi_{n, n-1}$ un revêtement étale galoisien de groupe $\mathcal{O}_D^\times / (1 + \varpi^n \mathcal{O}_D)$.

(c) d'une donnée de descente à la Weil pour l'extension $\widehat{K}^{nr} | K$ (au sens de [42, 3.45]).

Ces actions commutent entre elles et aux $\pi_{n, n'}$, et le sous-groupe K_{diag}^\times de $G \times D^\times$ agit trivialement.

ii) l'augmentation ξ_{D_r} est un morphisme d'espaces analytiques "au-dessus de K " (cf [4, p. 30]) qui, après extension des scalaires, devient localement isomorphe, compatible aux données de descentes, et équivariant si l'on munit l'espace symétrique de Drinfeld Ω_K^{d-1} de l'action naturelle de G et triviale de D^\times .

3.1.2 Pour le confort du lecteur nous allons brièvement rappeler la définition de ces objets. On reprend les notations de l'introduction, en abrègant $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K$ et en fixant une uniformisante ϖ de \mathcal{O} .

Si B est une \mathcal{O} -algèbre, un \mathcal{O} -module formel sur B est un groupe formel muni d'une action de \mathcal{O} relevant l'action naturelle sur l'algèbre de Lie. Un \mathcal{O}_D -module formel sur B est un \mathcal{O} -module formel muni d'une action de \mathcal{O}_D qui étend celle de \mathcal{O} . Notons $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers d'une sous-extension non ramifiée maximale de K dans D . Suivant Drinfeld, un \mathcal{O}_D -module formel sur B est dit spécial si son algèbre de Lie est localement libre de rang 1 comme $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} B$ -module.

Une isogénie de \mathcal{O} -modules formels est une isogénie des groupes formels sous-jacents compatible aux actions de \mathcal{O} . Sa (\mathcal{O} -)hauteur est le quotient (entier) de la hauteur au sens des groupes par le degré de k sur \mathbb{F}_p . La hauteur d'un \mathcal{O} -module formel X est la hauteur de l'isogénie $X(\varpi)$. Une quasi-isogénie $X \rightarrow Y$ de \mathcal{O} -modules formels est un élément de $\text{Hom}_{\mathcal{O}-mf}(X, Y) \otimes_{\mathcal{O}} K$ qui admet un inverse dans $\text{Hom}_{\mathcal{O}-mf}(Y, X) \otimes_{\mathcal{O}} K$. On montre que c'est en fait une isogénie à multiplication par une puissance de $X(\varpi)$ près, ce qui permet d'en définir la hauteur.

3.1.3 *L'espace $\mathcal{M}_{Dr,0}$* : La définition de la tour de Drinfeld repose sur l'existence d'un \mathcal{O}_D -module formel \mathbb{X} spécial (donc de dimension d) de hauteur d^2 sur k^{ca} , qui est unique à isogénie près, [10, Prop II.5.2], [42, 3.60].

Soit Nilp la catégorie des $\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbres où l'image de ϖ est nilpotente. On considère le foncteur $\widetilde{G} : \text{Nilp} \rightarrow \text{Ens}$ qui à B associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (X, ρ) avec X un \mathcal{O}_D -module formel sur B et $\rho : \mathbb{X} \otimes_{k^{ca}} (B/\varpi B) \rightarrow X \otimes_B (B/\varpi B)$ une quasi-isogénie. On a une décomposition évidente $\widetilde{G} = \bigsqcup_{h \in \mathbb{Z}} G^{(h)}$ où $G^{(h)}$ classe les classes de couples (X, ρ) avec ρ de hauteur dh . Chaque $G^{(h)}$ est non-canoniquement isomorphe à $G^{(0)}$ et $G^{(0)}$ est le foncteur G de Drinfeld [22]. On sait que G est représentable (cf [28], [42]) par un schéma formel localement de type fini sur $\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$. On note $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(0)}$ ce schéma formel. De même on note $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(h)}$ le schéma formel représentant $G^{(h)}$ et $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ celui qui représente \widetilde{G} . On a donc non-canoniquement $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0} \simeq \widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(0)} \times \mathbb{Z}$. Enfin on note sans $\widehat{}$ les fibres génériques au sens de Raynaud-Berkovich de ces espaces : ce sont donc des \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques au sens de [4].

3.1.4 *Structures de niveau* : Notons (X_u, ρ_u) l'objet universel au-dessus de $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$. Le noyau $X_u[\varpi^n]$ de la multiplication par ϖ^n dans X_u est un schéma formel en groupes plat fini de rang p^{nd^2} au-dessus de $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$, et qui est étale en fibre générique. Plus précisément, sa fibre générique est localement pour la topologie étale isomorphe à $\mathcal{M}_{Dr,0} \times \mathcal{O}_D/\varpi^n \mathcal{O}_D$. Le $(\mathcal{O}_D/\varpi^n \mathcal{O}_D)^\times$ -torseur sur $\mathcal{M}_{Dr,0}$

$$\underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_D}((\varpi^{-n} \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D)_{\mathcal{M}_{Dr,0}}, X_u[\varpi^n])$$

est donc représenté par un revêtement étale de $\mathcal{M}_{Dr,0}$, galoisien de groupe $\mathcal{O}_D^\times/(1 + \varpi^n \mathcal{O}_D)$, qui est le $\mathcal{M}_{Dr,n}$ de 3.1.1. Pour $m \leq n$, l'inclusion $\varpi^{-m} \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \subset \varpi^{-n} \mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D$ induit le morphisme $\mathcal{M}_{Dr,n} \xrightarrow{\pi_{n,m}} \mathcal{M}_{Dr,m}$ de 3.1.1.

3.1.5 *Actions des groupes* : On sait que le groupe des quasi-isogénies du \mathcal{O}_D -module formel \mathbb{X} s'identifie à $G = GL_d(K)$, [42, 3.60] ou [10, II.5.2]. On récupère donc une action (à gauche) de G sur le foncteur \widetilde{G} qui envoie le couple (X, ρ) sur le couple $(X, \rho \circ ({}^t g)_{\mathbb{X}})$ où $g_{\mathbb{X}}$ désigne la quasi-isogénie de \mathbb{X} associée à g et ${}^t g$ désigne la transposée de g^6 . Cette action en induit une sur $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ par Yoneda, et l'objet universel est équivariant, i.e. muni d'isomorphismes canoniques $(X_u, \rho_u \circ g_{\mathbb{X}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} g^*(X_u, \rho_u)$. Par conséquent tous les $\mathcal{M}_{Dr,n}$ sont munis d'une action de G et les morphismes de transition sont G -équivariants. D'après Berkovich, l'action de G sur ces \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques est continue au sens de [5, par. 6] pour la topologie naturelle de G .

On définit maintenant l'action de D^\times sur $\mathcal{M}_{Dr,0}$. Pour $d \in D^\times$ et X un \mathcal{O}_D -module formel sur B , notons ${}^d X$ le \mathcal{O}_D -module formel dont le \mathcal{O} -module formel sous-jacent est encore X mais dont l'action

⁶Cette normalisation de l'action permet de rendre l'énoncé final A plus joli car exempt de contragrédiente. De plus le théorème de Faltings fait intervenir un passage à la transposée.

de \mathcal{O}_D est donnée par ${}^dX(x) := X(d^{-1}xd)$, de sorte que $X(d^{-1})$ est une quasi-isogénie $X \rightarrow {}^dX$. Pour un couple (X, ρ) on pose $d(X, \rho) := ({}^dX, \rho \circ \mathbb{X}(d^{-1}))$. On obtient ainsi une action à gauche de D^\times sur le foncteur \tilde{G} , et donc sur $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$, triviale sur \mathcal{O}_D^\times . L'objet universel est alors muni d'isomorphismes canoniques $d^*(X_u, \rho_u) \xrightarrow{\sim} ({}^dX_u, \rho_u \circ \mathbb{X}(d^{-1}))$ et cela permet de prolonger l'action naturelle de \mathcal{O}_D^\times sur les $\mathcal{M}_{Dr,n}$ à D^\times , de manière compatible aux morphismes de transition.

Passons à l'action de Galois et fixons un générateur topologique ϕ de $\text{Gal}(K^{nr}/K) = \text{Gal}(k^{ca}/k)$. Rappelons qu'une donnée de descente à la Weil [42, 3.45] est une structure $\phi^\mathbb{Z}$ -équivariante au-dessus de \widehat{K}^{nr} . Ceci étant, si (X, ρ) est un \mathcal{O}_D -module formel rigidifié au-dessus de B , alors on en définit un autre $(\phi^*X, \phi^*\rho)$ au-dessus de $\phi^*B := B \otimes_{\mathcal{O}_{nr}, \phi} \mathcal{O}^{nr}$ en posant $\phi^*X := X \otimes_B \phi^*B$ et

$$\phi_\rho : \mathbb{X} \otimes_{k^{ca}} \phi^*(B/\varpi) \xrightarrow{Frob \otimes \text{Id}} \phi^*\mathbb{X} \otimes_{k^{ca}} \phi^*(B/\varpi) \xrightarrow{\phi^*\rho} \phi^*X \otimes_{\phi^*B} \phi^*(B/\varpi).$$

On obtient ainsi un morphisme de foncteurs $\tilde{G} \rightarrow \phi_*\tilde{G}$ dont on voit immédiatement qu'il est inversible, ce qui nous donne une structure $\phi^\mathbb{Z}$ -équivariante sur \tilde{G} , et donc sur $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$, au-dessus de $\text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}^{nr})$. Nommons momentanément $\tau_\phi : \phi^*\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ le $\text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}^{nr})$ -isomorphisme associé à cette $\phi^\mathbb{Z}$ -structure équivariante (adjoint du précédent), on obtient pour l'objet universel l'existence d'un isomorphisme canonique $\sigma_\phi : (\phi^*(X_u), \phi^*\rho_u) \xrightarrow{\sim} \tau_\phi^*(X_u, \rho_u)$ au-dessus de $\phi^*\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$, d'où, par composition, une structure $\phi^\mathbb{Z}$ -équivariante

$$\phi^*(X_u) \xrightarrow{\sigma_\phi} \tau_\phi^*X_u = X_u \times_{\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}} \phi^*\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0} \xrightarrow{proj_1} X_u$$

au-dessus de $\text{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}^{nr})$. En passant aux fibres génériques, on obtient sur les $\mathcal{M}_{Dr,n}$ les données de descente annoncées dans 3.1.1 i) (c).

3.1.6 *Sur \widehat{K}^{ca}* : Étendons maintenant les scalaires à \widehat{K}^{ca} , en suivant la définition de [4, 1.4]. On obtient une tour de \widehat{K}^{ca} -espaces analytiques

$$\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca} := \mathcal{M}_{Dr,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}^{ca}, \quad n \in \mathbb{N}$$

que nous avons notée simplement \mathcal{M}_{Dr}^{ca} dans l'introduction. La structure I_K -équivariante sur $\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}$ au-dessus de \widehat{K}^{ca} induite par ce changement de base et la structure $\phi^\mathbb{Z}$ -équivariante précédente se "recolle" en une structure W_K -équivariante au-dessus de $\mathcal{M}(\widehat{K}^{ca})$. De manière équivalente, on obtient une action de W_K à droite sur l'"espace analytique au-dessus de K " $\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}$, compatible à l'action naturelle de W_K sur \widehat{K}^{ca} . Ainsi la tour \mathcal{M}_{Dr}^{ca} est munie d'une action de $G \times D^\times \times W_K$, et on vérifie sur les définitions que celle-ci est triviale sur $K_{diag}^\times \times 1$.

3.1.7 *Le morphisme de périodes* : Soit Ω_K^{d-1} l'espace symétrique de Drinfeld, défini comme le complémentaire des hyperplans rationnels dans \mathbb{P}_K^{d-1} , et $\Omega_K^{d-1, nr}$ son changement de base à \widehat{K}^{nr} . Drinfeld a construit dans [22] un isomorphisme $\xi^{(0)} : \widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(0)} \rightarrow \widehat{\Omega}_K^{d-1, nr}$ où $\widehat{\Omega}_K^{d-1, nr}$ désigne un certain modèle formel de $\Omega_K^{d-1, nr}$ défini auparavant par Deligne. Nous n'avons besoin ici que de la fibre générique de ce morphisme ξ , mais nous avons par contre besoin de l'étendre à tout $\mathcal{M}_{Dr,0}$. Pour cela nous utilisons l'isomorphisme de \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques $\tau_{\phi^h} : (\phi^h)^*\mathcal{M}_{Dr,0} \rightarrow \mathcal{M}_{Dr,0}$ qui induit un isomorphisme $(\phi^h)^*\mathcal{M}_{Dr,0}^{(0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{Dr,0}^{(h)}$ et nous définissons $\xi^{(h)}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\phi^h)^*\mathcal{M}_{Dr,0}^{(0)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{M}_{Dr,0}^{(h)} \\ (\phi^h)^*\xi^{(0)} \downarrow & & \downarrow \xi^{(h)} \\ (\phi^h)^*\Omega_K^{d-1, nr} & \xrightarrow{\sim} & \Omega_K^{d-1, nr} \end{array}$$

où la flèche du bas est la donnée de descente naturelle sur $\Omega_K^{d-1, nr}$. Enfin on pose $\xi := \bigsqcup_{h \in \mathbb{Z}} \xi^{(h)} : \mathcal{M}_{Dr,0} \rightarrow \Omega_K^{d-1, nr}$. Une construction directe (et plus "simple" que celle de Drinfeld) de ce ξ est proposée

dans le chapitre 5 de Rapoport-Zink [42], mais n'est rédigée qu'en inégales caractéristiques (techniques cristallines).

Les assertions de 3.1.1 ii) sont contenues dans les références usuelles [22], [10], [28] et [42]. Commentons seulement la compatibilité à l'action de G : dans les références précédentes l'action de G sur les $\mathcal{M}_{Dr,n}$ est l'action "naturelle" dont la notre se déduit par $g \mapsto {}^t g^{-1}$. Le morphisme de période y est équivariant pour l'action naturelle sur le modèle "dual" de Ω_K^{d-1} , à savoir l'ensemble des hyperplans de K^d ne contenant pas de droites rationnelles. C'est pourquoi, avec notre normalisation différente et notre définition de Ω_K^{d-1} , le morphisme de périodes reste G -équivariant.

3.2 La tour de Lubin-Tate

3.2.1 C'est un système $\cdots \mathcal{M}_{LT,n} \xrightarrow{\pi_{n,n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_{1,0}} \mathcal{M}_{LT,0} \xrightarrow{\xi_{LT}} S_K^{1/d}$, où

i) Les $\mathcal{M}_{LT,n}$, $n \in \mathbb{N}$ sont des \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques munis

(a) d'une action continue de D^\times ,

(b) d'un système de morphismes étales finis $g^{n'|n} : \mathcal{M}_{LT,n} \rightarrow \mathcal{M}_{LT,n'}$ définis pour tous g, n, n' satisfaisant $gM_d(\mathcal{O}_K)g^{-1} \subset \varpi^{n'-n}M_d(\mathcal{O}_K)$ et tels que

i. $\forall g, h \in G$, $g^{n''|n'}h^{n'|n} = (gh)^{n''|n}$ lorsque tous sont bien définis.

ii. $\forall n, n'$, $\pi_{n,n'} = 1^{n'|n}$.

iii. $\forall n$, les $g^{n|n}$ font de $\pi_{n,0}$ un revêtement étale galoisien de groupe $GL_d(\mathcal{O}_K)/(1+\varpi^n M_d(\mathcal{O}_K))$.

(c) d'une donnée de descente à la Weil pour l'extension $\widehat{K}^{nr}|K$.

Ces données sont compatibles entre elles et l'action de $K_{diag}^\times \subset D^\times \times G$ est triviale sur chaque $\mathcal{M}_{LT,n}$.

ii) l'augmentation ξ_{LT} est un morphisme d'espaces analytiques au-dessus de K , qui après extension des scalaires, devient étale surjectif, compatible aux données de descente, et équivariant si l'on munit la variété de Severi-Brauer $S_K^{1/d}$ d'invariant $1/d$ de l'action naturelle de D^\times et triviale de $GL_d(K)$. On a donc $\xi_{LT} \circ g^{0|n} = \xi_{LT} \circ 1^{0|n}$ pour tous g, n tels que $gM_d(\mathcal{O}_K)g^{-1} \subset \varpi^{-n}M_d(\mathcal{O}_K)$.

Nous donnons maintenant un peu de substance à cette enveloppe formelle en rappelant la définition de ces objets. Elle repose sur l'existence d'un \mathcal{O}_K -groupe formel \mathbb{X} sur k^{ca} de dimension 1 et hauteur d , au sens de [21] ou [36] et qui est unique à isomorphisme près, [21, prop 1.6-7].

3.2.2 Déformations de \mathbb{X} : On peut comme dans le livre de Rapoport-Zink exprimer le problème de modules sur la catégorie Nilp et de manière semblable au cas de la tour de Drinfeld. Nous donnons malgré tout la définition historique en termes de déformations, car c'est la seule écrite en égales caractéristiques. Soit \mathcal{C} la catégorie des $\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$ -algèbres locales de corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_p$ et complètes pour leur topologie adique. Une *déformation par quasi-isogénie* de \mathbb{X} sur une telle algèbre R est une paire (X, ρ) formée d'un \mathcal{O}_K -module formel X sur R et d'une quasi-isogénie $\mathbb{X} \xrightarrow{\rho} X \otimes_R R/\mathfrak{M}_R$. Notons Def le foncteur de \mathcal{C} dans les ensembles qui à R associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations par quasi-isogénie (X, ρ) de \mathbb{X} sur R . Ce foncteur est une réunion disjointe de sous-foncteurs $\text{Def}^{(h)}$ classifiant les couples (X, ρ) avec ρ de hauteur h . Tous les $\text{Def}^{(h)}$ sont non-canoniquement isomorphes à $\text{Def}^{(0)}$. De plus, comme une quasi-isogénie de hauteur nulle entre deux \mathcal{O}_K -modules formels de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est un isomorphisme (c'est une conséquence de [21], props 1.6-2 et 1.7), on voit que $\text{Def}^{(0)}$ est le foncteur de déformations étudié par Drinfeld. D'après [21, 4.2] on sait que $\text{Def}^{(0)}$ est représentable par l'algèbre $R^{(0)} := \widehat{\mathcal{O}}^{nr}[[T_1, \dots, T_{d-1}]]$ des séries formelles à $d-1$ variables sur $\widehat{\mathcal{O}}^{nr}$. Nous noterons alors $\mathcal{M}_{LT,0}^{(0)}$ le \widehat{K}^{nr} -espace analytique de Berkovich associé au schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,0}^{(0)} := \text{Spf}(R^{(0)})$ (suivant la procédure de Raynaud-Berthelot décrite dans [7]) : c'est la boule unité ouverte de dimension $d-1$. Il s'ensuit que les foncteurs $\text{Def}^{(h)}$ pour $h \in \mathbb{N}$ sont aussi représentables et nous noterons $\mathcal{M}_{LT,0}^{(h)}$ les espaces analytiques associés. Nous posons enfin $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,0} := \bigsqcup_{h \in \mathbb{N}} \widehat{\mathcal{M}}_{LT,0}^{(h)}$ et notons sans $\widehat{}$ l'espace analytique associé.

3.2.3 Structures de niveau : On peut suivre la même procédure que dans le cas Dr . En notant encore (X_u, ρ_u) l'objet universel sur $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,0}$, on définit $\mathcal{M}_{LT,n}$ comme le revêtement étale galoisien de groupe $GL_d(\mathcal{O}/\varpi^n\mathcal{O})$ de $\mathcal{M}_{LT,0}$ représentant le torseur

$$\underline{\text{Isom}}((\varpi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d, X_u[\varpi^n]).$$

Il se trouve que dans ce cas LT on peut faire mieux en interprétant $\mathcal{M}_{LT,n}$ comme la fibre générique d'un problème de modules classifiant les "structures de niveau de Drinfeld" : cela a l'avantage de simplifier la description de l'action de G^7 . Soit $\Lambda \subset K^d$ un \mathcal{O} -réseau. Si $R \in \mathcal{C}$ et (X, ρ) est une déformation par quasi-isogénie de \mathbb{X} au-dessus de R , alors une Λ -structure de niveau n de Drinfeld sur X est un morphisme de \mathcal{O} -modules ψ de $\varpi^{-n}\Lambda/\Lambda$ vers l'idéal maximal \mathfrak{M}_R muni de la structure de \mathcal{O} -module définie par X et tel que

$$\prod_{x \in \varpi^{-1}\Lambda/\Lambda} (T - \psi(x)) \text{ divise } X_\varpi(T)$$

où $X_\varpi(T)$ désigne la série formelle donnant l'action de ϖ sur X . Les foncteurs $\text{Def}_{\Lambda,n}^{(h)}$ classifiant les triplets (X, ρ, ψ) à isomorphisme près sont représentables [21, 4.3] par des algèbres $R_{\Lambda,n}^{(h)}$ finies et plates sur les $R^{(h)}$ et nous noterons $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\Lambda,n} := \bigsqcup_{h \in H} \text{Spf} R_{\Lambda,n}^{(h)}$. Lorsque Λ est le réseau "canonique" $\mathcal{O}^d \subset K^d$, la fibre générique de $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\Lambda,n}$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{M}_{LT,n}$. Évidemment pour n fixé, tous les $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\Lambda,n}$ sont (non-canoniquement) isomorphes.

3.2.4 Action des groupes : On sait que le groupe des quasi-isogénies du \mathcal{O} -module formel \mathbb{X} s'identifie à D^\times . Ceci nous permet de définir une action à gauche de D^\times sur $\mathcal{M}_{LT,0}$, puis sur les $\mathcal{M}_{LT,n}$ d'une manière exactement analogue à celle par laquelle on a défini l'action de G sur $\mathcal{M}_{Dr,0}$ et les $\mathcal{M}_{Dr,n}$. Explicitement, on envoie un triplet (X, ρ, ψ) sur le triplet $(X, \rho \circ d_{\mathbb{X}}^{-1}, \psi)$.

L'action de G est plus délicate. Elle est soigneusement définie dans [31, II.2] (où les déformations sont cependant par isomorphismes) et [46] (qui traite les déformations par quasi-isogénies). On rappelle ici brièvement cette définition, en l'exposant un peu différemment des références usuelles. Pour deux réseaux Λ, Λ' dans K^d , nous noterons $d(\Lambda, \Lambda')$ la distance combinatoire entre les points de l'immeuble de $PGL_d(K)$ associés. C'est le minimum de la somme $r + k$ pour tous les couples d'entiers $r, k \in \mathbb{Z}$ tels que

$$(3.2.5) \quad \Lambda \subseteq \varpi^{-r}\Lambda' \subseteq \varpi^{-r-k}\Lambda.$$

Lemme 3.2.6 *Il existe une famille de morphismes D^\times -équivariants de foncteurs*

$$\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n} : \text{Def}_{\Lambda,n} \longrightarrow \text{Def}_{\Lambda',n'}$$

indicée par les quadruplets $(\Lambda, \Lambda', n, n')$ où Λ, Λ' sont des réseaux de K^d et $n, n' \in \mathbb{N}$ sont tels que $n - n' \geq d(\Lambda, \Lambda')$, et telle que

i) si $\Lambda = \Lambda'$, alors $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n}$ est le morphisme de restriction de la structure de niveau.

ii) pour tout autre Λ'', n'' avec $n' - n'' \geq d(\Lambda', \Lambda'')$, on a $\alpha_{\Lambda''|\Lambda}^{n''|n} = \alpha_{\Lambda''|\Lambda'}^{n''|n'} \circ \alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n}$.

iii) les fibres génériques des morphismes de schémas formels $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,\Lambda,n} \longrightarrow \widehat{\mathcal{M}}_{LT,\Lambda',n'}$ associés sont étales, finies et surjectives (au sens de Berkovich, par exemple).

À partir de ce lemme, on définit l'action de G de la manière suivante : tout $g \in G$ induit un isomorphisme $\text{Def}_{\Lambda,n} \xrightarrow{\sim} \text{Def}_{g\Lambda,n}$ qui envoie le triplet (X, ρ, ψ) sur le triplet $(X, \rho, \psi \circ g^{-1})$. On pose alors pour tous $n, n' \in \mathbb{N}$ "adéquates", c'est-à-dire tels que $n - n' \geq d(g\mathcal{O}^d, \mathcal{O}^d)$

$$(3.2.7) \quad g^{n'|n} : \text{Def}_{\mathcal{O}^d,n} \xrightarrow{\sim} \text{Def}_{g\mathcal{O}^d,n} \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{O}^d|g\mathcal{O}^d}^{n'|n}} \text{Def}_{\mathcal{O}^d,n'}.$$

⁷On peut néanmoins se passer d'une telle interprétation modulaire comme il est esquissé dans [42, 5.34] et expliqué dans [25, 2.3.8.3]

En passant aux fibres génériques, on en déduit les $g^{n'|n}$ de 3.2.1. Notons que leurs degrés ne dépendent pas de g et sont égaux à $[1 + \varpi^{n'} M_d(\mathcal{O}) : 1 + \varpi^n M_d(\mathcal{O})] = q^{d^2(n-n')}$.

Preuve : Remarquons que dans l'égalité ii), le quadruplet $(\Lambda, \Lambda'', n, n'')$ vérifie bien $n - n'' \geq d(\Lambda, \Lambda'')$ par l'inégalité triangulaire.

Fixons maintenant $(\Lambda, \Lambda', n, n')$ et choisissons (k, r) vérifiant 3.2.5 et tels que $n - n' \geq k + r$. On définit un morphisme $(\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n})_{k,r}$ comme dans l'énoncé du lemme en associant à (X, ρ, ψ) au-dessus de $R \in \mathcal{C}$ le triplet $(X'_{k,r}, \rho'_{k,r}, \psi'_{k,r})$ au-dessus de R défini par

- $X'_{k,r} := X/\psi(\varpi^{-r}\Lambda'/\Lambda)$, dont l'existence (et la définition précise) est assurée par [21, Lemma 4.4], ou [31, Lemma II.2.4].
 - $\rho'_{k,r} : \mathbb{X} \xrightarrow{\varpi^{-r}} \mathbb{X} \xrightarrow{\rho} X \otimes_R R/\mathfrak{M}_R \xrightarrow{can} X' \otimes_R R/\mathfrak{M}_R$.
 - $\psi'_{k,r} : \varpi^{-n'}\Lambda'/\Lambda' \xrightarrow{\times \varpi^{-r}} \varpi^{-r-n'}\Lambda'/\varpi^{-r}\Lambda' \hookrightarrow \varpi^{-n}\Lambda/\varpi^{-r}\Lambda' \dashrightarrow (\mathfrak{M}_R, X')$
- $$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & \varpi^{-n}\Lambda/\Lambda & (\mathfrak{M}_R, X) \\ & \xrightarrow{\psi} & \uparrow \\ & & can \end{array}$$

Il est clair que ce morphisme est D^\times -équivariant. Il nous faut voir qu'il ne dépend pas du couple (k, r) tel que $n - n' \geq k + r$. Soit (k', r') un autre tel couple, et supposons que $r' \geq r$. Dans ce cas la multiplication par $\varpi^{r'-r}$ dans le \mathcal{O}_K -module formel $X/\psi(\varpi^{-r}\Lambda'/\Lambda)$ induit un isomorphisme $X/\psi(\varpi^{-r'}\Lambda'/\Lambda) \xrightarrow{\sim} X/\psi(\varpi^{-r}\Lambda'/\Lambda)$. On vérifie alors aisément que cet isomorphisme induit un isomorphisme de triplets $(X'_{k',r'}, \rho'_{k',r'}, \psi'_{k',r'}) \xrightarrow{\sim} (X'_{k,r}, \rho'_{k,r}, \psi'_{k,r})$.

La propriété i) est immédiate. Pour la propriété ii), choisissons (k, r) comme ci-dessus et (k', r') tel que $n' - n'' \geq k' + r'$ et $\Lambda' \subseteq \varpi^{-r'}\Lambda'' \subseteq \varpi^{-r'-k'}\Lambda'$. Alors soit $(k'', r'') := (k' + k, r' + r)$, on a bien $n - n'' \geq k'' + r''$ et $\Lambda \subseteq \varpi^{-r''}\Lambda'' \subseteq \varpi^{-r''-k''}\Lambda$ et on vérifie sur la définition que $(\alpha_{\Lambda''|\Lambda}^{n''|n})_{k'',r''} = (\alpha_{\Lambda''|\Lambda'}^{n''|n'})_{k',r'} \circ (\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n})_{k,r}$. Il reste à montrer l'étalement finitude et la surjectivité des morphismes induits sur les fibres génériques. Pour cela, on utilise le fait que lorsque on a deux morphismes analytiques tels que $g \circ f$ est étale, alors $(g$ étale) $\Rightarrow (f$ étale), et $(f$ étale surjectif) $\Rightarrow (g$ étale). Rappelons maintenant que les morphismes de restriction de la structure de niveau sont étales surjectifs (et finis) en fibre générique. Ainsi, étant donné un quadruplet $(\Lambda, \Lambda', n, n')$ tel que $n - n' \geq d(\Lambda, \Lambda') =: \delta$, l'égalité $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{0|n'} \alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n} = \alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{0|\delta} \alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{\delta|n}$ montre que $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{n'|n}$ est étale en fibre générique si et seulement si $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{0|\delta}$ l'est, et donc si et seulement si $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{2\delta|3\delta}$ l'est ! Ce dernier est le premier morphisme de la suite

$$\text{Def}_{\Lambda, 3\delta} \longrightarrow \text{Def}_{\Lambda', 2\delta} \longrightarrow \text{Def}_{\Lambda, \delta} \longrightarrow \text{Def}_{\Lambda', 0}.$$

En fibre générique, le caractère de la composée des deux dernières flèches $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{0|\delta} \circ \alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{\delta|2\delta} = \alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{0|2\delta}$ implique que celle du milieu, $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{\delta|2\delta}$, est non-ramifiée. Mais alors, toujours en fibre générique, le caractère étale et fini de la composée des deux premières flèches implique par [4, 3.2.9] que $\alpha_{\Lambda'|\Lambda}^{2\delta|3\delta}$ est étale et finie. La surjectivité se voit de la même manière. \square

La donnée de descente se définit comme pour la tour de Drinfeld (voir [42, 3.48]), et ici encore se recolle avec l'action de l'inertie sur les

$$\mathcal{M}_{LT,n}^{ca} := \mathcal{M}_{LT,n} \widehat{\otimes}_{\widehat{K}^{nr}} \widehat{K}^{ca}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.8 Morphisme de périodes : Dans le cas LT , le morphisme de périodes n'est défini qu'en fibre générique. Il a été d'abord défini dans [36, par. 23] à partir de calculs explicites. La définition la plus visiblement intrinsèque est celle de [42, ch. 5] mais elle fait appel aux techniques cristallines des groupes p -divisibles et n'est écrite qu'en inégales caractéristiques⁸.

Dans chacune des définitions, la construction repose sur l'existence d'un \widehat{K}^{nr} -espace vectoriel \mathbb{M} de dimension d muni d'une action de D^\times et attaché au \mathcal{O} -module formel \mathbb{X} (son module de Dieudonné

⁸Cependant, A. Genestier sait adapter au cas d'égaux caractéristiques, par exemple en utilisant le module de coordonnées

dans le cas d'inégales caractéristiques ou son module de coordonnées en égales caractéristiques) et d'un isomorphisme D^\times -équivariant de $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{LT,0}}$ -modules

$$\mathbb{M} \otimes_{\widehat{K}^{nr}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{LT,0}} \xrightarrow{\sim} M_{X_u}$$

où M_{X_u} est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathcal{M}_{LT,0}$ attaché à l'objet universel X_u (obtenu comme fibre générique de l'algèbre de Lie de l'extension vectorielle universelle de l'objet universel X_u au-dessus de $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,0}$, resp. de son module de coordonnées en égales caractéristiques). Notons alors Lie_{X_u} le $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{LT,0}}$ -module inversible obtenu comme fibre générique de l'algèbre de Lie de X_u au-dessus de $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,0}$; la composée

$$\mathbb{M} \otimes_{\widehat{K}^{nr}} \mathcal{O}_{\mathcal{M}_{LT,0}} \xrightarrow{\sim} M_{X_u} \longrightarrow \text{Lie}_{X_u}$$

définit un morphisme de \widehat{K}^{nr} -espaces analytiques

$$\xi^{nr} : \mathcal{M}_{LT,0} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{M}) \simeq \mathbb{P}^{d-1, nr}$$

qui est le morphisme de périodes voulu. Le fait que ξ^{nr} est étale au sens rigide-analytique est prouvé dans [42, 5.17]. Il se trouve qu'il est aussi étale au sens de Berkovich car son bord relatif est vide. La surjectivité de ξ^{nr} est prouvée, au moins pour les points classiques (rigides analytiques) dans [36, 23.5], mais la preuve de *loc.cit* montre aussi la surjectivité pour les points de Berkovich. Les propriétés d'équivariance se trouvent dans [42, 5.37] ou [36, 23.28].

Par ailleurs, les isomorphismes $\mathbb{M}(\mathbb{X}) \xrightarrow{\text{Frob}} \mathbb{M}(\phi^*\mathbb{X}) = \phi^*\mathbb{M}(\mathbb{X})$ munissent \mathbb{M} et donc $\mathbb{P}(\mathbb{M})$ d'une donnée de descente à la Weil compatible à ξ^{nr} . Explicitons-là dans le cas où K est de caractéristique nulle : alors le \mathcal{O}_K -groupe formel \mathbb{X} sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ est p -divisible et \mathbb{M} est l'isocrystal associé. Sa dimension sur \widehat{K}^{nr} est la hauteur d de \mathbb{X} , et son unique pente est $1/d$. En particulier \mathbb{M} est irréductible et donc "défini sur \mathbb{F}_p " au sens suivant : il existe une base de \mathbb{M} dans laquelle le Frobenius est donné par la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \varpi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, la forme rationnelle de } \mathbb{P}^{d-1} \text{ correspondant à la donnée de descente sur}$$

$\mathbb{P}(\mathbb{M})$ est celle associée au 1-cocycle $\text{Gal}(\widehat{K}^{nr}/K) = \phi^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^{d-1}) = \text{PGL}_{d-1}(\widehat{K}^{nr})$ qui envoie ϕ sur la matrice Φ . Cette forme rationnelle est la variété de Severi-Brauer d'invariant $1/d$.

Dans le cas où K est de caractéristique positive, le même raisonnement s'applique au module de coordonnées \mathbb{M} .

3.3 Définition du $R\Gamma_c$

Dans cette section, nous définissons les complexes de cohomologie des tours \mathcal{M}_{LT}^{ca} et \mathcal{M}_{Dr}^{ca} . On les obtient comme évaluation en un faisceau constant du foncteur dérivé d'un certain foncteur "sections à support compact sur la tour". Comme on veut que ce foncteur soit à valeurs dans la catégorie des $G \times D^\times \times W_K$ -modules, le plus facile (surtout du côté LT) est de prendre pour source de ce foncteur la catégorie des faisceaux équivariants sur (la descente de) l'espace des périodes. Nous utiliserons sans commentaires, mais avec des références précises, le formalisme présenté dans l'appendice B de [17], et qui est essentiellement dû à Berkovich et Jannsen. Pour le confort du lecteur, rappelons sans les définir les principales notations de cet appendice :

- \widehat{X}_{et} désigne le topos étale d'un espace analytique X et $\Gamma_!(X, -)$ les sections à support compact.
- $\widehat{X}_{et}(G)$ désigne le topos formé par les faisceaux étales G -équivariants d'un espace algébrique X muni d'une action *continue* d'un groupe topologique G [17, B.1.4]. On sait alors que le foncteur des sections à support compact se factorise par la catégorie (le topos) \widetilde{G} des ensembles discrets munis d'une action continue de G et nous notons $\Gamma_1^{\infty G}(X, -) : \widehat{X}_{et}(G) \longrightarrow \widetilde{G}$ le foncteur obtenu.
- $\text{Mod}_\Lambda(\mathcal{T})$ désigne la catégorie abélienne des Λ -modules d'un topos \mathcal{T} [17, B.1.5].

- Si Λ est une extension finie (sous-entendu locale et plate) de \mathbb{Z}_l d’uniformisante λ , on note Λ_\bullet le pro-anneau $(\Lambda/\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\mathcal{T})$ désigne la catégorie abélienne des Λ_\bullet -modules du topos \mathcal{T} (i.e. des systèmes projectifs $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Λ -faisceaux sur \mathcal{T} tels que $\lambda^n \mathcal{F}_n = 0$). On a un foncteur $\varprojlim^{\mathcal{T}} : \text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\mathcal{T}) \longrightarrow \text{Mod}_\Lambda(\mathcal{T})$ [17, B.2.2].
- On note $\Gamma_{\dagger, \bullet}^{\infty G} := \Gamma_{\dagger}^{\infty G} \circ \varprojlim^{\widetilde{X}_{et}(G)} : \text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{X}_{et}(G)) \longrightarrow \text{Mod}_\Lambda(G)$ [17, B.2.4].

3.3.1 Sections à supports compacts sur la tour : Comme les constructions sont formellement identiques pour chacune des deux tours, nous ommettrons parfois la notation Dr ou LT . Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ξ_n désignera soit la composée

$$\xi_{Dr, n} : \mathcal{M}_{Dr, n}^{ca} \longrightarrow \mathcal{M}_{Dr, 0}^{ca} \longrightarrow \Omega_K^{d-1, nr} \longrightarrow \mathcal{P}_{Dr} := \Omega_K^{d-1}$$

soit la composée

$$\xi_{LT, n} : \mathcal{M}_{LT, n}^{ca} \longrightarrow \mathcal{M}_{LT, 0}^{ca} \longrightarrow \mathbb{P}_K^{d-1, nr} \longrightarrow \mathcal{P}_{LT} := S_K^{1/d}.$$

Il s’agit de morphismes d’espaces “analytiques au-dessus de K ” au sens de [4], les deux premiers espaces étant \widehat{K}^{ca} -analytiques, le troisième \widehat{K}^{nr} -analytique, et le dernier K -analytique. Dans chacun des cas, l’espace des périodes \mathcal{P} est muni d’une action continue du groupe J en posant $J_{Dr} := G$ et $J_{LT} := D^\times$. Comme les morphismes J -équivalents $\mathcal{M}_n^{ca} \xrightarrow{\pi_{n, n'}} \mathcal{M}_{n'}^{ca}$ sont finis, on a $\pi_{n, n'} = \pi_{n, n', *}$. Donc pour tout objet $\mathcal{F} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J)$, on a des applications naturelles J -équivalentes

$$\pi_{n, n'}^* : \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_{n'}^{ca}, \xi_{n'}^*(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \pi_{n, n'}^* \xi_{n'}^*(\mathcal{F})) = \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F}))$$

Fait 3.3.2 L’ensemble $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F}))$ est muni d’une action continue de $G \times D^\times \times W_K$ et triviale sur le sous-groupe $K_{diag}^\times \times 1$.

Preuve : Dans les deux cas, on a visiblement une action continue de $(J \times W_K)$. Dans le cas Dr , on a aussi immédiatement l’action de D^\times . On s’occupe donc du cas LT , où il reste à expliquer l’action de G .

Fixons $g \in G$ et $n \geq n'$ tels que le morphisme $g^{n'|n} : \mathcal{M}_{LT, n}^{ca} \longrightarrow \mathcal{M}_{LT, n'}^{ca}$ soit défini. Celui-ci étant fini, on a $(g^{n'|n})_! = (g^{n'|n})_*$, donc l’égalité $\xi_{LT, n'} \circ g^{n'|n} = \xi_{LT, n}$ de 3.2.1 ii) fournit le morphisme

$$g^{n'|n, *} : \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_{LT, n'}^{ca}, \xi_{LT, n'}^*(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_{LT, n}^{ca}, \xi_{LT, n}^*(\mathcal{F})).$$

D’après les propriétés 3.2.1 i)(b) i et ii, on obtient à la limite inductive un morphisme $g^* : \Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \mathcal{F})$ qui commute à l’action de $D^\times \times W_K$, Cela définit une action à droite de G , et pour nous ramener à une action à gauche, nous ferons agir g sur $\Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}^{ca}, \mathcal{F})$ par son inverse g^{-1} . La trivialité de cette action sur K_{diag}^\times vient de la fin de 3.2.1 i). \square

Posons $GD := (G \times D^\times)/K_{diag}^\times$. On a donc obtenu un foncteur “sections à supports compacts sur la tour”

$$\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, -) : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J) & \rightarrow & (GD \times W_K) \\ \mathcal{F} & \mapsto & \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F})) \end{array}$$

dont le but est la catégorie des $GD \times W_K$ -ensembles continus. Ce foncteur commute aux limites projectives finies et envoie donc Λ -modules sur Λ -modules pour tout anneau Λ (constant sur $\widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J)$).

3.3.3 Cohomologie : La construction du système inductif $(\Gamma_{\dagger}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F})))_{n \in \mathbb{N}}$ et de l’action de $G \times D^\times \times W_K$ sur icelui reposaient sur la finitude des morphismes $\pi_{n, n'}$ et $g^{n'|n}$. Ces mêmes propriétés permettent de définir de manière analogue pour tout faisceau abélien et tout $q \in \mathbb{N}$ un système inductif $(H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F})))_{n \in \mathbb{N}}$ muni d’une action de $G \times D^\times \times W_K$.

Fait 3.3.4 Pour tout $q \in \mathbb{N}$, il y a un isomorphisme de foncteurs $\text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J)) \longrightarrow \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(GD \times W_K)$ canonique :

$$R^q \Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, -) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(-)).$$

Preuve : En effet, par commutation de la cohomologie aux limites inductives filtrantes, on a

$$R^q \Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, -) = \varinjlim R^q(\Gamma_!^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, -) \circ \xi_n^*).$$

Comme on sait par Berkovich que $R^q \Gamma_!^{\infty J}(X, -) = H_c^q(X, -)$ (voir [17, B.1.7]), il nous suffira de montrer que $R^q(\Gamma_!^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, -) \circ \xi_n^*) = R^q \Gamma_!^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, -) \circ \xi_n^*$ pour tout n . Or on a une factorisation $\xi_n^* : \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J)) \xrightarrow{\beta^*} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathcal{P}} \otimes_K \widetilde{K}^{ca}_{et}(J)) \xrightarrow{\xi_n^{ca*}} \text{Mod}_{\mathbb{Z}}(\widetilde{\mathcal{M}}_{n,et}^{ca}(J))$ où ξ_n^{ca} est un morphisme étale de \widetilde{K}^{ca} -espaces analytiques et β est le changement de base (ce n'est pas un morphisme d'espaces analytiques mais un morphisme des sites étales concernés). Ainsi ξ_n^{ca*} envoie injectifs sur injectifs puisqu'il est adjoint à droite du foncteur exact $\xi_n^{ca}!$, et β^* envoie suffisamment d'injectifs sur des injectifs, par exemple tous ceux de la forme $\beta_*(\mathcal{I})$, avec \mathcal{I} injectif. \square

En particulier, lorsque Λ est un anneau de torsion, le complexe $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$ a la bonne cohomologie.

Supposons maintenant que Λ est une extension finie de \mathbb{Z}_l et fixons $\mathcal{F}_\bullet = (\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J))$. Comme les morphismes $\pi_{n,n'}$ pour $n \geq n'$ sont étales, on a

$$\varinjlim \widetilde{\mathcal{M}}_{n,et}^{ca}(J)(\xi_n^* \mathcal{F}_\bullet) \simeq \pi_{n,n'}^* \varinjlim \widetilde{\mathcal{M}}_{n',et}^{ca}(J)(\xi_{n'}^* \mathcal{F}_\bullet).$$

Ainsi, la finitude de ces mêmes $\pi_{n,n'}$ fournit encore les morphismes de transition intervenant dans la limite suivante

$$\Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{ca}, \mathcal{F}_\bullet) := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_{!,\bullet}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F}_\bullet)).$$

Ce Λ -module est muni par définition d'une action lisse de J à gauche et d'une action commutante de W_K à droite (qui n'est plus nécessairement lisse à cause de la limite projective). On construit l'action du troisième groupe (D^\times pour le cas Dr ou G pour le cas LT) exactement comme dans 3.3.2. En particulier dans le cas LT , on utilise le caractère étale des $g^{n'|n}$ pour pouvoir écrire

$$\varinjlim \widetilde{\mathcal{M}}_{n,et}^{ca}(J)(\xi_n^* \mathcal{F}_\bullet) \simeq g^{n'|n^*} \varinjlim \widetilde{\mathcal{M}}_{n',et}^{ca}(J)(\xi_{n'}^* \mathcal{F}_\bullet).$$

grâce à 3.2.1 ii). On définit ainsi un foncteur

$$\Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{ca}, -) : \text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{\mathcal{P}}_{et}(J)) \longrightarrow \text{Mod}_{\Lambda}(GD \times W_K^{disc})$$

qui est exact à gauche. Dans le terme de droite, l'exposant *disc* signifie qu'on oublie la topologie de W_K ; en effet, on a perdu la lissité de l'action de W_K dans la limite projective.

Supposons maintenant que le Λ_\bullet -faisceau \mathcal{F}_\bullet soit un Λ -système local au sens de [17, B.2.1], et notons $H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*((\mathcal{F}_m)_m))$ la cohomologie à supports compacts de son image inverse sur \mathcal{M}_n^{ca} , définie dans ce cas par Berkovich (*cf loc. cit.*). Toujours les mêmes propriétés de propreté des $\pi_{n,n'}$ et $g^{n'|n}$ permettent de définir un système inductif $(H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*((\mathcal{F}_m)_m)))_{n \in \mathbb{N}}$ muni d'une action du groupe $G \times D^\times \times W_K$.

Fait 3.3.5 *Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout Λ -système local J -équivariant $(\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sur \mathcal{P} , on a un isomorphisme canonique $(G \times D^\times \times W_K)$ -équivariant :*

$$R^q \Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{ca}, \mathcal{F}_\bullet) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*((\mathcal{F}_m)_m))$$

Preuve : Comme dans le cas de torsion, la commutation de la cohomologie aux limites inductives filtrantes et le fait que ξ_n^* envoie suffisamment d'injectifs sur des injectifs montrent que

$$\begin{aligned} R^q \Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{ca}, \mathcal{F}_\bullet) &\simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left(R^q \left(\Gamma_{!,\bullet}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, -) \circ \xi_n^* \right) (\mathcal{F}_\bullet) \right) \\ &\simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \left(R^q \left(\Gamma_{!,\bullet}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, -) \right) (\xi_n^*(\mathcal{F}_\bullet)) \right) \end{aligned}$$

Mais d'après [17, Prop B.2.5 ii)] appliqué aux espaces analytiques quasi-algébriques (car lisses) \mathcal{M}_n^{ca} , on a $R^q\Gamma_{1,\bullet}^{\infty J}(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F}_\bullet)) \simeq H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \xi_n^*(\mathcal{F}_m)_m)$ pour tout Λ -système local J -équivariant \mathcal{F}_\bullet . \square

Nous pouvons maintenant poser :

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda) := R\Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda_\bullet) \in D_\Lambda^b(GD \times W_K^{disc}).$$

Par ce qui précède, sa cohomologie est $G \times D^\times \times W_K$ -isomorphe à la limite inductive $H_c^q(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$ des $H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \Lambda)$, $n \in \mathbb{N}$. En particulier, le morphisme canonique $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \mathbb{Z}_l) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \Lambda \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$ est un isomorphisme. Nous posons enfin

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) := \overline{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \mathbb{Z}_l) \in D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(GD \times W_K^{disc}).$$

Par commutation du produit tensoriel aux limites inductives, la cohomologie de ce complexe est donnée par $R^q\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq H_c^q(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} H_c^q(\mathcal{M}_n^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$.

3.4 Le théorème de Faltings-Fargues

Dans [24], Faltings a esquissé un lien remarquable entre les tours de Drinfeld et de Lubin-Tate. Ce lien est expliqué en détail et amplifié dans un travail en cours de Fargues [27] dans le cas où K est p -adique. Si on pouvait donner un sens géométrique raisonnable aux notations $\mathcal{M}^{ca} := \varinjlim \mathcal{M}_n^{ca}$, la formulation naturelle de ce ‘‘lien’’ serait de dire que les objets \mathcal{M}_{Dr}^{ca} et \mathcal{M}_{LT}^{ca} sont isomorphes, et de manière $G \times D^\times \times W_K$ -équivariante. Malheureusement ces objets n'ont vraiment pas de sens, et le résultat doit être formulé en termes de schémas formels p -adiques énormes et n'ayant plus du tout les propriétés de finitude normalement requises pour leur associer des espaces rigides. Mais une autre manière de formuler ce lien sans introduire de schémas formels est la suivante :

Théorème 3.4.1 (Faltings-Fargues) *Il existe une équivalence de topos $\widetilde{\mathcal{P}}_{Dr,et}(G) \simeq \widetilde{\mathcal{P}}_{LT,et}(D^\times)$ qui échange les deux foncteurs $\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, -)$ et $\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, -)$.*

C'est le théorème 13.2 du chapitre ‘‘cohomologie’’ de [27]. Sous cette forme, on obtient le corollaire immédiat

Corollaire 3.4.2 *Il existe un isomorphisme $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \mathbb{Z}_l) \simeq R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, \mathbb{Z}_l)$ dans $D_{\mathbb{Z}_l}^b(GD \times W_K^{disc})$.*

3.5 Variantes et décompositions

Dans cette section, on discute deux variantes de la construction de la section précédente dont on tire quelques propriétés des complexes $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$ où Λ désigne une \mathbb{Z}_l -algèbre finie pour un $l \neq p$. On s'intéresse ensuite à l'action du centre de la catégorie des $\Lambda(GD)$ -modules lisses sur ces complexes, puis dans le cas LT , on montre une propriété de finitude et on introduit une variante ‘‘sans supports’’.

3.5.1 Première variante : Dans [15], [31] et [11], les auteurs considèrent plutôt la cohomologie des tours $(\mathcal{M}_{?,n}^{(0),ca})_{n \in \mathbb{N}}$ pour $? = LT$ ou Dr , où l'exposant (0) désigne la composante connexe où la quasi-isogénie du problème de modules est de hauteur nulle, cf 3.1.3 et 3.2.2. Ces espaces ne sont pas stables sous l'action $GD \times W_K$; leur stabilisateur est le sous-groupe $(GD \times W_K)^0$ formé des triplets (g, d, w) tels que $|\det(g)\mathrm{Nr}(d)^{-1}|_K = |w|$. En définissant les $R\Gamma_c$ correspondants comme dans le paragraphe 3.3, on constate que les inclusions $\mathcal{M}_n^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{M}_n$ induisent par adjonction un isomorphisme

$$(3.5.2) \quad \mathrm{ind}_{(GD \times W_K)^0}^{GD \times W_K} \left(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{(0),ca}, \Lambda) \right) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$$

dans $D_\Lambda^b(GD \times W_K^{disc})$.

3.5.3 Deuxième variante : On peut aussi quotienter les tours $(\mathcal{M}_n)_n$ par l'action (libre) du sous-groupe $\varpi^{\mathbb{Z}}$ engendré par l'uniformisante $\varpi \in K^\times \subset G$. Les quotients $\mathcal{M}_n/\varpi^{\mathbb{Z}}$ sont non-canoniquement isomorphes à $\bigsqcup_{h=0}^{d-1} \mathcal{M}_n^{(h)}$. Comme $\varpi^{\mathbb{Z}}$ est central dans $G \times D^\times \times W_K$, ces quotients sont encore munis d'une action du produit triple. Pour alléger un peu les notations, nous surlignerons les quotients par $\varpi^{\mathbb{Z}}$, en posant $\overline{GD} := GD/\varpi^{\mathbb{Z}}$ et $\overline{\mathcal{M}} := \mathcal{M}/\varpi^{\mathbb{Z}}$ que nous décorerons éventuellement d'indices Dr , LT ou n . En répétant les constructions du paragraphe 3.3, on obtient un complexe (deux complexes, en fait) $R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}^{ca}, \Lambda) \in D_\Lambda^b(\overline{GD} \times W_K^{disc})$ qui se déduit de $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$ par la formule

$$(3.5.4) \quad \Lambda_{\otimes_{\Lambda[\varpi^{\mathbb{Z}]}}^L} R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}^{ca}, \Lambda)$$

(isomorphisme ‘‘canonique’’ dans $D_\Lambda^b(\overline{GD} \times W_K^{disc})$) où le produit tensoriel est pris par rapport au morphisme d'augmentation $\Lambda[\varpi^{\mathbb{Z}}] \rightarrow \Lambda$. On a aussi un lien avec la variante précédente :

$$(3.5.5) \quad \text{ind}_{(GD \times W_K)^0 \varpi^{\mathbb{Z}}}^{GD \times W_K} \left(R\Gamma_c(\mathcal{M}^{(0), ca}, \Lambda) \right) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}^{ca}, \Lambda).$$

3.5.6 Décomposition selon le centre de la catégorie des ΛD^\times -modules lisses : Notons $\mathfrak{Z}_\Lambda(GD)$ le centre de la catégorie abélienne $\text{Mod}_\Lambda(GD)$ des ΛGD -modules lisses. Comme le centre d'une catégorie abélienne agit encore sur la catégorie dérivée bornée associée (et s'identifie même au centre de celle-ci), on obtient une action canonique de $\mathfrak{Z}_\Lambda(GD)$ sur $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$. En particulier tout idempotent de $\mathfrak{Z}_\Lambda(GD)$ fournit un facteur direct de $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$. De plus, en utilisant les mêmes notations pour les groupes D^\times et G , on a des morphismes canoniques $\mathfrak{Z}_\Lambda(D^\times) \rightarrow \mathfrak{Z}_\Lambda(GD)$ et $\mathfrak{Z}_\Lambda(G) \rightarrow \mathfrak{Z}_\Lambda(GD)$ induits par les inclusions $D^\times \hookrightarrow GD$ et $G \hookrightarrow GD$.

La suite de sous-ensembles $1 + \varpi^n \mathcal{O}_D$, $n \in \mathbb{N}$ de D^\times est un système fondamental de voisinages de l'unité formé de pro- p -sous-groupes ouverts compacts distingués de D^\times . Comme p est inversible dans Λ , ces pro- p -sous-groupes ouverts définissent des idempotents de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_\Lambda(D^\times)$. Comme ils sont distingués, ces idempotents sont centraux : on note $\varepsilon_{n,D}$ leurs images dans $\mathfrak{Z}_\Lambda(D^\times)$ et $\varepsilon_{n,D} R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda) \in D_\Lambda^b(GD)$ le facteur direct de $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \Lambda)$ associé.

Interprétation géométrique : Du côté Dr , on prouve facilement (comme dans le lemme 3.5.9 ci-dessous, en plus simple) que l'inclusion de foncteurs $\Gamma_!^{\infty G}(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}, -) \circ \xi_{Dr,n}^* \hookrightarrow \Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, -)$ induit un isomorphisme dans $D_\Lambda^b(GD \times W_K^{disc})$

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_{n,D} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr}^{ca}, \Lambda).$$

Par contre, il n'y a pas d'interprétation géométrique évidente dans le cas LT .

3.5.7 Décomposition selon le centre de la catégorie des ΛG -modules lisses : On suppose toujours que Λ est un anneau où p est inversible. Il existe une décomposition ‘‘par le niveau’’ similaire à celle que nous avons utilisée pour D^\times ci-dessus, mais beaucoup moins triviale. Notons $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_\Lambda(G)$ formée des objets engendrés par leur vecteurs invariants sous le pro- p -sous-groupe ouvert $H_n := 1 + \varpi^n M_d(\mathcal{O})$ de $G = GL_d(K)$, et notons $\mathcal{H}_\Lambda(G, H_n)$ l'algèbre de Hecke de la paire (G, H_n) à coefficients dans Λ .

Fait 3.5.8 *La sous-catégorie $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$ est ‘‘facteur direct’’ de la catégorie $\text{Mod}_\Lambda(G)$. Les foncteurs*

$$V \mapsto V^{H_n} \quad \text{et} \quad M \mapsto \text{ind}_{H_n}^G(1) \otimes_{\mathcal{H}_\Lambda(G, H_n)} M$$

sont des équivalences ‘‘inverses’’ l'une de l'autre entre $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$ et la catégorie des $\mathcal{H}_\Lambda(G, H_n)$ -modules.

Preuve : Nous renvoyons à l'appendice de [18] (lemme A.3) où une décomposition par le niveau est obtenue pour des groupes réductifs plus généraux, en reprenant un argument de Vignéras reposant sur les filtrations de Moy et Prasad. Dans les notations du paragraphe A.2 de [18], on peut choisir pour ‘‘points optimaux’’ les isobarycentres des facettes dont l'adhérence contient le point spécial associé à $GL_d(\mathcal{O}_K)$. Pour un tel point x et tout $r > n$, on a $G_{x,r^+} \subseteq H_n$, donc la somme P_n des représentations $P(r)$, $r < n$ de *loc. cit.* est dans $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$. Réciproquement, toute représentation de $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$, et en particulier $\text{ind}_{H_n}^G(\Lambda)$, contient un type non-ramifié de niveau $> n$, donc est quotient d'une somme de copies de P_n . D'après le lemme A.3 et le paragraphe A.1 de [18], la représentation P_n découpe un facteur direct de $\text{Mod}_\Lambda(G)$ qui n'est donc autre que $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$. \square

On associe ainsi à tout entier $n \in \mathbb{N}$ un idempotent central $\varepsilon_{n,G}$ de $\mathfrak{Z}_\Lambda(G)$ qui “projette” la catégorie $\text{Mod}_\Lambda(G)$ sur sa sous-catégorie $\text{Mod}_\Lambda(G)_n$. Faisant agir cet idempotent sur la catégorie $\text{Mod}_\Lambda(GD)$, on en obtient un “facteur direct” $\varepsilon_{n,G} \text{Mod}_\Lambda(GD)$. On peut interpréter ce facteur direct en termes de modules lisses sur l’algèbre de Hecke $\mathcal{H}_\Lambda(GD, H_n)$ des mesures localement constantes à supports compacts et à valeurs dans Λ qui sont invariantes à droite et à gauche sous l’image de $H_n \longrightarrow GD$ (algèbre qui n’a pas d’unité, mais “suffisamment d’idempotents”). En effet, en notant toujours $\text{ind}_{H_n}^{GD}$ l’induction lisse à supports compacts, on déduit du fait précédent que les foncteurs

$$V \mapsto V^{H_n} \quad \text{et} \quad M \mapsto \text{ind}_{H_n}^{GD}(1) \otimes_{\mathcal{H}_\Lambda(GD, H_n)} M$$

sont inverses l’un de l’autre. Cette fois-ci l’interprétation géométrique se fait du côté LT :

Lemme 3.5.9 *L’inclusion de foncteurs $\Gamma_{!,\bullet}^{\infty D}(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, -) \circ \xi_{LT,n}^* \hookrightarrow \Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, -)$ induit un isomorphisme dans $D^b(\mathcal{H}_\Lambda(GD, H_n) \times W_K^{disc})$*

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \Lambda)^{H_n}$$

qui induit à son tour un isomorphisme dans $D_\Lambda^b(GD \times W_K^{disc})$

$$\text{ind}_{H_n}^{GD}(1) \otimes_{\mathcal{H}_\Lambda(GD, H_n)} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \varepsilon_{n,G} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \Lambda).$$

Preuve : Nous traitons le cas $\Lambda = \mathbb{Z}_l$, les autres cas s’en déduisant par extension des scalaires. Il suffit de montrer que pour tout Λ_\bullet -faisceau étale D^\times -équivariant \mathcal{F}_\bullet sur $\mathcal{P}_{LT} = S_K^{1/d}$, le morphisme canonique $\Gamma_{!,\bullet}^{\infty D}(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \xi_{LT,n}^*(\mathcal{F}_\bullet)) \longrightarrow \Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \mathcal{F}_\bullet)$ induit un isomorphisme $D^\times \times W_K$ -équivariant

$$(3.5.10) \quad \Gamma_{!,\bullet}^{\infty D}(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \xi_{LT,n}^*(\mathcal{F}_\bullet)) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \mathcal{F}_\bullet)^{H_n}.$$

En effet, cela montrera d’abord l’existence de l’action de $\mathcal{H}_\Lambda(GD, H_n)$ sur le terme de gauche et permettra donc de définir $R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \Lambda)$ comme un objet W_K -équivariant de $D^b(\mathcal{H}_\Lambda(GD, H_n))$. Puis cela montrera aussi les autres assertions du lemme, puisque le foncteur des points fixes sous H_n est bien-sûr exact.

Vue la définition de $\Gamma_{c,\bullet}(\mathcal{M}^{ca}, -)$, pour prouver 3.5.10 il suffit de montrer que pour $m \geq n$, l’application canonique induit un isomorphisme

$$\Gamma_{!,\bullet}^{\infty D}(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \xi_{LT,n}^*(\mathcal{F}_\bullet)) \xrightarrow{\sim} \Gamma_{!,\bullet}^{\infty D}(\mathcal{M}_{LT,m}^{ca}, \xi_{LT,m}^*(\mathcal{F}_\bullet))^{H_n}.$$

Rappelons que le morphisme $\pi_{m,n} : \mathcal{M}_{LT,m}^{ca} \longrightarrow \mathcal{M}_{LT,n}^{ca}$ est étale galoisien de groupe H_n/H_m et qu’on a $\pi_{m,n}^*(\varprojlim^{\mathcal{M}_n(D)} \xi_{LT,n}^*(\mathcal{F}_\bullet)) \xrightarrow{\sim} \varprojlim^{\mathcal{M}_m(D)} \xi_{LT,m}^*(\mathcal{F}_\bullet)$. Ainsi l’isomorphisme cherché est tautologique si on enlève l’indice c (supports compacts), mais on peut rajouter cet indice c , par propriété et surjectivité de $\pi_{m,n}$. \square

Corollaire 3.5.11 *Les Λ -modules $H_c^q(\overline{\mathcal{M}}_{LT}^{ca}, \Lambda)$, $q \in \mathbb{N}$, sont \overline{GD} -admissibles, et même G -admissibles. Par conséquent, le Λ -module $\text{End}_{D^b(\overline{GD})}(\varepsilon_{n,G} R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}_{LT}^{ca}, \Lambda))$ est de type fini.*

Preuve : Commençons par la première assertion. Grâce à 3.5.5, il nous suffit de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le Λ -module $H_c^q(\mathcal{M}_{LT,n}^{(0),ca}, \Lambda)$ est de type fini. Pour cela, rappelons que $\mathcal{M}_{LT,n}^{(0)}$ est la fibre générique d’un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT,n}^{(0)}$. On sait par diverses versions du théorème de Serre-Tate, cf [31, II.2.7] et [11, 7.4.4], que ce dernier est isomorphe au complété formel d’un schéma algébrique S_n propre sur \mathcal{O}^{nr} (une certaine variété de Shimura ou une variété de “Drinfeld-Stuhler”) en un point fermé x_n de sa fibre spéciale. Il s’ensuit que \mathcal{M}_n^{ca} s’identifie à un ouvert *distingué* (différence de deux espaces compacts) de l’analytifié $S_n^{ca,an}$ de S_n^{ca} . On en déduit grâce à la suite exacte associée à la différence des deux espaces compacts que sa cohomologie est de type fini (cf [5, cor. 5.6] dans le cas de torsion et [25, 4.1.15 et 4.1.17] dans le cas l -adique).

La seconde assertion vient du résultat suivant, de nature “théorie des représentations” :

Soit Λ un anneau noethérien où p est inversible. Soient $A^\bullet, B^\bullet \in D_\Lambda^b(\overline{GD})$ deux complexes à cohomologie G -admissible et de niveau fini. Alors $\text{Hom}_{D_\Lambda^b(\overline{GD})}(A^\bullet, B^\bullet)$ est un Λ -module de type fini.

En effet, grâce aux suites spectrales habituelles, il suffit de voir que chaque $Ext_{\Lambda \overline{GD}}^i(\mathcal{H}^q(A^\bullet), \mathcal{H}^k(B^\bullet))$ est de type fini sur Λ . Grâce à la suite exacte

$$1 \longrightarrow G/\varpi^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \overline{GD} \longrightarrow D^\times/K^\times \longrightarrow 1$$

et la compacité de D^\times/K^\times , il suffit encore de prouver que les Λ -modules $Ext_{\Lambda \overline{GD}}^i(\mathcal{H}^q(A^\bullet), \mathcal{H}^k(B^\bullet))$ sont de type fini. Comme le Λ -module $Hom_{\overline{GD}}(P, \mathcal{H}^k(B^\bullet))$ est de type fini dès que P est projectif de type fini dans $Mod_{\Lambda}(\overline{GD})$, il suffit de prouver que $\mathcal{H}^q(A^\bullet)$ admet une résolution par des objets projectifs de type fini. On peut pour cela invoquer deux arguments. Soit on reprend l'argument de Vignéras pour prouver [49, Thm 2.11] en remplaçant l'ingrédient [49, 2.2] par 3.5.8. Soit on utilise la noéthériannité de $Mod_{\Lambda}(G)$ prouvée dans [18], puisque $\mathcal{H}^q(A^\bullet)$ est par hypothèse de type fini. \square

3.5.12 *Une variante sans supports, du côté LT :* Dans le paragraphe 3.3, la raison qui nous force à utiliser la cohomologie à supports compacts est notre besoin d'un complexe vivant dans la catégorie dérivée $D_{\Lambda}(GD)$ des $\Lambda(GD)$ -modules *lisses*. Si l'on remplace $\Gamma_!$ par Γ , on perd la lissité du groupe J et on s'expose à des problèmes de coefficients l -adiques. Du côté *Dr*, cela est rédhibitoire, mais du côté *LT*, le complexe obtenu nous permettra de nous raccrocher aux travaux de Boyer.

Notons GD^{disc} le groupe GD muni de la topologie qui coïncide avec la topologie naturelle de $G \subset GD$ et induit la topologie discrète du quotient $GD/G = D^\times/K^\times$. Si l'on suit la procédure de 3.3.1 en y remplaçant $\Gamma_!$ par Γ , on obtient un foncteur

$$\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, -) : \widetilde{S}_{K,et}^{1/d}(D^{disc}) \longrightarrow (GD^{disc} \times W_K^{disc})^0$$

puis un complexe $R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \in D_{\Lambda}^b(GD^{disc} \times W_K^{disc})$. Si Λ est une \mathbb{Z}_l -algèbre finie, on a

$$R^q\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) = H^q(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) := \varinjlim_n \varprojlim_m H^q(\mathcal{M}_{LT,n}^{(0),ca}, \Lambda/l^m).$$

puisque pour chaque n , le système des $H^q(\mathcal{M}_{LT,n}^{(0),ca}, \Lambda/l^m)$ est AR- l -adique, cf [25, 5.9].

Notons avec un exposant \vee le foncteur contragrédiente sur $Mod_{\Lambda}(GD^{disc} \times W_K^{disc})$ et son dérivé sur D_{Λ}^b .

Lemme 3.5.13 *Si $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q}_l , il existe un isomorphisme canonique dans $D_{\Lambda}^b((GD^{disc} \times W_K^{disc})^0)$*

$$R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda)[2d-2](d-1) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda)^{\vee}.$$

Preuve : Commençons par construire un accouplement

$$(3.5.14) \quad R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \otimes_{\Lambda}^L R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \longrightarrow \Lambda[2-2d](1-d)$$

dans $D_{\Lambda}^b((GD^{disc} \times W_K^{disc})^0)$. Pour cela, remarquons que si on se donne trois objets abéliens de $\widetilde{\mathcal{P}}_{LT,et}(D^{disc})$ munis d'un morphisme $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$, on récolte sur les sections le morphisme

$$\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \mathcal{F}) \otimes \Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{ca}, \mathcal{H})$$

qui, par étale-finitude des $g^{m|n}$, est $GD^{disc} \times W_K$ -équivariant. Dans le cas où Λ est de torsion, en choisissant une résolution de Godement plate et multiplicative de l'anneau Λ , on obtient dans $D_{\Lambda}^b((GD^{disc} \times W_K^{disc})^0)$ un morphisme

$$R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \otimes_{\Lambda}^L R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \longrightarrow R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda).$$

Lorsque $\Lambda = \mathbb{Z}_l$, une résolution comme-ci-dessus fournit aussi une résolution flasque de l'anneau $(\mathbb{Z}/l^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $Mod_{\Lambda}(\widetilde{\mathcal{P}}_{LT,et}(D^{disc}))$ et on obtient encore un tel morphisme. On définit ensuite 3.5.14 par composition avec la flèche de $D_{\Lambda}^b((GD^{disc} \times W_K^{disc})^0)$

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \xrightarrow{\tau_{\leq 2d-2}} H_c^{2d-2}(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda)[2-2d] \xrightarrow{\sim} \Lambda[2-2d](1-d)$$

où la première flèche est justifiée par le fait que $H_c^q = 0$ pour $q > 2d - 2$, et la seconde est donnée par la famille des morphismes “traces” $H_c^{2d-2}(\mathcal{M}_{LT,n}^{ca}, \Lambda) \xrightarrow{\text{Tr}_n} \Lambda(1-d)$ normalisés par le facteur $|H_1/H_n|^{-1}$ (pour avoir la bonne variance). On en déduit ensuite formellement le morphisme de l'énoncé du lemme.

Supposons maintenant que $\Lambda = \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$ ou \mathbb{Q}_l . Puisque cet anneau est auto-injectif, le morphisme de l'énoncé induit en cohomologie des morphismes $H^q(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda) \longrightarrow H_c^{2d-2-q}(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda)^\vee(1-d)$ qui par construction, coïncident sur les H_n -invariants avec les isomorphismes de dualité de Poincaré dûs à Berkovich [7, Cor 2.3.ii] $H^q(\mathcal{M}_{LT,n}^{(0),ca}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^{2d-2-q}(\mathcal{M}_{LT,n}^{(0),ca}, \Lambda)^\vee(1-d)$ (voir aussi [25, 5.9.2] dans le cas l -adique). \square

4 Réalisation cohomologique des correspondances

Dans cette partie, nous prouvons le théorème A modulo une estimation sur l'action de l'inertie qui sera obtenue dans la partie suivante. Nous identifierons toujours les centres respectifs de $G = GL(K)$ et $D^\times = D_d^\times$ à K^\times , via les plongements canoniques. Un “caractère central” d'une représentation de G ou D^\times est donc un caractère de K^\times .

Fixons $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}_l}}(D^\times)$ et notons ω son caractère central. Nous allons étudier dans un premier temps le complexe

$$R\Gamma_c[\rho] := R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_l} D^\times}^L \rho \in D_\omega^b(G \times W_K^{disc}).$$

La catégorie dérivée est celle des $\overline{\mathbb{Q}_l}$ -représentations de $G \times W_K$ dont la restriction à G est lisse et de caractère central ω (rappelons que $R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ vit dans $D_{\overline{\mathbb{Q}_l}}^b(GD \times W_K)$, cf 3.3.3). Par 3.5.1, les $H_c^j(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}_l})$ sont projectifs en tant que représentations lisses de D^\times et on a donc

$$\mathcal{H}^j(R\Gamma_c[\rho]) \underset{G \times W_K^{disc}}{\simeq} H_c^j(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_l} D^\times} \rho.$$

Pour faire court, nous noterons simplement $H_c^j[\rho]$ ces objets de cohomologie. Par 3.5.11, ils sont G -admissibles (et de caractère central ω), sont non-nuls seulement si $d-1 \leq i \leq 2d-2$, et nous allons maintenant les décrire.

4.1 Description de la cohomologie, d'après Boyer

4.1.1 Représentations elliptiques “cohomologiques” : on a défini et classifié en 2.1.11 les représentations de G elliptiques “de type ρ ” notées π_ρ^I , pour $I \subseteq S_\rho$. Parmi celles-ci seules certaines apparaissent dans la cohomologie des espaces modulaires, et méritent donc d'être appelées “cohomologiques”. Pour les décrire on utilise la bijection $S_\rho \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, d_\rho - 1\}$ décrite en 2.1.13 et on pose pour $0 \leq i \leq d_\rho - 1$

$$\pi_\rho^{\leq i} := \pi_\rho^{\{1, \dots, i\}} \quad \text{et} \quad \pi_\rho^{> i} := \pi_\rho^{\{i+1, \dots, d_\rho-1\}}.$$

On convient naturellement que $\pi_\rho^{\leq 0} = \pi_\rho^{\geq d_\rho} = \pi_\rho^\emptyset = JL_d(\rho)$ qui est la série discrète de G associée à ρ par la correspondance de Jacquet-Langlands.

Théorème 4.1.2 (Boyer) *Pour $0 \leq i \leq d-1$, il existe un isomorphisme de $G \times D^\times \times W_K$ -modules*

$$H_c^{d-1+i}[\rho] \xrightarrow{\sim} \pi_\rho^{\leq i} \otimes \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho^\vee) \left| - \left| \frac{d_\rho - d}{2} - i \right. \right|.$$

Les notations π_ρ et d_ρ sont celles de 2.1.10.

Preuve : Cette “preuve” va essentiellement consister à expliciter un dictionnaire entre les notations de [12] et celles du présent travail. Par 3.5.1, on a

$$H_c^j[\rho] \underset{G \times W_K}{\simeq} H_c^j(\mathcal{M}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}_l}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_l} D^\times} \rho$$

où l'action de $G \times W_K$ sur le dernier terme vient de la suite exacte $\mathcal{O}_D^\times \hookrightarrow (G \times D^\times \times W_K)^0 \twoheadrightarrow G \times W_K$. Par dualité et grâce à 3.5.13 on obtient

$$\begin{aligned} H_c^j[\rho] &\underset{G \times W_K}{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_D^\times} \left(H_c^j(\mathcal{M}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \rho, \overline{\mathbb{Q}}_l \right)^\vee \\ &\underset{G \times W_K}{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_D^\times} \left(\rho, H_c^j(\mathcal{M}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)^\vee \right)^\vee \\ &\underset{G \times W_K}{\simeq} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_D^\times} \left(\rho, H^{2d-2-j}(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \right)^\vee (1-d). \end{aligned}$$

Boyer, comme Harris et Taylor, travaille sur les cycles évanescents du schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{LT}^{(0)}$. Rappelons que d'après Berkovich [7, Cor. 2.3.ii)], on a pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$H^j(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \underset{G \times W_K}{\simeq} R^j \Psi_\eta(\widehat{\mathcal{M}}_{LT}^{(0)}, \overline{\mathbb{Q}}_l).$$

Il découle donc de la discussion ci-dessus que pour $0 \leq i \leq d-1$, on a

$$H_c^{d-1+i}[\rho] \underset{G \times W_K}{\simeq} \Psi_{K,l,d}^{d-1-i}(\rho)^\vee (1-d) = \mathcal{U}_{K,l,d}^{d-1-i}(\rho)^\vee (1-d)$$

dans les notations respectives de Harris-Taylor [31, p. 87] et Boyer [12, 2.1.12]. Il ne nous reste plus qu'à appliquer le théorème 4.1.3 de [12], en y spécialisant les "variables" (s, π) en (d_ρ, π_ρ^\vee) , et en utilisant le dictionnaire :

$$\rho \longleftrightarrow JL^{-1}(St_s(\pi))^\vee, \quad \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \longleftrightarrow \operatorname{rec}_K(\pi)^\vee, \quad \pi_{\rho^\vee}^{\geq i} \longleftrightarrow [\overleftarrow{i}, \overrightarrow{s-i-1}]_\pi$$

Le théorème 4.1.3 de [12] nous dit alors que

$$\mathcal{U}_{K,l,d}^{d-d_\rho+i}(\rho) \underset{G \times W_K}{\simeq} \pi_{\rho^\vee}^{\geq i} \otimes \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) | - |^{-(d-d_\rho+2i)/2}.$$

En changeant i en $d_\rho - 1 - i$, en dualisant et en tenant compte de l'égalité $(\pi_{\rho^\vee}^{\geq d_\rho-i})^\vee = \pi_\rho^{\leq i}$ donnée par 2.1.15, on obtient la formule de l'énoncé. \square

4.2 Scindages et endomorphismes de $R\Gamma_c[\rho]$

Nous allons décrire l'algèbre des endomorphismes de $R\Gamma_c[\rho]$.

Corollaire 4.2.1 *i) Le complexe $R\Gamma_c[\rho]$ est scindable dans $D_\omega^b(G)$.*

ii) Si $\pi \in \operatorname{Irr}_\omega(G)$ est telle que $R\operatorname{Hom}_{G,\omega}(R\Gamma_c[\rho], \pi) \neq 0$ alors π est elliptique de type ρ .

Preuve : Le point ii) est une conséquence immédiate du théorème de Boyer et de 2.1.17 i). Le point i) peut se démontrer de deux manières différentes, soit par le calcul des Ext de 2.1.17 ii), soit par un argument de poids, exactement comme dans la preuve de [17, Prop. 4.2.2] à laquelle nous renvoyons le lecteur. \square

Notons que $R\Gamma_c[\rho]$ n'est pas scindable dans $D_\omega^b(G \times W_K^{disc})$, et que c'est justement là tout le sel de cette histoire. Nous poserons dans la suite

$$(4.2.2) \quad \sigma'(\rho^\vee) := \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho^\vee) | - |^{\frac{d_\rho-d}{2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_\rho := \bigoplus_{i=0}^{d_\rho} \pi_\rho^{\leq i}[-(d-1+i)] \in D_\omega^b(G),$$

nous noterons $V_{\sigma'(\rho^\vee)}$ le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace sur lequel agit $\sigma'(\rho^\vee)$, et nous appellerons *scindage* de $R\Gamma_c[\rho]$ tout isomorphisme

$$(4.2.3) \quad \alpha : R\Gamma_c[\rho] \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_\rho \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} V_{\sigma'(\rho^\vee)} \quad \text{dans} \quad D_\omega^b(G).$$

qui induit les isomorphismes 4.1.2 sur les groupes de cohomologie.

Remarque 4.2.4 Lorsque \mathcal{D} est une catégorie R -linéaire, R étant un anneau commutatif unitaire, et L est un R -module libre de type fini, on a un (une classe d'isomorphisme d') endofoncteur $C \mapsto (C \otimes_R L)$ de \mathcal{D} . On vérifie immédiatement qu'on a un isomorphisme canonique de R -algèbres

$$\text{End}_{\mathcal{D}}(C \otimes L) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathcal{D}}(C) \otimes_R \text{End}_R(L).$$

Ainsi, tout scindage induit un isomorphisme

$$\alpha_* : \text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(R\Gamma_c[\rho]) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(\mathcal{C}_{\rho}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^{\vee})}).$$

Par ailleurs, on a la description de l'algèbre des endomorphismes de \mathcal{C}_{ρ}

$$\text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(\mathcal{C}_{\rho}) = \bigoplus_{i \geq j} \text{Ext}_{G, \omega}^{i-j}(\pi_{\rho}^{\leq i}, \pi_{\rho}^{\leq j}),$$

le produit sur l'espace de droite étant donné par le \cup -produit. Notons alors $\mathcal{T}_{d_{\rho}}$ l'algèbre des $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -matrices triangulaires supérieures de taille d_{ρ} , et $(E_{ij})_{i \leq j}$ sa base "canonique" :

Fait 4.2.5 Pour tout choix de générateurs $\beta_{i, i+1} \in \text{Ext}_{G, \omega}^1(\pi_{\rho}^{\leq i+1}, \pi_{\rho}^{\leq i})$, l'application $E_{i, i+1} \mapsto \beta_{i, i+1}$ induit un isomorphisme

$$\beta : \mathcal{T}_{d_{\rho}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(\mathcal{C}_{\rho}).$$

Changer ce choix de générateurs revient simplement à composer β avec la conjugaison par une matrice diagonale.

Preuve : Ceci découle de la description du cup-produit 2.1.17 ii). On renvoie à [17, 4.2.4] pour plus de détails. \square

Par la remarque 4.2.4, un isomorphisme β comme ci-dessus induit un isomorphisme d'algèbres encore noté β

$$\beta : \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^{\vee})}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \mathcal{T}_{d_{\rho}} \xrightarrow{\sim} \text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(\mathcal{C}_{\rho} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} V_{\sigma'(\rho^{\vee})}).$$

Pour récapituler, on a obtenu

Proposition 4.2.6 À tout scindage α comme en 4.2.3 et tout choix de générateurs 4.2.5 est associé un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -algèbres $\beta^{-1} \circ \alpha_*$ s'inscrivant dans les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(R\Gamma_c[\rho]) & \xrightarrow[\beta^{-1} \circ \alpha_*]{\sim} & \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^{\vee})}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \mathcal{T}_{d_{\rho}}, \\ \downarrow \text{can} & & \downarrow \text{Id} \otimes E_{ii}^* \\ \text{End}_G(H_c^{d-1+i}[\rho]) & \xrightarrow{(4.1.2)} & \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^{\vee})}) \end{array}$$

où $i \in \{0, \dots, d_{\rho}\}$ et E_{ii}^* désigne la coordonnée diagonale (i, i) de $\mathcal{T}_{d_{\rho}}$

4.3 Action de W_K sur $R\Gamma_c[\rho]$

On étudie ici le morphisme canonique

$$\gamma_{\rho} : W_K \longrightarrow \text{Aut}_{D_{\omega}^b(G)}(R\Gamma_c[\rho])$$

qui décrit l'action de W_K sur $R\Gamma_c[\rho]$. Le résultat final que nous visons est une version W_K -équivariante de la proposition 4.2.6 :

Théorème 4.3.1 Pour tout relèvement de Frobenius géométrique ϕ , il existe un unique scindage α_{ϕ} comme en 4.2.3 et un unique choix de générateurs 4.2.5 induisant un isomorphisme β_{ϕ} , tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{D_{\omega}^b(G)}(R\Gamma_c[\rho]) & \xrightarrow[\beta_{\phi}^{-1} \circ \alpha_{\phi_*}]{\sim} & \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^{\vee})}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \mathcal{T}_{d_{\rho}}. \\ \uparrow \gamma_{\rho} & \nearrow \sigma'(\rho^{\vee}) \otimes \tau_{d_{\rho}}^{\theta, \phi} & \\ W_K & & \end{array}$$

De plus, le choix de générateurs, et donc β_{ϕ} , est indépendant de ϕ .

Rappelons que la notation $\tau_{d_\rho}^{\emptyset, \phi}$ a été introduite au-dessus du lemme 2.2.8. Sa classe d'isomorphisme est, à torsion près par $|\cdot|^{-\frac{d_\rho-1}{2}}$, la représentation spéciale de dimension d_ρ . En conséquence, la classe d'isomorphisme de la représentation $\sigma'(\rho^\vee) \otimes \tau_{d_\rho}^{\emptyset, \phi}$ est la correspondante de Langlands $\sigma_d(JL_d(\rho^\vee))$ tordue par $|\cdot|^{-\frac{1-d}{2}}$.

Par ailleurs, nous avons fait le choix contestable de fixer un générateur μ de $\mathbb{Z}_l(1)$ dans les constructions qui interviennent pour l'énoncé ci-dessus. On laissera au lecteur intéressé le soin de suivre l'effet d'un tel choix dans ces constructions et on renvoie à la partie 4 de [17], pour une discussion plus "canonique" d'une situation analogue.

Le reste du paragraphe est consacré à la preuve du théorème ci-dessus, en admettant la proposition 4.3.9 ci-dessous, laquelle sera prouvée dans la section suivante.

Lemme 4.3.2 (*monodromie quasi-unipotente*) *Il existe un unique endomorphisme nilpotent*

$$N_\rho \in \text{End}_{D_\omega^b(G)}(R\Gamma_c[\rho])$$

tel que, si $I_\rho \subseteq I_K$ désigne le noyau de $\sigma'(\rho^\vee)|_{I_K}$, alors

$$\forall i \in I_\rho, \quad \gamma_\rho(i) = \exp(N_\rho t_\mu(i)).$$

De plus on a

$$(4.3.3) \quad \forall w \in W_K, \quad \gamma_\rho(w) N_\rho \gamma_\rho(w)^{-1} = q^{-\nu(w)} N_\rho = |w| N_\rho.$$

Preuve : Commençons par remarquer que l'énoncé est insensible à la torsion par les caractères non-ramifiés. En effet, si $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l$ est un caractère, alors d'après 3.5.1, on a un isomorphisme

$$R\Gamma_c[\rho \otimes (\psi \circ |\text{Nr}|_K)] \simeq R\Gamma_c[\rho] \otimes (\psi \circ |\det|_K)(\psi \circ |\cdot|_w^{-1}) \quad \text{dans } D_{\omega(\psi \circ |\cdot|_K^d)}^b(G \times W_K^{\text{disc}}).$$

Quitte à tordre ρ par un caractère non-ramifié, on peut donc supposer $\omega(\varpi) = 1$. On a alors

$$R\Gamma_c[\rho] = R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \overline{D}}^L \rho,$$

en posant $\overline{D} := D^\times / \varpi^\mathbb{Z}$. Choisissons de plus $n \in \mathbb{N}$ tel que $JL(\rho)^{H_n} \neq 0$ (rappelons que $H_n = 1 + \varpi^n M_d(\mathcal{O}_K)$), alors d'après la description de la cohomologie 4.1.2, et en utilisant les notations de 3.5.8, on a même

$$R\Gamma_c[\rho] = (\varepsilon_{n,G} R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \overline{D}}^L \rho.$$

Par définition, le morphisme γ_ρ donnant l'action de W_K se factorise par

$$(4.3.4) \quad \text{End}_{D_{\mathbb{Z}_l}^b(\overline{GD})}(\varepsilon_{n,G} R\Gamma_c(\overline{\mathcal{M}}^{ca}, \mathbb{Z}_l)) \xrightarrow{\otimes_{\mathbb{Z}_l} \overline{D}^\rho} \text{End}_{D_\omega^b(G)}(R\Gamma_c[\rho]).$$

On sait par 3.5.11 que le \mathbb{Z}_l -module de gauche est de type fini.

Notons maintenant $\mathcal{N}(\rho)$ le noyau du morphisme canonique

$$\text{End}_{D_\omega^b(G)}(R\Gamma_c[\rho]) \xrightarrow{can} \prod_i \text{End}_G(H_c^{d-1+i}[\rho])$$

et $\mathcal{N}(\rho)^0$ son intersection avec l'image de 4.3.4, qui est donc un \mathbb{Z}_l -module de type fini. On sait que $\mathcal{N}(\rho)$ est formé d'éléments nilpotents d'ordre $\leq d_\rho$, cf [17, A.1.4] par exemple, et que le groupe $\mathcal{U}^0(\rho) := 1 + \mathcal{N}^0(\rho)$ est naturellement un pro- l -groupe, cf [17, A.2.1]. Plus précisément, on a

$$\mathcal{U}(\rho)^0 \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathcal{U}(\rho)^0 / (\text{Id} + l^n \mathcal{N}(\rho)^0).$$

Par définition, le groupe I_ρ de l'énoncé est un sous-groupe d'indice fini de I_K qui est aussi dans le noyau de l'action de W_K sur chaque $H_c^i[\rho]$, par la description de la cohomologie 4.1.2. Par conséquent γ_ρ envoie I_ρ dans le sous-groupe $\mathcal{U}(\rho)^0$ de $\text{Aut}(R\Gamma_c[\rho])$. Comme un morphisme de groupes entre groupes profinis

est automatiquement continu, le morphisme $I_\rho \xrightarrow{\gamma_\rho} \mathcal{U}(\rho)^0$ se factorise par le plus grand pro- l -quotient de I_ρ . Mais celui-ci n'est autre que l'image de I_ρ par le morphisme $t_\mu : I_K \rightarrow \mathbb{Z}_l$. Cette image est d'indice fini, donc de la forme $l^m \mathbb{Z}_l$, et l'on peut par conséquent écrire

$$\forall i \in I_\rho, \quad \gamma_\rho(i) = u^{t_\mu(i)/l^m}$$

où $u \in \mathcal{U}(\rho)^0$ est l'image par γ_ρ de n'importe quel élément de I_ρ s'envoyant sur l^m par t_μ .

Posant alors $N_\rho := l^{-m} \log(u) \in \mathcal{N}(\rho)$, (le logarithme étant bien défini puisque u est unipotent), on obtient

$$\gamma_\rho(i) = \exp(t_\mu(i) \cdot N_\rho), \quad \forall i \in I_\rho.$$

Puisque pour tous $(w, i) \in W_K \times I_\rho$, on a $t_\mu(wiw^{-1}) = q^{-\nu(w)} t_\mu(i)$, l'endomorphisme N_ρ doit satisfaire l'équation 4.3.3. Enfin, son unicité est évidente. \square

Soit ϕ un relèvement de Frobenius géométrique. Considérons l'application

$$(4.3.5) \quad \begin{aligned} \gamma_\rho^\phi(w) : \quad W_K &\rightarrow \text{End}_{D_\omega^b(G)}(R\Gamma_c[\rho])^\times \\ w &\mapsto \gamma_\rho(w) \exp(-N_\rho t_\mu(i_\phi(w))) \quad \text{où } w = \phi^{\nu(w)} i_\phi(w) . \end{aligned}$$

L'équation 4.3.3 assure que l'application γ_ρ^ϕ est un morphisme de groupes $W_K \rightarrow \text{Aut}(R\Gamma_c[\rho])$. Par construction, celui-ci se factorise par $W_K \rightarrow W_K/I_\rho$ qui est discret.

Lemme 4.3.6 *Il existe un unique scindage α_ϕ comme en 4.2.3 tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_{D_\omega^b(G)}(R\Gamma_c[\rho]) & \xrightarrow[\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi_*}]{} & \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \mathcal{T}_{d_\rho} . \\ \gamma_\rho^\phi \uparrow & \nearrow \sigma'(\rho^\vee) \otimes \tau_{d_\rho}^{ss} & \\ W_K & & \end{array}$$

Rappelons que la représentation $\tau_{d_\rho}^{ss}$ se factorise par la diagonale de \mathcal{T}_{d_ρ} , donc la commutation du diagramme est indépendante du choix de générateurs de 4.2.5 pour définir β .

Preuve : Comme dans le lemme 4.3.2, notons $I_\rho \subset I_K$ le noyau de $\sigma'(\rho^\vee)|_{I_K}$, qui est aussi celui de $(\gamma_\rho^\phi)|_{I_K}$, par construction. Puisque I_K/I_ρ est fini, on peut trouver un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que (l'image de) ϕ^n soit *central* dans le groupe W_K/I_ρ . Par le lemme de Schur, l'automorphisme $\sigma'(\rho^\vee)(\phi^n)$ de $V_{\sigma'(\rho^\vee)}$ est un scalaire que l'on notera $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}_l^\times$. Par la description 4.1.2 de la cohomologie, on voit que l'endomorphisme $\mathcal{H}^{d-1+j}(\gamma_\rho^\phi(\phi^n))$ de $H_c^{d-1+j}[\rho]$ (*i.e* l'action de ϕ^n sur $H_c^{d-1+j}[\rho]$) est annulé par le polynôme $X - q^{nj}\xi$. Par [17, lemme A.1.4], il existe donc un unique scindage α_ϕ tel que (pour tout choix de β)

$$\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi_*}(\gamma_\rho^\phi(\phi^n)) = \xi \otimes \text{Diag}(1, q^n, \dots, q^{nd_\rho}) \in \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes \mathcal{T}_{d_\rho}.$$

Or, le commutant de $\xi \otimes \text{Diag}(1, q^n, \dots, q^{nd_\rho})$ dans $\text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes \mathcal{T}_{d_\rho}$ est $\text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l^{d_\rho}$ où $\overline{\mathbb{Q}}_l^{d_\rho}$ désigne ici la sous-algèbre des matrices diagonales de \mathcal{T}_{d_ρ} . Ainsi, puisque ϕ^n est central dans $W_K/\ker(\gamma_\rho^\phi)$, on a

$$\text{Im}(\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi_*} \circ \gamma_\rho^\phi) \subset \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l^{d_\rho}.$$

Mais par le diagramme commutatif de la proposition 4.2.6 et la W_K -équivariance des isomorphismes 4.1.2, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall w \in W_K, \quad (\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi_*})(\gamma_\rho^\phi(w)) &= \sum_{i=0}^{d_\rho} \sigma'(\rho^\vee)(w) |w|^{-i} \otimes E_{ii} \\ &= \sum_{i=0}^{d_\rho} \sigma'(\rho^\vee)(w) \otimes |w|^{-i} E_{ii} \end{aligned}$$

où E_{ii} désigne toujours la matrice élémentaire de coordonnées (i, i) de \mathcal{T}_{d_ρ} . Le scindage α_ϕ fait donc bien commuter le diagramme du lemme. Pour l'unicité, remarquons que toute autre solution α' vérifie la conclusion du point ii) de [17, lemme A.1.4] pour ϕ^n , et coïncide donc avec α par l'assertion d'unicité de ce même point. \square

4.3.7 Preuve du théorème 4.3.1 : On garde les notations précédentes ; en particulier, α_ϕ est le scindage de $R\Gamma_c[\rho]$ du lemme 4.3.6, et N_ρ l'endomorphisme nilpotent de $R\Gamma_c[\rho]$ donné par le lemme 4.3.2. Choisissons un β arbitraire pour commencer. Comme N_ρ induit l'endomorphisme nul en cohomologie, on a

$$(\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi*})(N_\rho) \in \sum_{i>j} \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes E_{ij},$$

en notant $(E_{ij})_{i \geq j}$ la base ‘‘canonique’’ de \mathcal{T}_{d_ρ} . D'autre part, on déduit de 4.3.3 la relation

$$(4.3.8) \quad \gamma_\rho^\phi(w) N_\rho \gamma_\rho^\phi(w)^{-1} = |w| N_\rho$$

pour tout $w \in W_K$. Appliquée à l'élément ϕ^n de la preuve du lemme 4.3.2, pour lequel on a

$$(\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi*})(\phi^n) = \sum_{i=0}^{d_\rho-1} \xi q^{ni} (\text{Id} \otimes E_{ii}),$$

cette relation implique que

$$(\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi*})(N_\rho) \in \sum_{i=1}^{d_\rho-1} \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)}) \otimes E_{i-1,i}.$$

Écrivons donc $(\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi*})(N_\rho) = \sum_i M_i \otimes E_{i-1,i}$ avec $M_i \in \text{End}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(V_{\sigma'(\rho^\vee)})$. Par définition de α_ϕ , on a pour tout $w \in W_K$

$$(\beta^{-1} \circ \alpha_{\phi*})(\gamma_\rho^\phi(w)) = \sum_{i=0}^{d_\rho-1} \sigma'(\rho^\vee)(w) \otimes |w|^{-i} E_{ii}.$$

La relation 4.3.8 implique donc que chaque M_i commute avec $\sigma'(\rho^\vee)(w)$ pour tout w . Par le lemme de Schur, on a donc $M_i \in \overline{\mathbb{Q}}_l$. Quitte à changer β , on peut alors supposer que M_i est soit nul, soit égal à 1. Pour achever la preuve du théorème 4.3.1, il nous reste à prouver que les M_i ainsi obtenus sont tous inversibles, auquel cas, le changement de β est d'ailleurs unique. De manière équivalente, il nous reste à prouver :

Proposition 4.3.9 $N_\rho^{d_\rho-1} \neq 0$.

Nous reportons la preuve à la section 5.

4.4 Preuve du théorème A

Nous prouvons ici le théorème A, à partir du théorème 4.3.1. Nous noterons simplement $R\Gamma_c := R\Gamma_c(\mathcal{M}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ l'objet de $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(GD \times W_K^{disc})$ construit en 3.3.3.

Lemme 4.4.1 *Les deux énoncés ci-dessous sont équivalents à l'énoncé du théorème A :*

i) *Pour toutes représentations $\pi \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G)$, $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D^\times)$ de même caractère central, on a :*

$$\mathcal{H}^*(R\text{Hom}_{D^b(GD)}(R\Gamma_c, \pi \otimes \rho^\vee)) \underset{W_K}{\simeq} \begin{cases} \sigma_d(\pi) - \left| \frac{d-1}{2} \right| & \text{si } \rho = LJ_d(\pi) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

ii) *Pour toutes représentations $\pi \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G)$, $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D^\times)$ de même caractère central ω , on a :*

$$\mathcal{H}^*(R\text{Hom}_{D_\omega^b(G)}(R\Gamma_c[\rho], \pi)) \underset{W_K}{\simeq} \begin{cases} \sigma_d(\pi) - \left| \frac{d-1}{2} \right| & \text{si } \rho = LJ_d(\pi) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La définition de \mathcal{H}^* a été donnée dans l'introduction.

Preuve : Soit ω le caractère central commun. On a une factorisation

$$\mathrm{Hom}_{GD}(-, \pi \otimes \rho^\vee) : \mathrm{Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(GD) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_G(-, \pi)} \mathrm{Mod}_\omega(D^\times) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, -)} \overline{\mathbb{Q}}_l - \text{e.v.}$$

où les deux dernières catégories sont semi-simples. En particulier, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, \mathcal{H}^*(\mathrm{RHom}_G(\mathrm{R}\Gamma_c, \pi))) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^*(\mathrm{RHom}_{GD}(\mathrm{R}\Gamma_c, \pi \otimes \rho^\vee))$$

qui bien-sûr est W_K -équivariant. Il est alors clair que l'énoncé du théorème A implique le point i). Compte tenu du fait que la famille de foncteurs $\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho, -)$, $\rho \in \mathrm{Irr}_\omega(D^\times)$ est fidèle sur la catégorie $\mathrm{Mod}_\omega(D^\times)$, la réciproque est encore vraie. Le point ii) est équivalent au point i), grâce à la factorisation

$$\mathrm{Hom}_{GD}(-, \pi \otimes \rho^\vee) : \mathrm{Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(GD) \xrightarrow{- \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} D^\times} \mathrm{Mod}_\omega(G) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_G(-, \pi)} \overline{\mathbb{Q}}_l - \text{e.v.}$$

□

Fixons à nouveau $\rho \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D^\times)$ de caractère ω , ainsi qu'un sous-ensemble $I \subseteq S_\rho$, et posons

$$\mathcal{H}_\rho^I := \mathcal{H}^*(\mathrm{RHom}_{D_\omega^b(G)}(\mathrm{R}\Gamma_c[\rho], \pi_\rho^I)).$$

C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel gradué de dimension finie muni de l'action par automorphismes de degré 0 de W_K induite par l'action $\gamma_\rho : W_K \rightarrow \mathrm{Aut}_{D_\omega^b(G)}(\mathrm{R}\Gamma_c[\rho])$. En vertu de 4.4.1 ii) et 4.2.1 ii), le théorème A sera prouvé une fois qu'on aura identifié \mathcal{H}_ρ^I à $\sigma_d(\pi_\rho^I) \mid - \mid^{\frac{d-1}{2}}$.

Notons N_ρ^I l'endomorphisme de degré 0 (d'espace vectoriel gradué) de \mathcal{H}_ρ^I induit fonctoriellement par l'endomorphisme N_ρ de $\mathrm{R}\Gamma_c[\rho]$ du lemme 4.3.2. Choisissons un relèvement de Frobenius géométrique ϕ et notons $\mathcal{H}_\rho^{I, \phi}$ la représentation graduée lisse de W_K induite par l'action $\gamma_\rho^\phi : W_K \rightarrow \mathrm{Aut}_{D_\omega^b(G)}(\mathrm{R}\Gamma_c[\rho])$ définie en 4.3.5. Le couple $(\mathcal{H}_\rho^{I, \phi}, N_\rho^I)$ est la représentation de Weil-Deligne associée à \mathcal{H}_ρ^I (et aux choix de ϕ et μ).

En utilisant le scindage α_ϕ de 4.3.6, on obtient la première ligne de

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho^{I, \phi} &\simeq_{W_K} \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \mathcal{H}^*(\mathrm{RHom}_{D_\omega^b(G)}(\pi_\rho^{\leq i} \otimes \sigma'(\rho^\vee) \mid - \mid^{-i}, \pi_\rho^I)) [d-1+i] \\ &\simeq_{W_K} \sigma'(\rho^\vee)^\vee \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \mathrm{Ext}_{G, \omega}^{\delta(i, I)}(\pi_\rho^{\leq i}, \pi_\rho^I) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l} \mid - \mid^i [d-1+i-\delta(i, I)] \right) \end{aligned}$$

et la deuxième ligne vient du calcul d'extensions de 2.1.17.

On veut maintenant expliciter l'endomorphisme N_ρ^I . On procède exactement comme dans [17, 4.4]. Notons $\beta_{i-1, i} \in \mathrm{Ext}_{G, \omega}^1(\pi_\rho^{\leq i}, \pi_\rho^{\leq i-1})$, où $i \in \{1, \dots, d_\rho - 1\}$ les générateurs qui définissent l'isomorphisme β_ϕ du théorème 4.3.1 et choisissons pour chaque $j \in \{0, \dots, d_\rho - 1\}$ un générateur de la droite $\mathrm{Ext}_{G, \omega}^{\delta(i, I)}(\pi_\rho^{\leq i}, \pi_\rho^I)$. Alors l'action (à droite) de $\alpha_{\phi*}(N_\rho)$ sur \mathcal{H}_ρ^I est donnée par

$$e_i \mapsto e_i \cup \beta_{i, i+1} \in \overline{\mathbb{Q}}_l e_{i+1}.$$

La formule pour le \cup -produit de 2.1.17 ii) montre que $e_i \cup \beta_{i, i+1}$ est non-nul si et seulement si $\delta(i+1, I) = \delta(i, I) + 1$ et des considérations élémentaires montrent que cela se produit si et seulement si $i+1 \in I^c$ (complémentaire de I dans $S_\rho = \{1, \dots, d_\rho - 1\}$).

Oublions maintenant la graduation de \mathcal{H}_ρ^I . La discussion de [17, 4.4] montre alors que

$$\mathcal{H}_\rho^I \simeq_{W_K} \sigma'(\rho^\vee)^\vee \otimes \tau_{d_\rho}^I,$$

et compte tenu de la définition 4.2.2 de $\sigma'(\rho^\vee)$, de l'égalité $\pi_{\rho^\vee} = \pi_\rho^\vee$ et de la compatibilité de la correspondance de Langlands aux contragrédientes, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\rho^I &\simeq_{W_K} \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \left| - \left| \frac{d-d_\rho}{2} \right| \otimes \tau_{d_\rho}^I \right. \\ &\simeq_{W_K} \sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \tau_{d_\rho}^I \left| - \left| \frac{1-d_\rho}{2} \right| - \left| \frac{d-1}{2} \right| \simeq \sigma_d(\pi_\rho^I) \left| - \left| \frac{d-1}{2} \right| \right. \end{aligned}$$

par la description 2.2.8 de la correspondance de Langlands pour les représentations elliptiques.

Remarque 4.4.2 *Écrivons $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$ dans l'ordre croissant et posons $i_0 := 0$, $i_{|I|+1} = d_\rho$ et $d_k := i_{k+1} - i_k$ pour $k = 0, \dots, |I|$. Alors la discussion de [17, 4.4] montre qu'en tant que W_K -représentation graduée, on a*

$$\mathcal{H}_\rho^I[1 - d_\rho] \simeq \bigoplus_{k=0}^{|I|} \left(\sigma_{d/d_\rho}(\pi_\rho) \otimes \tau_{d_k}^\emptyset \left| \cdot \left| \frac{d-d_\rho}{2} + i_k \right| \right. \right) [-|I| + 2k].$$

Ainsi les composantes sont indécomposables et rangées par ordre croissant de poids de 2 en 2.

5 Monodromie et variétés de Shimura

Un des buts de cette section est de prouver la proposition 4.3.9 et donc de terminer la preuve du théorème A. Ceci fera intervenir le système des variétés de Shimura étudiées par Harris-Taylor (ou son analogue dû à Drinfeld-Stuhler en égales caractéristiques), ainsi que la description de la filtration de monodromie de leurs cycles évanescents par Boyer.

Dans la deuxième partie, on prouve la conjecture monodromie-poids pour les variétés uniformisées par les revêtements de l'espace symétrique de Drinfeld. Ceci s'applique à certaines variétés de Shimura unitaires étudiées notamment par Harris [29], Carayol [15] et Rapoport [41].

On note toujours $G = GL_d(K)$ et $D = D_d$.

5.1 Variétés de Harris-Taylor

On s'intéresse ici aux variétés de Shimura étudiées par Harris et Taylor dans [31]. Plus précisément, on suppose que K est le complété en une place w d'un corps CM F vérifiant les hypothèses de [31, I.7], on fixe un "niveau hors p " $U^p \subset \mathcal{G}(\mathbb{A}^{\infty,p})$ d'un certain groupe unitaire \mathcal{G} défini aussi en [31, I.7] et qui à la place w est isomorphe à GL_d , puis pour un entier n , on note $S_{HT,n}$ le \mathcal{O}_K -schéma propre et régulier noté $X_{U^p,m}$ dans [31, III.4], avec $m = (n, 0, \dots, 0)$. On notera avec des exposants η ou s les fibres génériques ou spéciales de ces objets et j et i les immersions correspondantes, décorées des indices pertinents.

L'entier n correspond à une structure de niveau (à la Drinfeld-Katz-Mazur) $H_n = 1 + \varpi^n M_d(\mathcal{O}_K)$ en w sur le problème de modules définissant la variété de Shimura sur \mathcal{O}_K . Par des constructions analogues à celles utilisées pour la tour de Lubin-Tate, la famille des $(S_{HT,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est munie d'un système de morphismes finis $g^{m|n}$. Une manière agréable de formaliser ceci est d'introduire la catégorie suivante :

Définition 5.1.1 *On note $\mathbb{N}(G)$ la catégorie dont les objets sont les entiers naturels et les flèches sont données par*

$$\text{Hom}_{\mathbb{N}(G)}(n, m) := H_m \setminus \{g \in G, gH_n g^{-1} \subset H_m\} / H_n,$$

la composition étant induite par la multiplication dans G . On note aussi $\mathbb{N}(G^0)$ la sous-catégorie dont les flèches viennent de $G^0 = \ker |\det|_K$.

Avec cette définition, la famille des $S_{HT,n}$ est l'image d'un $\mathbb{N}(G)$ -diagramme, *i.e.* un foncteur de $\mathbb{N}(G)$ dans les \mathcal{O}_K -schémas. Cette formulation invite à utiliser le langage des catégories (co)-fibrées. Par exemple, on dispose de la catégorie $\text{Perv}(S_{HT}^{s,ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ au-dessus de $\mathbb{N}(G)$, dont les fibres sont les catégories de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceaux pervers sur les $S_{HT,n}^{s,ca}$ et qui est fibrée par les ${}^p g^{m|n*}$ et cofibrée par les $g_*^{m|n}$. Les sections de cette catégorie bi-fibrée seront appelées *Faisceaux Pervers de Hecke*. Ce sont donc des systèmes $(\mathcal{F}_n)_n$ de faisceaux pervers munis de morphismes de transition $\mathcal{F}_m \longrightarrow g_*^{m|n} \mathcal{F}_n$. En vertu de l'exactitude des $g_*^{m|n}$, ils forment une catégorie abélienne, que nous noterons FPH.

Les résultats globaux principaux de Boyer dans [12] concernent le faisceau pervers de Hecke $R\Psi$ formé par le système des cycles évanescents décalés $R\Psi(S_{HT,n}^n, \overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1]$. Celui-ci est muni d'une action de W_K compatible avec celle sur k^{ca} . En particulier, on a pour chaque étage un opérateur de monodromie nilpotent N_n , deux filtrations K_\bullet (croissante) et I^\bullet (décroissante) définies respectivement par les noyaux et les images des itérés de N_n , ainsi que leur convolution M_\bullet , appelée "filtration de monodromie". La famille des N_n définit un endomorphisme W_K -équivariant N de $R\Psi$ et les familles de filtrations induisent des filtrations W_K -équivariantes $K_\bullet R\Psi$, $I^\bullet R\Psi$ et $M_\bullet R\Psi$ de l'objet $R\Psi$ dans FPH . Remarquons que N n'est *a priori* pas nilpotent, et que ces filtrations ne sont *a priori* pas finies. Cependant on a :

Fait 5.1.2 (Boyer) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'action de I_K sur le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -faisceau constructible $R^j\Psi(S_{HT,n}^n, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ se factorise par un quotient fini.*

Il s'ensuit que l'opérateur N_n est nul sur les faisceaux de cohomologie, et puisque $R\Psi(S_{HT,n}^n, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est d'amplitude cohomologique $[1-d, 0]$, que N_n est nilpotent d'ordre $\leq d$. Par conséquent N est aussi nilpotent d'ordre $\leq d$ et les filtrations de $R\Psi$ sont finies. On peut préciser cela en découpant, suivant Boyer, les cycles évanescents selon l'action de l'inertie (voir aussi la preuve de 5.1.8) :

$$R\Psi = \bigoplus_{\sigma \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(W_K) / \sim} R\Psi_\sigma,$$

décomposition dans la catégorie FPH et où les σ sont prises à équivalence inertielle près. Alors il résulte de [12, 5.4.7] que $R\Psi_\sigma$ est d'amplitude cohomologique $[1-d_\sigma, 0]$ où $d_\sigma := \lfloor d/\dim(\sigma) \rfloor$ et donc que l'opérateur de monodromie N_σ est nilpotent d'ordre $\leq d_\sigma$, que les gradués $gr_I^q := I^q/I^{q+1}(R\Psi_\sigma)$ et $gr_p^K := K_{p+1}/K_p(R\Psi_\sigma)$ sont nuls en dehors de $0 \leq p, q < d_\sigma$ et que les gradués $gr_k^M := M_{k+1}/M_k(R\Psi_\sigma)$ sont nuls en dehors de $-d_\sigma < k < d_\sigma$. Le théorème 5.4.5 de [12] décrit les gradués de la filtration de monodromie $M_\bullet R\Psi_\sigma$, et il n'est pas difficile d'en déduire les bigradués de la bifiltration $I^\bullet K_\bullet(R\Psi_\sigma)$, cf la preuve de 5.1.6 ci-dessous.

5.1.3 Bien-sûr, le lien entre les résultats globaux de Boyer et les résultats locaux dont nous avons besoin se fait en prenant la "fibre en un point supersingulier" de $R\Psi_\sigma$. Plus précisément, donnons-nous un point supersingulier x dans $S_{HT,0}^{s,ca}$. On sait que les morphismes $g^{0|n}$ sont totalement ramifiés au-dessus de x et que si $g \in G^0$, la préimage réduite de x dans $S_{HT,n}^{s,ca}$ est un singleton $\{x_n\}$ indépendant de g . Le système des $x_n^*(R\Psi_{n,\sigma})$ est donc un foncteur contravariant de $\mathbb{N}(G^0)$ dans $D^b(\overline{\mathbb{Q}}_l)$ (on identifiera cette dernière à la catégorie des espaces vectoriels à graduation finie). En passant à la limite inductive, on obtient un espace vectoriel gradué muni d'une action de G^0 . D'où un foncteur additif

$$x^* : FPH \longrightarrow \text{gr Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G^0) := \{\overline{\mathbb{Q}}_l\text{-représentations lisses graduées de } G^0\}.$$

On sait que le complété formel (étage par étage) de la tour S_{HT}^{nr} le long de la famille x_n s'identifie à $\mathcal{M}_{LT}^{(0)}$, et par le théorème de comparaison de Berkovich, on a donc un isomorphisme $G^0 \times I_K$ -équivariant

$$x^*(R\Psi) \simeq \bigoplus_i H^i(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1-i].$$

De plus, l'action de \mathcal{O}_D^\times par automorphismes du complété formel de chaque $S_{HT,n}^{nr}$ en x_n munit $x^*(R\Psi)$ d'une action de \mathcal{O}_D^\times *a priori*, et l'isomorphisme de Berkovich ci-dessus est équivariant, puisque canonique. En fait, l'action de $G^0 \times \mathcal{O}_D^\times \times I_K$ sur l'espace vectoriel gradué $x^*(R\Psi)$ est la restriction d'une action de $(G \times D^\times \times W_K)^0$ que l'on obtient en considérant le complété formel de $S_{HT}^{s,ca}$ le long de l'orbite Galoisienne $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de x sous W_K . En effet, celle-ci est un sous $\mathbb{N}(G)$ -diagramme de $S_{HT}^{s,ca}$ de dimension 0, dont le complété formel associé est muni d'une action de D^\times . Le stabilisateur du complété formel en x est justement $(G \times D^\times \times W_K)^0$.

Pour décrire $x^*(R\Psi_\sigma)$, il est plus commode de modifier le foncteur x^* en posant :

$$ix^* := \text{ind}_{G^0/\varpi^{\mathbb{Z}}}^G \circ x^* : FPH \longrightarrow \text{gr Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$$

où ϖ est une uniformisante de $K^\times \subset G$. Alors l'objet $ix^*(R\Psi_\sigma)$ est un facteur direct stable par $G \times D^\times \times W_K$ de $H^*(\mathcal{M}_{LT}^{ca}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dont la restriction à I_K est σ -isotypique. D'après la description de Boyer 4.1.2

et la dualité 3.5.13, on a donc :

$$(5.1.4) \quad ix^*(R\Psi_\sigma) \underset{G \times D^\times \times W_K}{\simeq} \left(\bigoplus_{\rho \rightsquigarrow \sigma} \left(\bigoplus_i H_c^i[\rho][-i] \right)^\vee \otimes \rho \right) 1-d$$

$$(5.1.5) \quad \underset{G \times D^\times \times W_K}{\simeq} \bigoplus_{\rho \rightsquigarrow \sigma} \left(\bigoplus_{i=0}^{d_\sigma-1} \pi_\rho^{>i} \otimes \rho \otimes \sigma'(\rho)(-i)[-i] \right) [d_\sigma - 1].$$

où $\rho \rightsquigarrow \sigma$ désigne la conjonction des deux conditions $\omega_\rho(\varpi) = 1$ et $\sigma'(\rho) \sim \sigma$ (équivalence inertielle) et $\sigma'(\rho)$ est définie en 4.2.2. En particulier $x^*(R\Psi_\sigma)$ est nul si le degré de σ ne divise pas d .

On aimerait transférer la bifiltration de $R\Psi_\sigma$. Pour cela, on remarque que le foncteur x^* est “exact” dans le sens suivant :

Lemme 5.1.5 *Le foncteur x^* se prolonge en un foncteur de la catégorie des suites exactes de FPH dans la catégorie des triangles distingués de $\text{gr Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G^0)$.*

En d’autres termes, une suite exacte $A \hookrightarrow B \rightarrow C$ induit une longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow x^*A^i \longrightarrow x^*B^i \longrightarrow x^*C^i \longrightarrow x^*A^{i+1} \longrightarrow \dots$$

Preuve : Notons temporairement D_c^b la catégorie des sections de la catégorie bi-fibrée au-dessus de $\mathbb{N}(G)$ dont les fibres sont les $D_c^b(S_{HT,n}^{s,ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. La catégorie FPH est une sous-catégorie pleine de D_c^b , et le foncteur x^* est la restriction d’un foncteur de source D_c^b , encore noté x^* et défini de la même manière. La catégorie D_c^b est additive, \mathbb{Z} -graduée, et munie d’une famille évidente de triangles distingués : ceux qui à chaque étage le sont. Le foncteur x^* est exact, *i.e.* envoie triangles distingués sur triangles distingués au sens du lemme. Ainsi, il nous suffira de montrer que toute suite exacte $A \hookrightarrow B \rightarrow C$ se complète de manière unique en un triangle distingué de D_c^b . Or, à chaque étage, on connaît l’unicité de $\delta_n : C_n \rightarrow A_n[1]$ complétant la suite $A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n$ en un triangle distingué [1, Cor 1.1.10 ii)]. Cette unicité et la p -exactitude des $g_*^{m|n}$ assurent que le système $(\delta_n)_n$ est bien un morphisme dans D_c^b . \square

D’après le lemme ci-dessus, la bifiltration de $R\Psi_\sigma$ induit une “bifiltration” sur son image $x^*R\Psi_\sigma$ dans $\text{gr Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(G^0)$ (en termes rigoureux, un *objet spectral* au sens de Verdier [48, II.4]). Par définition, elle est I_K -équivariante, et par le théorème 2 de [26], elle est aussi \mathcal{O}_D^\times -équivariante. En fait, elle est $(G \times D^\times \times W_K)^0$ -équivariante, comme on le voit en répétant ces arguments pour l’orbite Galoisienne X de x , puis en se restreignant à x .

La suite spectrale associée à la filtration de monodromie de $x^*R\Psi_\sigma$ est entièrement décrite par Boyer. Voici une reformulation de cette description, en termes de bifiltration, et adaptée à nos besoins ; par convention, nos gradués sont donnés par $\text{gr}_I^q := I^q/I^{q+1}$ et $\text{gr}_p^K := K_{p+1}/K_p$.

Théorème 5.1.6 (Boyer) *Soit $\sigma \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(W_K)$, et rappelons que $d_\sigma = \lfloor d/\dim(\sigma) \rfloor$.*

i) *Le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace gradué $x^*(\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K R\Psi_\sigma)$ est non-nul seulement si $p, q \geq 0$ et $p+q < d_\sigma$, auquel cas il est concentré en degré $p+q-d_\sigma+1$ et donné par :*

$$ix^*(\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K R\Psi_\sigma)[p+q-d_\sigma+1] \underset{G \times D^\times \times W_K}{\simeq} \bigoplus_{\rho \rightsquigarrow \sigma} \tau_\rho^{>p+q} \otimes \rho \otimes \sigma'(\rho)(q-p)$$

où $\tau_\rho^{>i}$ est l’unique extension non triviale de $\pi_\rho^{>i+1}$ par $\pi_\rho^{>i}$ dans $\text{Mod}_{\omega_\rho}(G)$ pour $0 < i < d_\sigma$ et $\tau_\rho^{>d_\sigma} := \pi_\rho^{>d_\sigma} = \pi_\rho^0$.

ii) *Pour tous $p, q \geq 0$ tels que $p+q < d_\sigma - 1$, le morphisme $G \times D^\times \times W_K$ -équivariant*

$$ix^*(\text{gr}_I^q \text{gr}_p^K R\Psi_\sigma)[p+q-d_\sigma+1] \longrightarrow ix^*(\text{gr}_I^{q+1} \text{gr}_p^K R\Psi_\sigma)[p+q+1-d_\sigma+1]$$

déduit par décalage et rotation du triangle distingué $\text{gr}_I^{q+1} \rightarrow I^q/I^{q+2} \rightarrow \text{gr}_I^q$ est donné (modulo isomorphismes) sur chaque facteur direct par l’unique morphisme G -équivariant non-nul $\tau_\rho^{>p+q} \rightarrow \tau_\rho^{>p+q+1}$.

Preuve : L'assertion sur la nullité en dehors du triangle $p, q \geq 0$ et $p+q < d_\sigma$ est une simple conséquence de la définition des filtrations I^\bullet et K_\bullet et du fait que $N^{d_\sigma} = 0$. Nous supposons dorénavant que ces inégalités sont vérifiées et nous allons d'abord montrer que $ix_{e_q}^*(gr_I^q gr_p^K)$ est concentré en degré $p+q-d_\sigma+1$. Pour cela, le plus commode est de se raccrocher à la description des $gr_k^M(R\Psi_\sigma)$ par Boyer. Par définition, on a $gr_k^M = \bigoplus_{p-q=k} gr_I^q gr_p^K$. Inversement, pour récupérer les bigradués à partir du gradué de monodromie, il faut se rappeler que l'opérateur N_σ envoie $I^q K_p(R\Psi_\sigma)$ dans $I^{q+1} K_{p-1}(R\Psi_\sigma)$ et induit un isomorphisme

$$N_\sigma : gr_I^q gr_p^K(R\Psi_\sigma) \xrightarrow{\sim} gr_I^{q+1} gr_{p-1}^K(R\Psi_\sigma)$$

tant que $p > 1$. On en déduit les formules :

$$(5.1.7) \quad gr_I^q gr_0^K = \ker \left(gr_{-q}^M \xrightarrow{N_\sigma} gr_{-q-2}^M \right) \quad \text{et} \quad N_\sigma^p : gr_I^q gr_p^K \xrightarrow{\sim} gr_I^{q+p} gr_0^K.$$

D'après Boyer [12, 5.4.5], les gradués de monodromie sont de la forme

$$gr_k^M(R\Psi_\sigma) = \bigoplus_{\substack{|k| \leq t \leq d_\sigma \\ t \equiv k-1[2]}} \mathcal{P}(t, \sigma)(?)$$

où $\mathcal{P}(t, \sigma)$ est le faisceau pervers de Hecke noté $\mathcal{P}(g, t, \pi_v)$ dans *loc. cit* avec le dictionnaire suivant : $g \longleftarrow \dim(\sigma)$ et $\pi_v \longleftarrow \sigma_g^{-1}(\sigma)$, et (?) désigne une torsion à la Tate qui ne nous importe pas ici. De par leur définition, chaque $\mathcal{P}(t, \sigma)$ est semi-simple de longueur finie et sans multiplicité. De plus, les $\mathcal{P}(t, \sigma)$ sont deux-à-deux "disjoints". On déduit alors des formules 5.1.7 et par une récurrence facile que

$$gr_I^q gr_p^K(R\Psi_\sigma) = \mathcal{P}(p+q+1, \sigma)(?).$$

Le théorème 5.4.7 de [12] décrit (entre autres) la cohomologie de $x^*(\mathcal{P}(t, \sigma))$ et montre que celle-ci est concentrée en degré $t-d_\sigma$, d'où la première assertion du point i).

Considérons maintenant la suite spectrale $(G \times D^\times \times W_K)^0$ -équivariante associée à la filtration de monodromie

$$E_1^{i,j} := \mathcal{H}^{i+j}(x^*(gr_{-i}^M(R\Psi_\sigma))) \Rightarrow \mathcal{H}^{i+j}(x^*R\Psi_\sigma).$$

Du simple fait que la cohomologie de $x^* gr_I^q gr_p^K$ est concentrée en degré $p+q+1-d_\sigma$, on tire pour tous p, q :

$$\text{i) } x^*(gr_I^p gr_q^K(R\Psi_\sigma))[p+q+1-d_\sigma] = E_1^{q-p, 2p+1-d_\sigma},$$

$$\text{ii) La flèche du point ii) est la différentielle } d_1^{q-p, 2p+1-d_\sigma}.$$

Les assertions restantes sont donc conséquences du théorème 4.2.3 de [12], puisque dans le dictionnaire entre nos notations et celles de *loc. cit*, on a $\tau_\rho^{>i} \longleftarrow [\tilde{i}]_{\pi_\rho} \times [s-\tilde{i}]_{\pi_\rho}$. □

Pour pouvoir utiliser ce théorème, il nous faut maintenant relever le foncteur x^* vers la catégorie $D_{\mathbb{Q}_l}^b(G^0)$. Malheureusement, cela pose plusieurs problèmes techniques.

Le premier vient du formalisme l -adique. Pour l'expliquer, rappelons que pour X schéma de type fini sur un corps de dimension cohomologique finie, la catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est définie comme limite inductive des catégories $D_c^b(X, \Lambda)[\frac{1}{l}]$ où Λ décrit les anneaux d'entiers d'extensions finies de \mathbb{Q}_l et les morphismes de transition sont donnés par extension des scalaires de $\Lambda[\frac{1}{l}]$ à $\Lambda'[\frac{1}{l}]$. De plus, chaque $D_c^b(X, \Lambda)[\frac{1}{l}]$ s'identifie naturellement à une sous-catégorie triangulée pleine de la catégorie $D_{\Lambda_\bullet}^+(\widetilde{X}_{et})[\frac{1}{l}]$ (via les complexes "normalisés" d'Ekedahl, cf [26, Prop 2]). Enfin, chaque $D_{\Lambda_\bullet}^+(\widetilde{X}_{et})$ est munie d'une t -structure perverse [26, Thm 7] qui induit sur $D_c^b(X, \Lambda)[\frac{1}{l}]$ la t -structure perverse intermédiaire [26, Cor 3] et pour laquelle les morphismes finis sont t -exact. Notons alors FPH_{Λ_\bullet} la catégorie des sections de la catégorie bi-fibrée sur $\mathbb{N}(G)$ dont la fibre en n est le coeur de la t -structure perverse sur $D_{\Lambda_\bullet}^+(\widetilde{S}_{HT, n, et})$. Par t -exactitude des foncteurs de transition $g_*^{m|n}$, cette catégorie est abélienne. Soit $FPH_{\Lambda_\bullet}^c$ sa sous-catégorie pleine (abélienne et

épaisse) formée des sections $(K_n)_{n \in \mathbb{N}(G)}$ avec $K_n[\frac{1}{l}] \in D_c^b(S_{HT,n}, \Lambda)[\frac{1}{l}]$. Plutôt qu'avec la catégorie FPH nous travaillerons avec la catégorie abélienne FPH' suivante :

$$FPH' := \varinjlim_{\Lambda} (FPH_{\Lambda, \bullet}[\frac{1}{l}]).$$

On a un foncteur évident $FPH' \xrightarrow{\iota} FPH$, exact et fidèle, dont le défaut de plénitude vient de ce que cette construction “borne” les dénominateurs et l’algébricité lorsqu’on bouge dans le diagramme.

Par définition, le complexe des cycles évanescents $R\Psi$ est naturellement un objet de FPH' , dont la valeur en $n \in \mathbb{N}(G)$ est $(R\Psi(S_{HT,n}, \Lambda_{\bullet}))_{\Lambda}$. Par contre, son opérateur de monodromie N n’est *a priori* pas un endomorphisme de $R\Psi$ dans FPH' , car il est défini à chaque étage par un logarithme dont les dénominateurs croissent avec le niveau n . Cependant on a le lemme suivant :

Lemme 5.1.8 *Soit $\sigma \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(W_K)$. Le plongement $R\Psi_{\sigma} \hookrightarrow R\Psi$ dans FPH et l’opérateur de monodromie N_{σ} sont dans l’image essentielle de ι .*

Preuve : Commençons par expliciter la construction de $R\Psi_{\sigma}$ dans la catégorie FPH . Notons pour cela $\gamma : I_K \rightarrow \text{End}_{FPH}(R\Psi)$ l’action de l’inertie. Par définition de N , l’application $\tilde{\gamma} : i \in I_K \mapsto \gamma(i) \exp(-t_l(i)N)$ définit une action localement constante de I_K sur $R\Psi$ et se prolonge donc en un morphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -algèbres $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(I_K) \rightarrow \text{End}_{FPH}(R\Psi)$ où $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(I_K)$ désigne l’algèbre des distributions localement constantes sur I_K . Le facteur $R\Psi_{\sigma}$ est découpé via $\tilde{\gamma}$ par l’idempotent de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(I_K)$ associé à σ .

Choisissons une base $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de voisinages de l’unité de I_K formée de sous-groupes ouverts de I_K normaux dans W_K , et notons $R\Psi_m$ le facteur direct de $R\Psi$ dans FPH découpé via $\tilde{\gamma}$ par la représentation triviale de I_m . On a une suite exacte $I_m^l \hookrightarrow I_m \xrightarrow{t_l} l^{m'} \mathbb{Z}_l$ avec I_m^l un pro- l' -groupe. Comme la restriction de l’action γ à I_m^l est localement constante, on a un idempotent $\gamma[I_m^l]$ où $[I_m^l] \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}_l}(I_m^l)$ est la mesure de Haar normalisée. Choisissons un élément $T_m \in I_m$ tel que $t_l(T_m) = l^{m'}$. On a alors

$$R\Psi_m = \sum_{t \in \mathbb{N}} \ker \left((\gamma(T_m) - 1) \Big|_{\text{im } \gamma[I_m^l]} \right)^t$$

et son opérateur de monodromie est donné par

$$N|_{R\Psi_m} = \frac{1}{l^{m'}} \log(\gamma(T_m)).$$

On a déjà remarqué que N est nilpotent d’ordre $\leq d$. On a donc aussi

$$R\Psi_m = \ker \left((\gamma(T_m) - 1) \Big|_{\text{im } \gamma[I_m^l]} \right)^d.$$

Or, les endomorphismes $\gamma[I_m^l]$ et $\gamma(T_m)$ de $R\Psi$ sont dans $\text{End}_{FPH'}(R\Psi)$. Ceci montre l’énoncé du lemme pour $R\Psi_m$ à la place de $R\Psi_{\sigma}$ et on en déduit aussitôt l’énoncé du lemme puisque $R\Psi_{\sigma} = (R\Psi_m)_{\sigma}$ dès que $I_m \subset \ker \sigma$. □

Proposition 5.1.9 *Il existe un foncteur x_{eq}^* s’inscrivant dans un diagramme essentiellement commutatif*

$$\begin{array}{ccc} FPH' & \xrightarrow{x_{eq}^*} & D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G^0) \\ \downarrow \iota & & \downarrow \oplus \mathcal{H}^i[-i] \\ FPH & \xrightarrow{x^*} & gr \text{ Mod}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^d(G^0) \end{array},$$

exact au sens du lemme 5.1.5 et tel qu’on ait un isomorphisme canonique et compatible à l’action de W_K

$$x_{eq}^* R\Psi \simeq R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0), ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1] \quad \text{dans } D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G^0).$$

Admettons ce résultat momentanément et posons $ix_{eq}^* := \text{ind}_{G_0/\varpi^{\mathbb{Z}}}^G \circ x_{eq}^*$, qui est donc un foncteur “exact” de FPH' dans $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$ et envoie $R\Psi$ sur $R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{ca}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[d-1]$ en respectant les actions de W_K . D’après 5.1.4, on a un isomorphisme I_K -équivariant

$$ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma) \simeq \bigoplus_{\rho \rightsquigarrow \sigma} (R\Gamma_c[\rho]^\vee \otimes V_\rho)1-d,$$

l’action de I_K sur le $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace V_ρ étant triviale.

5.1.10 *Preuve de la proposition 4.3.9* : Fixons $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D^\times)$ comme dans la partie 4 et posons $\sigma := \sigma'(\rho)$, de sorte que $d_\sigma = d_\rho$. Par l’isomorphisme précédent, il suffit de prouver que

$$ix_{eq}^*(N_\sigma)^{d_\sigma-1} \neq 0.$$

En effet, cela impliquera $N_{\rho'}^{d_\rho-1} \neq 0$ pour au moins un $\rho' \sim \rho$, ce qui, par torsion, impliquera alors $N_\rho^{d_\rho-1} \neq 0$.

Par définition des filtrations, l’opérateur N_σ envoie $I^q K_p(R\Psi_\sigma)$ dans $I^{q+1} K_{p-1}(R\Psi_\sigma)$ et induit un isomorphisme

$$N_\sigma : gr_I^q gr_p^K(R\Psi_\sigma) \xrightarrow{\sim} gr_I^{q+1} gr_{p-1}^K(R\Psi_\sigma)$$

tant que $p > 1$. En particulier, puisque les $gr_I^q R\Psi_\sigma$ et $gr_p^K R\Psi_\sigma$ sont nuls pour p, q hors de $\{0, \dots, d_\sigma - 1\}$, on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} R\Psi_\sigma & \xrightarrow{N_\sigma^{d_\sigma-1}} & R\Psi_\sigma \\ \text{can}_+ \downarrow & & \uparrow \text{can}_- \\ gr_I^0 gr_{d_\sigma-1}^K R\Psi_\sigma & \xrightarrow{\sim} & gr_I^{d_\sigma-1} gr_0^K R\Psi_\sigma \end{array}$$

où les applications can sont les projections et injections canoniques (notons qu’on a aussi $gr_I^0 gr_{d_\sigma-1}^K = gr_{d_\sigma-1}^M$ et $gr_I^{d_\sigma-1} gr_0^K = gr_{1-d_\sigma}^M$). Nous devons donc étudier les morphismes $ix_{eq}^*(\text{can}_+)$ et $ix_{eq}^*(\text{can}_-)$ dans la catégorie $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$. Pour cela, remarquons tout d’abord que d’après 5.1.6 i), la cohomologie des complexes $ix_{eq}^*(gr_I^q gr_p^K R\Psi_\sigma)$ est concentrée en un seul degré $p+q-1-d_\sigma$. Ce miracle détermine complètement ces complexes dans la catégorie dérivée $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$, et l’énoncé de 5.1.6 est encore vrai si l’on y remplace ix^* par ix_{eq}^* . En voici une conséquence :

Lemme 5.1.11 *Notons $V'_\sigma := V_\sigma \otimes V_\rho$.*

i) *Le complexe $ix_{eq}^*(I^q gr_p^K R\Psi_\sigma)$ est non-nul seulement si $p, q \geq 0$ et $p+q < d_\sigma$, auquel cas il est cohomologiquement concentré en degré $p+q-d_\sigma+1$ et donné par :*

$$ix_{eq}^*(I^q gr_p^K R\Psi_\sigma) \simeq \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \pi_{\rho'}^{>p+q} \otimes V'_\sigma \right) [d_\sigma - 1 - p - q]$$

et le morphisme canonique $ix_{eq}^(I^q gr_p^K R\Psi_\sigma) \rightarrow ix_{eq}^*(gr_I^q gr_p^K R\Psi_\sigma)$ est induit (modulo isomorphismes) sur chaque facteur par l’injection $\tau_{\rho'}^{>p+q} \hookrightarrow \pi_{\rho'}^{>p+q}$.*

ii) *La “filtration” par les noyaux $(ix_{eq}^*(K_\bullet R\Psi_\sigma))$ est canonique au décalage de $1-d_\sigma$ près, ce qui signifie que pour tout p , on a un triangle commutatif*

$$\begin{array}{ccc} ix_{eq}^*(K_p R\Psi_\sigma) & \longrightarrow & ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma) \\ \downarrow \sim & \nearrow \text{tronq} & \\ \tau_{<p+1-d_\sigma}(ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma)) & & \end{array}$$

Preuve : On démontre le point i) en fixant p et en faisant une récurrence descendante de $q = d_\sigma - 1 - p$ à 0. En effet, le cas $q = d_\sigma - 1 - p$ est donné par l'égalité $I^{d_\sigma-1-p} gr_p^K = gr_I^{d_\sigma-1-p} gr_p^K$ et le point i) de 5.1.6. Supposons la propriété démontrée pour $q + 1$, et considérons le triangle distingué

$$(5.1.12) \quad \longrightarrow I^q gr_p^K[-i_\sigma^{p,q}] \longrightarrow gr_I^q gr_p^K[-i_\sigma^{p,q}] \longrightarrow I^{q+1} gr_p^K[1 - i_\sigma^{p,q}].$$

Par l'hypothèse de récurrence et par 5.1.6 i), les deux derniers objets sont dans le coeur $Mod_{\mathbb{Q}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$. Par l'hypothèse de récurrence et 5.1.6 ii), la flèche entre eux est induite (modulo isomorphismes) sur chaque facteur par l'injection $\pi_{\rho'}^{i_\sigma^{p,q+1}} \hookrightarrow \tau_{\rho'}^{i_\sigma^{p,q}}$. En particulier cette flèche est surjective, donc le premier membre $I^q gr_p^K[-i_\sigma^{p,q}]$ du triangle 5.1.12 est lui aussi dans le coeur $Mod_{\mathbb{Q}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$ et s'identifie au noyau de la deuxième flèche, ce qui achève le pas de récurrence.

Pour le deuxième point on a $gr_p^K = I^0 gr_p^K$, donc le complexe $x_{eq}^*(gr_p^K)$ est concentrée en degré $1 - d_\sigma + p$, par le point i). Le point ii) en découle par une récurrence immédiate. \square

Comme les flèches canoniques $I^0 gr_{d_\sigma-1}^K \longrightarrow gr_I^0 gr_{d_\sigma-1}^K$ et $\mathcal{H}^0 \longrightarrow \tau_{\geq 0}$ sont des isomorphismes (pour $x_{eq}^*(R\Psi_\sigma)$), le point ii) du lemme fournit un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma) & & \\ \downarrow ix_{eq}^*(can_+) & \searrow tronq_+ & \\ ix_{eq}^*(gr_I^0 gr_{d_\sigma-1}^K) & \xleftarrow{\sim} & \mathcal{H}^0(ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma)) \end{array}$$

De même, la flèche $gr_I^{d_\sigma-1} gr_0^K \longrightarrow gr_0^K$ permet de factoriser $ix_{eq}^*(can_-)$

$$\begin{array}{ccc} ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma) & \xleftarrow{tronq_-} & \mathcal{H}^{1-d_\sigma}(ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma))[d_\sigma - 1] \\ \uparrow ix_{eq}^*(can_-) & & \uparrow \sim \\ ix_{eq}^*(gr_I^{d_\sigma-1} gr_0^K) & \xrightarrow{\alpha} & ix_{eq}^*(gr_0^K) \end{array}$$

où la flèche α s'identifie à la composée

$$\begin{array}{ccccccc} ix_{eq}^*(I^{d_\sigma-1} gr_0^K) & \longrightarrow & ix_{eq}^*(I^{d_\sigma-2} gr_0^K) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & ix_{eq}^*(I^0 gr_0^K) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \pi_{\rho' \vee}^{> d_\sigma-1} \right) \otimes V'_\sigma[0] & \xrightarrow{\alpha_{d_\sigma-1}} & \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \pi_{\rho' \vee}^{> d_\sigma-2} \right) \otimes V'_\sigma[1] & \xrightarrow{\alpha_{d_\sigma-2}} & \dots & \xrightarrow{\alpha_1} & \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \pi_{\rho' \vee}^{> 0} \right) \otimes V'_\sigma[d_\sigma - 1] \end{array},$$

grâce à 5.1.11 i). Comme le complexe $ix_{eq}^*(R\Psi_\sigma)$ est scindé dans $D_{\mathbb{Q}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$, le morphisme de troncation $tronq_+$ est un épimorphisme tandis que $tronq_-$ est un monomorphisme. Il ne reste donc plus qu'à prouver que la composée ci-dessus est non-nulle. Or, pour tout $0 < q < d_\sigma$, on a des triangles distingués

$$\begin{array}{ccccccc} ix_{eq}^*(I^{q+1} gr_0^K)[1 - d_\sigma] & \longrightarrow & ix_{eq}^*(I^q gr_0^K)[1 - d_\sigma] & \longrightarrow & ix_{eq}^*(gr_I^q gr_0^K)[1 - d_\sigma] & \longrightarrow & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \pi_{\rho' \vee}^{> q+1} \right) \otimes V'_\sigma[-q - 1] & \xrightarrow{\alpha_{q+1}} & \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \pi_{\rho' \vee}^{> q} \right) \otimes V'_\sigma[-q] & \longrightarrow & \left(\bigoplus_{\rho' \rightsquigarrow \sigma} \tau_{\rho' \vee}^{> q} \right) \otimes V'_\sigma[-q] & \longrightarrow & \end{array}$$

qui montrent d'après 5.1.11 i) que α_{q+1} est donné sur chaque facteur, et modulo isomorphismes, par un élément non-nul de $Ext_{G/\varpi^{\mathbb{Z}}}^1(\pi_{\rho' \vee}^{> q+1}, \pi_{\rho' \vee}^{> q})$. Par 2.1.17 ii) et 2.1.18, il s'ensuit que la composée α est non-nulle dans $D_{\mathbb{Q}_l}^b(G/\varpi^{\mathbb{Z}})$.

5.1.13 Preuve de la proposition 5.1.9 : Notons $\widetilde{\mathbb{N}(G)}$ le topos des préfaisceaux sur $\mathbb{N}(G)$. On a un morphisme de topos (δ^*, δ_*) du topos classifiant \widetilde{G} de G (dont les objets sont les ensembles munis d’une action lisse de G) vers $\widetilde{\mathbb{N}(G)}$, donné par

$$\delta_*(E) = (n \mapsto E^{H_n}) \quad \text{et} \quad \delta^*(F) := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} F(n).$$

Par ailleurs notons $\widetilde{S_{HT,et}^{s,ca}} \rightarrow \mathbb{N}(G)$ le topos étale fibré associé au $\mathbb{N}(G)$ -diagramme de k^{ca} -schémas formé par les $(S_{HT,n}^{s,ca})_{n \in \mathbb{N}}$, et $Top(\widetilde{S_{HT,et}^{s,ca}})$ son topos total. Si Λ est une extension de \mathbb{Z}_l , on a un foncteur “oubli” ω de la catégorie dérivée $D_{\Lambda_\bullet}^{b,top}(S_{HT}) := D_{\Lambda_\bullet}^b(Top(\widetilde{S_{HT,et}^{s,ca}}))$ des Λ_\bullet -modules de $Top(\widetilde{S_{HT,et}^{s,ca}})$ vers la catégorie $D_{\Lambda_\bullet}^{b,naiif}(S_{HT})$ des sections de la catégorie bi-fibrée sur $\mathbb{N}(G)$ dont les fibres sont les catégories dérivées $D_{\Lambda_\bullet}^b(S_{HT,n}^{s,ca})$. Remarquons que, par t -exactitude des $g_*^{m|n}$, la catégorie $FPH_{\Lambda_\bullet}^c$ introduite au-dessus de 5.1.8 est une sous-catégorie pleine de $D_{\Lambda_\bullet}^{b,naiif}(S_{HT})$. On notera $\mathcal{FPH}_{\Lambda_\bullet}^c$ la sous-catégorie pleine de $D_{\Lambda_\bullet}^{b,top}(S_{HT})$ des objets dont l’image par ω est dans $FPH_{\Lambda_\bullet}^c$. D’après l’appendice, proposition A.0.3, le foncteur ω induit une équivalence de catégories $\mathcal{FPH}_{\Lambda_\bullet}^c \xrightarrow{\sim} FPH_{\Lambda_\bullet}^c$, ce qui fait de $\mathcal{FPH}_{\Lambda_\bullet}^c$ une sous-catégorie abélienne admissible de $D_{\Lambda_\bullet}^{b,top}(S_{HT})$.

Le point supersingulier x induit un morphisme de topos $(Top(x)^*, Top(x)_*) : \widetilde{\mathbb{N}(G^0)} \rightarrow Top(\widetilde{S_{HT,et}^{s,ca}})$. On a en particulier un foncteur

$$Top(x)_* : D_{\Lambda_\bullet}^{b,top}(S_{HT}) \xrightarrow{Top(x)^*} D_{\Lambda_\bullet}^b(\widetilde{\mathbb{N}(G^0)}) \xrightarrow{R\lim^{\mathbb{N}(G^0)}} D_{\Lambda}^b(\widetilde{\mathbb{N}(G^0)})$$

et une famille de foncteurs

$$x_{n,\bullet}^* : D_{\Lambda_\bullet}^b(S_{HT,n}^{s,ca}) \xrightarrow{x_n^*} D_{\Lambda_\bullet}^b(pt) \xrightarrow{R\lim} D_{\Lambda}^b(pt) \xrightarrow{\mathcal{H}^*} gr Mod(\Lambda)$$

qui s’inscrivent dans le diagramme essentiellement commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{FPH}_{\Lambda_\bullet}^c & \hookrightarrow & D_{\Lambda_\bullet}^{b,top}(S_{HT}) & \xrightarrow{Top(x)_*} & D_{\Lambda_\bullet}^b(\widetilde{\mathbb{N}(G^0)}) & \xrightarrow{\delta^*} & D_{\Lambda}^b(G^0) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \omega & & \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}^* \\ FPH_{\Lambda_\bullet}^c & \hookrightarrow & D_{\Lambda_\bullet}^{b,naiif}(S_{HT}) & \xrightarrow{(x_{n,\bullet}^*)_n} & gr Mod_{\Lambda}(\widetilde{\mathbb{N}(G^0)}) & \xrightarrow{\delta^*} & gr Mod_{\Lambda}(G^0) \end{array}$$

Dans ce diagramme, la composée de la ligne du bas induit, après inversion de l et passage à la limite sur Λ , le foncteur noté plus haut $x^* \circ \iota : FPH' \rightarrow gr Mod_{\mathbb{Q}_l}(G^0)$. Nous poserons donc x_{eq}^* le foncteur obtenu en composant la ligne du haut avec un quasi-inverse de $\omega|_{\mathcal{FPH}_{\Lambda_\bullet}^c}$, en inversant l et en passant à la limite sur Λ .

Il ne nous reste plus qu’à exhiber un isomorphisme canonique $x_{eq}^*(R\Psi) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ dans $D_{\mathbb{Q}_l}^b(G^0)$. On va pour cela se ramener à l’isomorphisme de Berkovich entre cycles évanescents formels et algébriques. En effet, pour tout n , on a un diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S_{HT,n,et}^{\eta,nr}} & \xrightarrow{x_n^{an,*}} & \widetilde{\mathcal{M}_{LT,n,et}^{(0)}} \\ \downarrow \psi_{*n} & \nearrow & \downarrow \gamma_{*n} \\ \widetilde{S_{HT,n,et}^{s,ca}} & \xrightarrow{x_n^*} & \bullet \end{array}$$

où $\psi_n = j_n^{s,ca,*} \circ j_n^{\eta,ca}$ est le foncteur cycles évanescents “usuel” pour les variétés algébriques définies sur $\widehat{\mathcal{O}}_K^{nr}$, $x_n^{an,*}$ envoie un faisceau étale sur la restriction de son analytifié à $\mathcal{M}_{LT,n}^{(0)}$ (foncteur noté $\mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}}$ chez Berkovich [5, 5.1] [7, 3.1]), et γ_n est le foncteur des sections globales après extension des scalaires

de \widehat{K}^{nr} à \widehat{K}^{ca} , qui s'identifie avec le foncteur noté Ψ_η par Berkovich [7, p. 373] puisque la fibre spéciale réduite de $\mathcal{M}_{LT,n}^{(0)}$ est un point. La double flèche diagonale signifie qu'on a une transformation naturelle canonique $x_n^* \circ \psi_n \rightarrow \gamma_n \circ x_n^{an,*}$. D'après [7, Thm 3.1], cette transformation induit un isomorphisme $x_n^* R\psi_{n*}(\Lambda_\bullet) \xrightarrow{\sim} R\gamma_{n*}(\Lambda_\bullet)$ dans $D^b(\Lambda_\bullet)$.

Ces catégories, foncteurs, et transformations naturelles, s'organisent au-dessus de $\mathbb{N}(G^0)$ et fournissent un diagramme de catégories

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}(\widetilde{S_{HT,et}^{\eta,nr}}) & \xrightarrow{x^{an,*}} & \text{Top}(\widetilde{\mathcal{M}_{LT,et}^{(0)}}) \\ \psi_* \downarrow & \nearrow & \downarrow \gamma_* \\ \text{Top}(\widetilde{S_{HT,et}^{s,ca}}) & \xrightarrow{\text{Top}(x)^*} & \widetilde{\mathbb{N}(G^0)} \end{array}$$

et en particulier un morphisme

$$(5.1.14) \quad \text{Top}(x)^* R\psi_*(\Lambda_\bullet) \rightarrow R\gamma_*(\Lambda_\bullet) \text{ dans } D_{\Lambda_\bullet}^+(\widetilde{\mathbb{N}(G^0)}).$$

Ce dernier est un isomorphisme, puisqu'il est en restriction à chaque étage.

Par définition, l'objet $R\Psi$ de FPH' est donné par le système inductif $((R\psi_{n*}(\Lambda_\bullet))_{n \in \mathbb{N}(G)[\frac{1}{l}]})_\Lambda$. Mais comme les morphismes de transitions $(g^{m|n})^\eta$ du $\mathbb{N}(G^0)$ -diagramme $(S_{HT,n}^\eta)_n$ sont *étales* (fibre générique), la restriction de $R\psi_*(\Lambda_\bullet)$ à l'étage n est canoniquement isomorphe à $R\psi_{n*}(\Lambda_\bullet)$. En d'autres termes $\omega^{-1}(R\Psi)$ est donné par le système inductif $((R\psi_*(\Lambda_\bullet)[\frac{1}{l}]))_\Lambda$ de la catégorie $\varinjlim (\mathcal{FPH}_{\Lambda_\bullet}^c[\frac{1}{l}])$. Vu l'isomorphisme 5.1.14, il nous suffira donc de prouver que pour tout Λ , on a un isomorphisme

$$(5.1.15) \quad \delta^* \varprojlim^{\mathbb{N}(G^0)} R\gamma_*(\Lambda_\bullet) \simeq R\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, \Lambda)$$

dans $D_\Lambda^b(G^0)$. On remarque pour cela que le morphisme de périodes $\xi_{LT} : \mathcal{M}_{LT,0}^{(0)} \rightarrow \mathcal{P}_{LT}$ induit un foncteur exact et pleinement fidèle

$$\xi^* : \widetilde{\mathcal{P}_{LT,et}} \rightarrow \text{Top}(\widetilde{\mathcal{M}_{LT,et}^{(0)}})$$

dont l'image est constituée des faisceaux *cartésiens* du topos total de droite, et que, revenant aux définitions, on a les factorisations suivantes :

$$\Gamma(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, -) = \delta^* \circ \gamma_* \circ \xi^* : \widetilde{\mathcal{P}_{LT,et}} \rightarrow \widetilde{G^0}$$

et

$$\Gamma_\bullet(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, -) = \delta^* \circ \varprojlim^{\mathbb{N}(G^0)} \circ \gamma_* \circ \xi^* : \text{Mod}_{\Lambda_\bullet}(\widetilde{\mathcal{P}_{LT,et}}) \rightarrow \text{Mod}_\Lambda(G^0).$$

(Remarquer que γ_* commute aux limites projectives quelconques, ce qui nous permet de placer la limite projective là où on l'a placée). Mais ξ_{LT} est un morphisme étale, donc ξ^* envoie injectifs sur injectifs, de sorte que le dernier isomorphisme se dérive en $R\Gamma_\bullet(\mathcal{M}_{LT}^{(0),ca}, -) = \delta^* \circ \varprojlim^{\mathbb{N}(G^0)} \circ R\gamma_* \circ \xi^*$, ce qui conclut la preuve de 5.1.15 puisque $\xi^*(\Lambda_\bullet) = \Lambda_\bullet$.

5.2 Uniformisation p -adique et conjecture de pureté

Dans cette partie nous prouvons que les variétés uniformisées par les revêtements de l'espace symétrique de Drinfeld satisfont la conjecture dite "monodromie-poids" de Deligne. Cela s'applique à certaines variétés de Shimura associées à des groupes unitaires définis globalement par une algèbre à division et involution satisfaisant les mêmes propriétés que celles intervenant dans les variétés de Harris-Taylor, excepté qu'à la place où le complété est K , elle doit être totalement ramifiée, au lieu d'être déployée. Pour de telles variétés de Shimura, on en déduit donc le facteur local de la fonction L en la place concernée.

Cependant, nous éviterons d'introduire les nombreuses notations nécessaires à la définitions de ces variétés de Shimura, et nous contenterons d'exposer les raisonnements pour des variétés "abstraites" uniformisées par les $\mathcal{M}_{Dr,n}$. On commence par rappeler l'énoncé de la conjecture de Deligne.

5.2.1 Pureté de la filtration de monodromie : On sait depuis Grothendieck que sur toute représentation l -adique continue de dimension finie (σ, V) de W_K , l'inertie I_K agit de manière quasi-unipotente, c'est-à-dire qu'il existe un unique endomorphisme nilpotent N_σ de V tel qu'il existe un sous-groupe $I_\sigma \subset I_K$ d'indice fini agissant via la formule $\forall i \in I_\sigma, \sigma(i) = \exp(N_\sigma t_\mu(i))$, où t_μ a été introduit au paragraphe 2.2.5. L'opérateur N_σ est donc le logarithme de la partie unipotente de la monodromie de σ , mais par abus de langage, nous l'appellerons simplement "opérateur de monodromie de σ "⁹. Il vérifie nécessairement l'équation habituelle $wN_\sigma w^{-1} = |w|N_\sigma$ de sorte que pour tout relèvement de Frobenius géométrique ϕ , l'application

$$(5.2.2) \quad w \mapsto \sigma^\phi(w) := \sigma(w) \exp(-N_\sigma t_\mu(i_\phi(w))) \quad \text{où } w = \phi^{\nu(w)} i_\phi(w)$$

définit une représentation *lisse* de W_K sur V . Rappelons aussi que par [19, 8.4.2], la classe d'isomorphisme de σ^ϕ ne dépend pas du choix de ϕ .

Ceci s'applique en particulier aux espaces de cohomologie l -adique $H^i(X_{K^{ca}}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ d'une variété X propre sur K . À l'opérateur de monodromie N est associée une filtration croissante stable sous W_K de l'espace V dite "filtration de monodromie"¹⁰ $\cdots \subseteq M_i V \subseteq M_{i+1} V \subseteq \cdots$ de longueur finie et caractérisée par les propriétés que $N(M_i V) \subseteq M_{i-2} V$ pour tout i , et N induit des isomorphismes $N^i : gr_i^M V \otimes | - |^i \xrightarrow{\sim} gr_{-i}^M V$ pour tout $i \geq 0$. Par ailleurs, Deligne a prouvé l'existence d'une autre filtration croissante stable sous W_K de V , dite "filtration par les poids", $\cdots \subseteq W_i V \subseteq W_{i+1} V \subseteq \cdots$ caractérisée par la propriété que les valeurs propres de *tout* relèvement de Frobenius géométrique sur $gr_i^W V$ sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de norme complexe $q^{i/2}$.

Conjecture 5.2.3 (Monodromie-Poids) *Si X est propre et lisse sur K , alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a*

$$M_i(H^j(X^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)) = W_{i+j}(H^j(X^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)).$$

Lorsque K est d'égales caractéristiques, l'énoncé est essentiellement contenu et démontré dans les travaux de Deligne sur les conjectures de Weil. Le cas d'inégales caractéristiques est très peu avancé, même dans les cas de réduction semi-stable.

Remarquons que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a $N(W_i V) \subseteq W_{i-2} V$, de sorte que par la caractérisation de la filtration de monodromie, la conjecture ci-dessus est équivalente à l'assertion : *Pour tout $i \geq 0$, N induit un isomorphisme*

$$(5.2.4) \quad N^i : gr_{i+j}^W(H^j(X^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)) \otimes | - |^i \xrightarrow{\sim} gr_{-i+j}^W(H^j(X^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)).$$

5.2.5 Uniformisation p -adique : Soit Γ un sous-groupe *discret, cocompact et sans torsion* de G . On sait que l'action d'un tel sous-groupe sur le \widehat{K}^{nr} -espace analytique $\mathcal{M}_{Dr,0}$ est *libre*, et il en est donc de même de l'action sur les revêtements $\mathcal{M}_{Dr,n}$. Par [6, lemma 4], l'espace annelé quotient $\mathcal{M}_{Dr,n}/\Gamma$ est muni d'une structure de \widehat{K}^{nr} -espace analytique. Notons $\Gamma_Z := \Gamma \cap K^\times$; c'est un sous-groupe discret cocompact de K^\times . D'après [42, Thm 3.49], la donnée de descente à la Weil de $\mathcal{M}_{Dr,n}$ devient effective sur $\mathcal{M}_{Dr,n}/\Gamma_Z$, donc *a fortiori* sur $\mathcal{M}_{Dr,n}/\Gamma$.

Fait 5.2.6 (Mustafin, Cherednik, Drinfeld, Rapoport-Zink, Varshavski) *Le K -espace analytique obtenu par descente du quotient $\mathcal{M}_{Dr,n}/\Gamma$ est algébrisable. Plus précisément, il existe une variété algébrique $S_{\Gamma,n}$ propre et lisse sur K dont l'analytification lui est canoniquement isomorphe. En particulier, $S_{\Gamma,n}$ est munie d'une action de D^\times et d'après le théorème de comparaison GAGA de Berkovich [4, 7.1], il y a des isomorphismes $D^\times \times W_K$ -équivalents*

$$H^i(S_{\Gamma,n} \otimes_K K^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\sim} H_c^i(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

où le terme de gauche désigne la cohomologie étale l -adique au sens des variétés algébriques.

⁹Bien-sûr N_σ dépend du générateur μ de $\mathbb{Z}_l(1)$, mais $N_\sigma \otimes \mu^* : V \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Z}_l(1) \rightarrow V$ n'en dépend pas.

¹⁰qui, elle, est bien indépendante du choix de μ

Ce résultat permet de s'assurer que la cohomologie l -adique de $\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}/\Gamma$ est munie d'une filtration par les poids et d'une filtration de monodromie, mais on aurait aussi pu le voir directement, à partir de l'isomorphisme W_K -équivariant de Hochschild-Serre [17, Prop B.3.1]

$$\overline{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l[\Gamma]}^L R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l)$$

où, dans l'expression de gauche, le complexe est vu à travers le foncteur d'oubli $D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b(GD \times W_K^{disc}) \longrightarrow D_{\overline{\mathbb{Q}}_l}^b((\Gamma \times D^\times)/\Gamma_Z^{diag} \times W_K^{disc})$.

Dorénavant, nous surlignerons tous les quotients par Γ_Z (par exemple ceux de Γ , D^\times , G , ou $\mathcal{M}_{Dr,n}$), et pour une représentation $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(\overline{D^\times})$, nous noterons $(-)[\bar{\rho}]$ le foncteur exact $(-) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l \overline{D^\times}} \rho$ à ne pas confondre avec le foncteur $(-)[\rho] = (-) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l D^\times}^L \rho$ introduit au début de la section 4. Avec ces notations on a une décomposition

$$R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(\overline{D^\times}/(1+\varpi^n \mathcal{O}_D))} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}] \otimes \rho^\vee$$

qui induit en cohomologie des décompositions

$$H^i(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) \simeq \bigoplus_{\rho \in \text{Irr}(\overline{D^\times}/(1+\varpi^n \mathcal{O}_D))} H^i(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}] \otimes \rho^\vee,$$

où l'action de W_K , resp. D^\times , se fait sur les premiers, resp. seconds, facteurs des produits tensoriels. L'isomorphisme de Hochschild-Serre se décompose aussi et donne :

$$(5.2.7) \quad \overline{\mathbb{Q}}_l \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_l[\Gamma]}^L (R\Gamma_c[\rho]) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathcal{M}_{Dr,n}^{ca}/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}]$$

pour toute $\rho \in \text{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}(D^\times/\Gamma_Z(1+\varpi^n \mathcal{O}_D))$. Soit alors $N_{\rho,\Gamma,j}$ l'endomorphisme du $\overline{\mathbb{Q}}_l$ -espace vectoriel $H^j(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}]$ fonctoriellement induit par N_ρ via l'isomorphisme précédent, le passage à la cohomologie en degré j et le théorème de comparaison GAGA. Comme tous les isomorphismes utilisés sont W_K -équivariants, la définition de N_ρ montre que le sous-groupe $I_\rho \subset I_K$ du lemme 4.3.2 agit sur $H^j(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}]$ par $i \mapsto \exp(N_{\rho,\Gamma,j} t_\mu(i))$, de sorte que $N_{\rho,\Gamma,j}$ est l'opérateur de monodromie de la représentation de W_K sur $H^j(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}]$.

Fixons dorénavant un relèvement de Frobenius géométrique ϕ et notons $H^{j,\phi}(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}]$ la représentation lisse de W_K associée, comme en 5.2.2. En combinant l'isomorphisme 5.2.7 avec le scindage α_ϕ de 4.3.6, on constate que la suite spectrale de Hochschild-Serre dégénère en des isomorphismes $D^\times \times W_K$ -équivariants

$$\begin{aligned} H^{j,\phi}(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\bar{\rho}] &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \text{Tot}_{j-d+1-i}^{\overline{\Gamma}}(\overline{\mathbb{Q}}_l, \pi_\rho^{\leq i}) \otimes \sigma'(\rho^\vee) | - |^{-i} \\ &\simeq \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \text{Ext}_{\overline{\Gamma}}^{d-1-j+i}(\pi_\rho^{\leq i}, \overline{\mathbb{Q}}_l)^* \otimes \sigma'(\rho^\vee) | - |^{-i} \\ &\simeq \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \text{Ext}_{\overline{G}}^{d-1-j+i}(\pi_\rho^{\leq i}, \mathcal{C}^\infty(G/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l))^* \otimes \sigma'(\rho^\vee) | - |^{-i} \end{aligned}$$

La représentation $\mathcal{C}^\infty(G/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ de G est admissible et semi-simple, avec constituants "unitarisables" : en particulier, les seules représentations elliptiques qui peuvent y apparaître sont les séries discrètes et les représentations de Speh locales. Soit $m_{\rho,\Gamma}^\emptyset$, resp. $m'_{\rho,\Gamma}$, la multiplicité de la série discrète π_ρ^\emptyset , resp. de la représentation de Speh $\pi_\rho^{S_\rho}$ dans cette représentation $\mathcal{C}^\infty(G/\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_l)$. Compte tenu du calcul de Ext entre représentations elliptiques, on trouve la description suivante :

Pour $j = d - 1$, on a

$$H^{d-1, \phi}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]_{D^\times \times W_K} \simeq \begin{cases} \left(\bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i} \right)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} & \text{si } d_\rho \text{ est pair} \\ \left(\bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i} \right)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} \oplus (\sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-k})^{m'_{\rho, \Gamma}} & \text{si } d_\rho = 1 + 2k \end{cases}$$

et pour $j \neq d - 1$, on a

$$H^{j, \phi}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]_{D^\times \times W_K} \begin{cases} 0 & \text{si } j + d_\rho - d \text{ est impair} \\ (\sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-k})^{m'_{\rho, \Gamma}} & \text{si } j + d_\rho - d = 2k \geq 0 \end{cases}$$

Observons en particulier que l'action de W_K sur $H^{j, \phi}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]$ est semi-simple. On en déduit la remarque suivante :

Remarque 5.2.8 *L'action d'un relèvement de Frobenius ϕ sur les espaces de cohomologie $H^i(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)$ est semi-simple.*

Revenons à notre problème initial ; par le théorème de “multiplicités limites” de [43, 1.3], on sait que, quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer $m_{\rho, \Gamma}^\emptyset > 0$. On peut maintenant énoncer

Proposition 5.2.9 *Avec les notations ci-dessus, supposons Γ “assez petit” pour que $m_{\rho, \Gamma}^\emptyset \neq 0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes (toujours sous la description 4.1.2) :*

- i) *L'endomorphisme nilpotent N_ρ de $R\Gamma_c[\rho]$ défini dans le lemme 4.3.2 est d'ordre d_ρ (i.e. vérifie $N_\rho^{d_\rho-1} \neq 0$).*
- ii) *L'opérateur de monodromie $N_{\rho, \Gamma, d-1}$ de $H^{d-1}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]$ est d'ordre d_ρ .*
- iii) *La conjecture monodromie-poids est vérifiée pour les $H^j(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]$, $j \in \mathbb{N}$.*

Preuve : Évidemment, ii) \Rightarrow i), puisque N_ρ est d'ordre au plus d_ρ et induit $N_{\rho, \Gamma, d-1}$. Par ailleurs, rappelons que la représentation $\sigma'(\rho^\vee) = \sigma_{d/d_\rho}(\tau_\rho^\emptyset)|\cdot|^{-\frac{d_\rho-d}{2}}$ est pure de poids $d - d_\rho$. Ainsi la description de la cohomologie ci-dessus montre que $\text{gr}_{d-d_\rho}^W(H^{d-1}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]) \neq 0$, et donc la conjecture monodromie-poids dans sa version 5.2.4 implique que $N_{\rho, \Gamma, d-1}^{d_\rho-1} \neq 0$. On a donc iii) \Rightarrow ii).

Il nous reste à prouver que i) \Rightarrow iii). En fait le seul espace de cohomologie qui peut poser problème pour la conjecture monodromie-poids est celui de degré médian $j = d - 1$, les autres étant purs. Il nous faut alors expliciter l'action de $N_{\rho, \Gamma, d-1}$ sur $H^{d-1}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]$. Mais si on suppose la propriété i), alors dans l'isomorphisme

$$H^{d-1}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}] \simeq \bigoplus_{i=0}^{d_\rho-1} \text{Ext}_{\overline{\mathcal{G}}}^i \left(\pi_\rho^{\leq i}, (\pi_\rho^\emptyset)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} \oplus (\pi_\rho^{S_\rho})^{m'_{\rho, \Gamma}} \right)^* \otimes \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i},$$

induit par le scindage α_ϕ , l'opérateur N_ρ agit par \cup -produit et la description 2.1.17 ii) de ce \cup -produit montre que N_ρ induit des isomorphismes

$$\text{Ext}_{\overline{\mathcal{G}}}^i \left(\pi_\rho^{\leq i}, (\pi_\rho^\emptyset)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} \right)^* \otimes \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i} \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\overline{\mathcal{G}}}^{i-1} \left(\pi_\rho^{\leq i}, (\pi_\rho^\emptyset)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} \right)^* \otimes \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i+1}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, d_\rho - 1\}$. Or, toujours par la description de la cohomologie donnée plus haut, on a pour $i \neq \frac{d_\rho-1}{2}$

$$\text{Ext}_{\overline{\mathcal{G}}}^i \left(\pi_\rho^{\leq i}, (\pi_\rho^\emptyset)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} \right)^* \otimes \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i} \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{(d-1)+(1-d_\rho+2i)}^W(H^{d-1}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}])$$

et pour $i = \frac{d_\rho-1}{2}$ (lorsque d_ρ est impair!) on a

$$\text{Ext}_{\overline{\mathcal{G}}}^i \left(\pi_\rho^{\leq i}, (\pi_\rho^\emptyset)^{m_{\rho, \Gamma}^\emptyset} \oplus (\pi_\rho^{S_\rho})^{m'_{\rho, \Gamma}} \right)^* \otimes \sigma'(\rho^\vee)|\cdot|^{-i} \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{d-1}^W(H^{d-1}(S_{\Gamma, n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l)[\overline{\rho}]).$$

Dans tous les cas, la description de l'action de N_ρ par \cup -produit montre que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, N^k induit un isomorphisme

$$N^k : gr_{d-1+k}^W (H^{d-1}(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) | \overline{\rho}) \xrightarrow{\sim} gr_{d-1-k}^W (H^{d-1}(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) | \overline{\rho})$$

et par 5.2.4, la conjecture monodromie-poids pour la partie ρ -covariante $H^{d-1}(S_{\Gamma,n}^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_l) | \overline{\rho}$ en découle. \square

On en déduit le deuxième résultat principal de l'introduction, le théorème B.

A Catégories abéliennes admissibles et topos fibrés

Soit I une petite catégorie et $X \rightarrow I$ un topos fibré sur I . Nous suivrons autant que possible les notations de [37, ch. VI]. En particulier, le topos total de X sera noté $Top(X)$, le symbole X^{dis} désignera le topos $\bigsqcup_{i \in I} X_i$, et la lettre $e : X^{dis} \rightarrow Top(X)$ le morphisme de topos évident, décrit en [37, 6.1.1]. On dispose donc d'une suite de trois foncteurs adjoints $(e_!, e^*, e_*)$ reliant les catégories X^{dis} et $Top(X)$.

Soit A un (pro)-anneau de $Top(X)$ et $A^{dis} := e^*(A)$. Les foncteurs e^* et e_* respectent les catégories de modules respectives et y restent adjoints, et e^* admet encore un adjoint à gauche pour les modules, que nous noterons $e_!^A$ pour le distinguer de $e_!$. Nous supposons par la suite que $e_!^A$ est *exact*. Il revient au même de demander que "les" morphismes de topos annelés $(X_{s(\alpha)}, A_{s(\alpha)}) \rightarrow (X_{b(\alpha)}, A_{b(\alpha)})$ associés aux flèches α dans I (de source $s(\alpha)$ et but $b(\alpha)$) soient *plats*, ce qui est par exemple vérifié si A est *constant*.

On notera simplement $D^{top} := D_A^+(Top(X))$ et $D^{dis} := D_{A^{dis}}^+(X^{dis})$. On a donc une paire de foncteurs adjoints (e^*, Re_*) reliant D^{top} et D^{dis} . On définit une catégorie D^{naif} dont

– les objets sont les paires (K, κ) où $K \in D^{dis}$ et $\kappa : K \rightarrow e^* Re_* K$ est un morphisme tel que

i) la composée $K \xrightarrow{\kappa} e^* Re_* K \xrightarrow{Adj} K$ est l'identité, et

ii) les deux composées $K \xrightarrow{\kappa} e^* Re_* K \xrightarrow[e^*(Adj)Re_*]{e^* Re_* \kappa} e^* Re_* e^* Re_* K$ sont égales.

– les flèches $(K, \kappa) \rightarrow (K', \kappa')$ sont les morphismes $K \xrightarrow{\alpha} K'$ tels que $\kappa' \circ \alpha = e^* Re_*(\alpha) \circ \kappa$. On a donc une suite exacte :

$$(A.0.1) \quad 0 \rightarrow Hom_{D^{naif}}((K, \kappa), (K', \kappa')) \rightarrow Hom_{D^{dis}}(K, K') \xrightarrow{\delta} Hom_{D^{dis}}(K, e^* Re_* K')$$

où δ désigne la différence $\kappa' \circ \alpha - e^* Re_*(\alpha) \circ \kappa$.

La catégorie D^{naif} est \mathbb{Z} -graduée. On a un foncteur $e_{naif}^* : D^{naif} \rightarrow D^{dis}$ d'oubli du morphisme κ et on dira qu'un triangle de D^{naif} est distingué si son image par e_{naif}^* l'est. La catégorie D^{naif} n'est pas triangulée. Elle s'identifie à une sous-catégorie pleine des sections de la catégorie bi-fibrée sur I dont les fibres sont les $D_{A_i}^+(X_i)$.

On a aussi un foncteur $\omega : D^{top} \rightarrow D^{naif}$ qui envoie un objet K sur la paire $(e^* K, e^* K \xrightarrow{e^*(Adj)} e^* Re_* e^* K)$, et qui permet de factoriser $e^* = e_{naif}^* \circ \omega$.

Soit C^{dis} une sous-catégorie abélienne admissible de D^{dis} . Rappelons [1, 1.2.5] que cela signifie que (i) $Hom_{D^{dis}}(K, K'[n]) = 0$ pour tout $n < 0$ et tous $K, K' \in C^{dis}$, et (ii) les suites exactes courtes de C^{dis} se déduisent des triangles distingués par oubli de la flèche de bord. Nous noterons C^{naif} , resp. C^{top} , la sous-catégorie pleine de D^{naif} , resp. de D^{top} formée des objets X tels que $e_{naif}^*(X)$, resp. $e^*(X)$, soit isomorphe à un objet de C^{dis} . Le foncteur ω se restreint donc en un foncteur $C^{top} \rightarrow C^{naif}$.

Lemme A.0.2 *Supposons C^{dis} stable par $e^* Re_*$. Alors C^{naif} est une catégorie abélienne.*

Preuve : On définit les noyaux et conoyaux de la manière la plus naïve qui soit, sachant que sous l'hypothèse, $e^* Re_*$ induit un endo-foncteur *exact* de C^{dis} . Nous laissons la vérification des axiomes Ab_i au lecteur. \square

Remarquons que l'hypothèse "stable par $e^* Re_*$ " revient à demander que pour toute flèche α de I , "le" foncteur $D_{A_{s(\alpha)}}^+(X_{s(\alpha)}) \xrightarrow{R\alpha_*} D_{A_{b(\alpha)}}^+(X_{b(\alpha)})$ envoie $C_{s(\alpha)}^{dis}$ and $C_{b(\alpha)}^{dis}$. Cette hypothèse n'est donc généralement pas vérifiée par l'exemple le plus simple de catégorie C^{dis} , à savoir $Mod_{A^{dis}}(X^{dis})$. Pourtant dans ce cas encore la catégorie C^{naif} est bien-sûr abélienne, et plus généralement, la conclusion du lemme reste vraie si on suppose que C^{dis} stable par $e^* e_!^A$.

Proposition A.0.3 Soit C^{dis} une sous-catégorie abélienne admissible et stable par e^*Re_* de D^{dis} , alors le foncteur $\omega : C^{top} \rightarrow C^{naif}$ est une équivalence de catégories. En particulier, C^{top} est une sous-catégorie abélienne admissible de D^{top} .

Preuve de la pleine fidélité : fixons pour cela deux objets K, L dans C^{top} ; ce sont donc des complexes de A -modules dans $Top(X)$. Choisissons un complexe I_L^\bullet à composantes injectives et quasi-isomorphe à Y . On a donc $Hom_{C^{top}}(K, L) = H^0(\mathbf{s}(Hom_{C_A(X)}(X, I_L^\bullet)))$ où $C_A(X)$ est la catégorie des complexes de A -modules dans $Top(X)$ et \mathbf{s} désigne le complexe simple associé à un complexe double. Soit

$$I_L^\bullet \rightarrow e_*e^*(I_L^\bullet) \rightarrow (e_*e^*)^2(I_L^\bullet) \rightarrow \dots$$

la résolution standard de I_L^\bullet dans $C_A(X)$ associée à la paire adjointe (e^*, e_*) . Nous avons supposé que e_1^A est exact, ce qui implique que e^* envoie injectifs sur injectifs, tout comme e_* . On en déduit une suite spectrale :

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbf{s}(Hom_{C_A(X)}(K, (e_*e^*)^{p+1}I_L^\bullet))) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{s}(Hom_{C_A(X)}(K, I_L^\bullet))),$$

autrement dit, une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = Ext_{D^{top}}^q(K, (e_*Re^*)^{p+1}L) \Rightarrow Ext_{D^{top}}^{p+q}(K, L).$$

Par définition de cette suite spectrale, on a $E_1^{pq} = 0$ si $p < 0$. Par l'hypothèse C^{dis} admissible et stable par e^*Re_* , on a pour tout $q < 0$ et tout $p \geq 0$

$$E_1^{pq} = Ext_{D^{dis}}^q(e^*K, e^*(e_*Re^*)^pL) = 0.$$

On en déduit sur la ligne $p = 0$ de la suite spectrale une suite exacte :

$$0 \mapsto Hom_{C^{top}}(K, L) \rightarrow Hom_{D^{dis}}(e^*K, e^*L) \xrightarrow{\delta} Hom_{D^{dis}}(e^*K, e^*Re_*e^*L).$$

Revenant à la définition de ω , on constate que δ s'identifie (au signe près) à la flèche notée aussi δ dans la suite exacte A.0.1 appliquée à ωK et ωL . Il s'en suit que l'application $Hom_{C^{top}}(K, L) \rightarrow Hom_{C^{naif}}(\omega K, \omega L)$ est bijective.

A.0.4 Essentielle surjectivité : On se donne un objet (K, κ) de C^{naif} et on choisit un complexe I_K^\bullet de A^{dis} -modules quasi-isomorphe à K et à composantes injectives, ainsi qu'un relèvement $I_K^\bullet \rightarrow e^*e_*I_K^\bullet$ de κ en un morphisme de complexes, encore noté κ .

On définit un système de morphismes de la forme suivante :

$$(A.0.5) \quad e_*I_K^\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{e_*(\kappa)} \\ \xrightarrow{Adj_{e_*I_K}} \end{array} e_*(e^*e_*)I_K^\bullet \begin{array}{c} \xrightarrow{e_*e^*e_*(\kappa)} \\ \xrightarrow{e_*e^*e_*(\kappa)} \end{array} e_*(e^*e_*)^2I_K^\bullet \dots$$

où chaque flèche supérieure se déduit de κ et les autres flèches sont de la forme

$$(e_*e^*)^{i-1}Adj_{(e_*e^*)^{p-i}e_*I_K} \quad : \quad (e_*e^*)^{i-1}(e_*e^*)^{p-i}e_*I_K \rightarrow (e_*e^*)^{i-1}(e_*e^*)(e_*e^*)^{p-i}e_*I_K$$

pour tout $0 < i \leq p$ entiers. Les axiomes imposés à κ nous disent que, dans la catégorie homotopique K^{top} des complexes de A^{top} -modules, ce système se prolonge en un objet cosimplicial, i.e. un foncteur de la catégorie des ensembles finis ordonnés non-vides vers K^{top} . Si on pouvait remonter cet objet cosimplicial à la catégorie (ordinaire) des complexes de A^{top} -modules, on montrerait facilement que le complexe de cochaines associé est un relèvement cherché de (K, κ) dans D^{top} . Mais ceci n'est généralement pas faisable, et il nous faut utiliser un substitut remarquable introduit par les auteurs de [1, 3.2].

A.0.6 Complexes homotopiquement simpliciaux de [1, 3.2]¹¹ : Notons $\overline{\Delta}$ la catégorie dont les objets sont les entiers ≥ -1 et les morphismes sont donnés par $Hom_{\overline{\Delta}}(p, p') := \{\text{applications injectives croissantes } \alpha :$

¹¹Cette terminologie n'est pas dans *loc. cit.* mais l'auteur ignore s'il en existe une standard.

$[0, p] \longrightarrow [0, p']$, avec la convention que $[0, -1] = \emptyset$ et que $\text{Hom}_{\overline{\Delta}}(-1, p)$ est un singleton dont nous noterons ε_p l'unique élément. La source et le but d'une flèche dans $\text{Fl}(\overline{\Delta})$ seront notés $s(\alpha)$ et $b(\alpha)$ et la différence $b(\alpha) - s(\alpha)$ sera notée $|\alpha|$. On note aussi Δ la sous-catégorie pleine des entiers ≥ 0 .

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Nous appellerons *complexe homotopiquement simplicial* de \mathcal{A} la donnée d'une suite $(J^{p, \bullet})_{p \in \mathbb{N}}$ d'objets \mathbb{Z} -gradués de \mathcal{A} munie d'une famille $(d(\alpha))_{\alpha \in \text{Fl}(\Delta)}$ de morphismes $J^{s(\alpha), \bullet} \longrightarrow J^{b(\alpha), \bullet}[1 - |\alpha|]$ satisfaisant la propriété

$$\forall \alpha \in \text{Fl}(\Delta), \quad \sum_{\alpha = \beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = 0.$$

Rappelons que cette propriété implique que les $d(\text{Id}_p)$ sont des différentielles, et que la famille des $d(\alpha)$ pour $|\alpha| = 1$ est une famille de morphismes de complexes qui, dans la catégorie homotopique, se prolonge en un complexe cosimplicial strict. Réciproquement, les auteurs de [1] montrent comment *sous certaines conditions* un complexe cosimplicial strict de la catégorie homotopique $K(\mathcal{A})$ peut se relever en un complexe homotopiquement simplicial. Ces conditions sont vérifiées par notre système A.0.5 mais nous aurons besoin d'un relèvement assez explicite, cf A.0.8 ci-dessous.

À tout complexe homotopiquement simplicial $(J^{*, \bullet}, (d(\alpha))_{\alpha})$ uniformément borné inférieurement en \bullet (i.e $J^{*, q} = 0$ pour $q \ll 0$), les auteurs de [1] associent le complexe simple $(\mathfrak{s}(J)^{\bullet}, d^{\bullet})$ défini par

$$\mathfrak{s}(J)^n := \bigoplus_{p+q=n} J^{p,q}, \quad \text{et} \quad d^n := \bigoplus_{p+q=n} \sum_{s(\alpha)=p} d(\alpha)|_{J^{p,q}},$$

ces sommes étant finies.

Nous aurons besoin de versions "augmentées" de ces objet. Nous appellerons donc *complexe homotopiquement simplicial augmenté* de \mathcal{A} la donnée d'une suite $(J^{p, \bullet})_{p \geq -1}$ munie d'une famille $(d(\alpha))_{\alpha \in \text{Fl}(\overline{\Delta})}$ de morphismes satisfaisant les mêmes propriétés formelles que ci-dessus, avec $\overline{\Delta}$ à la place de Δ . On lui associe aussi un complexe de cochaines $\mathfrak{s}(J)^{\bullet}$ par la même formule que ci-dessus. En notant $J|_{\Delta}$ le complexe homotopiquement simplicial sous-jacent, on peut définir une augmentation

$$\gamma := \sum_{p \geq 0} d(\varepsilon_p) : J^{-1, \bullet} \longrightarrow \mathfrak{s}(J|_{\Delta})^{\bullet},$$

à condition de prendre sur $J^{-1, \bullet}$ l'opposé de la différentielle $d(\text{Id}_{-1})$. On a alors un triangle de complexes dans \mathcal{A}

$$J^{-1, \bullet} \xrightarrow{\gamma} \mathfrak{s}(J|_{\Delta})^{\bullet} \hookrightarrow \mathfrak{s}(J)^{\bullet} \rightarrow J^{-1, \bullet}[1]$$

dont l'image dans la catégorie homotopique est un triangle distingué.

A.0.7 *Le lemme crucial* : Avant de continuer, fixons quelques notations d'algèbre simpliciale :

- i) On note $\partial : \overline{\Delta} \longrightarrow \Delta$ le foncteur décalage défini sur les objets par $\partial(p) := p + 1$ et sur les flèches par $\partial(\alpha)(i) := \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ \alpha(i - 1) + 1 & \text{si } 0 < i \leq s(\alpha) + 1 \end{cases}$
- ii) On note $\sigma_p \in \text{Hom}_{\overline{\Delta}}(p - 1, p)$ l'application définie par $i \mapsto i + 1$ lorsque $p > 0$ et par $\sigma_0 := \varepsilon_0$ pour $p = 0$. Ainsi l'"opérateur de face" $[0, p - 1] \longrightarrow [0, p]$ qui saute l'entier $i \in [0, p]$ est donné par la formule $\partial^i \sigma_{p-i}$.

Lemme A.0.8 *Il existe une famille $d(\alpha)_{\alpha \in \text{Fl}(\overline{\Delta})}$ de morphismes de A^{dis} -modules gradués*

$$d(\alpha) : (e^* e_*)^{s(\alpha)+1} I_K^{\bullet} \longrightarrow (e^* e_*)^{b(\alpha)+1} I_K^{\bullet}[1 - |\alpha|]$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i) $\forall \alpha \in \text{Fl}(\overline{\Delta}), \quad d(\partial\alpha) = -(e^* e_*)(d(\alpha)).$
- ii) $d(\text{Id}_{-1})$ est la différentielle du complexe I_K^{\bullet} .
- iii) $d(\sigma_0) = \kappa$ et pour tout $p > 0$, $d(\sigma_p) = e^* \text{Adj}_{(e_* e^*)^{p-1} e_*} I_K^{\bullet}$ où $\text{Adj}_X : X \longrightarrow e_* e^* X$ est le morphisme d'adjonction.

iv) Si $|\alpha| \geq 2$, alors $d(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha = \partial^{s(\alpha)+1}(\varepsilon_{|\alpha|-1})$.

v) $\forall \alpha \in Fl(\overline{\Delta})$, $S(\alpha) := \sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\beta)d(\gamma) = 0$.

Preuve : Les propriétés i), ii) et iii) imposent tous les $d(\alpha)$ pour $|\alpha| \leq 1$. La propriété contraignante est bien-sûr v). Lorsque $|\alpha| = 0$, v) demande simplement que $d(\alpha)^2 = 0$, ce qui est bien le cas. Lorsque $|\alpha| = 1$, v) demande que $d(\alpha)$ soit un morphisme de complexes (au signe près), ce qui est encore le cas.

Nous prouvons maintenant l'existence des $d(\alpha)$ pour $|\alpha| \geq 2$ vérifiant les propriétés i), iv) et v) par récurrence sur $|\alpha|$. Supposons donc construites les $d(\beta)$ pour $|\beta| < |\alpha|$. Deux cas se présentent.

Si $\alpha \neq \partial^{s(\alpha)+1}(\varepsilon_{|\alpha|-1})$, alors la propriété iv) impose $d(\alpha) = 0$ et pour satisfaire v) il nous faut donc vérifier que la somme $S'(\alpha) := \sum_{\beta\gamma=\alpha; \beta, \gamma \neq \alpha} d(\beta)d(\gamma)$ est nulle. Par la propriété i) de l'hypothèse de récurrence, et le fait que le foncteur ∂ induit une bijection

$$(\partial, \partial) : \{(\beta, \gamma) \mid \beta\gamma = \alpha\} \xrightarrow{\sim} \{(\beta, \gamma) \mid \beta\gamma = \partial\alpha\},$$

on peut supposer que $\alpha \notin im(\partial)$. Par la propriété iv) de l'hypothèse de récurrence, la somme $S'(\alpha)$ n'a alors que deux termes non-nuls :

$$S'(\alpha) = d(\sigma_{b(\alpha)})d(\partial^{s(\alpha)+1}\varepsilon_{|\alpha|-2}) + d(\partial^{s(\alpha)+2}\varepsilon_{|\alpha|-2})d(\sigma_{s(\alpha)+1})$$

et sa nullité résulte de la functorialité de Adj_X en X .

Si $\alpha = \partial^{s(\alpha)+1}(\varepsilon_{|\alpha|-1})$, alors comme ci-dessus, par la propriété i) de l'hypothèse de récurrence, il suffit de trouver $d(\varepsilon_{|\alpha|-1})$ tel que $S(\varepsilon_{|\alpha|-1}) = 0$. Or, comme dans [1, p. 90], l'hypothèse de récurrence implique $S'(\varepsilon_{|\alpha|-1})d(\text{Id}_{-1}) = d(\text{Id}_{|\alpha|-1})S'(\varepsilon_{|\alpha|-1})$, autrement dit, $S'(\varepsilon_{|\alpha|-1})$ est un morphisme de complexes $I_K^\bullet \rightarrow (e^*e_*)^{|\alpha|}I_K^\bullet[2 - |\alpha|]$. Deux cas se présentent à nouveau :

- si $|\alpha| = 2$, on invoque la propriété ii) de κ qui assure que $S'(\varepsilon_1)$ est nulle dans la catégorie homotopique.
- si $|\alpha| > 2$, alors on invoque la propriété " \mathcal{C}^{dis} admissible et stable par e^*Re_* " qui implique $Hom_{D^{dis}}(I_K^\bullet, (e^*e_*)^{|\alpha|}I_K^\bullet[2 - |\alpha|]) = 0$ et donc que $S'(\varepsilon_{|\alpha|-1})$ est aussi nulle dans la catégorie homotopique.

Dans chacun des cas, il ne reste plus qu'à choisir pour $d(\varepsilon_{|\alpha|-1})$ une homotopie entre $S'(\varepsilon_{|\alpha|-1})$ et 0. \square

Lemme A.0.9 *Avec les notations du lemme précédent, définissons une famille $c(\alpha)_{\alpha \in Fl\Delta}$ de morphismes de A^{top} -modules gradués*

$$c(\alpha) : e_*(e^*e_*)^{s(\alpha)}I_K^\bullet \longrightarrow e_*(e^*e_*)^{b(\alpha)}I_K^\bullet[1 - |\alpha|]$$

par les règles suivantes :

- i) Si $\alpha \in im(\partial)$, alors $c(\alpha) := -e_*(d(\partial^{-1}\alpha))$.
- ii) Si $\alpha \notin im(\partial)$, alors
 - $c(\alpha) := Adj_{(e_*e^*)^{s(\alpha)}e_*(I_K^\bullet)}$ si $|\alpha| = 1$
 - $c(\alpha) = 0$ sinon.

Alors, pour tout $\alpha \in Fl(\Delta)$, on a $\sum_{\beta\gamma=\alpha} c(\beta)c(\gamma) = 0$.

Preuve : On remarque que pour toute flèche α de Δ , on a $e^*c(\alpha) = d(\alpha)$. Or, e^* est fidèle sur les A^{top} -modules. \square

Le système des $J_{top}^{p,\bullet} := e_*(e^*e_*)^p I_K^\bullet$, $p \geq 0$ muni de la famille des $c(\alpha)_{\alpha \in Fl\Delta}$ du lemme ci-dessus est un complexe homotopiquement simplicial de A^{top} -modules, tandis que le système des $J_{dis}^{p,\bullet} := (e^*e_*)^p I_K^\bullet$, $p \geq -1$ muni des $(d(\alpha))_{\alpha \in Fl\Delta}$ du lemme A.0.8 est un complexe homotopiquement simplicial augmenté de A^{dis} -modules. On a par construction $J_{dis|\Delta} = e^*(J_{top})$; on a donc un morphisme de complexes de A^{dis} -modules $I_K^\bullet \xrightarrow{\gamma} e^*s(J_{top})^\bullet$. Le lemme suivant montre que le complexe $s(J_{top})^\bullet$ de D^{top} relève l'objet (K, κ) de D^{naif} et résout donc la question de l'essentielle surjectivité.

Lemme A.0.10 i) $\gamma : I_K^\bullet \longrightarrow e^*s(J_{top})^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

ii) le diagramme suivant est commutatif dans la catégorie dérivée D^{dis}

$$\begin{array}{ccc} I_K^\bullet & \xrightarrow{\gamma} & e^* \mathbf{s}(J_{top})^\bullet \\ \kappa \downarrow & & \downarrow e^* \text{Adj}_{\mathbf{s}(J_{top})^\bullet} \\ e^* e_* I_K^\bullet & \xrightarrow{e^* e_* (\gamma)} & e^* e_* e^* \mathbf{s}(J_{top})^\bullet \end{array}$$

Preuve : Nous prouverons d'abord ii). Pour cela, nous commençons par quelques généralités sur les complexes homotopiquement simpliciaux augmentés (d'une catégorie abélienne \mathcal{A} quelconque). Un morphisme f entre deux tels objets $(J_i^{\bullet}, d_i(\alpha)_\alpha)$ pour $i = 1, 2$ consiste en une famille $f = (f(\alpha))_{\alpha \in \overline{Fl}(\Delta)}$ de morphismes $f(\alpha) : J_1^{s(\alpha), \bullet} \rightarrow J_2^{b(\alpha), \bullet}[-|\alpha|]$ d'objets gradués de \mathcal{A} vérifiant la propriété :

$$\forall \alpha \in Fl(\overline{\Delta}), \quad \sum_{\alpha=\beta\gamma} f(\beta)d_1(\gamma) = \sum_{\alpha=\beta\gamma} d_2(\beta)f(\gamma).$$

On vérifie sans peine qu'un tel système induit un morphisme de complexes $\mathbf{s}(J_1)^\bullet \xrightarrow{s(f)} \mathbf{s}(J_2)^\bullet$ et que dans le morphisme de triangles :

$$(A.0.11) \quad \begin{array}{ccccccc} J_1^{-1, \bullet} & \xrightarrow{\gamma_1} & \mathbf{s}(J_{1|\Delta})^\bullet & \longrightarrow & \mathbf{s}(J_1)^\bullet & \longrightarrow & J_1^{-1, \bullet}[1] \\ f(\text{Id}_{-1}) \downarrow & & \mathbf{s}(f_{|\Delta}) \downarrow & & \mathbf{s}(f) \downarrow & & \downarrow f(\text{Id}_{-1})[1] \\ J_2^{-1, \bullet} & \xrightarrow{\gamma_2} & \mathbf{s}(J_{2|\Delta})^\bullet & \longrightarrow & \mathbf{s}(J_2)^\bullet & \longrightarrow & J_2^{-1, \bullet}[1] \end{array},$$

les deux carrés de droite sont commutatifs, et donc le premier est commutatif *dans la catégorie homotopique* (mais généralement pas dans la catégorie des complexes).

Ceci étant, on définit le *décalé* d'un complexe homotopiquement simplicial augmenté $(J^{\bullet}, d(\alpha)_\alpha)$ par les formules :

$$(\partial J)^{p, \bullet} := J^{p+1, \bullet}, \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in Fl(\overline{\Delta}), \quad \partial d(\alpha) := -d(\partial \alpha).$$

On définit aussi un morphisme $(J, d) \xrightarrow{f^\partial} (\partial J, \partial d)$ par

$$\forall \alpha \in Fl(\overline{\Delta}), \quad f^\partial(\alpha) := d(\sigma_{b(\alpha)+1} \circ \alpha).$$

(Pour vérifier que ce système est bien un morphisme, on utilise l'identité

$$\sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\sigma_{b(\beta)+1} \beta) d(\gamma) + \sum_{\alpha=\beta\gamma} d(\partial \beta) d(\sigma_{b(\gamma)+1} \gamma) = \sum_{\sigma_{b(\alpha)+1} \alpha = \beta' \gamma'} d(\beta') d(\gamma')$$

qui repose sur le fait qu'une flèche δ se factorise sous $\sigma_{b(\delta)}$ si et seulement si elle n'est pas dans l'image de ∂ .)

Appliquons ceci à J_{dis}^{\bullet} . Par l'axiome i) du lemme A.0.8 on a $\partial J_{dis} = e^* e_*(J_{dis})$. Par l'axiome iv), les flèches $f^\partial(\alpha)$ sont nulles dès que $|\alpha| > 0$, et par l'axiome iii) on a $f^\partial(\text{Id}_p) = e^* \text{Adj}$ pour $p \geq 0$, tandis que $f^\partial(\text{Id}_{-1}) = \kappa$. La commutativité à homotopie près du carré du point ii) de l'énoncé vient donc de celle du premier carré du diagramme A.0.11 appliqué au morphisme f^∂ , compte tenu de l'égalité $J_{dis|\Delta} = e^* J_{top}$.

Passons à la preuve du point i). En vertu du triangle distingué

$$I_K^\bullet \xrightarrow{\gamma} e^* \mathbf{s}(J_{top})^\bullet \longrightarrow \mathbf{s}(J_{dis})^\bullet \longrightarrow I_K^\bullet[1],$$

il suffit de montrer l'acyclicité de $\mathbf{s}(J_{dis})^\bullet$. Par l'axiome i) imposé à κ , la composée

$$\mathbf{s}(J_{dis})^\bullet \xrightarrow{f^\partial} \mathbf{s}(\partial J_{dis})^\bullet = e^* e_* \mathbf{s}(J_{dis})^\bullet \xrightarrow{\text{Adj}} \mathbf{s}(J_{dis})^\bullet$$

est un isomorphisme dans la catégorie dérivée D^{dis} . Il nous suffira donc de prouver l'acyclicité de $e^*e_*\mathfrak{s}(J_{dis})^\bullet$.

À ce point, il faut se rappeler que, dans la catégorie homotopique le système des $J_{dis}^{p,\bullet}$, $p \geq -1$ muni des opérateurs de face $d(\partial^i \sigma_{p-i})$ se prolonge en un système cosimplicial complet (i.e. avec opérateurs de dégénérescence, lesquels sont donnés par l'axiome i) de κ). Comme l'objet cosimplicial $e^*e_*(J_{dis}^{*,\bullet})$ de D^{dis} est le décalé de $J_{dis}^{*,\bullet}$, on sait qu'il est *homotopiquement trivial*, cf par exemple [37, Prop VI.1.4].

Il nous reste plus qu'à invoquer le résultat général :

Fait A.0.12 *Soit $(J^{*\bullet}, d(\alpha)_\alpha)$ un complexe homotopiquement simplicial augmenté d'une catégorie abélienne \mathcal{A} dont le complexe cosimplicial associé dans $D(\mathcal{A})$ est homotopiquement trivial. Alors $\mathfrak{s}(J)^\bullet$ est acyclique.*

Preuve : Tout complexe homotopiquement simplicial augmenté est muni d'une filtration $\tau_{\bullet \leq n}(J)^{*\bullet}$ définie par :

$$\tau_{\bullet \leq n}(J)^{pq} = \begin{cases} J^{pq} & \text{si } q < n \\ \ker(d(\text{Id}_p)|_{J^{pn}}) & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q > n \end{cases}$$

équipé du système des restrictions des $(d(\alpha))_\alpha$. On en déduit une filtration croissante $T_n(\mathfrak{s}(J))^\bullet$ du complexe simple associé. On a aussi une filtration $\sigma_{\bullet \leq n}(J)^{*\bullet}$ définie par :

$$\sigma_{\bullet \leq n}(J)^{pq} = \begin{cases} J^{pq} & \text{si } q \leq n \\ \text{im}(d(\text{Id}_p)|_{J^{pn}}) & \text{si } q = n + 1 \\ 0 & \text{si } q > n + 1 \end{cases}$$

équipé du système des restrictions des $(d(\alpha))_\alpha$, et dont on déduit une filtration croissante $S_n(\mathfrak{s}(J))^\bullet$ du complexe simple associé. Il nous suffira de prouver que les gradués $gr_m^S gr_n^T(\mathfrak{s}(J))$ sont acycliques. Remarquons qu'ils sont nuls pour $m \neq n, n + 1$.

Pour $m = n$, le gradué est, au décalé de n près, le complexe de cochaines augmenté

$$\mathcal{H}^n(J^{-1,\bullet}) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{H}^n(J^{0,\bullet}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{H}^n(J^{p,\bullet}) \longrightarrow \dots$$

associé au complexe cosimplicial de \mathcal{A} déduit du complexe cosimplicial $J^{*\bullet}$ de $D(\mathcal{A})$ par application du foncteur \mathcal{H}^n . Il est donc homotopiquement trivial et *a fortiori* acyclique.

Pour $m = n - 1$, le gradué obtenu est le complexe simple associé à un complexe homotopiquement simplicial augmenté $(J^{*\bullet}, d(\alpha)_\alpha)$ dont les complexes $J^{p,\bullet}$ sont acycliques. Par la filtration décroissante bête en l'indice p , on voit qu'un tel complexe est acyclique. \square

\square

Références

- [1] J. Bernstein A. Beilinson and P. Deligne. *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I : Faisceaux Pervers)*. Number 100 in Astérisque. S.M.F., Paris, 1982.
- [2] I. Badulescu. Correspondance de Jacquet-Langlands étendue à toutes les représentations. *Preprint* <http://www-math.univ-poitiers.fr/~badulesc/articole.html>, ?
- [3] I. Badulescu. Orthogonalité des caractères pour $GL(n)$ sur un corps local de caractéristique non nulle. *Manuscripta Math.*, 101 :49–70, 2000.
- [4] V.G. Berkovich. Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces. *Publ. Math. I.H.É.S.*, 78 :1–159, 1993.
- [5] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.*, 115 :539–571, 1994.
- [6] V.G. Berkovich. On the comparison theorem for etale cohomology of non-archimedean analytic spaces. *Israel J. Math.*, 92 :45–60, 1995.
- [7] V.G. Berkovich. Vanishing cycles for formal schemes II. *Invent. Math.*, 125 :367–390, 1996.

- [8] J. Bernstein. Le centre de Bernstein. In J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras, editors, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Travaux en cours. Hermann, 1984.
- [9] A. Borel and N. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. Number 94 in Annals Math. Studies. P.U.P., 1980.
- [10] J.-F. Boutot and H. Carayol. Uniformisation p -adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Cerednik et Drinfeld. In *Courbes modulaires et courbes de Shimura*, number 196-197 in Astérisque, pages 45–158. S.M.F., 1991.
- [11] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et conjecture de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138 :573–629, 1999.
- [12] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de certaines variétés de Shimura simples et applications. *preprint*, <http://www.math.jussieu.fr/~boyer>, 2005.
- [13] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. *The admissible dual of $GL(n)$ via compact open subgroups*. Number 129 in Annals Math. Studies. P.U.P., 1993.
- [14] C.J. Bushnell and P.C. Kutzko. Smooth representations of reductive p -adic groups : Structure via types. *Proc. London Math. Soc.*, 77(3) :582–634, 1998.
- [15] H. Carayol. Non-abelian Lubin-Tate theory. In L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L -functions*, volume II, pages 15–39. Academic Press, 1990.
- [16] L. Clozel. Motifs et formes automorphes : applications du principe de functorialité. In L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L -functions*, volume I, pages 77–160. Academic Press, 1990.
- [17] J.-F. Dat. Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, page?, 2006.
- [18] J.-F. Dat. Finitude pour les représentations lisses de groupes p -adiques. *Preprint*, 2006.
- [19] P. Deligne. Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . In *Modular functions of one variable II*, number 349 in L.N.M., pages 501–597. Springer, 1972.
- [20] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras. Représentations des algèbres simples p -adiques. In J. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, and M.F. Vignéras, editors, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Travaux en cours. Hermann, 1984.
- [21] V.G. Drinfeld. Elliptic modules. *Math. U.S.S.R. Sbornik*, 23 :561–592, 1974.
- [22] V.G. Drinfeld. Coverings of p -adic symmetric domains. *Func. Anal. and Appl.*, 10 :107–115, 1976.
- [23] G. Faltings. The trace formula and Drinfeld’s upper halfplane. *Duke Math. J.*, 76 :467–481, 1994.
- [24] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by Drinfeld. In *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300, pages 115–129. Contemp. Math., 2002.
- [25] L. Fargues. Cohomologie d’espaces de modules de groupes p -divisibles et correspondances de Langlands locale. In *Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink, et correspondances de Langlands locales*, number 291 in Astérisque. S.M.F., Paris, 2004.
- [26] L. Fargues. Filtration de monodromie et cycles évanescents formels. <http://www.math.u-psud.fr/~fargues/Prepublications.htm>, 2006.
- [27] L. Fargues. *L’isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*. <http://www.math.u-psud.fr/~fargues/Prepublications.htm>, 2006.
- [28] A. Genestier. *Espaces symétriques de Drinfeld*. Number 234 in Astérisque. S.M.F., 1996.
- [29] M. Harris. Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld’s upper half space ; elaboration of Carayol’s program. *Invent. Math.*, 129 :75–119, 1997.
- [30] M. Harris. On the local Langlands correspondance. In *ICM 2002*, volume III, 2002.
- [31] M. Harris and R. Taylor. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*. Number 151 in Ann. of Math. studies. Princeton Univ. Press, 2001.
- [32] T. Hausberger. Uniformisation des variétés de Laumon-Rapoport-Stuhler et preuve de la conjecture de Drinfeld-Carayol. *Ann. Inst. Fourier*, ? :?, 2004.

- [33] G. Henniart. Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique. *Invent. Math.*, 139 :439–455, 2000.
- [34] G. Henniart. Sur la conjecture de Langlands locale pour $GL(n)$. *J. théorie nombres Bordeaux*, 13 :167–187, 2001.
- [35] G. Henniart. Une caractérisation de la correspondance de Langlands locale pour $GL(n)$. *Bull. Soc. math. France*, 130(4) :587–602, 2002.
- [36] M. J. Hopkins and B. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli spaces. In *Topology and Representation theory*, number 158 in Contemporary Math., pages 23–88, 1994.
- [37] L. Illusie. *Complexe cotangent et déformations, II*, volume 283 of *Lect. Notes in Math.* Springer Verlag, 1972.
- [38] G. Laumon, M. Rapoport, and U. Stuhler. D -elliptic sheaves and the Langlands correspondence. *Invent. Math.*, 113 :217–338, 1993.
- [39] J. Lubin and J. Tate. Formal complex multiplication in local fields. *Ann. of Math. (2)*, 81 :380–387, 1965.
- [40] J. Lubin and J. Tate. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. *Bull. Soc. Math. France*, 94 :49–59, 1966.
- [41] M. Rapoport. On the bad reduction of Shimura varieties. In L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L -functions*, volume II, pages 253–321. Academic Press, 1990.
- [42] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*. Number 141 in Annals Math. Studies. P.U.P., 1996.
- [43] J. Rogawski. Representations of $GL(n)$ and division algebras over local fields. *Duke Math. J.*, 50 :161–196, 1983.
- [44] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of p -adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105 :47–122, 1991.
- [45] P. Schneider and U. Stuhler. Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. *Publ. Math. I.H.É.S.*, 85 :97–191, 1995.
- [46] M. Strauch. On the Jacquet-Langlands correspondence in the cohomology of the Lubin-Tate deformation tower. In *Formes Automorphes (I) - - Actes du Semestre du Centre Émile Borel, printemps 2000*, number 298 in Astérisque, pages 391–410. S.M.F., Paris, 2005.
- [47] G. van Dijk. Computation of certain induced characters on p -adic groups. *Math. Ann.*, 199 :229–240, 1972.
- [48] J.-L. Verdier. *Des catégories dérivées des catégories abéliennes*. Number 239 in Astérisque. S.M.F., Paris, 1996.
- [49] M.-F. Vignéras. Cohomology of sheaves on the building and R -representations. *Invent. Math.*, 127 :349–373, 1997.
- [50] M.-F. Vignéras. Extensions between irreducible representations of p -adic $GL(n)$. *Pacific J. of Maths.*, 181(3) :349–357, 1997.
- [51] A.V. Zelevinski. Induced representations on reductive p -adic groups II. *Ann.Sci.Ec.Norm.Sup*, 13 :165–210, 1980.