



**HAL**  
open science

# Nouvelles avancées dans la méthode des éléments naturels pour la simulation des procédés de mise en forme

Julien Yvonnet, David Ryckelynck, Philippe Lorong, Francisco Chinesta

## ► To cite this version:

Julien Yvonnet, David Ryckelynck, Philippe Lorong, Francisco Chinesta. Nouvelles avancées dans la méthode des éléments naturels pour la simulation des procédés de mise en forme. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-00020958

**HAL Id: hal-00020958**

**<https://hal.science/hal-00020958v1>**

Submitted on 8 May 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Nouvelles avancées dans la méthode des éléments naturels pour la simulation des procédés de mise en forme

Julien Yvonnet, David Ryckelynck, Philippe Lorong & Francisco Chinesta

Laboratoire de Mécanique des Systèmes et des Procédés) – UMR CNRS-ENSAM-ESEM  
École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 151 boulevard de l'Hôpital, F-75013 Paris  
julien.yvonnet@paris.ensam.fr

## Résumé :

Nous proposons dans cette étude de nouvelles avancées dans la méthode sans maillage dite des "éléments naturels" (Natural Element Method ou NEM) pour la simulation numérique des procédés de mise en forme des métaux. La méthode des éléments naturels permet de construire la solution approximée uniquement sur la base des nœuds du domaine sans l'aide d'aucun maillage au sens des éléments finis, ce qui offre des avantages pour l'étude des grandes transformations. De plus, l'interpolation, basée sur le diagramme de Voronoï des nœuds permet l'imposition directe des conditions aux limites de type Dirichlet, ce qui est un problème important dans la majorité des méthodes sans maillage les plus utilisées. Dans cette étude, nous introduisons de nouveaux développements dans la NEM pour les applications pratiques de simulation de mise en forme des métaux. Une extension de la NEM, la méthode C-NEM, permet d'éviter un certain nombre de problèmes inhérents à la NEM pour les géométries non-convexes. Une procédure de raffinement est proposée pour prendre en compte les déformations localisées dans des ensembles de nœuds quelconques. Enfin, nous définissons une nouvelle interpolation basée sur les voisins naturels allégeant les calculs dans le cas 3D. Les différentes techniques sont illustrées par des exemples de simulation de mise en forme des métaux.

## Abstract :

In this paper, recent advances are proposed in the context of the meshfree natural element method for metal forming simulations. In the natural element method, the solution is entirely constructed on the basis of the nodes, without any finite element mesh, which offers advantages for large strains simulations. Furthermore, the interpolation based on the Voronoï diagram allows direct imposition of essential boundary conditions, which is an important issue in most meshless methods. In this work, we introduce new developments in the NEM for practical metal forming simulations. An extension of the NEM, the C-NEM, is introduced to handle complex (non-convex) geometries. A refinement procedure is proposed to model strain localization in arbitrary scattered nodes. Finally, we define a new natural-neighbor-based interpolant which simplifies the shape functions computations for the 3D case. The different techniques are illustrated through metal forming simulations examples.

## Mots-clefs :

**Méthode des éléments naturels ; grandes transformations ; méthodes sans maillage ; raffinement ; 3D.**

## 1 Introduction

La simulation numérique de la mise en forme des métaux est souvent caractérisée par de grandes transformations et/ou de la localisation. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, le maillage est alors rapidement distordu et doit être périodiquement reconstruit afin de maintenir un niveau de qualité acceptable dans le domaine ainsi que pour conformer la taille des éléments avec les gradients locaux. Les maillages triangulaires/tétraédriques peuvent être facilement générés en utilisant le critère de Delaunay. Cependant, les éléments quadrilatéraux/hexaédriques sont favorisés pour leur meilleure qualité, mais de grandes difficultés

apparaissent alors pour construire le maillage, spécialement dans le cas 3D. La méthode des éléments naturels [5] est une méthode alternative qui permet d'obtenir une qualité comparable à celle des éléments finis quadrilatéraux/hexaédriques, mais n'utilise que la triangulation de Delaunay. Bien que cette triangulation soit utilisée pour la connectivité, les fonctions de forme sont construites uniquement sur la base des nœuds, en utilisant le dual, le diagramme de Voronoï. Pour cette raison la NEM appartient à la famille des méthodes dites "sans maillage" [3]. Dans la NEM, l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet est directe, car les fonctions de forme sont strictement interpolantes sur les bords des domaines de géométries convexes. Dans cette étude, nous introduisons de nouvelles techniques pour la simulation de la mise en forme des métaux grâce à la NEM. Une extension de la NEM, la C-NEM, est introduite pour généraliser l'approche aux géométries quelconques (convexes ou non). Une procédure de raffinement est proposée pour modéliser la localisation des déformations dans des nuages de nœuds arbitraires. Enfin, nous introduisons de nouvelles fonctions de forme basées sur les voisins naturels qui simplifie le calcul dans le cas 3D. Ces différentes techniques sont illustrées dans des exemples de simulation de mise en forme des métaux.

## 2 La méthode des éléments naturels contraints

La NEM [5] est une méthode numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles qui utilise les fonctions de forme basées sur les voisins naturels dans une procédure de type Galerkin. Ces fonctions de forme sont construites sur la base du diagramme de Voronoï de l'ensemble des nœuds. Plusieurs fonctions de forme basées sur les voisins naturels existent. Par la suite, nous donnons un exemple de construction de fonction de forme de Laplace [1]. Soit un ensemble de nœuds et son diagramme de Voronoï associé, les fonctions de forme calculées en un point arbitraire (typiquement un point d'intégration)  $x$  sont données par :

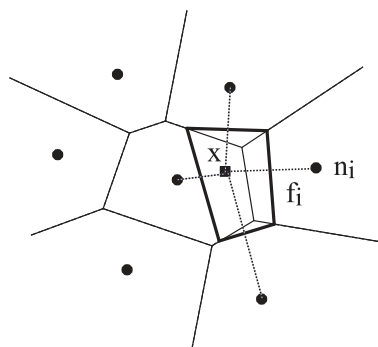


FIG. 1 – Construction des fonctions de forme de type éléments naturels.

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^n \alpha_j(\mathbf{x})}, \quad \alpha_i(\mathbf{x}) = \frac{f_i(\mathbf{x})}{d_i(\mathbf{x})} \quad (1)$$

Où  $f_i(\mathbf{x})$  est une mesure de Lebesgue (longueur en 2D, aire en 3D) de la facette de Voronoï entre  $x$  et le nœud  $n_i$ , et  $d_i(\mathbf{x})$  est la distance entre  $x$  et  $n_i$  (voir figure 1). Les fonctions de forme éléments naturels possèdent les propriétés d'interpolation ( $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ ), sont positives et reproduisent exactement les champs linéaires [4]. De plus, il a été démontré que ces fonctions de forme sont strictement linéaires sur les bords du domaine convexe. Les conditions aux

limites de type Dirichlet peuvent ainsi être imposées directement sur les bords convexes comme dans la méthode des éléments finis (FEM). Dans le cadre de la simulation des procédés, les géométries sont en général complexes et non convexes. Nous avons étendu les propriétés de la NEM pour les domaines non convexes dans [6] où un diagramme de Voronoi contraint (dual de la triangulation de Delaunay contrainte) a été introduit pour restreindre les influences mutuelles entre nœuds le long des bords non convexes (voir [6] pour plus de détails). Dans le contexte des C-NEM, le schéma d'interpolation suivant est adopté :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^V \phi_i^C(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (2)$$

où  $V$  est le nombre de voisins naturels (nœuds ayant une facette de Voronoi en commun) visibles depuis le point  $\mathbf{x}$  et  $\phi_i^C$  est la fonction de forme élément naturel construite sur la base du diagramme de Voronoi contraint. Dans la C-NEM, aucun paramètre n'est requis pour régler la taille du support (domaine d'influence) de chacun des nœuds, ce qui est attractif dans les procédures de raffinages, où la densité nodale peut fortement varier d'un endroit à l'autre du domaine.

### 3 Transfert des variables internes par l'utilisation d'une intégration nodale.

Un modèle élastoplastique est considéré, en supposant une décomposition multiplicative du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  en parties élastiques et plastiques :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (3)$$

L'expression du principe des travaux virtuels dans la configuration de référence est donné par :

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{P}^t : \nabla_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0^t} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma^t \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{V} \quad (4)$$

où  $\mathbf{P}$  représente le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff relié au tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  par  $\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$ . Plus de détails sur l'implémentation numérique peuvent être trouvés dans [7].

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, le transfert des variables internes entre deux opérations de remaillage pose des difficultés. Dans ce travail, nous utilisons une intégration nodale stabilisée proposée par Chen *et al.* [2] afin de définir toutes les variables internes aux nœuds, et ainsi d'éviter toute projection entre deux actualisations de la configuration de référence (actualisation du diagramme de Voronoi et des fonctions de forme).

Nous considérons un gradient de la déformation nodal au nœud  $n_i$  :

$$\tilde{\mathbf{F}}_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} (\nabla_{\mathbf{x}} u^h(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) d\Omega = \mathbf{1} + \tilde{\nabla}_{\mathbf{x}} u^h(\mathbf{x}_i) = \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{B}}_i \mathbf{u}_i \quad (5)$$

où  $\Omega_i$  est un domaine représentatif entourant le nœud (typiquement une cellule de Voronoi) et  $\tilde{\mathbf{B}}_i$  la matrice contenant les dérivées stabilisées des fonctions de forme (voir [7] pour plus de détails). Ce schéma définit une intégration numérique nodale, et permet de considérer toutes les variables internes aux nœuds, ce qui évite le transfert si le même nuage de nœuds est utilisé au cours de la simulation. Si de nouveaux nœuds sont insérés, une simple interpolation utilisant le schéma C-NEM de l'Eq. (2) est appliquée pour initialiser les nouvelles variables internes.

#### 4 Raffinage adaptatif

Dans ce paragraphe, nous proposons un indicateur d'erreur simple pour les stratégies de raffinement adaptatif en grandes transformations dans le contexte C-NEM.

Nous proposons un indicateur d'erreur simple utilisant le principe de Zienkiewicz-Zhu [8] ainsi que l'intégration nodale stabilisée. Soit  $\alpha(\mathbf{X}, t)$  une variable soit associée aux dérivées spatiales (par exemple  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ ), ou soit une variable interne (par exemple  $\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, t)$ ). Dans le contexte C-NEM, l'intégration nodale stabilisée proposée par Chen *et al.* [2] produit des champs associés aux dérivées spatiales, discontinus au passage des cellules de Voronoi. Ceci est une conséquence du schéma de stabilisation utilisé dans (5). De plus, les différentes variables internes peuvent être considérées aux nœuds, car ceux-ci sont confondus avec les points d'intégration. Des champs constants  $\alpha^h(\mathbf{X}_i, t)$  associés aux variables  $\alpha(\mathbf{X}, t)$  peuvent ainsi être considérés dans chaque cellule  $\Omega_i$ . Une solution simple pour le champ de référence reconstruit  $\alpha^*(\mathbf{X}, t)$  possédant une qualité supérieure est d'interpoler les valeurs nodales de  $\alpha^h(\mathbf{X}_i, t)$  grâce au schéma d'interpolation C-NEM :

$$\alpha(\mathbf{X}, t)^* = \sum_{i=1}^V \phi_i^C(\mathbf{X}) \alpha^h(\mathbf{X}_i, t) \quad (6)$$

Ainsi, l'erreur basée sur la déformation plastique cumulée pour une cellule  $\Omega_i$  peut être définie dans la configuration de référence par :

$$|e|_{\Omega_i}^2 = \int_{\Omega_{i0}} ([\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, t)]^* - [\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}_i, t)]^h)^2 J_i d\Omega_0 \quad (7)$$

avec :

$$[\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}, t)]^* = \sum_{j=1}^V \phi_j^C(\mathbf{X}) [\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}_j, t)]^h \quad J_i = \det(\tilde{\mathbf{F}}_i) \quad (8)$$

où  $[\bar{\epsilon}^p(\mathbf{X}_j, t)]^h$  est la déformation plastique équivalente associée au voisin  $n_j$  au point  $\mathbf{x}$ , supposée constante dans la cellule de Voronoi  $\Omega_j$ . Afin d'évaluer (7), la cellule de Voronoi contrainte est triangulée et une intégration de Gauss est appliquée dans chaque triangle. L'erreur globale est obtenue, de façon standard, par  $|e|_{\Omega}^2 = \sum_i^N |e|_{\Omega_i}^2$ . De plus, l'erreur relative  $\eta$  est définie comme  $\eta_i := |e|_{\Omega_i} / |e|_{\Omega}$ . Si l'erreur limite est atteinte dans une cellule de Voronoi, de nouveaux nœuds sont ajoutés entre le nœud central et les voisins naturels visibles [7], permettant le raffinement dans des nuages de nœuds arbitraires.

#### 5 Accélération des calculs de fonctions de forme 3D

Afin d'améliorer l'efficacité des calculs de fonctions de forme 3D, nous proposons d'utiliser les fonctions de forme moindres carrés mobiles [3] en utilisant une fonctions poids particulière reproduisant les caractéristiques de la NEM, tels que l'interpolation et la connectivité basée sur les voisins naturels. La fonction poids est basée sur une fonction conique dont la base coïncide avec les sphères de Delaunay contenant le nœud  $n_i$ , comme défini ci-dessous.

La valeur de la fonction conique calculée au point  $x$  est donnée par :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{n}_i \mathbf{P}\| - \|\mathbf{n}_i \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{n}_i \mathbf{P}\|}, \quad \mathbf{n}_i \mathbf{P} = -2 \left( \frac{\mathbf{c} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_i \mathbf{x}}{\mathbf{n}_i \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i \mathbf{x}} \right) \mathbf{n}_i \mathbf{x} \quad (9)$$

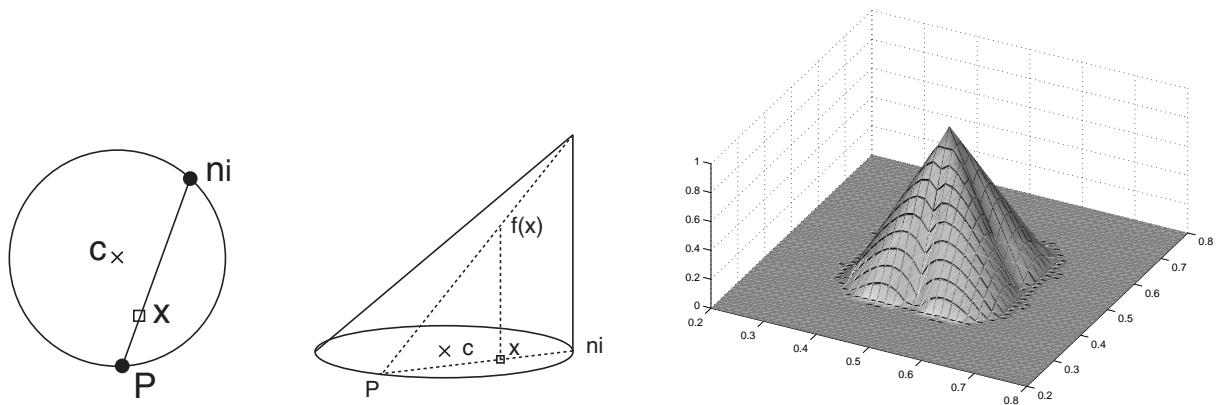


FIG. 2 – Fonction conique en 2D (à gauche) et fonction poids hybride moindres carrés mobiles/éléments naturels.

La fonction de forme obtenue maintient la qualité des fonctions de forme NEM et réduit les temps de calcul pour les applications 3D, évitant les constructions géométriques associées aux calculs d'intersections et de volumes des cellules de Voronoi 3D, qui est une tâche complexe et coûteuse.

## 6 exemples numériques

Afin d'illustrer les techniques proposées, un exemple de formation dynamique d'une bande de cisaillement est représenté sur la figure 3. Un exemple de compression de lopin 3D utilisant les fonctions de forme décrites dans la section 5 et un comportement élastoplastique de Johnson-Cook est représenté sur la figure 4.

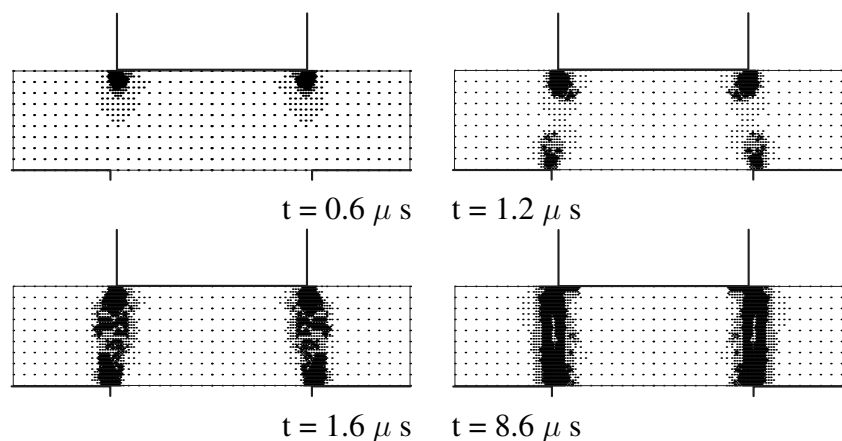


FIG. 3 – Formation dynamique d'une bande de cisaillement : évolution du nuage de nœuds.

## 7 Conclusions

Dans cet article, de nouveaux développements dans la méthode des éléments naturels ont été proposés pour la simulation numérique de la mise en forme des métaux faisant interve-

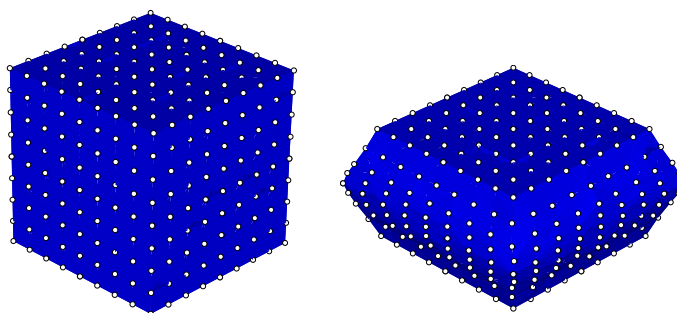


FIG. 4 – Compression d'un lopin 3D.

nir des grandes transformations et de la localisation. Une stratégie adaptative a été introduite, dans laquelle une intégration nodale permet de définir un indicateur d'erreur simple et allège le transfert des variables internes. Une technique hybride moindres carrés mobiles/éléments naturels permet d'accélérer le calcul des fonctions de forme NEM en 3D pour les applications pratiques.

## Références

- [1] Belikov V.V., Ivanov, V.D., Kontorovich V.K., Korytnik S.A., Semenov A.Y., The non-Sibsonian interpolation : a new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 37(1) :9–15, 1997.
- [2] J.S. Chen, Y. Yoon, C.T. Wu, Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, 53 :2587–2615, 2002.
- [3] A. Fernández-Méndez, Huerta A., Belytschko T., Meshless methods. *Encyclopedia of computational mechanics*, in press, 2004.
- [4] R. Sibson. A vector identity for the dirichlet tessellation. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 87 :151–155, 1980.
- [5] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. The natural element method in solid mechanics. *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, 43 :839–887, 1998.
- [6] J. Yvonnet, D. Ryckelynck, P. Lorong, F. Chinesta , A new extension of the natural element method for non convex and discontinuous domains : the constrained natural element method (C-NEM). *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, 60 :1451–1474, 1998.
- [7] J. Yvonnet, P. Lorong, D. Ryckelynck, F. Chinesta , Simulating dynamic thermoelastoplasticity in large transformations with adaptive refinement in the natural element method : application to shear banding. *International Journal of Forming Processes*, à paraître, 2005.
- [8] O., Zienkiewicz , J. Zhu, A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, 24 :337–357, 1987.