HAL
open science

Appariement sans maître ni esclave

Stéphane Gérardot, David Ryckelynck, Gérard Coffignal

To cite this version:

Stéphane Gérardot, David Ryckelynck, Gérard Coffignal. Appariement sans maître ni esclave. 7e colloque national en calculs des structures, 2005, Giens, France. hal-00021116

HAL Id: hal-00021116

https://hal.science/hal-00021116v1

Submitted on 21 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Appariement sans maître ni esclave

S. Gérardot, — D. Ryckelynck, — G. Coffignal

Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés
UMR 8106-CNRS-ENSAM-ESEM
151, boulevard de l'Hopital
75 013 Paris

RÉSUMÉ. *Nous proposons une méthode d'appariement. Elle exploite une méthode de transfert de champ élaborée à partir de calculs d'intersection et de calcul de structure sans maillage. Nous nous concentrons sur le cas du contact unilatéral sans frottement, sous l'hypothèse de petites transformations. Un cas de contact de Hertz validera notre méthode. Puis, nous discuterons sur un exemple à la géométrie moins régulière.*

ABSTRACT. *We suggest a new appariement method. It is shown as a field transfert, build with intersection calculations and meshfree technique. We work on a frictionless contact, under small transformation hypothesis. An Hertzian case validate our resolution method. We furnish a regularless geometry exemple to discuss.*

MOTS-CLÉS : *pénalité, régularisation, transfert de champ, contact*

KEYWORDS: *penalty, smoothing, transfert, contact*

1. Introduction

Les problèmes de contact sont largement répandus dans l'industrie. Après formulation, la fonctionnelle associée est mathématiquement régularisée [DUV 80]. Parmi les régularisations existantes, on peut citer : les multiplicateurs de lagrange [HES 69], le lagrangien augmenté [FOR 82], ou la pénalité [CRI 97]. Nous nous plaçons dans le cadre de la discrétisation élément finis. La résolution, des problèmes discrétisés s'exécutent de différentes manières, pour le cas lagrangien augmenté : méthode des multiplicateurs encore appelée méthode d'Uzawa [CRI 97] , ou procédure des multiplicateurs. D'une façon générale, une opération d'appariement s'impose pour évaluer les jeux.

Nous proposons une méthode d'appariement. Elle exploite une méthode de transfert de champ élaborée à partir des méthodes numériques, de calculs d'intersection [MAR 03] d'une part et de calculs de structures sans maillage d'autre part [YVO 04]. Nous nous concentrons sur le cas du contact unilatéral sans frottement, sous l'hypo-

1re soumission à *giens2005*, le 30/1/2005.

thèse de petites transformations. Un cas de contact de Hertz validera notre méthode sans choisir une surface maître. Après, un exemple numérique à la géométrie moins régulière montrera la robustesse de notre approche.

2. Formulation du problème

Soient $i \ \epsilon \ \{1,2\}$ et $j \ \epsilon \ \{\{1,2\} \ / \ j \neq i\}$. Soit Ω^i (fig1) un des deux ouverts borné sur $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega^i$ régulière, constituée de trois parties disjointes Γ^i_u , Γ^i_f , Γ^i_c. Un corps élastique occupe avant déformation la région $\overline{\Omega}^i$. Il est encastré sur Γ^i_u, soumis à des forces données sur Γ^i_f, et éventuellement en contact unilatéral avec l'autre ouvert Ω^j le long de Γ^i_c. De plus le contact avec ce support est supposé sans frottement.

Soit une transformation $\varphi^i \ / \ \forall \ \mathbf{X}^i \ \epsilon \ \Omega^i \ \rightarrow \ \mathbf{x}^i \ = \ \mathbf{X}^i + \mathbf{u}^i$. φ^i fait passait d'une configuration de référence (X, Γ) (t=0), ou les vecteurs positions sont notés $\mathbf{X}^i$, à une configuration (x, γ), ou les vecteurs positions sont notés $\mathbf{x}^i$.

Bien que considérant des petites transformations, nous conservons la notion de configuration de référence, car elle permet de définir, sur elle, la géométrie courante comme un champ. Plus loin,nous utiliserons cette notion de champ.

On note la fonction d'appariement : $\phi_{i\rightarrow j} \ / \ \forall \ \mathbf{x}^i \ \epsilon \ \gamma^i_c \rightarrow \phi_{i\rightarrow j}(\mathbf{x}^i) = \overline{\mathbf{x}}^j \ \epsilon \ \gamma^j_c$ (1)

$$\text{Conditions de Signorini : } \begin{cases} \text{Avec } \sigma^i_N = \mathbf{n}^i.\boldsymbol{\sigma}^i.\mathbf{n}^i, \text{ alors } \sigma^i_N \leqq 0, \text{sur } \gamma^i_c. \\ (\mathbf{x}^i - \overline{\mathbf{x}}^j).\mathbf{n}^i \leqq 0 \Longrightarrow g^i_N \leqq 0 \\ \text{Avec } g^i_N.\sigma^i_N = 0, \ \text{ sur } \gamma^i_c. \end{cases} \tag{2}$$

La méthode de pénalité conduit à la formulation suivante : Trouver $\mathbf{u}^i$ tel que

$$\begin{array}{c} \sum_i \int_{\Omega^i_{t=t}} Tr(\nabla^0(\mathbf{u}^{*i}).\boldsymbol{\sigma}^{Ti}) d\Omega^i_{t=t} = \\ \sum_i \int_{\gamma^i_{f\ t=t}} \mathbf{u}^{*i}.\mathbf{t}^i_d d\Gamma_{t=t} + \int_{\gamma^i_{c\ t=t}} (\delta g^{*i}_N.\mathbf{n}^i).k.(g^i_N.\mathbf{n}^i) d\Gamma_{t=t} \end{array} \tag{3}$$

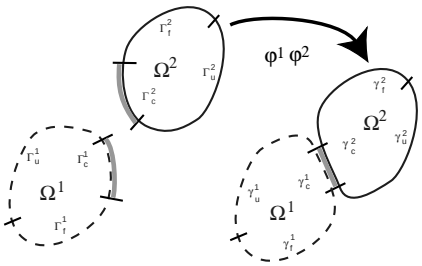

Figure 1. *Configuration.*

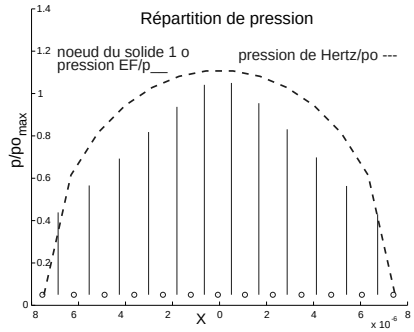

Figure 2. *contact de hertz. répartition de pression à l'interface.*

3. L'appariement

3.1. *Les approches maître/esclave*

D'après [SIM 92] la fonction d'appariement $\phi_{i\to j}$ nécessaire à la définition du jeu g_N^i n'est qu'une particularisation du concept de "projection sur le point le plus proche". Le maître est le lieu de la projection, il fournit une normale. L'esclave est le lieu dont on cherche un projeté dans l'espace du maître.

En pratique [HAB 98], pour chaque noeud (ou point d'intégration) esclave (x^i), on cherche parmis les éléments maîtres le lieu (projection sur l'élément ou les noeuds) (x^j) qui en est le plus proche ($\overline{x}^j$), en terme d'un produit scalaire $\left(\mathbf{x}^i - \overline{\mathbf{x}}^j\right).\overline{\mathbf{n}}^j$. Evidemment, ces choix devraient être arbitraires, notamment lors d'auto-contact. Il en découle :

$$\text{d'après [WRI 96] : } g_N^i = \begin{cases} \left\|\mathbf{x}^i - \overline{\mathbf{x}}^j\right\| \text{ si } \left(\mathbf{x}^i - \overline{\mathbf{x}}^j\right).\overline{\mathbf{n}}^j < 0 \text{ sur } \partial\Omega^i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{4}$$

On finit donc par avoir $\phi_{i\to j}$, de point particulier à point particulier. De là, γ_c^i et γ_c^j sont les zones ou g_N^i est positif.

3.2. *Appariement par transfert de champs de pression statiquement admissibles*

Nous considérons que la position des points de γ_c^i vers γ_c^j est un champ $\mathbf{x}$ définie sur la configuration de référence. Donc, l'appariement (1) est un transfert de champs de vecteurs position de γ_c^i vers γ_c^j et inversement.

L'opérateur de transfert de champs est fonction de la configuration actuelle. Il établit une relation linéaire entre un champ scalaire $\mathbf{v}$ et son image $\overline{\mathbf{v}}$. Dans le cas de problème discrétisé, la restriction de $\mathbf{v}$ à Γ_c^i se représente par un vecteur de valeurs nodales $\{v\}$. L'opérateur de transfert est une matrice $[P_{i\to j}]$. Ainsi, on reformule : (1) qui devient $\left\{\overline{\mathbf{x}}(\mathbf{X}^j)\right\} = [P_{i\to j}] \,.\, \left\{\mathbf{x}(\mathbf{X}^i)\right\}$

De là, nous proposons une façon de choisir $[P_{i\to j}]$. Notre proposition se distingue d'autres méthodes de transfert de champ, comme la méthode MORTAR [ACH 01], en associant à l'interface de contact une épaisseur caractéristique du défaut de convergence, ou du défaut de régularité des surfaces.

Des méthodes d'intersection de volume développées au LMSP [MAR 03] permettent de définir γ_c^i et γ_c^j sans d'abord devoir apparier. Les volumes élémentaires des zones de recouvrement γ_c^i et γ_c^j ainsi obtenues sont appelées lentilles de contact.

D'abord, nous définissons les pressions de contact rigoureusement statiquement admissibles (SA) sur les bord des lentilles : $p^i - p^j(\phi_{i\to j}(\mathbf{x}^i)) = 0, \forall\ \mathbf{x}^i\ \epsilon\ \Gamma_c^i$

Ensuite, pour définir l'opérateur de transfert, nous considérons un principe de régularité des champs de pression définis dans la lentille de contact et un critère de sélection. L'idée de notre démarche est que la pression de contact est la restriction aux bord des lentilles de la pression dans les lentilles. En effet soient :

$$\begin{cases} \text{le domaine de la lentille} \Omega^l \text{ , tel que : } \Omega^l = \bigcap_i \Omega^i \text{ , et que : } \partial\Omega^l = \bigcup_i \Gamma_c^i \\ \quad \text{et le problème : Trouver les } \mathbf{p} \text{ minimisant } \lambda(\mathbf{p}) = \frac{\int_{\Omega^l} \overrightarrow{Grad}(\mathbf{p})^2 d\Omega}{\int_{\Omega^l} \mathbf{p}^2 d\Omega} \end{cases} \tag{5}$$

On note λ_k la valeur propre associée à la forme propre p_k telle que : $\lambda_k = \lambda(p_k)$. On remarque que la forme propre de la valeur propre $\lambda_k = 0$ est un champ de pression (SA).

Enfin, notons l'épaisseur de la lentille : $e = (\mathbf{x}^i - \overline{\mathbf{x}}^j).\mathbf{n}^i \ \forall \ \mathbf{x} \ \epsilon \ \Gamma_c^i$. On peut montrer, à l'aide d'un développement limité (5), pour des épaisseurs infinitésimales, que les petites valeurs de λ_k permettent d'obtenir des champs de pression quasi-(SA) . En pratique, des formes propres sont sélectionnées sur le critère $\lambda(\mathbf{p}) < \epsilon/h^2$, avec h^2 longueur caractéristique de la discrétisation des éléments du maillage. Ces formes propres forment une base d'un sous-espace de couples champs sur Γ_c^i et Γ_c^j. Cette base définit l'ensemble des champs transférés. Ceux non présents dans la base ne sont pas transférés.

Les lentilles de contact pouvant être très aplaties, on préfère utiliser une méthode sans maillage pour résoudre le problème (5). L'extension de la méthode NEM au domaine non-convexe développée au LMSP (la C-NEM) [YVO 04], convient très bien pour la construction d'une discrétisation sur un nuage de noeuds, même si leur répartition dans l'espace est très fortement anisotrope.

La discrétisation des champs de pression est imposée par le maillage de Ω^i et Ω^j. La résolution de (5) et la sélection de valeurs propres nous fournit une base réduite :

$$[B_r] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & \{p^1(\lambda_k\} & \cdots \\ \cdots & \{p^2(\lambda_k\} & \cdots \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_r^1 \\ B_r^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ , } k \text{ tel que : } \lambda_k < \epsilon/h^2 \tag{6}$$

Dès lors, pour tout type de champ, nous choisissons comme opérateur de transfert :

$$\begin{gathered} [P_{i\to j}] \text{ , tel que : } \left[B_r^j\right] = [P_{i\to j}] \cdot \left[B_r^i\right] \\ \text{avec : } [P_{i\to j}] = \left[B_r^j\right] \cdot \left(\left[B_r^i\right]^T \cdot \left[B_r^i\right]^{-1}\right) \cdot \left[B_r^i\right]^T \end{gathered} \tag{7}$$

Enfin, nous en déduisons une nouvelle définition de la pénétration :

$$g_N^i = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{x}}^i - \overline{\mathbf{x}}^j).\tilde{\mathbf{n}}^i \text{sur } \gamma_c^i \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{avec : } \tilde{\mathbf{x}}^i = \phi_{j\to i}(\phi_{i\to j}(\mathbf{x}^i)) \tag{8}$$

En cohérence avec la pénalité, le transfert n'est défini que dans les zones d'intersection. Du fait de la sélection de certaines formes propres, soit une régularisation, on parle pour $\tilde{\mathbf{x}}^i$ de sous-espace des champs visibles. Logiquement si ϵ est grand, la dimension du sous-espace est grande, mais le transfert se fait mal : l'image sera déformée. Si ϵ est petit, seuls les champs quasi-statiquement admissibles sont retenus. Enfin, à ϵ fixé, il y aura d'autant plus de modes que l'épaisseur e est faible. C'est vrai à ceci près que la géométrie est régulière, sinon l'épaisseur ne peut devenir négligeable. Cela limite le transfert de champ à sa partie la plus régulière (la plus physique). Au contraire de l'approche maître/esclave, on ne privilégie aucune partie du bord du système étudié.

4. Applications numériques

Pour valider la méthode adoptée pour résoudre le problème (3), nous testons un contact cylindre sur plan. On compare (fig2) le champ de pression numérique obtenu avec celui issu de la théorie de Hertz (complétée par Timoshenko & Goodier d'après [JOH 82]). On constate une bonne corrélation.

Pour discuter de la régularisation, un contact (fig3) entre une sphère et un massif (fin, grossier, voir agrandissements) de géométrie adaptée a été traité. Les solides sont discrétisés de façon incompatibles. Les maillages éléments-finis ne sont pas représentés sur chaque figure.

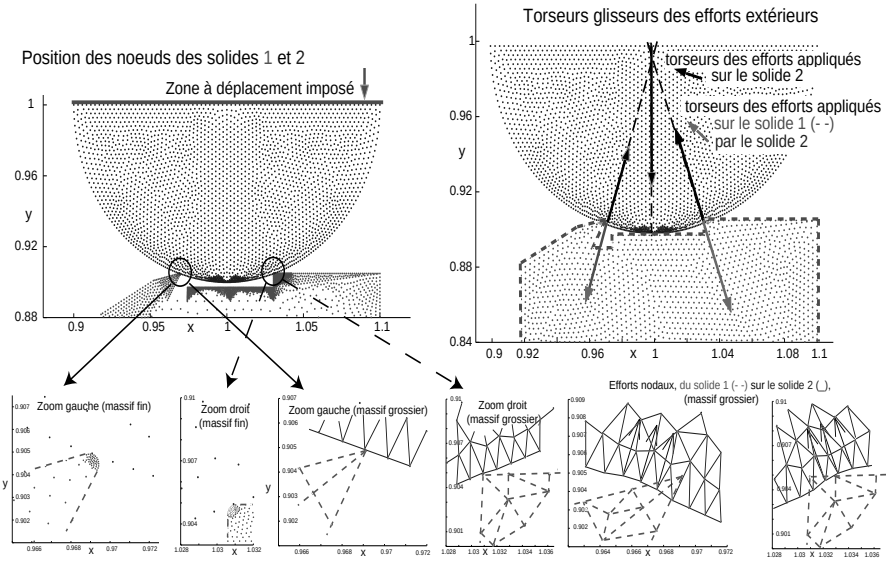

Figure 3. *Contact sphère/massif irrégulier.*

La condition de frottement nul impose que les résultantes des actions des appuis du massif sur la sphère (et vis et versa) soient normales à la sphère. Chaque glisseur est post-traité à partir des efforts nodaux. Ensuite le respect du principe fondamental de la statique impose que la direction de tous les glisseurs appliqués sur la sphère se coupent au centre de celle-ci. On constate, pour les modèles grossier ou fin, le respect de ces conditions.

Donc, sans choisir à priori une surface maître, nous arrivons, grâce à notre régularisation à trouver les directions d'applications des efforts adéquates. Dans une approche maître/esclave, si le maître avait été le massif grossier, les directions n'auraient pu être les bonnes.

De plus, les maillages grossier et fin donnent des résultats similaires. La régularisation géométrique est compatible avec une bonne convergence des prévisions lorsque le maillage est raffiné. L'appariement se fait globalement à l'échelle de chaque lentille,

et non plus localement à l'échelle des éléments. La nécessité de reconstruire une géométrie plus régulière "lissage", pour en extraire une normale plus physique [LIU 03] et/ou plus globale est alors moins forte.

5. Conclusions

Cet appariement, montré comme un transfert de champ, libère du choix d'un maître et d'un esclave. Donc, on ne définit plus de surface qui fournisse préférentiellement une normale. L'opérateur de transfert, construit à partir la base réduite, assure une régularisation automatique de la géométrie, en fonction de la qualité des prévisions de l'algorithme de résolution. Les maillages incompatibles ne posent pas de problème. Enfin, la méthode est applicable au cas des transformations finies.

6. Bibliographie

[ACH 01] ACHDOUM Y., MADAY Y., « the mortar element method with overlapping subdomains », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 40(2), 2001, p. 601–628.

[CRI 97] CRISFIELD M., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, vol. 2, Wyley, 1997.

[DUV 80] DUVAUT G., « Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb », *C.R. Acad. Sc. Paris*, vol. 290 de *Série A*, 1980, p. 263-265.

[FOR 82] FORTIN M., GLOWINSKI R., *Les méthodes de Lagrangien augmenté*, Dunod, 1982.

[HAB 98] HABRAKEN A., CESCOTTO S., « Contact between deformable solids the fully coupled approach », *Mathl. Comput. Modelling.*, vol. 28, n° 4–8, 1998, p. 153–169.

[HES 69] HESTENES R., « Multiplier and gradient methods », *Jr. of Optimiz. Theory and Appl.*, vol. 4, 1969, p. 303–320.

[JOH 82] JOHNSON K., *Contact mechanics*, University of Cambridge, 1982.

[LIU 03] LIU W., MESCHKE G., MANG H., « Algorithmic stabilization of FE analyses of 2D frictional contact problems with large slip », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 192, 2003, p. 2003–2124.

[MAR 03] MARTY A., « Simulation numérique de l'usinage par outil coupant à l'échelle macroscopique : contribution à la définition géométrique de la surface usinée », PhD thesis, ENSAM, 2003.

[SIM 92] SIMO J., LAURSEN T., « An Augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction », *Comput. and Structures*, vol. 42, 1992, p. 97–116.

[WRI 96] WRIGGERS P., « Finite element methods for contact problem with friction », *Tribology International*, vol. 29, 1996, p. 651–658.

[YVO 04] YVONNET J., RYCKELINCK D., LORONG P., CHINESTA F., « A new extension of the natural element method for non convex and discontinuous domains : the constrained natural element method (C-NEM) », *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, vol. 60, 2004, p. 1451–1474.