HAL open science

# Espaces twistoriels et structures complexes non standards.

Guillaume Deschamps

▶ To cite this version:

Guillaume Deschamps. Espaces twistoriels et structures complexes non standards.. 2006. hal-00021475

HAL Id: hal-00021475
https://hal.science/hal-00021475v1

Preprint submitted on 22 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Espaces twistoriels et structures complexes non standards

Deschamps Guillaume

**Mail** : guillaume.deschamps@iecn.u-nancy.fr
**Adresse** : Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy 1 B.P. 239, F-54506 Vandoeuvre-les-Nancy.

**Résumé** : *Le but de cet article est d'étudier les fibrations twistorieles $\mathcal{C}^\infty$-triviales au-dessus de 4-variétés riemanniennes orientées. Lorsque $M$ admet une métrique anti-autoduale cela fournit des exemples de structures complexes "non standards" sur des 6-variétés qui généralisent ceux de Blanchard. Ces questions nous amènerons à déterminer d'une part les surfaces complexes qui possèdent une structure spin et d'autre part celles qui possèdent une métrique riemannienne anti-autoduale.*

## 1 Introduction

Le but de cet article est de construire des structures complexes "non standards" sur des 6-variétés réelles. Plus précisément si $M$ est une surface complexe et $\mathbb{C}P^1$ la droite projective complexe, on souhaite répondre à la question suivante : peut-on munir le produit $M \times \mathbb{C}P^1$ d'une structure complexe qui n'est pas une déformation de la structure complexe produit ? La motivation de ce problème vient des travaux de Blanchard. En regardant le quotient du fibré $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ par une action holomorphe de $\mathbb{Z}^4$ bien choisie, Blanchard [Bla56] a mis une structure complexe non kählerienne sur le produit $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$ d'un tore $\mathbb{T}^4$ avec la sphère $\mathbb{S}^2$. Cette structure complexe n'est pas une déformation de la structure complexe produit, en ce sens on peut parler d'une structure complexe "non standard".

Dans le même esprit, on peut chercher des 3-variétés complexes de la forme $M \times \mathbb{C}P^1$, où $M$ est une 4-variété réelle sans structure complexe. La deuxième question que nous nous poserons est donc : peut-on trouver une famille de 4-variétés réelles $M$ sans structure complexe dont le produit $M \times \mathbb{C}P^1$ admet une structure complexe ?

La théorie des espaces twistoriels est l'outil idéal pour répondre à ces deux questions. En effet si $(M, g)$ une 4-variété riemannienne orientée, on peut alors lui associer son espace twistoriel $\tau(M, g)$ qui est le fibré des structures presque complexes sur $TM$ compatibles avec l'orientation et la métrique [AHS78]. C'est un fibré lisse localement trivial de fibre la sphère $\mathbb{S}^2$ et de groupe structural $SO(3)$. L'espace twistoriel $\tau(M, g)$ est muni d'une structure presque complexe canonique qui ne dépend que de la classe conforme de $g$.

**Théorème [AHS78]** : *La structure presque complexe sur $\tau(M, g)$ est intégrable si et seulement si la métrique $g$ est anti-autoduale.*

Une métrique $g$ sur une 4-variété est anti-autoduale si le tenseur de Weyl associé $W$,

considéré comme un endomorphisme de l'ensemble des 2-formes, vérifie $\star W = -W$ où $\star$ est l'opérateur de Hodge. Dans l'exemple de Blanchard la structure complexe non kählerienne sur $\mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$ est précisément la structure d'espace twistoriel d'un tore plat : $\tau(\mathbb{T}^4, g_{\text{plat}}) \simeq \mathbb{T}^4 \times \mathbb{S}^2$.

**Problème 1** : Tout ceci nous motive à trouver une classification des 4-variétés riemanniennes orientées $(M, g)$ telles que :

(i) $M$ admet une structure complexe
(ii) l'espace twistoriel de $(M, g)$ est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$
(iii) la métrique $g$ est anti-autoduale.

Pour de telles variétés, nous verrons que la structure complexe d'espace twistoriel n'est jamais une déformation de la structure complexe produit. Elle n'est pas non plus kählerienne [Hit81], ni même biméromorphe à une variété kählerienne [Cam91]. On sait déjà qu'une surface K3 munie de sa métrique de Calabi-Yau ou que la surface $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ munie de sa métrique produit sont des exemples qui, comme les tores plats, vérifient les trois conditions. Mais il faut bien noter qu'ici la condition (iii) ne demande pas à la métrique d'être hermitienne. On ne peut donc pas utiliser les résultats de Boyer [Boy86] ou de Pontecorvo [Pon92]. Cette condition est beaucoup moins restrictive puisqu'alors la métrique n'est plus liée à la structure complexe. Nous verrons également que la condition (ii) nous empêche de faire des éclatements si bien qu'on ne peut pas non plus utiliser les techniques de Taubes [Tau92] pour construire des métriques anti-autoduales.

**Problème 2** : Pour répondre à la deuxième question, on cherche une famille de 4-variétés réelles $(M, g)$ telles que :

(i) $M$ ne possède pas de structure complexe
(ii) l'espace twistoriel de $(M, g)$ est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$
(iii) la métrique $g$ est anti-autoduale.

Pour de telles variétés on aura une structure complexe sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$ bien que $M$ ne soit pas complexe.

## 2 Résultats

Nous commencerons par donner un critère simple pour savoir si l'espace twistoriel d'une 4-variété est topologiquement trivial (partie 3). Nous donnerons alors la liste des surfaces complexes à fibré twistoriel topologiquement trivial (th. 1). Pour cela il nous faudra d'abord déterminer quelles surfaces complexes possèdent une structure spin. Admettre une structure spin n'est pas une propriété invariante par passage au quotient. Si bien que nous seront obligés de faire une étude au cas par cas. On pourra alors préciser un résultat de Yau [Yau76] en donnant l'ensemble des 4-variétés parallélisables munies d'une structure complexe (partie 5). Dans la partie 6 nous résoudrons le problème 2.

**Théorème** : *Pour toute 3-variété compacte hyperbolique orientable $H$, il existe une structure complexe sur le produit $H \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ bien que $H \times \mathbb{S}^1$ n'en possède pas.*

Ce théorème fournit en particulier une famille d'exemples simples de 4-variétés parallélisables sans structure complexe. De tels exemples existaient déjà mais restaient

assez isolés ou peu explicites [Yau76], [Bro78]. Dans la partie 7 nous donnerons une résolution quasi-complète du problème 1.

**Théorème** : *Soit $M$ une surface compacte complexe dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. Si la variété $M$ peut être munie d'une métrique riemannienne anti-autoduale alors $M$ est :*

*a) une surface K3*

*b) un tore*

*c) une surface hyperelliptique*

*d) une surface de Hopf*

*e) une surface minimale spin de dimension de Kodaira un.*

*Réciproquement dans les cas a, b, c et d il existe toujours une métrique riemannienne anti-autoduale.*

Ce théorème peut être vu comme une généralisation au cas riemannien d'un résultat de Boyer établi dans le cadre des métriques hermitiennes [Boy86]. Dans le dernier cas je ne sais pas s'il existe vraiment une métrique riemannienne anti-autoduale. Mais je donnerai des contraintes très précises sur cette métrique si bien qu'on est en droit de penser qu'il n'existe aucune métrique anti-autoduale sur les surfaces spin de dimension de Kodaira un. Enfin pour certaines surfaces $M$ de ce théorème nous construirons une infinité de structures complexes non kähleriennes sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$ qui ne sont pas déformations les unes des autres (partie 8).

# 3 Fibré twistoriel trivial

Soit $(M, g)$ une 4-variété riemannienne orientée. On note $\bigwedge^+$ le fibré des 2-formes autoduales, c'est-à-dire invariantes par l'opérateur de Hodge $\star$. La métrique sur $M$ induit une métrique sur le fibré $\bigwedge^+$. L'espace twistoriel $\tau(M, g)$ de $(M, g)$ est par définition le fibré unitaire $\mathbb{S}(\bigwedge^+)$. À difféomorphisme près la fibration twistoriel ne dépend pas de la métrique choisie [AHS78], [dBN98]. De sorte que si une 4-variété orientée admet une métrique $g$ telle que $\tau(M, g)$ est trivial au sens $\mathcal{C}^\infty$ alors pour toute métrique $h$ sur $M$ le fibré twistoriel associé à $(M, h)$ sera aussi trivial. Pour autant si on change l'orientation de $M$, son espace twistoriel peut ne plus être trivial (penser aux surfaces $K3$). On parlera donc de 4-variétés orientées à fibré twistoriel trivial sans préciser de métrique sur $M$.

**Définition** : *Une 4-variété orientée $M$ est presque quaternionique s'il existe trois structures presque complexes $I$, $J$ et $K$ qui respectent l'orientation et telles que $IJ = -JI = K$.*

En d'autres termes $M$ est presque quaternionique si l'espace tangent en tout point possède une structure d'espace vectoriel quaternionique respectée par l'action du groupe structural. Ce qui revient à dire que le groupe structural du fibré tangent de $M$ se réduit à $SU(2)$. Dans la littérature on parle parfois de variété presque hypercomplexe.

**Proposition 1** : *Le fibré twistoriel d'une 4-variété orientée est trivial si et seulement si $M$ est presque quaternionique.*

*Preuve.* Le groupe des difféomorphismes de la sphère $\mathbb{S}^2$ qui préservent l'orientation $\mathrm{Diff}^+\mathbb{S}^2$ se rétracte fortement sur le groupe spécial orthogonal $SO(3)$ [Sma59]. Par conséquent le fibré twistoriel $\mathbb{S}(\bigwedge^+) \longrightarrow M$ est trivial en tant que $\mathrm{Diff}^+\mathbb{S}^2$-fibré si

et seulement s'il est trivial en tant que $SO(3)$-fibré et donc si et seulement si le fibré des 2-formes autoduales $\bigwedge^+ \longrightarrow M$ l'est. Dans ce cas on peut définir une base orthonormée de champs de vecteurs sur $\bigwedge^+$, ce qui revient précisément à se donner une structure presque quaternionique sur $(M, g)$. $\square$

La proposition suivante montre qu'il est un petit peu plus faible d'être presque quaternionique que d'être parallélisable.

**Proposition 2** : *Une 4-variété $M$ est parallélisable si et seulement si elle est presque quaternionique et de caractéristique d'Euler nulle.*

*Preuve.* Si X est un champ de vecteurs partout non nul, $(X, IX, JX, KX)$ est une base de champs de vecteurs de $M$. $\square$

L'intérêt de la proposition 1 vient du fait qu'on sait caractériser les 4-variétés presque quaternioniques. On a ainsi une caractérisation topologique des 4-variétés à fibré twistoriel trivial.

**Théorème [Wu52]** : *Une 4-variété orientée $M$ est presque quaternionique si et seulement si $M$ est spin et si sa caractéristique d'Euler $\chi$ et sa signature $\tau$ vérifient la relation :* $3\tau + 2\chi = 0$.

En utilisant la classification d'Enriques-Kodaira, on peut alors donner la liste de toutes les surfaces complexes à fibré twistoriel trivial.

**Théorème 1** : *Les seules surfaces compactes complexes $M$ dont l'espace twistoriel est topologiquement trivial sont :*

$$Kod(M) = -\infty : \begin{cases} \textit{Les surfaces réglées de genre un qui sont spin} \\ \textit{Les surfaces de Hopf} \\ \textit{Les surfaces d'Inoue} \end{cases}$$

$$Kod(M) = 0 : \begin{cases} \textit{Les tores} \\ \textit{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \textit{Les surfaces de Kodaira primaires} \\ \textit{Les surfaces de Kodaira secondaires qui sont spin} \\ \textit{Les surfaces K3} \end{cases}$$

$Kod(M) = 1$ *: Les surfaces minimales qui sont spin*

$Kod(M) = 2$ *: Aucune surface.*

**Remarque** : Seules les surfaces réglées de genre 1 dont la forme d'intersection est paire sont spin ([FM94], [BHPVdV04]). Ces surfaces sont toutes des déformations du produit $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}P^1$. Les surfaces de Kodaira secondaires sont des quotients finis des surfaces de Kodaira primaires par un groupe $G$ d'ordre 2,3,4 ou 6 dont l'action est propre, discontinue et sans point fixe. [FM94],[BHPVdV04]. On a pas de classification de ces surfaces. Mais on peut construire de nombreux exemples qui sont spin. Par exemple si $S$ est un quotient d'ordre 3 d'une surface de Kodaira primaire, son fibré canonique $K_S$ est tel que $K_S^{\otimes 3}$ est trivial. Sa première classe de Chern $c_1(S)$ vérifie donc $3c_1(S) = 0$ : la surface $S$ est spin. Pour les surfaces elliptiques de dimension de Kodaira 1, il existe quelques caractérisations de celles qui sont spin

en fonction des multiplicités des fibres multiples [FM94]. Mais il faut bien noter que la propriété d'admettre une structure spin n'est pas invariante par passage au quotient (penser aux surfaces K3 et aux surfaces d'Enriques) si bien qu'il n'est pas raisonnable d'espérer donner la liste des surfaces proprement elliptiques qui sont spin.

*Preuve.* Par le théorème de Wu énoncé précédemment on sait qu'une surface complexe est presque quaternionique si elle est spin et si sa première classe de Chern vérifie $c_1^2 = 0$. Or si $M$ est une 4-variété spin alors la classe d'Euler du fibré normal de toute surface orientée plongée dans $M$ est paire ([LM89], Chap.II §2). Comme cette propriété n'est pas vérifiée pour $\mathbb{C}P^2$, on en déduit qu'une surface complexe spin est minimale. La classification de Kodaira nous donne les surfaces complexes minimales telles que $c_1^2 = 0$. Pour finir la démonstration il suffit de regarder celles qui sont spin.

On dit qu'une surface complexe $M$ est dans la classe $VII_0$ si elle est minimale, si sa dimension de Kodaira est $-\infty$ et si son premier nombre de Betti est 1. Bogomolov [Bog82] puis Teleman [Tel94] ont montré que les seules surfaces de la classe $VII_0$ dont le deuxième nombre de Betti $b_2$ est nul sont les surfaces de Hopf et les surfaces d'Inoue [Ino74]. On connaît des exemples de surfaces dans la classe $VII_0$ avec $b_2 > 0$. On parlera de la classe $VII_0^+$. On note $c_1$ et $c_2$ les classes de Chern d'une surface complexe. Pour les surfaces de la classe $VII_0^+$, la formule de Riemann-Roch s'écrit : $c_1^2 = -c_2 < 0$. Les surfaces de la classe $VII_0^+$ ne sont donc pas presque quaternionique.

La signature d'une surface d'Enriques est $-8$, ce n'est pas un multiple de 16. Par le théorème de Rohlin [Roh52] on en déduit que les surfaces d'Enriques ne sont pas spin.

Les surfaces de Kodaira primaires et les surfaces $K3$ sont spin puisque par définition leur fibré canonique est trivial. Les surfaces de Hopf primaires sont par définition difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. Elles sont spin puisque parallélisables.

Reste à montrer que les surfaces de Hopf secondaires, les surfaces d'Inoue et les surfaces hyperelliptiques sont spin. C'est la partie technique du théorème.

## 3.1 Surfaces de Hopf secondaires

### 1 Description des surfaces de Hopf secondaires

Une surface de Hopf secondaire $S$ est un quotient de $\mathbb{C}^{2\star} = \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ par un groupe d'automorphismes $G$ dont l'action est propre, discontinue et sans point fixe : $S = \mathbb{C}^{2\star}/G$. On cherche à montrer que toutes ces surfaces admettent une structure spin. Pour cela on commence par rappeler les principaux résultats de Kato sur la classification des surfaces de Hopf secondaires [Kat75], [Kat89], [MN00].

On note $(z_1, z_2)$ un système de coordonnées sur $\mathbb{C}^2$. À biholomorphisme près, Kato a montré qu'on peut toujours supposer que $G \subset GL(\mathbb{C}^2)$ sauf si $G$ est le groupe engendré par les applications :

$$\begin{cases} g(z_1, z_2) = (\gamma^n z_1 + \lambda z_2^n, \gamma z_2) \\ h(z_1, z_2) = (\alpha^n z_1, \alpha z_2) \end{cases}$$

où :

$$\begin{cases} (\lambda, \gamma, \alpha) \in \mathbb{C}^3 \\ 0 < |\gamma| < 1 \\ \alpha \text{ est une racine primitive } m^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \\ m, n \text{ sont des entiers premiers entre eux et } m, n \geq 2. \end{cases}$$

Mais dans ce cas on peut déformer ces surfaces et se ramener à $\lambda = 0$ [Kat75]. À difféomorphisme près il suffit donc d'étudier les surfaces de Hopf secondaires pour

lesquelles $G \subset GL(\mathbb{C}^2)$. On note $H = \{g \in G/\ |det(g)| = 1\}$. On a alors la suite exacte :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

**Définition** : *On dit que $G$ est décomposable si $G = \mathbb{Z} \times H$. Sinon on dira que $G$ est indécomposable.*

Si $G$ est décomposable, la surface de Hopf associée est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3/H$ [Kat75]. Lorsque $G$ est indécomposable, la variété $S = \mathbb{C}^{2\star}/G$ est un fibré au-dessus de $\mathbb{S}^1$ dont la fibre est difféomorphe à $\mathbb{S}^3/H$. On étudie ce cas en détail.

On utilise les notations suivantes pour les sous-groupes de $U(2)$ d'ordre fini :

$B'_{2^k(2l+1)} \subset U(2)$ est le groupe engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\delta, \epsilon \in \mathbb{C}$ d'ordre $2^k$ et $2l+1$.

$B_n \subset SU(2)$ est le groupe diédral d'ordre $4n$. Il est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{n}} \end{pmatrix}$.

$C \subset SU(2)$ est le groupe tetraédral. C'est le groupe d'ordre 24 engendré par les matrices $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{3i\pi}{4}} & e^{\frac{3i\pi}{4}} \\ e^{\frac{i\pi}{4}} & -e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$.

On note $\gamma$ un nombre complexe dont le module appartient à l'intervalle $]0,1[$ et $\alpha$ une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Si $G$ est indécomposable alors dans les cas (D1) jusqu'à (D4) (voir ci-dessous) le groupe $G$ est :

$$G = G_0 \cup (\gamma\, u)G_0 \ \text{ avec } G_0 =< \gamma^2 Id > \times H.$$

Dans le cas (D5) le groupe $G$ est :

$$G = G_0 \cup (\gamma\, u)G_0 \cup (\gamma\, u)^2 G_0 \ \text{ avec } G_0 =< \gamma^3 Id > \times H.$$

Voici les différents cas qui peuvent arriver :

(D1) $H$ est le sous-groupe de $U(2)$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$ et $u$ est l'endomorphisme $\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Avec $n \not\equiv n^2 \equiv 1\ (mod\ m)$, $m$ de la forme $m = 2^k(2l+1)$ et $t \in \mathbb{C}^\star$. À difféomorphisme près on peut supposer que $t = 1$ [Kat75].

(D2) $H =< \alpha Id > \times B'_{2^k(2l+1)}$ et l'endomorphisme $u$ est $\begin{pmatrix} 0 & t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Avec pgcd$\big(2^k(2l+1), m\big)$=1, $2l+1 \geq 3$ et $k \geq 3$. Enfin $t^2 = (-\epsilon)^k$ et $t \neq 1$.

(D3) $H =< \alpha Id > \times B_n$ et l'endomorphisme $u$ est $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{2n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{2n}} \end{pmatrix}$. Avec $n \geq 2$, pgcd(m,4n)=1 si $n \geq 3$ et pgcd(m,2)=1 si $n = 2$.

(D4) $H =< \alpha Id > \times C$ et l'endomorphisme $u$ est $\begin{pmatrix} e^{\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\pi}{4}} \end{pmatrix}$. Avec pgcd(m,6)=1.

(D5) $H =< \alpha Id > \times B_2$ et l'endomorphisme $u$ est $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{3i\pi}{4}} & e^{\frac{3i\pi}{4}} \\ e^{\frac{i\pi}{4}} & -e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$. Avec pgcd(m,2)=1.

## 2 Les surfaces de Hopf secondaires sont spin

Ceci finit les rappels sur les surfaces de Hopf secondaires. On va maintenant montrer qu'elles admettent toute une structure spin. Dans le cas où $G$ est décomposable, la surface de Hopf associée est difféomorphe au produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3/H$ [Kat75]. Ces surfaces sont parallélisables comme produit d'une 3-variété compacte orientable avec $\mathbb{S}^1$. En particulier elles sont spin. Si $G$ est indécomposable la variété $S = \mathbb{C}^{2\star}/G$ est la suspension de $u : \mathbb{S}^3/H \longrightarrow \mathbb{S}^3/H$ au-dessus de $[0,1]$ [Kat75].

On identifie $\mathbb{R}^4$ avec l'ensemble des quaternions $\mathbb{H}$ et on munit l'espace tangent de $\mathbb{S}^3$ au point $q$ de la base orthonormée $(X_1, X_2, X_3) = (iq, jq, kq)$. La variété $\mathbb{S}^3/H$ est parallélisable il existe donc une base $(Y_1, Y_2, Y_3)$ de $\mathbb{S}^3$ invariante par le groupe $H$ :

$$\begin{cases} Y_1 = a_1X_1 + b_1X_2 + c_1X_3 \\ Y_2 = a_2X_1 + b_2X_2 + c_2X_3 \\ Y_3 = a_3X_1 + b_3X_2 + c_3X_3 \end{cases}$$

Comme $H \subset U(2)$ le champ de vecteurs $X_1$ et son orthogonal $Vect(X_2, X_3)$ sont invariants par $H$. Par conséquent $\forall i \in \{1,2,3\}$ les champs de vecteurs $a_iX_1$ et $b_iX_2 + c_iX_3$ sont également invariants par $H$.

Dans le cas (D1), quitte à déformer $S$, on suppose que le paramètre $t$ de l'endomorphisme $u$ est égale à 1. L'application $u$ vue comme une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ s'écrit :

$$\begin{cases} u(q) = -i\,q\,k & \text{dans le cas (D1)} \\ u(q) = -i\,q\,tk & \text{dans le cas (D2)} \\ u(q) = q\,e^{\frac{i\pi}{2n}} & \text{dans le cas (D3)} \\ u(q) = q\,e^{\frac{i\pi}{4}} & \text{dans le cas (D4)} \\ u(q) = q\,\frac{e^{\frac{3i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{4}}j}{\sqrt{2}} & \text{dans le cas (D5)} \end{cases}$$

La matrice de $u$ dans la base $(X_1, X_2, X_3)$ s'écrit donc :

$$Mat\,u = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \text{dans les cas (D1) et (D2)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{dans les cas (D3), (D4) et (D5).} \end{cases}$$

De plus dans tous les cas $u \in U(2)$. Il existe donc une application $f : [0,1] \longrightarrow U(2)$ qui relie l'identité à l'endomorphisme $u^{-1}$. Pour les cas $(D1)$ et $(D2)$ on définit sur $[0,1] \times \mathbb{S}^3$ la famille $(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \tilde{Y}_3)$ :

$$\begin{cases} \tilde{Y}_1(t,q) = a_1\big(f(t)q\big)X_1 + e^{i\pi t}\Big(b_1\big(f(t)q\big)X_2 + c_1\big(f(t)q\big)X_3\Big) \\ \tilde{Y}_2(t,q) = a_2\big(f(t)q\big)X_1 + e^{i\pi t}\Big(b_2\big(f(t)q\big)X_2 + c_2\big(f(t)q\big)X_3\Big) \\ \tilde{Y}_3(t,q) = a_3\big(f(t)q\big)X_1 + e^{i\pi t}\Big(b_3\big(f(t)q\big)X_2 + c_3\big(f(t)q\big)X_3\Big) \end{cases}$$

Pour les cas (D3), (D4) et (D5) on retire le coefficient $e^{i\pi t}$. On vient de construire une famille libre de champs de vecteurs invariants par le groupe $H$ et par l'application

u :

$$u\Big(\tilde{Y}_i(0,q)\Big) = \tilde{Y}_i\big(1,u(q)\big) \quad \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Si on note $\tilde{Y}_4(t,q) = \frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs constant tangent à la variable $t$. On a une base de champs de vecteurs quelque soit la surface de Hopf secondaire.

**Proposition 3** : *Les surfaces de Hopf secondaires sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

## 3.2 Surfaces d'Inoue

### 1 Les surfaces d'Inoue de type $S_N$ sont spin

Soit $N = (n_{ij}) \in SL(3,\mathbb{Z})$ une matrice dont les valeurs propres sont $\alpha, \beta, \bar{\beta}$ avec $\alpha > 1$ et $\beta \neq \bar{\beta}$. Soient $(a_1, a_2, a_3)$ et $(b_1, b_2, b_3)$ les vecteurs propres de $N$ associés respectivement à $\alpha$ et $\beta$. On note $\mathbb{H}$ le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$ et $G_N$ le groupe d'automorphismes de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ engendré par :

$$\begin{cases} g_0 : (w,z) \longrightarrow (\alpha w, \beta z) \\ g_i : (w,z) \longrightarrow (w + a_i, z + b_i) \quad \forall i \in \{1,2,3\}. \end{cases}$$

Par définition les surfaces $S_N = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_N$ sont les surfaces d'Inoue de type neutre [Ino74].

**Proposition 4** : *Les surfaces d'Inoue de type $S_N$ sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

*Preuve.* Soit $(e_1, e_2)$ la "base" canonique de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^+$ et $(e_3, e_4)$ celle de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. On considère les quatre champs de vecteurs sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ définis par :

$$\begin{cases} X_1(w,z) &= Im\, w\, .e_1 \\ X_2(w,z) &= Im\, w\, .e_2 \\ X_3(w,z) &= \beta^{\frac{\ln(Im\, w)}{\ln \alpha}}\, .e_3 \\ X_4(w,z) &= \beta^{\frac{\ln(Im\, w)}{\ln \alpha}}\, .e_4 \end{cases}$$

Ces quatre champs de vecteurs passent au quotient en une base de champs de vecteurs sur $S_N = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G_N$. $\square$

### 2 Les surfaces d'Inoue de type $S^+_{N,p,q,r;t}$ sont spin

Soit $N = (n_{ij}) \in SL(2,\mathbb{Z})$ une matrice ayant des valeurs propres réelles $\alpha$ et $1/\alpha$ avec $\alpha > 1$. Soient $(a_1, a_2)$ et $(b_1, b_2)$ les vecteurs propres de $M$ associés respectivement à $\alpha$ et $1/\alpha$. On fixe des entiers $p, q, r$ où $r$ est non nul et un nombre complexe $t$. On note $(c_1, c_2)$ la solution de l'équation :

$$(c_1, c_2) = (c_1, c_2).{}^tN + (e_1, e_2) + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{r}(p,q)$$

où $e_i = \frac{1}{2} n_{i1}(n_{i1} - 1) a_1 b_1 + \frac{1}{2} n_{i2}(n_{i2} - 1) a_2 b_2 + n_{i1} n_{i2} b_1 a_2 \quad i \in \{1,2\}$.

On note $G^+_{N,p,q,r;t}$ le groupe d'automorphismes de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ engendré par :

$$\begin{cases} g_0 : (w,z) \longrightarrow (\alpha w, z + t) \\ g_i : (w,z) \longrightarrow (w + a_i, z + b_i w + c_i) \quad \forall i \in \{1,2\} \\ g_3 : (w,z) \longrightarrow (w, z + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{r}). \end{cases}$$

Par définition les surfaces $S^+_{N,p,q,r;t} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G^+_{N,p,q,r;t}$ sont les surfaces d'Inoue de type positif [Ino74].

**Proposition 5** : *Les surfaces d'Inoue de type $S^+_{N,p,q,r;t}$ sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

*Preuve.* On note encore $(e_1, e_2)$ la "base" canonique de $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}^+$ et $(e_3, e_4)$ celle de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. On considère les deux champs de vecteurs sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ définis par :

$$\begin{cases} X_3(w,z) &= e_3 \\ X_4(w,z) &= e_4 \end{cases}$$

Ces deux champs passent au quotient sur $S^+_{N,p,q,r;t} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G^+_{N,p,q,r;t}$. On définit sur $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ le champ de 2-plans $Vect(e_1, e_3)$ orientés par le bivecteur $e_1 \wedge e_3$. Ce champ passe au quotient en un champ de 2-plans orientés sur $S^+_{N,p,q,r;t}$ noté $P_{13}$. On munit $S^+_{N,p,q,r;t}$ d'une métrique riemannienne et on note $X_1$ le champ de vecteurs dans $P_{13}$ unitaire et tel que $(X_1, X_3)$ soit une famille orthogonale directe de $P_{13}$.

De même le champ de 2-plans $Vect(e_2, e_4)$ constant sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ et orienté par le bivecteur $e_2 \wedge e_4$ passe au quotient sur $S^+_{N,p,q,r;t}$ en un champ de 2-plans $P_{24}$ orientés. On définit de même le champ de vecteurs $X_2$ dans $P_{24}$ unitaire et tel que $(X_2, X_4)$ soit une famille orthogonale directe de $P_{24}$.

On a ainsi défini une base de champs de vecteurs $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ sur $S^+_{N,p,q,r;t}$. Les surfaces d'Inoue de type positive sont donc bien parallélisables. $\square$

## 3 Les surfaces d'Inoue de type $S^-_{N,p,q,r}$ sont spin

Soit $N = (n_{ij}) \in GL(2, \mathbb{Z})$ une matrice de détermiant $-1$ ayant deux valeurs propres réelles $\alpha, -1/\alpha$ avec $\alpha > 1$. Soient $(a_1, a_2)$ et $(b_1, b_2)$ les vecteurs propres de $M$ associés respectivement à $\alpha$ et $-1/\alpha$. Comme pour les surfaces d'Inoue de type positive, on fixe des entiers $p, q, r$ où $r$ est non nul et on note $(c_1, c_2)$ la solution de l'équation :

$$-(c_1, c_2) = (c_1, c_2).{}^tN + (e_1, e_2) + \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{r}(p, q)$$

où $e_i = \frac{1}{2}n_{i1}(n_{i1} - 1)a_1b_1 + \frac{1}{2}n_{i2}(n_{i2} - 1)a_2b_2 + n_{i1}n_{i2}b_1a_2 \quad i \in \{1, 2\}$.

On note $G^-_{N,p,q,r}$ le groupe d'automorphismes de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ engendré par :

$$\begin{cases} g_0 : (w,z) \longrightarrow (\alpha w, -z) \\ g_i : (w,z) \longrightarrow (w + a_i, z + b_i w + c_i) \quad \forall i \in \{1,2\} \\ g_3 : (w,z) \longrightarrow (w, z + \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{r}). \end{cases}$$

Par définition les surfaces $S^-_{N,p,q,r} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G^-_{N,p,q,r}$ sont les surfaces d'Inoue de type négatif [Ino74].

**Proposition 6** : *Les surfaces d'Inoue de type $S^-_{N,p,q,r}$ sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

*Preuve.* On garde les notations précédentes. On définit sur $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ le champ constant de 3-plans $Vect(e_1, e_3, e_4)$ orientés grâce au trivecteur $e_1 \wedge e_3 \wedge e_4$. Ce champ passe au quotient sur $S^-_{N,p,q,r}$ en un champ de 3-plans orientés noté $P_{134}$.

Pour tout vecteur $X$ de $\mathbb{C} \simeq Vect(e_3, e_4)$, on note $R_\theta(X)$ la rotation d'angle $\theta$ du

vecteur $X$ dans le plan $Vect(e_3, e_4)$ orienté par $e_3 \wedge e_4$. Sur $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ on considère les deux champs de vecteurs définis par :

$$\begin{cases} X_3(w,z) & = & R_{\frac{\ln(Im\, w)}{\ln\, \alpha}\pi}(e_3) \\ X_4(w,z) & = & R_{\frac{\ln(Im\, w)}{\ln\, \alpha}\pi}(e_4) \end{cases}$$

Ces vecteurs passent au quotient en deux champs de vecteurs sur $S^-_{N,p,q,r} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}/G^-_{N,p,q,r}$. On munit $S^-_{N,p,q,r}$ d'une métrique riemannienne. On peut alors définir $X_1$ le champ unitaire de $P_{134}$ tel que $X_1$ soit orthogonal à $Vect(X_3, X_4)$ et tel que $(X_1, X_3, X_4)$ soit une famille orientée de $P_{134}$. Enfin on note $X_2$ le champ de vecteurs unitaire orthogonal à $P_{134}$ tel que $(X_1, X_2, X_3, X_4)$ soit une famille orientée. □

**4 Remarque sur la parallélisabilité des surfaces d'Inoue**

On sait depuis l'article de Wall [Wal86] (lire aussi [Bel00], [Kli98]) qu'à revêtement fini près les surfaces d'Inoue sont toutes des solvsurfaces affines, c'est-à-dire des quotients de la forme $G/\Gamma$, où $G$ est un sous-groupe résoluble du groupe affine et $\Gamma$ un réseau cocompact de $G$. Comme une base de champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$ descend en une base de champs de vecteurs sur $G/\Gamma$, toute solvsurface affine est parallélisable. On obtient ainsi directement la parallélisabilité des surfaces d'Inoue de type $S^+_{N,p,q,r;t}$ pour lesquelles le paramètre $t$ n'est pas réel. Mais ce raisonnement ne marche pas pour les autres surfaces qui ne sont que des quotients finis de solvsurfaces affines. Il faut bien noter que la propriété d'être une variété parallélisable (tout comme celle d'être spin) n'est pas invariante par passage au quotient.

## 3.3 Surfaces hyperelliptiques

Pour les surfaces hyperelliptiques, on a encore une description explicite ([BHPVdV04] Chap.V.5). Ainsi soit $\mathbb{T}_1$ le tore $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ et $\mathbb{T}_2$ le tore $\mathbb{C}/\Gamma$, où $\Gamma$ est un réseau de $\mathbb{C}$. On note $z_1$ et $z_2$ les coordonnées complexes sur $\mathbb{T}_1$ et $\mathbb{T}_2$ respectivement. À difféomorphisme près une surface hyperelliptique est le quotient de $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ par un des groupes d'automorphismes $G$ suivant :

| Type | $\Gamma$ | $G$ | Action de $G$ sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{2}, -z_2)$ |
| 2 | $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\begin{cases} g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{2}, -z_2) \\ g_2(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{i}{2}, z_2 + e_1) \text{ avec } 2e_1 = 0 \end{cases}$ |
| 3 | $\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ | $g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{3}, jz_2)$ |
| 4 | $\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ | $\begin{cases} g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{3}, jz_2) \\ g_2(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{i}{3}, z_2 + e_1) \text{ avec } je_1 = e_1 \end{cases}$ |
| 5 | $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ | $g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{4}, iz_2)$ |
| 6 | $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\begin{cases} g_1(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{1}{4}, iz_2) \\ g_2(z_1, z_2) = (z_1 + \frac{i}{2}, z_2 + e_1) \text{ avec } ie_1 = e_1 \end{cases}$ |
| 7 | $\mathbb{Z} + j\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ | $g_1(z_1, z_2) = (z_1 - \frac{1}{6}, -jz_2)$ |

Comme pour les surfaces d'Inoue, on construit explicitement une base de champs de vecteurs. Le premier tore $\mathbb{T}_1$ est le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$. On note $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}+i\mathbb{R}$. Le deuxième tore est le quotient $\mathbb{T}_2 = \mathbb{C}/\Gamma$. On note ici $(e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}+i\mathbb{R}$ et $R_\theta$ la rotation d'angle $\theta$ dans le plan $\mathbb{C} \simeq Vect(e_3, e_4)$ orienté par $e_3 \wedge e_4$. On définit sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ les quatre champs de vecteurs :

$$\begin{cases} X_1(z_1, z_2) = e_1 \\ X_2(z_1, z_2) = e_2 \\ X_3(z_1, z_2) = R_{2\pi\, Re\, z_1}(e_3) \\ X_4(z_1, z_2) = R_{2\pi\, Re\, z_1}(e_4) \end{cases}$$

Ces champs passent naturellement au quotient en quatre champs sur $\mathbb{T}_1 \oplus \mathbb{T}_2$, quelque soit le réseau $\Gamma$ définissant $\mathbb{T}_2 = \mathbb{C}/\Gamma$. De plus quelque soit le type de la surface hyperelliptique, ces champs passent au quotient sur $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2/G$. On a ainsi construit une base de champs de vecteurs sur chaque surface hyperelliptique.

**Proposition 7** : *Les surfaces hyperelliptiques sont parallélisables. En particulier elles sont spin.*

# 4 Surfaces complexes admettant une structure spin

La démonstration du théorème 1 nous a obligé à déterminer si certaines surfaces complexes admettaient une structure spin. On peut compléter un peu ce travail et donner quasiment la liste des surfaces complexes admettant une structure spin. Naturellement on ne pourra pas donner la liste des surfaces de type général qui sont spin car cette classe est bien trop grande (pour des résultats d'existences lire [PPX96]). Les surfaces réglées de genre $g \geq 0$ qui sont spin sont les surfaces dont la forme d'intersection est paire [FM94], [BHPVdV04]. Ces surfaces sont toutes des déformations du produit $\Sigma_g \times \mathbb{C}P^1$ d'une surface de Riemann de genre $g$ avec la droite projective. D'autre part on conjecture que toutes les surfaces de la classe $VII_0^+$ possèdent une coquille sphérique globale [Kat78], [DOT03]. Ce qui est le cas de tous les exemples connus. De telles surfaces admettent une déformation qui est l'éclaté d'une surface de Hopf primaire [Nak84], [Nak90]. Aucune de ces surfaces n'est donc spin. **Sous réserve que toutes les surfaces de la classe $VII_0^+$ possèdent une coquille sphérique globale**, on a le corollaire suivant.

**Corollaire 1** : *Les seules surfaces compactes complexes $M$ de dimension de Kodaira négative qui admettent une structure spin sont :*

$$Kod(M) = -\infty : \begin{cases} \textit{Les surfaces de Hopf} \\ \textit{Les surfaces d'Inoue} \\ \textit{Les surfaces réglées de genre } g \geq 0 \textit{ dont la forme} \\ \textit{d'intersection est paire} \end{cases}$$

$$Kod(M) = 0 : \begin{cases} \textit{Les tores} \\ \textit{Les surfaces hyperelliptiques} \\ \textit{Les surfaces de Kodaira primaires} \\ \textit{Les surfaces de Kodaira secondaires qui sont spin} \\ \textit{Les surfaces K3} \end{cases}$$

## 5 Surfaces compactes complexes parallélisables

Grâce au théorème 1 on peut également donner la liste des surfaces complexes parallélisables. Ce résultat est un peu plus précis que celui de Yau [Yau76] dans la mesure où il donne non pas les surfaces *susceptibles* d'être parallélisables, mais toutes les surfaces parallélisables.

**Corollaire 2** : *Les seules surfaces compactes complexes $M$ parallélisables en tant que variétés réelles sont :*

*a) si $Kod(M) = -\infty$ : les surfaces réglées de genre 1 qui sont spin, les surfaces d'Inoue, les surfaces de Hopf.*

*b) si $Kod(M) = 0$ : les tores, les surfaces hyperelliptiques, les surfaces de Kodaira primaires et les surfaces de Kodaira secondaires qui sont spin.*

*c) si $Kod(M) = 1$ : les surfaces minimales de premier nombre de Betti pair qui sont spin et dont la caractéristique d'Euler nulle. Ainsi que celles qui sont spin et dont le premier nombre de Betti est impair.*

*d) si $Kod(M) = 2$ : aucune surface.*

*Preuve.* Une variété parallélisable est une variété presque quaternionique dont la caractéristique d'Euler est nulle. Par rapport au théorème 1, il nous faut donc éliminer les surfaces $K3$ puisque $\chi = 24$ et certaines surfaces de dimension de Kodaira un. □

## 6 Résolution du problème 2

On rappelle que le problème 2 avait pour but de trouver une famille de 4-variétés riemanniennes orientées $(M, g)$ telles que :

(i) $M$ ne possède pas de structure complexe
(ii) l'espace twistoriel de $(M, g)$ est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$
(iii) la métrique $g$ est anti-autoduale.

**Théorème 2** : *Pour toute 3-variété compacte hyperbolique orientable $H$, il existe une structure complexe sur le produit $H \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ bien que $H \times \mathbb{S}^1$ n'en possède pas.*

Ce théorème fournit en particulier une famille d'exemples simples de 4-variétés parallélisables mais qui ne possèdent pas de structure complexe. De tels exemples existaient déjà [Yau76], [Bro78] mais restaient assez isolés ou peu explicites.

**Corollaire 3** : *Pour toute 3-variété compacte hyperbolique orientable H, le produit $H \times \mathbb{S}^1$ est une 4-variété parallélisable sans structure complexe.*

**Remarque** : La démonstration que nous donnons du théorème 2 permet également de montrer que tout fibré en cercle $\mathbb{S}^1$ au-dessus d'une 3-variété hyperbolique compacte orientable $H$ est parallélisable sans structure complexe. On donne ici les premiers exemples de 4-variétés parallélisable sans structure complexe qui ne sont pas le produit de $\mathbb{S}^1$ avec une 3-variété parallélisable.

*Preuve du théorème 2.* Si $H$ est une 3-variété hyperbolique orientable compacte, elle est parallélisable donc $H \times \mathbb{S}^1$ aussi. Son espace twistoriel est donc difféomorphe à $H \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. De plus on peut toujours munir $H$ d'une métrique hyperbolique c'est-à-dire d'une métrique à courbure sectionnelle constante égale à $-1$. La métrique

produit sur $H \times \mathbb{S}^1$ est alors localement conformément plate ([Bes87], chap.1-J) et l'espace twistoriel associé à cette variété riemannienne orientée admet une structure complexe [AHS78].

Reste à montrer que ce produit n'admet aucune structure complexe. Pour cela on utilise le théorème 1 et les propriétés du groupe fondamental d'une variété hyperbolique compacte. Par les théorèmes de Preissman et de Byers ([Bes87], chap.6-C) on sait que le groupe fondamental de $H$, noté $\pi_1(H)$, n'est pas abélien et que les seuls sous-groupes résolubles non nuls de $\pi_1(H)$ sont infinis cycliques. En particulier il n'est pas résoluble et n'admet pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Si $H \times \mathbb{S}^1$ admet une structure complexe alors c'est une des surfaces du théorème 1. En étudiant les groupes fondamentaux des différentes surfaces complexes on voit que $H \times \mathbb{S}^1$ ne peut être ni une surface réglée de genre 1 ($\pi_1 = \mathbb{Z}^2$), ni une surface de Hopf primaire ($\pi_1 = \mathbb{Z}$), ni une surface de Hopf secondaire (quotient fini d'une Hopf primaire), ni une surface d'Inoue ($\pi_1$ résoluble [Ino74]), ni un tore ($\pi_1 = \mathbb{Z}^4$).

Le seul cas qu'il reste à éliminer est le cas des surfaces elliptiques de dimension de Kodaira 0 ou 1. Pour cela on rappelle brièvement quelques propriétés des surfaces elliptiques [BHPVdV04], [FM94].

Si $X$ est une surface elliptique elle admet une surjection holomorphe $\pi : X \longrightarrow C$ dont la fibre générique est une courbe elliptique. Dans notre cas la caractéristique d'Euler est nulle ($X$ est parallélisable), donc la fibration est sans fibre singulière. La base $C$ est une 2-orbifold, c'est-à-dire une 2-variété avec un ensemble de points spéciaux $\{t_1, ..., t_k\}$ de multiplicité $\{m_1, ..., m_k\}$. La fibre de $\pi : X \longrightarrow C$ au-dessus d'un point $t_i$ est une fibre multiple de multiplicité $m_i$. Si $X$ est parallélisable et de dimension de Kodaira 0 ou 1 alors X admet un revêtement fini $\tilde{X} \longrightarrow X$ où $\tilde{X}$ est une surface elliptique au-dessus d'une surface de Riemann de genre $g \geq 1$ et sans fibre multiple.

Le groupe de monodromie de $\tilde{X}$ agit par automorphismes analytiques sur la fibre, qui est une courbe elliptique. À isotopie près, il est donc fini. Quitte à prendre un nouveau revêtement, on peut supposer que notre fibration est à monodromie triviale. On montre alors que le groupe fondamental de la fibre ($\mathbb{Z}^2$) est central dans celui de $\tilde{X}$. En effet soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Sigma_g$ un lacet de la base. On note $\phi$ l'automorphisme du groupe de monodromie associé au lacet $\gamma$. Si on restreint le fibré $\pi : \tilde{X} \longrightarrow \Sigma_g$ au lacet $\gamma$, la fibration obtenue est la suspension de $\phi$ au-dessus de $[0,1]$. Comme la monodromie est triviale, ce fibré est topologiquement trivial. Le groupe fondamental de la fibre commute donc avec l'élément $\gamma$ et cela pour tout lacet de la base. Le groupe fondamental de $\tilde{X}$ admet donc un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^3$.

Si $H \times \mathbb{S}^1$ était munie d'une structure complexe, ce serait une surface minimale de dimension de Kodaira 0 ou 1. Et donc $H \times \mathbb{S}^1$ admettrait $\tilde{X}$ comme revêtement fini. Son groupe fondamental contiendrait un $\mathbb{Z}^3$. Ce qui est impossible puisque le groupe fondamental de $H$ ne contient pas de $\mathbb{Z}^2$. $\square$

# 7 Étude et résolution du problème 1

On cherche maintenant à classifier l'ensemble des 4-variétés riemanniennes orientées $(M, g)$ telle que :

(i) $M$ admet une structure complexe
(ii) l'espace twistoriel de $(M, g)$ est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$
(iii) la métrique $g$ est anti-autoduale.

Pour de telles variétés on a deux structures complexes sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$ : la

structure complexe produit et celle d'espace twistoriel. Cette dernière n'est jamais kählerienne [Hit81] ni même biméromorphe à une structure kählerienne.

**Théorème [Cam91]** : *Soit $(M, g)$ une 4-variété compacte (connexe) riemannienne orientée. Si son espace twistoriel est biméromorphe à une variété kählerienne alors soit $M$ est conformément équivalent à la sphère ronde $\mathbb{S}^4$, soit $M$ est homéomorphe à une somme connexe de plan projectif complexe $\mathbb{C}P^2$.*

Sous les hypothèses du problème 1 on a le résultat suivant :

**Proposition 8** : *La structure presque complexe d'espace twistoriel n'est jamais une déformation de la structure complexe produit.*

*Preuve.* Comme $(M, g)$ est presque quaternionique, son espace twistoriel $Z$ est difféomorphe au produit $M \times \mathbb{S}^2$. Son deuxième groupe de cohomologie de De Rham est donc : $H^2(Z, \mathbb{Z}) = H^2(M, \mathbb{Z}) \oplus H^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z})$. On note $h$ le générateur du $H^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

L'espace twistoriel de $(M, g)$ est muni d'une structure presque complexe canonique $J_{et}$ dont la première classes de Chern notée $c_1(J_{et})$ est toujours égale à $4h$ [Hit81]. On note $c_1(J_p)$ la première classe de Chern de la variété $M \times \mathbb{S}^2$ munit de la structure complexe produit et $c_1(M)$ celle de $M$. On a $c_1(J_p) = 2h + c_1(M)$. Si on pouvait déformer la structure complexe d'espace twistoriel $J_{et}$ de $Z$ en la structure complexe produit $J_p$ , les classes de Chern seraient les mêmes. Mais $c_1(J_{et})$ est divisible par quatre contrairement à $c_1(J_p)$. La structure d'espace twistoriel n'est donc jamais une déformation de la structure produit. □

## 7.1 Résolution du problème 1

Le résultat principal de cette partie est le suivant. Il donne toutes les surfaces presque quaternioniques qui peuvent être munies d'une métrique riemannienne anti-autoduale. Encore une fois, ici la métrique n'est plus liée à la structure complexe. Il était donc légitime d'espérer trouver d'autres exemples que ceux déjà cités.

**Théorème 3** : *Soit $M$ une surface compacte complexe dont le fibré twistoriel est topologiquement trivial. Si la variété $M$ peut être munie d'une métrique riemannienne anti-autoduale alors $M$ est :*

*a) une surface K3*

*b) un tore*

*c) une surface hyperelliptique*

*d) une surface de Hopf*

*e) une surface minimale spin de dimension de Kodaira un.*

*Réciproquement dans les cas a, b, c et d il existe toujours une métrique riemannienne anti-autoduale.*

Les seules variétés non connues susceptibles d'admettre une métrique anti-autoduale sont les surfaces proprement elliptiques. Ces surfaces se divisent en deux groupes suivant que la caractéristique d'Euler est nulle ou pas. Dans les deux cas on peut préciser un peu le théorème. Par le théorème de Schoen [Sch84] toute métrique anti-autoduale est conforme à une métrique dont la courbure scalaire est constante. *À partir d'ici, on supposera donc toujours que la courbure scalaire d'une métrique anti-autoduale est constante.*

**Proposition 9** : *Soit $M$ une surface minimale de dimension de Kodaira un spin*

*et de caractéristique d'Euler nulle. La variété $M$ est alors parallélisable et revêtue par un fibré lisse localement trivial $S \longrightarrow \Sigma_{g>1}$ en courbes elliptiques et de base une surface de Riemann de genre $g > 1$.*

*Si $M$ admet une métrique $g$ anti-autoduale alors la métrique est localement conformément plate (et donc à courbure harmonique), à courbure scalaire négative, non hermitienne, non Einstein et à holonomie sans sous-espace invariant (c'est-à-dire $g$ irréductible). En particulier la métrique n'est pas Ricci parallèle.*

**Proposition 10** : *Soit $M$ une surface minimale de dimension de Kodaira un spin et de caractéristique d'Euler $\chi > 0$.*

*Si $M$ admet une métrique anti-autoduale alors la métrique est à courbure scalaire négative, non Einstein (et donc à courbure non harmonique), non localement conformément plate, non hermitienne, et à holonomie sans sous-espace invariant. Là encore la métrique n'est pas Ricci parallèle.*

Je ne sais pas si dans ces deux derniers cas une métrique riemannienne anti-autoduale existe réellement. Bien que les restrictions sur cette métrique soient assez fortes, je ne connais pas d'outils me permettant d'éliminer ces deux familles de candidats. Dans les années 80 J.P. Bourguignon se demandait d'une part si les métriques à courbure harmonique sont Ricci parallèles et d'autre part si, pour les variétés à signature non nulle, les métriques anti-autoduales sont d'Einstein [Bou81]. Une réponse positive à ces deux questions aurait permis d'éliminer ces deux familles de candidats. Mais on connaît maintenant (au moins pour la première question) des contre-exemples [Der80], [Laf82]. De plus comme toutes nos variétés sont spin, on ne peut pas utiliser les techniques du théorème de Taubes [Tau92] pour construire des métriques anti-autoduales puisque le moindre éclatement nous fait perdre la structure spin.

La prochaine partie est consacrée à la démonstration de ces résultats. Mais avant cela on souhaite rappeler brièvement les résultats existants dans le cas hermitien.

## 7.2 Comparaison avec le cas hermitien

Pour toute surface de Hopf primaire $S$ (i.e. difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$) il existe [Kod66] un entier $m$ et des complexes $\alpha, \beta, t$ qui vérifient :

$$0 < |\alpha| \leq |\beta| < 1 \quad \text{et} \quad (\beta^m - \alpha)t = 0$$

tels que la variété $S$ soit biholomorphe à la variété $H_{(m,\alpha,\beta,t)}$ quotient de $\mathbb{C}^{2\star}$ par le groupe d'automorphismes $< \gamma >$ de $\mathbb{C}^{2\star}$ engendré par :

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & \mathbb{C}^{2\star} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{2\star} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & (\alpha z_1 + t z_2^m, \beta z_2). \end{array}$$

Lorsque l'entier $m$ est nul alors le complexe $t$ est nul aussi. Dans ce cas on écrira $H_{(\alpha,\beta)}$ plutôt que $H_{(0,\alpha,\beta,0)}$. On munit $\mathbb{C}^{2\star}$ de la métrique de Vaisman : $\frac{|dz_1|^2+|dz_2|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2}$. Lorsque $\alpha$ et $\beta$ sont deux nombres complexes de même module, cette métrique passe au quotient sur $H_{(\alpha,\beta)}$. On la note alors $g_{(\alpha,\beta)}$. Les seules surfaces de Hopf primaires munies d'une métrique hermitienne anti-autoduale sont précisément conformes à $(H_{(\alpha,\beta)}, g_{(\alpha,\beta)})$ [Boy86]. Ainsi très peu de surfaces de Hopf primaires admettent une telle métrique bien que toutes ces surfaces admettent une infinité de métriques riemanniennes anti-autoduales : les $g_{(\alpha,\beta)}$. Comme on peut le voir sur cet exemple, posséder une métrique anti-autoduale est une condition beaucoup moins restrictive dans la cadre riemannien que dans le cadre hermitien. J'insiste sur ce point car les

techniques développées ici sont du coup très différentes de celles du cas hermitien. Pour les métriques hermitiennes anti-autoduales Boyer a montré le résultat suivant :

**Lemme [Boy86]** : *Soit $M$ une surface complexe de premier nombre de Betti $b_1$ et $g$ une métrique hermitienne anti-autoduale alors :*

*(i) Soit $b_1$ est pair alors la métrique est à courbure scalaire nulle et kählerienne.*

*(ii) Soit $b_1$ est impair et alors la dimension de Kodaira est $-\infty$ et la métrique est localement conformément Kähler.*

## 7.3 Démonstrations

### 1 Sens direct du théorème 3

Pour démontrer le théorème 3 on étudie au cas par cas les différentes surfaces complexes à fibré twistoriel trivial. Il faut montrer que les surfaces d'Inoue, les surfaces reglées de genre un et les surfaces de Kodaira n'admettent pas de métrique riemannienne anti-autoduale. Pour cela il nous faut faire quelques rappels de géométrie différentielle.

Soit $(M, g)$ une 4-variété riemannienne orientée. L'opérateur de Hodge $\star$ est une involution de l'ensemble des 2-formes $\bigwedge^2$. Ceci a pour conséquence d'entraîner la décomposition en sous-espaces propres : $\bigwedge^2 = \bigwedge^+ \oplus \bigwedge^-$, où $\bigwedge^+$ est l'ensemble des 2-formes autoduales tandis que $\bigwedge^-$ est l'ensemble des 2-formes anti-autoduales. Le tenseur de courbure $R$ associé à la métrique $g$ peut être considéré comme un endomorphisme de $\bigwedge^2$. Sa matrice dans une base orthonormée adaptée à la décomposition $\bigwedge^2 = \bigwedge^+ \oplus \bigwedge^-$ est alors [ST69] :

$$R = \begin{pmatrix} W^+ + \frac{s}{12} Id & {}^tB \\ B & W^- + \frac{s}{12} Id \end{pmatrix}$$

L'opérateur $W = W^+ + W-$ est l'opérateur de Weyl et $s$ est la courbure scalaire de $g$. On montre que la métrique $g$ est d'Einstein si et seulement si le bloc $B$ est nul [ST69].

On note $\tau$ la signature de $M$, $\chi$ sa caractéristique d'Euler et $\mu_g$ la forme volume associé à la métrique $g$. On a alors les égalités (cf. [Bes87]) :

$$\tau = \frac{1}{12\pi^2} \int_M \Big( \|W^+\|^2 - \|W^-\|^2 \Big) \mu_g$$

$$\chi = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \Big( \|W^+\|^2 + \|W^-\|^2 + \frac{1}{24} s^2 - 2\|B\|^2 \Big) \mu_g$$

Sur une 4-variété dont la signature est nulle, les métriques anti-autoduales sont donc localement conformément plates.

Pour montrer que les surfaces d'Inoue, les surfaces reglées de genre un et les surfaces de Kodaira n'admettent pas de métrique riemannienne anti-autoduale, on utilise un résultat de Goldman et Kamishima. On rappelle qu'un groupe est dit virtuellement résoluble s'il admet un sous-groupe résoluble d'indice fini.

**Théorème [Gol83], [Kam86]** : *Si $(M, g)$ est une 4-variété compacte localement conformément plate à groupe fondamental virtuellement résoluble alors à revêtement riemannien fini près $M$ est conforme à la sphère ronde $\mathbb{S}^4$, un tore plat $\mathbb{T}^4$ ou le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$.*

On rappelle que les seules surfaces complexes munies d'une métriques plates sont les tores et les surfaces hyperelliptiques.

**Surfaces d'Inoue**

Si une surface d'Inoue possédait une métrique anti-autoduale, elle serait localement conformément plate car sa signature est nulle [Ino74]. De plus le groupe fondamental d'une surface d'Inoue est résoluble et son revêtement universel est $\mathbb{R}^4$ [Ino74]. Les surfaces d'Inoue ne sont donc recouvertes ni par $\mathbb{S}^4$ ni par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$. De plus, les surfaces d'Inoue n'admettent pas de métrique plate. Par le théorème de Goldman et Kamishima, on en déduit qu'elles n'admettent pas de métrique anti-autoduale.

**Surfaces réglées de genre un**

Soit $S$ une surface réglée de genre un. On rappelle que $S$ admet une fibration lisse localement trivial de fibre $\mathbb{C}P^1$ au-dessus d'une courbe elliptique $S \xrightarrow{\mathbb{S}^2} \mathbb{T}^2$. Son groupe fondamental est $\mathbb{Z}^2$ et son deuxième groupe d'homologie est non nul. Une telle surface n'est pas recouvert par une sphère $\mathbb{S}^4$, ni par $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$ sinon son deuxième groupe d'homologie serait nulle. Elle n'est pas non plus recouverte par un tore $\mathbb{T}^4$ sinon le groupe fondamental de $S$ contiendrait le groupe $\mathbb{Z}^4$ comme sous-groupe d'indice fini. On en déduit qu'une surface réglée de genre un n'admet aucune métrique localement conformément plate, ni anti-autoduale ($\tau$=0).

**Surfaces de Kodaira**

Le revêtement universel d'une surface de Kodaira primaire est $\mathbb{C}^2$. Son groupe fondamental est isomorphe au groupe engendré par quatre éléments de la forment [Kod64] :

$$\begin{cases} g_i(z,w) = (z, w+\beta_i) & \text{i=1,2} \\ g_i(z,w) = (z+\alpha_i, w+\bar{\alpha}_i z+\beta_i) & \text{i=3,4} \end{cases}$$

et soumis à la relation : $g_3 g_4 = g_1^m g_4 g_3,\ m \in \mathbb{N}^\star$. Par conséquent le groupe fondamental d'une surface de Kodaira primaire est nilpotent et celui d'une surface de Kodaira secondaire virtuellement nilpotent.

Si une surface de Kodaira possédait une métrique anti-autoduale, elle serait localement conformément plate ($\tau = 0$). Comme le groupe fondamental d'une surface de Kodaira est virtuellement nilpotent et que son revêtement universel est $\mathbb{R}^4$, le théorème de Goldman et Kamishima nous assure qu'elle n'admet pas de métrique anti-autoduale.

**2 Réciproque du théorème 3**

Il est clair que les tores et les surfaces de Hopf primaires (i.e. difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$) admettent une métrique riemannienne localement conformément plates. On peut montrer que la métrique de Calabi-Yau sur une surface $K3$ est anti-autoduale (cf. [Bes87]). Pour les surfaces hyperelliptiques, on a donné une description explicite à difféomorphisme près de ces surfaces et il est facile de voir que la métrique plate sur $\mathbb{R}^4$ descend en une métrique plate sur ces surfaces. La seule chose qu'il faut montrer est donc que toute surface de Hopf secondaire admet une métrique riemannienne localement conformément plate ($\tau = 0$).

Une surface de Hopf secondaire est le quotient de $\mathbb{C}^{2\star}$ par un groupe $G$. À difféomorphisme près on peut toujours supposer que $G$ est un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^2)$ [Kat75]. Nous allons voir qu'on peut toujours se ramener au cas où $G$ est un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathbb{R}^{4\star}$ muni de la métrique :

$$V = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}.$$

Si bien que cette métrique descend en une métrique localement conformément plate sur $\mathbb{R}^{4\star}/G$. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^\star$ deux entiers, $\alpha$ une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité et $(\lambda, \alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ tels que $0 < |\alpha| \leq |\beta| < 1$. On rappelle ici quelques résultats de Kato [Kat75], [Kat89] :

(1) Si $G$ est décomposable et abélien alors :

(A) soit $G$ est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \beta z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (a z_1, a^n z_2) \text{ avec pgcd(m,n)=1}$$

(B) soit $G$ est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1 + \lambda z_2, \alpha z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (a z_1, a z_2).$$

C'est-à-dire que $G$ n'est pas un groupe d'isométries. Mais quitte à faire une petite déformation, on peut se ramener à l'un des deux cas suivant :

(A') $G$ est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \beta z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (a z_1, a^n z_2) \text{ avec } |\alpha| = |\beta|$$

(B') $G$ est engendré par les applications :

$$g(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2) \text{ et } h(z_1, z_2) = (a z_1, a z_2).$$

(2) Si $G$ est décomposable mais non abélien, le groupe $G$ est un groupe d'isométries de $(\mathbb{R}^{4\star}, V)$.

(3) Si $G$ est indécomposable, dans les cas (D2),...,(D5) (cf. partie 3.1) $G$ est un groupe d'isométries. Et dans le premier cas, à difféomorphisme près, on peut se ramener au cas où le paramètre $t$ de l'endomorphisme $u$ est égale à 1. Et alors la métrique $V$ de $\mathbb{R}^{4\star}$ passe au quotient.

**Conclusion** : *Toutes les surfaces de Hopf secondaires possèdent une métrique riemannienne localement conformément plate. Ce n'est pas le cas pour les métriques hermitiennes.*

## 3 Démonstration de la proposition 9

Soit $M$ une surface spin de dimension de Kodaira un dont la caractéristique d'Euler est nulle. C'est une surface parallélisable, qui est revêtue par un fibré lisse localement trivial $S \longrightarrow \Sigma_{g>1}$ en courbes elliptiques et de base une surface de Riemann de genre $g > 1$ [FM94]. On suppose que $M$ admet une métrique $g$ anti-autoduale. Quitte à prendre une métrique conforme à $g$, on suppose de plus que $g$ est à courbure scalaire constante.

Comme $M$ est parallélisable la métrique $g$ est localement conformément plate et donc à courbure harmonique. On veut montrer que la métrique $g$ n'est pas d'Einstein. Si la métrique $g$ est anti-autoduale et d'Einstein alors :

$$0 = 3\tau + 2\chi = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \Big( \|W^+\|^2 + \frac{1}{24} s^2 - 2\|B\|^2 \Big) \mu_g = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \frac{1}{24} s^2 \, \mu_g.$$

C'est-à-dire que la courbure scalaire est nulle. La métrique $g$ est donc une métrique plate. Ce qui est impossible. La métrique $g$ n'est donc pas d'Einstein. De même la métrique $g$ ne peut pas être à courbure scalaire nulle sinon elle serait d'Einstein et donc plate. En utilisant le lemme de Boyer énoncé au paragraphe 7.2, on en déduit que la métrique ne peut pas être hermitienne.

**Lemme 1** : *Si $M$ admet une métrique anti-autoduale elle est à courbure scalaire négative.*

*Preuve.* On vient de voir que la métrique ne peut pas être à courbure scalaire nulle. Pour montrer que la courbure scalaire n'est pas non plus positive, on utilise le résultat suivant.

**Théorème [Bou81]** : *Soit $(M, g)$ une 4-variété orientée munie d'une métrique riemannienne anti-autoduale. Si la courbure scalaire de $g$ est positive, la forme d'intersection de $M$ est définie positive.*

Dans notre cas la signature de $M$ est nulle, pour que la forme d'intersection soit définie positive, il faut qu'elle soit nulle et que $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$. Le deuxième nombre de Betti $b_2$ de $M$ serait nul et comme $\chi = 2 - 2b_1 + b_2 = 0$, on aurait $b_1 = 1$. Mais si $M$ admet une métrique anti-autoduale à courbure scalaire positive, c'est le cas pour tout recouvrement fini de $M$. Or $M$ est revêtue par un fibré lisse localement trivial $S \longrightarrow \Sigma_{g>1}$. Pour une telle surface, on a vu dans la partie 6 que le groupe fondamental de la fibre était central dans celui de $S$, donc $b_1(S) \geq 2$. La surface $S$ ne peut donc pas posséder de métrique anti-autoduale à courbure scalaire positive. $\square$

**Lemme 2** : *Si $M$ admet une métrique anti-autoduale elle est irréductible.*

*Preuve.* Pour démontrer ce deuxième lemme, on commence par montrer la proposition suivante qui a été énoncé par Lafontaine sous une forme légèrement différente.

**Proposition [Laf82]** : *Soit $(M, g)$ une 4-variété dont la métrique est localement conformément plate. Si la métrique $g$ est réductible alors le revêtement universel riemannien de $(M, g)$ est l'une des variétés : $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$, $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ munies de leur métrique usuelle.*

Cette proposition dit exactement que pour que la métrique d'un produit riemannien soit localement conformément plate, il faut être dans un des cas de la proposition. On donne ici une démonstration différente de celle de Lafontaine. Le but étant de réutiliser cette preuve pour énoncer par la suite une nouvelle proposition.

*Preuve de la proposition.* Si la métrique $g$ de $M$ est réductible, par le théorème de De Rham [KN96], le revêtement universel riemannien $(\tilde{M}, \tilde{g})$ de $(M, g)$ se décompose en un produit $(N \times T, g_N \times g_T)$. On suppose dans un premier temps que les variétés $(N, g_N)$ et $(T, g_T)$ sont de dimension deux. Soit $(e_1, e_2)$ et $(e_3, e_4)$ des bases orthonormées locales de $(N, g_N)$ et $(T, g_T)$. On note $K_N$ et $K_T$ les courbures sectionnelles des métriques $g_N$ et $g_T$ (non nécessairement constantes). Dans la base $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$ de $\bigwedge^2$ définie par :

$$\begin{array}{ll} X_1 = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 & \qquad Y_1 = e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4 \\ X_2 = e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 & \qquad Y_2 = e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 \\ X_3 = e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 & \qquad Y_3 = e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3 \end{array}$$

la matrice de l'opérateur de courbure $R$ de $(\tilde{M}, \tilde{g})$ s'écrit :

$$R = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} K_N + K_T & 0 & 0 & K_N - K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline K_N - K_T & 0 & 0 & K_N + K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc si la métrique $\tilde{g}$ est localement conformément plate alors les courbures sectionnelles de $(N, g_N)$ et $(T, g_T)$ sont constantes et opposées. Le revêtement riemannien de $(M, g)$ est alors $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$.

On suppose maintenant que $(\tilde{M}, \tilde{g})$ est le produit d'une variété de dimension trois $(N, g_N)$ et d'une variété de dimension un $(T, g_T)$. On considère $(e_1, e_2, e_3)$ et $e_4$ des bases orthonormées locales de $(N, g_N)$ et $(T, g_T)$. On note encore $R$ l'opérateur de courbure sur $(\tilde{M}, \tilde{g})$. Enfin pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3, 4\}$ on note : $K_{ij,kl} = R(e_i, e_j, e_k, e_l)$. La matrice de l'opérateur $R$ dans la base $(X_1, ..., Y_3)$ est :

$$R = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} K_{12,12} & K_{13,12} & K_{23,12} & K_{12,12} & K_{13,12} & -K_{23,12} \\ K_{12,13} & K_{13,13} & K_{23,13} & K_{12,13} & K_{13,13} & -K_{23,13} \\ K_{12,23} & K_{13,23} & K_{23,23} & K_{12,23} & K_{13,23} & -K_{23,23} \\ \hline K_{12,12} & K_{13,12} & K_{23,12} & K_{12,12} & K_{13,12} & -K_{23,12} \\ K_{12,13} & K_{13,13} & K_{23,13} & K_{12,13} & K_{13,13} & -K_{23,13} \\ -K_{12,23} & -K_{13,23} & -K_{23,23} & -K_{12,23} & -K_{13,23} & K_{23,23} \end{array}\right)$$

La métrique $\tilde{g}$ est localement conformément plate si et seulement si d'une part $K_{12,12} = K_{13,13} = K_{23,23}$ et d'autre part si les autres courbures $K_{ij,kl}$ sont nulles. Cela entraîne que $(N, g_N)$ est à courbure sectionnelle constante (th 1.97 [Bes87]). Comme $N$ est simplement connexe c'est $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^3$ ou $\mathbb{R}^3$. Le revêtement riemannien de $(M, g)$ est alors $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$, $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Ceci conclut la démonstration de la proposition. $\square$

On peut maintenant démontrer le lemme 2. Si $M$ admet une métrique anti-autoduale alors elle est à courbure scalaire négative. Or la seule variété de la proposition qui admet une métrique à courbure scalaire négative est $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$. De plus si $M$ admet une métrique localement conformément plate, c'est également le cas pour tout recouvrement fini. On peut donc supposer qu'il existe un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ central dans le groupe fondamental de $M$ (cf. partie 6). Pour démontrer le lemme, nous allons montrer que ceci n'est pas possible si le revêtement universel riemannien de $M$ est le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$.

Si $X$ est une variété riemannienne orientée on note $Isom(X)$ son groupe d'isométries et $Isom^+(X)$ le sous-groupe des isométries directes. Soit $h$ une isométrie de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$ et $\mathcal{P}$ un 2-plan de l'espace tangent $T\mathbb{R} \oplus T\mathbb{H}^3$. La courbure sectionnelle $K(\mathcal{P})$ de ce plan est nulle si et seulement si $T\mathbb{R} \subset \mathcal{P}$. Comme $h$ est une isométrie elle conserve la courbure sectionnelle et laisse donc invariant le sous-espace $T\mathbb{R}$ ainsi que son orthogonal $T\mathbb{H}^3$. On a donc : $Isom(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3) = Isom(\mathbb{R}) \times Isom(\mathbb{H}^3)$.

Supposons que le revêtement universel riemannien de $M$ soit $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$. On note $\pi_1(M)$ le groupe fondamental de $M$. On peut le voir comme un sous-groupe de $Isom^+(\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3)$ de sorte que :

$$M \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{H}^3 / \pi_1(M).$$

Comme $\pi_1(M)$ agit librement sur $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$, c'est un sous-groupe de $Isom^+(\mathbb{R}) \times Isom^+(\mathbb{H}^3)$. De plus un élément central dans $\pi_1(M)$ est central dans son adhérence de Zariski et donc central dans $Isom^+(\mathbb{R}) \times Isom^+(\mathbb{H}^3)$. Le centre de $\pi_1(M)$ ne peut donc pas être $\mathbb{Z}^2$. Ceci conclut la démonstration du lemme.

**Conclusion** : *Si $M$ admet une métrique anti-autoduale alors la métrique est à courbure scalaire négative, irréductible, localement conformément plate, non Einstein, non hermitienne.*

En particulier la métrique $g$ n'est pas Ricci parallèle. En effet l'opérateur de Ricci est symétrique, il est donc diagonalisable. Si la métrique est Ricci parallèle, les sous-espaces propres de l'opérateur de Ricci sont des sous-espaces invariants par le groupe d'holonomie. Comme la métrique est irréductible l'opérateur de Ricci ne peut donc avoir qu'un sous-espace propre. Ce qui est impossible car la métrique n'est pas Einstein.

## 4 Démonstration de la proposition 10

Soit $M$ une surface spin de dimension de Kodaira un et dont la caractéristique d'Euler est strictement positive. Dans ce cas le premier nombre de Betti de $M$ est pair. On suppose que $M$ admet une métrique $g$ anti-autoduale (à courbure scalaire constante). Dans ce cas la métrique n'est pas localement conformément plate car sa signature est non nulle : $\tau < 0$. Grâce au lemme de Boyer (cf. paragraphe 7.2) on sait que la métrique n'est pas hermitienne. De plus un résultat d'Hitchin [Hit74] nous assure que la métrique $g$ ne peut pas être d'Einstein et donc la courbure de $g$ n'est pas harmonique [Bou81].

**Lemme 3** : *Si $M$ admet une métrique anti-autoduale elle est à courbure scalaire négative.*

*Preuve.* Comme précédemment la courbure scalaire ne peut être nulle sinon la métrique est d'Einstein. La courbure scalaire ne peut pas non plus être positive par le théorème de Lichnerowicz [Bes87]. En effet pour qu'une 4-variété compacte connexe spin admette une métrique à courbure scalaire positive il faut que sa signature soit nulle. □

**Lemme 4** : *Si $M$ admet une métrique anti-autoduale elle est irréductible.*

*Preuve.* La démonstration de ce lemme découle directement de la proposition suivante.

**Proposition 11** : *Une métrique anti-autoduale non localement conformément plate sur une 4-variété est irréductible.*

*Preuve de la proposition.* Soit $(M, g)$ une 4-variété dont la métrique est anti-autoduale mais pas localement conformément plate. On suppose que la métrique $g$ est réductible. Dans ce cas le revêtement universel riemannien de $(M, g)$ est le produit $(N \times T, g_N \times g_T)$. La démonstration qu'on a donné de la proposition de Lafontaine montre que la métrique $g_N \times g_T$ est anti-autoduale si et seulement si elle est aussi localement conformément plate. Si la métrique $g$ n'est pas localement conformément plate, elle doit être irréductible. □

**Conclusion** : *Si $M$ admet une métrique anti-autoduale alors elle doit être irréductible, à courbure scalaire négative, non hermitienne, non Einstein. Là encore, la métrique n'est pas Ricci parallèle.*

# 8 Existence d'une infinité de structures complexes non standards

On dit qu'une 4-variété riemannienne orientée $(M, g)$ est hypercomplexe s'il existe trois structures complexes $I$, $J$ et $K$ compatibles avec l'orientation et la métrique et telles que $IJ = -JI = K$. La métrique $g$ est alors anti-autoduale [Sal91]. De plus ces trois structures complexes définissent un difféomorphisme $\tau(M, g) \simeq M \times \mathbb{S}^2$ tel que la projection sur le deuxième facteur soit une submersion holomorphe de $\tau(M, g)$ sur $\mathbb{C}P^1$ [Boy88]. *La distribution $TM$ (donnée par ce difféomorphisme) est donc invariante par la structure complexe canonique sur $\tau(M, g)$.*

**Théorème [Boy88]** : *Si $(M, g)$ est une 4-variété compacte hypercomplexe alors elle est conforme à :*

*a) un tore plat*

*b) une surface $K3$ munit de la métrique de Calabi-Yau*

*c) une surface de Hopf quaternionique munit d'une métrique de la forme $g_{(\alpha,\beta)}$ (cf. notations du §7.2).*

Les seules surfaces de Hopf primaires quaternioniques sont les surfaces de la forme $H_{(\alpha,\alpha)}$ ou $H_{(\alpha,\bar{\alpha})}$ [Kat80]. Dans le cadre des variétés hypercomplexes on peut généraliser la proposition 8.

**Proposition 12** : *Soit $(M, g)$ une variété hypercomplexe. Il existe une infinité de structures complexes sur les produits $M \times \mathbb{S}^2$ qui ne sont pas déformations les unes des autres.*

*La démonstration de cette proposition s'inspire fortement d'un résultat de Le Brun [LeB99] établi pour les surfaces $K3$.*

*Preuve.* Pour simplifier l'écriture on notera $\pi : Z \longrightarrow M$ l'espace twistoriel de $(M, g)$. Comme $(M, g)$ est hypercomplexe son espace twistoriel admet une submersion holomorphe sur $\mathbb{C}P^1$ :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{C}P^1 \\ M & \end{tikzcd}$$

Soit $d \in \mathbb{N}$ un entier et $f_d$ l'application holomorphe de degré $d$ définie par :

$$\begin{array}{rccc} f_d : & \mathbb{C}P^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}P^1 \\ & [z_1, z_2] & \longmapsto & [z_1^d, z_2^d]. \end{array}$$

On note $Z_d = f_d^\star Z$ le fibré tiré en arrière :

$$\begin{tikzcd} Z_d \arrow[r] \arrow[d, "p_d = f_d^\star p"'] & Z \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{C}P^1 \arrow[r, "f_d"] & \mathbb{C}P^1 \end{tikzcd}$$

Comme le fibré $p : Z \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ est $\mathcal{C}^\infty$-trivial, il en va de même pour $p_d : Z_d \longrightarrow \mathbb{C}P^1$. Si bien qu'on peut identifier la variété $Z_d$ avec la variété $M \times \mathbb{S}^2$ munie d'une

structure presque complexe intégrable, que l'on notera $J_d$. On va montrer que ces différentes structures complexes ne sont pas déformations les unes des autres. Pour cela on calcule les classes de Chern associées à ces différentes structures. Notons qu'avec ces notations $J_0$ est la structure complexe produit et $J_1$ est la structure complexe d'espace twistoriel sur $M \times \mathbb{S}^2$. On note $\pi_d$ la projection de $Z_d \simeq M \times \mathbb{S}^2$ sur $M$ :

$$\begin{tikzcd} Z_d \arrow[r, "p_d"] \arrow[d, "\pi_d"'] & \mathbb{C}P^1 \\ M & \end{tikzcd}$$

Le sous-espace tangent de $Z_d$ admet donc une décomposition en deux sous-fibrés réels :

$$TZ_d = \pi_d^\star TM \oplus p_d^\star T\mathbb{S}^2$$

Comme $(M, g)$ est hypercomplexe les distributions $\pi_1^\star TM$ et $p_1^\star T\mathbb{S}^2$ sont invariantes par $J_1$. Les distributions $\pi_d^\star TM$ et $p_d^\star T\mathbb{S}^2$ sont donc invariantes par $J_d$ et peuvent donc être vu comme des fibrés vectoriels complexes au-dessus de $Z_d$. On note $c(\pi_d^\star TM)$ et $c(p_d^\star T\mathbb{S}^2)$ leur classe de Chern totale. Soit $h$ le générateur du $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $H^\star(M, \mathbb{R})$ l'anneau de cohomologie de $M$. L'anneau de cohomologie de $M \times \mathbb{S}^2$ est un $H^\star(M, \mathbb{R})$-module engendré par $h$ et soumis à la relation $h^2 = 0$. Le sous-espace $p_d^\star T\mathbb{S}^2$ est le tiré en arrière par $p_d$ du fibré tangent de $\mathbb{C}P^1$ :

$$\begin{tikzcd} p_d^\star T\mathbb{S}^2 \arrow[r] \arrow[d] & T\mathbb{C}P^1 \arrow[d] \\ Z_d \arrow[r, "p_d"] & \mathbb{C}P^1 \end{tikzcd}$$

De sorte que $c(p_d^\star T\mathbb{S}^2) = 1 + 2h$.

Lorsque la variété $(M, g)$ est spin, on peut définir globalement les fibrés des spineurs autoduals $V^+$ et anti-autoduals $V^-$. Le fibré twistoriel de $(M, g)$ s'identifie alors au fibré projectif : $\mathbb{P}(V^+)$ [AHS78]. On note $\mathcal{O}(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ le fibré en droite dont la première classe de Chern est égale à 1. La fibre $\pi^{-1}(m)$ au-dessus d'un point $m \in M$ est une droite projective dont le fibré normal est holomorphiquement équivalent à $\mathcal{O}(1) \otimes (V^-)_m$ [AHS78]. On a donc une identification entre $\pi_1^\star TM$ et $\mathcal{O}(1) \otimes V^-$. Comme $V^- \longrightarrow M$ est un SU(2)-fibré on a $c_1(V^-) = 0$ de sorte que :

$$\begin{aligned} c(\pi_1^\star TM) &= c\big(\mathcal{O}(1) \otimes V^-\big) \\ &= (1+h)^2 c_0(V^-) + (1+h)c_1(V^-) + c_2(V^-) \\ &= 1 + 2h + \chi \end{aligned}$$

L'application $f$ étant de degré $d$, le fibré $\pi_d^\star TM$ s'identifie donc à $\mathcal{O}(d) \otimes V^-$ et alors :

$$c(\pi_d^\star TM) = 1 + 2dh + \chi.$$

Par conséquent on a :

$$\begin{aligned} c(Z_d) &= c(\pi_d^\star TM \oplus p_d^\star T\mathbb{S}^2) \\ &= (1 + 2dh + \chi)(1 + 2h) \\ &= 1 + 2(d+1)h + \chi + 2h\chi. \end{aligned}$$

Pour chaque entier $d$ on a défini une structure complexe sur le produit $M \times \mathbb{S}^2$ dont la première classe de Chern est égale à $2(d+1)h$. Aucune de ces structures complexes ne sont déformations les unes des autres. $\square$

Dans le cas où $M$ est un tore plat ou une surface $K3$ muni de la métrique de Calabi-Yau, la structure complexe produit sur $M \times \mathbb{C}P^1$ est kählerienne. En reprenant la démonstration d'Hitchin [Hit81] il n'est pas très difficile de voir qu'en dehors de ces deux cas, les 3-variétés complexes que nous venons d'introduire ne sont jamais biméromorphes à une variété kählerienne.

**Proposition 13** : *Soit $(M, g)$ une 4-variété hypercomplexe. Quelque soit l'entier $d$ non nul la variété complexe $(M \times \mathbb{S}^2, J_d)$ n'est pas biméromorphe à une variété kählerienne.*

*Preuve.* Une variété biméromorphe à une variété kählerienne admet une décomposition de Hodge (th.12.9 [Dem97]). On parle de variétés dans la classe $(\mathcal{C})$ de Fujiki. Si $M$ est une surface de Hopf, le premier nombre de Betti de la variété $M \times \mathbb{S}^2$ est 1 : aucune des structures complexes $J_d$ ne peut être biméromorphe à une structure kählerienne. On se limite donc à l'étude du cas où $M$ est un tore ou une surface $K3$. Commençons par montrer le lemme suivant :

**Lemme** : *Soit $p$ et $d$ deux entiers différents de zéro. Il n'existe pas de $p$-forme holomorphe sur $Z_d$ non nulle.*

*Preuve.* Soit $\bigwedge^p T^\star Z_d$ le fibré des $p$-formes holomorphes sur $Z_d$. Pour alléger les notations, on pose $N_d = \pi_d^\star TM$ et $T_d = p_d^\star T\mathbb{S}^2$. On se fixe une fibre $\pi^{-1}(m)$ et on restreint les fibrés $\bigwedge^p T^\star Z_d$, $N_d$ et $T_d$ à cette fibre. La décomposition $TZ_d = N_d \oplus T_d$ induit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^p N_d^\star \longrightarrow \bigwedge^p T^\star Z_d \longrightarrow T_d^\star \otimes \bigwedge^{p-1} N_d^\star \longrightarrow 0.$$

Or au-dessus de cette fibre $T_d$ et $N_d$ sont précisément le fibré tangent et le fibré normal de $\pi^{-1}(m)$ dans $Z_d$. On a donc d'une part $T_d^\star = \mathcal{O}(-2)$ et d'autre part $N_d = \mathcal{O}(d) \oplus \mathcal{O}(d)$. Pour $p > 0$ les fibrés $\bigwedge^p N_d^\star$ et $T_d^\star \otimes \bigwedge^{p-1} N_d^\star$ sont des fibrés négatifs car :

$$\bigwedge^p N_d^\star = \begin{cases} \mathcal{O}(-d) \oplus \mathcal{O}(-d) & \text{si p=1} \\ \mathcal{O}(-2d) & \text{si p=2} \\ 0 & \text{si p} \geq 3 \end{cases}$$

Ils ne possèdent donc pas de sections holomorphes non nulles. Une section holomorphe globale de $\bigwedge^p T^\star Z_d \longrightarrow Z_d$ s'annule donc sur la fibre $\pi^{-1}(m)$ pour tout choix de $m \in M$. Elle est donc identiquement nulle. $\square$

Pour finir la preuve de la proposition 13 on note $\Omega^p$ le faisceau des germes de $p$-formes holomorphes sur $Z_d$ et $h^{p,q} = dim\, H^q(Z_d, \Omega^p)$. Si $Z_d$ est dans la classe $(\mathcal{C})$ de Fijiki, la théorie de Hodge nous donne $h^{p,q} = h^{q,p}$. Si $d$ est non nul alors le lemme ci-dessus nous assure que le genre arithmétique définit par $1 - h^{0,1} + h^{0,2} - h^{0,3}$ est égale à 1. Et d'après le théorème de Riemann-Roch il est aussi égale à $\frac{c_1 c_2}{24}$. Si la variété $Z_d$ est biméromorphe à une variété kählerienne on a donc :

$$\frac{c_1 c_2}{24} = \frac{2(d+1)\chi}{24} = 1.$$

Cette relation n'est pas compatible avec le fait que $M$ soit une surface $K3$ ($\chi = 24$) ou un tore ($\chi = 0$) : si $d$ est un entier non nul $Z_d$ n'est jamais biméromorphe à une variété kählerienne. $\square$

**Remarque** : Soit $\Sigma_g$ une surface de Riemann de genre $g \geq 1$ et $M$ une 4-variété

hypercomplexe. En considérant des applications holomorphes $f : \Sigma_g \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ on peut de la même manière construire une infinité de structures complexes sur $M \times \Sigma_g$ qui ne sont ni déformations les unes des autres ni biméromorphes à une structure Kähler.

**Remerciement** : Un grand merci à Massimiliano Pontecorvo et Paul Gauduchon pour les dicussions que j'ai pu avoir avec eux. Un grand merci également à Laurent Meerssemann pour son suivi pendant ma thèse.

# Références

[AHS78] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, and I. M. Singer. Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 362(1711) :425–461, 1978.

[Bel00] F. A. Belgun. On the metric structure of non-Kähler complex surfaces. *Math. Ann.*, 317(1) :1–40, 2000.

[Bes87] A. L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[Bla56] A. Blanchard. Sur les variétés analytiques complexes. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3)*, 73 :157–202, 1956.

[Bog82] F. A. Bogomolov. Surfaces of class $\mathrm{VII}_0$ and affine geometry. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(4) :710–761, 896, 1982.

[Bou81] J.-P. Bourguignon. Les variétés de dimension 4 à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein. *Invent. Math.*, 63(2) :263–286, 1981.

[Boy86] C. P. Boyer. Conformal duality and compact complex surfaces. *Math. Ann.*, 274(3) :517–526, 1986.

[Boy88] C. P. Boyer. A note on hyper-Hermitian four-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102(1) :157–164, 1988.

[Bro78] N. Brotherton. Some parallelizable four-manifolds not admitting a complex structure. *Bull. London Math. Soc.*, 10(3) :303–304, 1978.

[Cam91] F. Campana. On twistor spaces of the class $\mathcal{C}$. *J. Differential Geom.*, 33(2) :541–549, 1991.

[dBN98] P. de Bartolomeis and A. Nannicini. Introduction to differential geometry of twistor spaces. In *Geometric theory of singular phenomena in partial differential equations (Cortona, 1995)*, Sympos. Math., XXXVIII, pages 91–160. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[Dem97] J. P. Demailly. *Complex analytic and differential geometry.* http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.ps.gz, 1997.

[Der80] A. Derdziński. Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and nonparallel Ricci tensor. *Math. Z.*, 172(3) :273–280, 1980.

[DOT03] G. Dloussky, K. Oeljeklaus, and M. Toma. Class $\mathrm{VII}_0$ surfaces with $b_2$ curves. *Tohoku Math. J. (2)*, 55(2) :283–309, 2003.

[FM94] R. Friedman and J. W. Morgan. *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, volume 27 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[Gol83] W. M. Goldman. Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278(2) :573–583, 1983.

[Hit74] N. Hitchin. Compact four-dimensional Einstein manifolds. *J. Differential Geometry*, 9 :435–441, 1974.

[Hit81] N. Hitchin. Kählerian twistor spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 43(1) :133–150, 1981.

[Ino74] M. Inoue. On surfaces of Class $\mathrm{VII}_0$. *Invent. Math.*, 24 :269–310, 1974.

[Kam86] Y. Kamishima. Conformally flat manifolds whose development maps are not surjective. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 294(2) :607–623, 1986.

[Kat75] M. Kato. Topology of Hopf surfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 27 :222–238, 1975.

[Kat78] M. Kato. Compact complex manifolds containing "global" spherical shells. I. In *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, pages 45–84, Tokyo, 1978. Kinokuniya Book Store.

[Kat80] M. Kato. Compact differentiable 4-folds with quaternionic structures. *Math. Ann.*, 248(1) :79–96, 1980.

[Kat89] M. Kato. Erratum : "Compact differentiable 4-folds with quaternionic structures" [Math. Ann. **248** (1980), no. 1, 79–96 ; MR0569412 (81h :53037)]. *Math. Ann.*, 283(2) :352, 1989.

[Kli98] B. Klingler. Structures affines et projectives sur les surfaces complexes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(2) :441–477, 1998.

[KN96] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Kod64] K. Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces. I. *Amer. J. Math.*, 86 :751–798, 1964.

[Kod66] K. Kodaira. Complex structures on $S^1 \times S^3$. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55 :240–243, 1966.

[Laf82] J. Lafontaine. Remarques sur les variétés conformément plates. *Math. Ann.*, 259(3) :313–319, 1982.

[LeB99] C. LeBrun. Topology versus Chern numbers for complex 3-folds. *Pacific J. Math.*, 191(1) :123–131, 1999.

[LM89] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[MN00] T. Matumoto and N. Nakagawa. Explicit description of Hopf surfaces and their automorphism groups. *Osaka J. Math.*, 37(2) :417–424, 2000.

[Nak84] I. Nakamura. On surfaces of class $\mathrm{VII}_0$ with curves. *Invent. Math.*, 78(3) :393–443, 1984.

[Nak90] I. Nakamura. On surfaces of class $\mathrm{VII}_0$ with curves. II. *Tohoku Math. J. (2)*, 42(4) :475–516, 1990.

[Pon92] M. Pontecorvo. Uniformization of conformally flat Hermitian surfaces. *Differential Geom. Appl.*, 2(3) :295–305, 1992.

[PPX96] U. Persson, C. Peters, and G. Xiao. Geography of spin surfaces. *Topology*, 35(4) :845–862, 1996.

[Roh52] V. A. Rohlin. New results in the theory of four-dimensional manifolds. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 84 :221–224, 1952.

[Sal91] S. Salamon. Special structures on four-manifolds. *Riv. Mat. Univ. Parma (4)*, 17* :109–123 (1993), 1991. Conference on Differential Geometry and Topology (Italian) (Parma, 1991).

[Sch84] R. Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2) :479–495, 1984.

[Sma59] S. Smale. Diffeomorphisms of the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 :621–626, 1959.

[ST69] I. M. Singer and J. A. Thorpe. The curvature of 4-dimensional Einstein spaces. *Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira)*, pages 355–365, 1969.

[Tau92] C. H. Taubes. The existence of anti-self-dual conformal structures. *J. Differential Geom.*, 36(1) :163–253, 1992.

[Tel94] A. D. Teleman. Projectively flat surfaces and Bogomolov's theorem on class $\mathrm{VII}_0$ surfaces. *Internat. J. Math.*, 5(2) :253–264, 1994.

[Wal86] C. T. C. Wall. Geometric structures on compact complex analytic surfaces. *Topology*, 25(2) :119–153, 1986.

[Wu52] W.-T. Wu. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques.* Actualités Sci. Ind., no. 1183. Hermann & Cie, Paris, 1952. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 11, pp. 5–89, 155–156.

[Yau76] S. T. Yau. Parallelizable manifolds without complex structure. *Topology*, 15(1) :51–53, 1976.