



**HAL**  
open science

# Formes normales d'une metrique mixte analytique reelle generique

Tomasz Miernowski

► **To cite this version:**

Tomasz Miernowski. Formes normales d'une metrique mixte analytique reelle generique. 2006. hal-00020748

**HAL Id: hal-00020748**

**<https://hal.science/hal-00020748>**

Preprint submitted on 14 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Formes normales d'une métrique mixte analytique réelle générique

Tomasz Miernowski

*Instituto de Matemática, Universidade Federal Fluminense*

*Rua Mário Santos Braga, 24020-140 Niterói, RJ, Brazil*

*e-mail : miernowski@mat.uff.br*

## Résumé

Par une métrique mixte on comprend une métrique définie dans un domaine du plan, changeant de caractère - sur une région elle est riemannienne, sur une autre lorentzienne. On se place dans un point appartenant à la frontière entre ces deux régions et on cherche une forme locale "la plus simple" de notre métrique - un problème analogue à l'existence des coordonnées isothermes dans le cas classique, riemannien ou lorentzien. On montre que génériquement on peut se ramener à un seul modèle conforme  $du^2 + vdv^2$ . Il existe tout de même des points spécifiques où l'espace des modèles conformes est de dimension infinie.

**Mots clés :** métrique mixte, forme normale, modèle conforme

## Abstract

We will call a mixed metric any metric defined in a plane domain which changes its character - it is Riemannian in one region and Lorentzian in the other. We investigate the existence of a normal form for our metric locally in a neighbourhood of a point belonging to the common boundary of these two regions. It is an analogue of the problem of existence of isothermal coordinates in the classical setting. We show that generically we have the unique conformal model  $du^2 + vdv^2$ . There are, however, some special points where the space of conformal models is of infinite dimension.

**Keywords :** mixed metric, normal form, conformal model

## 1 Introduction

Soit  $g$  une métrique définie sur un domaine du plan, qui s'exprime dans les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^2$  sous la forme  $ds^2 = a(x, y)dx^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2$ . Supposons que  $g$  soit riemannienne, c'est-à-dire que  $a, c > 0$  et  $ac - b^2 > 0$ . C.F. Gauss fut le premier à démontrer dans [6] qu'une telle métrique admet un changement local de coordonnées,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , tel que la métrique  $g$  dans les nouvelles coordonnées s'exprime sous la forme  $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ , où  $\lambda(u, v) > 0$ . Les coordonnées  $(u, v)$  sont appelées "isothermes" pour la métrique  $g$ . Le résultat de Gauss concerne une métrique riemannienne analytique, c'est-à-dire le cas où les fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$  correspondantes sont analytiques réelles. Le théorème d'existence de coordonnées isothermes reste vrai sous des hypothèses plus faibles concernant la régularité de la métrique en question - cf. [8], [9], [13], [3], [1] dans l'ordre descendant de la régularité. On remarque qu'il existe des résultats analogues (plus faciles grâce à l'existence des directions isotropes) pour des métriques lorentziennes,

c'est-à-dire où  $a > 0$  et  $ac - b^2 < 0$ . Dans ce cas les coordonnées isothermes prennent la forme  $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 - dv^2)$ , avec  $\lambda(u, v) > 0$ .

Le but de ce travail est de donner une réponse à la question suivante. Supposons que la métrique analytique réelle  $g$  change de caractère dans un domaine  $U \subset \mathbb{R}^2$ , i.e. qu'elle est riemannienne sur  $U_R \subset U$  et lorentzienne sur  $U_L \subset U$ . Bien sûr  $g$  est dégénérée sur la frontière entre ces deux régions, que l'on va noter  $\Gamma$ . Génériquement  $\Gamma$  est une courbe régulière et lisse dans  $U$ . Soit  $q \in \Gamma$ . Peut-on trouver une généralisation du théorème d'existence de coordonnées isothermes dans ce cas et quelle est la forme "la plus naturelle" des coordonnées pour  $g$  dans un voisinage du point  $q$  ?

Comme dans le cas riemannien ou lorentzien, le modèle que l'on cherche à établir pour la métrique  $g$  est un modèle conforme, i.e. défini à une multiplication par une fonction positive  $\lambda$  près. On sait que deux métriques lorentziennes sont conformément équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes courbes isotropes. Ceci implique que le type conforme est entièrement donné par l'équation différentielle définissant les courbes isotropes pour  $g$  dans  $U_L$  :

$$a(x, y) + 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + c(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0. \quad (1)$$

En tout point  $q \in U_L$  il existe deux directions isotropes pour  $g$ , non colinéaires, tangentes à deux courbes isotropes pour  $g$  passant par  $q$ . Génériquement (i.e. quand  $a, b, c$  ne s'annulent pas simultanément) en tout point de la courbe  $\Gamma$  on a une seule direction isotrope pour  $g$ . Les deux feuilletages isotropes deviennent mutuellement tangents sur  $\Gamma$ , définissant un champ  $X$  de directions isotropes pour  $g$  le long de  $\Gamma$ .

L'étude de la famille des courbes isotropes pour une métrique mixte est liée à certains aspects de la théorie de surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . Une telle surface se décompose en trois parties : elliptique (où la courbure totale est positive), hyperbolique (courbure négative) et parabolique (courbure nulle). Génériquement, cette dernière partie est une courbe lisse. On remarque que la seconde forme fondamentale de la surface vérifie dans un voisinage d'un point parabolique les mêmes hypothèses que notre métrique mixte  $g$  dans un voisinage d'un point de la courbe  $\Gamma$ . Une étude des courbes nulles de la seconde forme fondamentale dans un domaine hyperbolique d'une surface a été effectuée par Y.L. Kergosien et R. Thom [7]. Pour plus de détails sur les propriétés des surfaces au voisinage d'un point parabolique, ainsi que pour les références supplémentaires, on pourra se reporter au travail récent de R. Uribe-Vargas [11, 12].

On revient à notre métrique  $g$ . On remarque que génériquement on a deux types de points sur la courbe  $\Gamma$ . On dira qu'un point  $q \in \Gamma$  est de type **transverse** si la direction isotrope  $X$  est transverse à la courbe  $\Gamma$  en ce point. Ceci est le cas de presque tout point de  $\Gamma$ . Mais il peut y avoir un nombre fini de points exceptionnels, où  $X$  est tangent à  $\Gamma$ . Adoptant la terminologie introduite par Thom, on les appellera **godrons**.

En vue de l'équation (1), notre problème est aussi lié au problème de trouver une forme canonique d'une équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0, \quad (2)$$

non résolue par rapport à la dérivée. Supposons que  $F$  soit de classe  $C^\infty$ . Considérons l'espace de 1-jets des fonctions  $y(x)$  munie des coordonnées  $(x, y, p)$ , où  $p$  correspond à la dérivée  $y' = dy/dx$ . Supposons que l'équation (2) définit dans cet espace une surface lisse  $S$ , pliée au-dessus de la courbe  $\Gamma$ , i.e. tout point  $(x, y, p) \in S$  tel que  $(x, y) \in \Gamma \subset U$ , est un point singulier de la projection canonique  $\pi_{xy} : (x, y, p) \mapsto (x, y)$  restreinte à  $S$ . On note  $\tilde{\Gamma}$  et on appelle **courbe criminant** la courbe tracée sur la surface  $S$ , constituée des points singuliers de cette projection. Dans l'espace des 1-jets on a un champ de plans de contact

$dy = p dx$  qui induit sur la surface  $S$  un champ de directions  $V$ . Les courbes intégrales de ce champ sont envoyées par la projection  $\pi_{xy}$  sur les courbes isotropes pour la métrique  $g$  dans  $U_L$ . Un point singulier de la projection  $\pi_{xy}$  est appelé **singulier régulier** si le plan de contact n'est pas tangent à la courbe discriminant en ce point. Sa projection sur  $\Gamma$  est de type transverse. R. Thom [10] a trouvé l'équation  $p^2 = xE(x, y)$ , où  $E \in C^\infty$ , comme une forme canonique de l'équation (2) dans un voisinage d'un tel point. L. Dara [4] et Y. Brodsky [2] l'ont réduit à la forme normale  $p^2 = x$ .

Dans ce travail, on montre de manière géométrique le résultat suivant (en un sens analogue à celui cité ci-dessus).

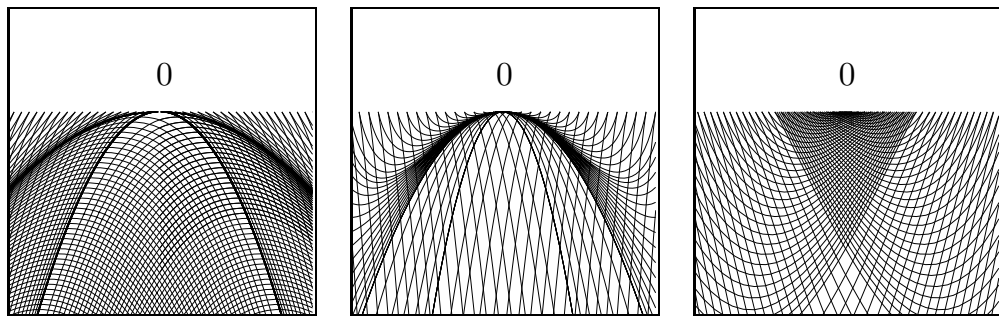
**Théorème A** *Soit  $g$  une métrique analytique réelle générique, définie dans un domaine du plan. Supposons que  $q$  soit un point de dégénérescence de  $g$  de type transverse. Alors par un changement de coordonnées de classe  $C^\omega$  dans un voisinage de  $q$ , on peut ramener  $g$  à la forme canonique*

$$\lambda(u, v)(du^2 + vdv^2),$$

où  $\lambda \in C^\omega$ ,  $\lambda > 0$  sur un voisinage de l'origine.

On tient à souligner que les résultats de Dara et Brodsky ne donnent pas de renseignement sur la région où les courbes intégrales de l'équation (2) ne sont pas définies. Notre théorème affirme cependant l'existence d'un changement de coordonnées qui ramène notre métrique à la forme normale non seulement dans la région  $U_L$ , mais aussi dans un voisinage du point de base  $q$  dans la région riemannienne  $U_R$ .

Revenons à l'équation (2). Sur la courbe discriminant  $\tilde{\Gamma}$ , il peut y avoir aussi des points isolés dont la projection sur  $\Gamma$  est un godron. Il se trouve qu'en un tel point le champ  $V$  possède un point singulier, dont la partie linéaire est génériquement non dégénérée. Les courbes intégrales de ce champ sont topologiquement équivalentes sur  $S$  aux solutions d'une équation linéaire au voisinage de sa singularité. On a donc au moins trois modèles locaux différents correspondant aux trois types de la singularité : col, nœud et foyer. Leurs projections sur le plan  $(x, y)$  donnent trois portraits différents de la famille des courbes isotropes pour la métrique  $g$  au voisinage d'un godron.



**Figure 1.** Le portrait topologique de la famille des courbes isotropes pour une métrique dégénérée le long de la droite  $y = 0$  dans un voisinage d'un godron générique (placé en origine) de type col, nœud et foyer respectivement.

Un changement de coordonnées dans le plan  $(x, y)$  induit un changement de coordonnées dans l'espace de 1-jets. Les deux champs  $V_1$  et  $V_2$  ainsi obtenus sont conjugués par un difféomorphisme, ce qui implique que leurs parties linéaires au-dessus d'un godron sont elles aussi conjuguées. L. Dara a conjecturé que ceci donne le seul invariant de

changement de coordonnées de classe  $C^\infty$  dans un voisinage d'un godron générique. Il a proposé une famille à 1 paramètre des modèles :  $2y = p^2 + \kappa x^2$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Les trois cas,  $\kappa < 0$ ,  $0 < \kappa < 1/4$  et  $\kappa > 1/4$  correspondent au trois types de la singularité du champ  $V$  au-dessus du godron : col, nœud et foyer respectivement. A.A Davydov [5] a confirmé cette conjecture en réduisant l'équation (2) au voisinage d'un godron à la forme  $y = (p + \kappa x)^2$ , équivalente à celle de Dara. De plus, il a prouvé que quand il s'agit d'une classification topologique, on a seulement trois modèles locaux, présentés sur la figure 1, dépendant du type de la singularité du champ  $V$ .

On se pose les questions analogues dans le cas d'une métrique analytique réelle. On prouve le résultat suivant.

**Théorème B** *L'espace des modèles conformes pour une métrique analytique réelle générique au voisinage d'un godron est de dimension infinie.*

Plus précisément, étant donné une métrique analytique réelle  $g$  définie au voisinage d'un godron dans le plan  $(x, y)$ , l'équation (1) correspondante définit une surface  $S_g$  avec un champ de directions  $V_g$  dans un voisinage de l'origine dans  $S_g$ . Le champ  $V_g$  admet une singularité en l'origine, génériquement non dégénérée. Supposons que le champ  $V_g$  soit linéarisable en l'origine et que son modèle linéaire soit le même que celui induit par la forme canonique  $y = (p + \kappa x)^2$  proposée par Davydov. Alors génériquement (par rapport au choix de  $\kappa \in \mathbb{R}$ ), l'espace des modèles conformes de métriques analytiques réelles peut être paramétré, du point de vue de la classification  $C^\omega$ , par l'ensemble de germes en l'origine des difféomorphismes holomorphes

$$h(x, p) = \left( x + \sum_{n, m \geq 0} b_{n, m} x^n p^{2m+1}, \sum_{n, m \geq 0} c_{n, m} x^n p^{2m} + p \right),$$

dont les coefficients  $b_{n, m}$  et  $c_{n, m}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , sont réels et vérifient la condition

$$\mu_\kappa \left( \sum_{n \geq 0} b_{n, 0} x^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} c_{n, 0} x^n \right) = x,$$

où  $\mu_\kappa \in \mathbb{R}$  est une constante dépendant du paramètre  $\kappa$ .

**Remerciements** Ce travail fait partie de ma thèse de doctorat préparée à l'École Normale Supérieure de Lyon, France. Je tiens à remercier Étienne Ghys de m'avoir proposé ce sujet de recherche ainsi que pour ses nombreuses remarques qui m'ont beaucoup aidé dans ce travail. Merci à Thierry Barbot pour l'intérêt qu'il a porté pour ce texte et à Ricardo Uribe-Vargas pour son aide bibliographique (en particulier de m'avoir indiqué l'article [5]).

## 2 Métriques génériques

Plaçons-nous dans un voisinage de l'origine  $U$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Une métrique analytique réelle est définie sur  $U$  par une application  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^\omega$ , où  $g(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$  signifie qu'en un point  $(x, y) \in U$  notre métrique est donnée par la forme quadratique  $a(x, y)dx^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2$  correspondante, qui peut dégénérer en certains points de  $U$ . On notera donc  $g$  une métrique définie sur  $U$ , ainsi que l'application analytique réelle qui l'induit. Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble de toutes les applications  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^\omega$ . Par une métrique générique définie sur  $U$  on comprendra une métrique définie par une application appartenant à  $\mathcal{M}$ , générique pour la topologie  $C^\infty$ .

Notons aussi  $(a, b, c)$  les coordonnées euclidiennes de  $\mathbb{R}^3$  et définissons l'application "déterminant"  $\det : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\det(a, b, c) = ac - b^2$ . Soit  $K \subset \mathbb{R}^3$  le cône défini par  $\det^{-1}(0)$ . On note aussi  $K^+$  et  $K^-$  l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$ , où l'application  $\det$  prend des valeurs strictement positives et strictement négatives respectivement. Par  $M_g(x, y)$  on note la matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$  de la métrique  $g = (a, b, c)$  en un point  $(x, y) \in U$ .

Soit  $g \in \mathcal{M}$  une métrique. On remarque que  $g$  est définie positive (riemannienne) sur  $g^{-1}(K^+)$  et indéfinie (lorentzienne) sur  $g^{-1}(K^-)$ . On s'intéresse maintenant aux propriétés d'une métrique générique  $g$  au voisinage d'un point de l'ensemble  $g^{-1}(K)$ , sur lequel  $g$  est dégénérée.

**Proposition 1** *Pour une application  $g \in \mathcal{M}$  générique, l'ensemble  $g^{-1}(K)$  est soit vide soit une courbe régulière et lisse dans  $U$ . De plus, dans ce deuxième cas, en tout point de  $g^{-1}(K)$ , la matrice  $M_g$  de la métrique induite par  $g$  est de rang 1 et la dérivée de l'application  $\det \circ g$  dans la direction transverse à  $g^{-1}(K)$  est non nulle.*

**Preuve.** Toute application  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui évite l'origine induit en tout point de  $U$  une matrice  $M_g(x, y)$  telle que  $\text{rang}(M_g) \geq 1$ . Bien sûr, c'est le cas d'une application générique. De plus, on remarque que le cône  $K \subset \mathbb{R}^3$  n'a pas d'autre singularité que celle à l'origine. Le théorème de transversalité de Thom implique qu'une application  $g$  générique est transversale à  $K \setminus (0, 0, 0)$ , ce qui explique les autres affirmations de la Proposition.  $\square$

On voit que génériquement  $g$  est dégénérée le long d'une courbe lisse, que l'on note  $\Gamma$ , qui sépare  $U$  en deux régions  $U_R = g^{-1}(K^+)$  et  $U_L = g^{-1}(K^-)$  sur lesquelles  $g$  est riemannienne et lorentzienne respectivement. En tout point de  $U_L$  il existe deux directions isotropes pour la métrique  $g$ , non colinéaires, qui définissent dans  $U_L$  deux feuilletages par des courbes analytiques, mutuellement transverses en tout point de  $U_L$ . De plus, comme  $M_g$  est de rang 1 le long  $\Gamma$ , les deux directions se confondent sur  $\Gamma$  et les feuilletages deviennent tangents. Notons  $X$  le champ de directions nulles pour  $g$  le long  $\Gamma$ , qui est donné par la direction du noyau de l'application linéaire induite par la matrice  $M_g$ .

**Proposition 2** *Génériquement le champ  $X$  est transverse à  $\Gamma$  sauf peut-être en un nombre fini de points.*

**Preuve.** Considérons l'espace  $J^1(U, \mathbb{R}^3)$  des 1-jets d'applications analytiques réelles  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $g(x, y) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ , muni de coordonnées  $(a, b, c, a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$ , où de manière évidente  $a_x$  dénote la valeur de la dérivée par rapport à  $x$  de la première composante de l'application  $g$ , etc.

Soit  $g = (a, b, c) \in \mathcal{M}$  fixé,  $\Gamma$  la courbe et  $X$  le champ de directions le long de  $\Gamma$  associés. Le fait qu'un point  $(x, y) \in U$  est un point de tangence entre  $X$  et  $\Gamma$  se traduit par deux conditions suivantes :

$$(i) \quad (x, y) \in \Gamma \text{ i.e } a(x, y)c(x, y) - b(x, y)^2 = 0,$$

$$(ii) \quad D(\det \circ g)|_{(x, y)} X(x, y) = 0, \text{ où le vecteur non nul } X \text{ est donné par la relation } M_g(x, y) \cdot X(x, y) = 0.$$

Considérons dans l'espace  $J^1(U, \mathbb{R}^3)$  deux sous-variétés  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , données par les équations :

$$\Sigma_1 : \begin{cases} ac - b^2 = 0, \\ -c^2 a_x + b c a_y + 2 b c b_x - 2 b^2 b_y - a c c_x + a b c_y = 0, \end{cases}$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} ac - b^2 = 0, \\ -bca_x + aca_y + 2b^2b_x - 2abb_y - abc_x + a^2c_y = 0. \end{cases}$$

En regardant de plus près la condition (ii) ci-dessus, il est facile de voir que le champ  $X$  est tangent à la courbe  $\Gamma$  en un point  $(x, y) \in U$  si et seulement si  $j^1g(x, y) \in (\Sigma_1 \cap \{c \neq 0\}) \cup (\Sigma_2 \cap \{a \neq 0\})$ . On remarque aussi que les sous-variétés  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont sans singularités dans  $\{c \neq 0\}$  et  $\{a \neq 0\}$  respectivement.

On utilise maintenant le théorème de transversalité de Thom qui affirme que le 1-jet d'une application générique  $g \in \mathcal{M}$  est transverse à  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Comme les dimensions de  $j^1g(U)$  et des sous-variétés sont complémentaires dans  $J^1(U, \mathbb{R}^3)$ , on obtient le résultat.  $\square$

Rappelons la terminologie utilisé dans l'introduction. Tout point de tangence du champ  $X$  à la courbe  $\Gamma$  sera appelé **godron**. Tout point de  $\Gamma$  n'étant pas un godron sera appelé **de type transverse**.

On remarque que les résultats présentés ci-dessus permettent de simplifier la forme de notre métrique générique dans un voisinage d'un point où elle dégénère.

**Corollaire 3** *Soit  $g \in \mathcal{M}$  une métrique générique et  $\Gamma \subset U$  la courbe lisse le long de laquelle  $g$  est dégénérée. Soit  $q \in \Gamma$ . Alors dans un voisinage de  $q$  il existe un changement de coordonnées de classe  $C^\omega$ ,  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ , qui envoie notre point de base  $q$  sur l'origine et tel que notre métrique  $g$  s'exprime dans un voisinage de l'origine sous la forme :*

- (i)  $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + v\gamma(u, v)dv^2)$ , où  $\lambda, \gamma \in C^\omega$ ,  $\lambda, \gamma > 0$ , dans le cas d'un point  $q \in \Gamma$  de type transverse ;
- (ii)  $ds^2 = \lambda(u, v)((\kappa(u)^2 + v\alpha(u, v))du^2 + 2(\kappa(u) + v\beta(u, v))dudv + dv^2)$ , où  $\lambda, \kappa, \alpha, \beta \in C^\omega$ ,  $\lambda, \alpha > 0$ ,  $\beta \neq 0$ ,  $\kappa(0) = 0$  et  $\kappa'(0) \neq 0$ , dans le cas où  $q \in \Gamma$  est un godron.

**Preuve.** Comme  $\Gamma$  est régulière et lisse on peut toujours trouver un changement de coordonnées  $(u, v)$  de classe  $C^\omega$  qui l'envoie sur la droite  $\{v = 0\}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , avec la condition que notre point  $q$  soit envoyé sur l'origine. On peut supposer que la métrique image, toujours appelée  $g$ , soit riemannienne dans le demi-plan supérieur et lorentzienne dans le demi-plan inférieur.

Dans le cas d'un point générique, la direction  $X$  engendrée par le noyau de la matrice associée à  $g$ , étant transverse à la droite  $\{v = 0\}$  en l'origine, on peut la rendre verticale, i.e. engendrée par  $\frac{\partial}{\partial v}$  sur un voisinage de l'origine dans  $\{v = 0\}$ . Dans ce cas,  $g$  est donnée dans un voisinage de l'origine par une forme quadratique  $a(u, v)du^2 + 2b(u, v)dudv + c(u, v)dv^2$ , où les fonctions  $a, b, c$  sont analytiques réelles,  $a > 0$  et  $b(u, 0) = c(u, 0) = 0$ . De plus,  $(ac - b^2)(u, 0) = 0$  et  $c(u, v) > 0$  dès que  $v > 0$ . Ceci implique que  $b \equiv 0$ . Finalement la condition  $(ac)_v(u, 0) \neq 0$  donnée par la Proposition 1 permet d'en déduire la forme énoncée dans (i).

Supposons maintenant que  $g$  admette un godron en l'origine et qu'elle soit donnée dans son voisinage par la forme  $a(u, v)du^2 + 2b(u, v)dudv + c(u, v)dv^2$ . Le fait que le noyau de  $M_g(0, 0)$  soit tangent à  $\{v = 0\}$  implique  $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$ . Comme les trois fonctions définissant  $g$  ne s'annulent jamais en même temps, on obtient que  $c > 0$  sur un voisinage de l'origine. Ceci permet de se ramener à la forme  $\lambda(u, v)(\tilde{a}(u, v)du^2 + 2\tilde{b}(u, v)dudv + dv^2)$  de la métrique  $g$ . De plus,  $\tilde{a}(u, 0) - \tilde{b}^2(u, 0) = 0$ . Notons  $\kappa(u) = \tilde{b}(u, 0) \in C^\omega$ . On a  $\kappa(0) = 0$ . Génériquement on peut donc représenter les fonctions  $a(u, v)$  et  $b(u, v)$  de manière à obtenir la deuxième formule énoncée dans le Corollaire.  $\square$

### 3 Un résultat classique

Dans ce paragraphe on présente une preuve géométrique de l'existence des coordonnées isothermes pour une métrique riemannienne analytique réelle. Dans le paragraphe suivant on modifiera ce raisonnement classique afin d'obtenir une forme normale pour une métrique analytique réelle mixte dans un voisinage d'un point de type transverse.

Dans ce qui suit, on notera  $(x, y)$  non seulement les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^2$  mais aussi leur extension dans l'espace  $\mathbb{C}^2$ . Pour tout point  $q \in \mathbb{C}^2$  on notera  $\bar{q}$  son image par l'involution complexe  $\sigma : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ .

**Théorème 4 (Gauss)** *Soit  $g$  une métrique riemannienne définie dans un voisinage  $U$  de l'origine dans le plan, qui s'exprime dans les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^2$  sous la forme*

$$ds^2 = a(x, y)dx^2 + 2b(x, y)dxdy + c(x, y)dy^2,$$

où les fonctions  $a, b, c : U \rightarrow \mathbb{R}$  sont analytiques réelles et vérifient  $a > 0$ ,  $ac - b^2 > 0$ . Il existe alors un changement de coordonnées  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$  de classe  $C^\omega$  dans un voisinage de l'origine, tel que la métrique  $g$  s'exprime sous la forme

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2),$$

où  $\lambda > 0$  est une fonction analytique réelle.

**Preuve.** Les fonctions  $a, b, c$  étant analytiques réelles, on peut les étendre en trois fonctions holomorphes, toujours notées  $a, b, c$ , définies sur un voisinage  $U$  de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ . Notons toujours  $g$  la métrique complexe sur  $U$  donnée par ces fonctions. En chaque point  $(x, y) \in U \subset \mathbb{C}^2$  il existe deux solutions en  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2$ , différentes, de l'équation

$$a(x, y)\xi_1^2 + 2b(x, y)\xi_1\xi_2 + c(x, y)\xi_2^2 = 0. \quad (3)$$

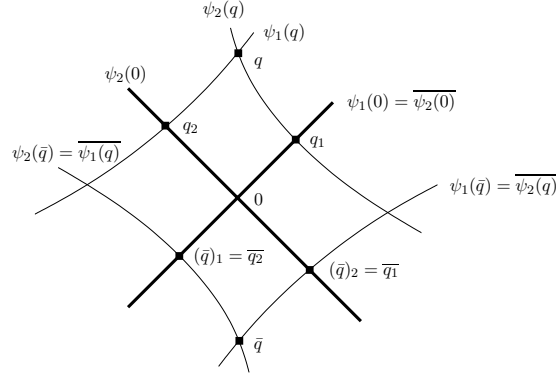
En chaque point de  $U$  on a deux directions complexes isotropes pour la métrique  $g$ . Ceci implique l'existence de deux champs de directions holomorphes  $X_1$  et  $X_2$ , isotropes pour  $g$  et non colinéaires sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ , que nous noterons encore  $U$ . Comme les fonctions apparaissant dans (3) commutent avec l'involution complexe  $\sigma : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ , les solutions de cette équation commutent elles aussi avec  $\sigma$ . On en déduit facilement que pour tout  $(x, y) \in U$  on a  $X_1(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{X_2(x, y)}$  et  $X_2(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{X_1(x, y)}$ .

Les courbes intégrales de ces deux champs de directions forment deux feuilletages  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  d'un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  par des courbes holomorphes, commutant avec l'involution  $\sigma$ . Quitte à choisir un voisinage plus petit, on peut supposer que chaque courbe appartenant à la famille  $\mathcal{F}_1$  coupe chaque courbe appartenant à la famille  $\mathcal{F}_2$  transversalement en un seul point. Pour tout  $q \in U \subset \mathbb{C}^2$  on note  $\psi_1(q)$  et  $\psi_2(q)$  les deux courbes intégrales passant par  $q$ .

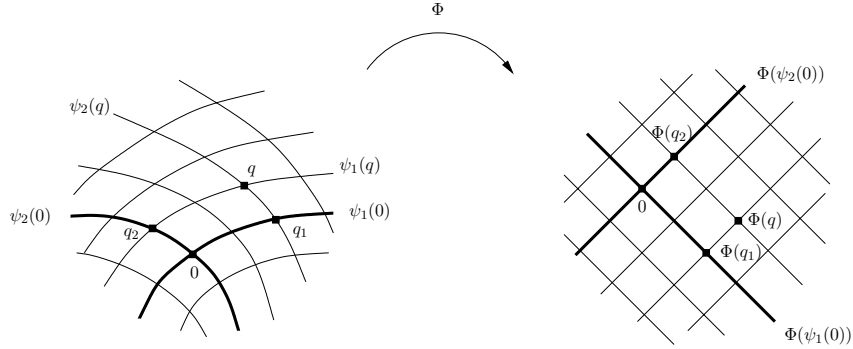
Le but est de trouver un difféomorphisme holomorphe  $\Phi$  qui envoie les courbes de la famille  $\mathcal{F}_1$  sur la famille des droites complexes engendrées par le vecteur  $(1, i)$  et les courbes de la famille  $\mathcal{F}_2$  sur la famille des droites engendrées par  $(1, -i)$ . Dans les nouvelles coordonnées, les vecteurs isotropes pour la métrique  $g$  seront en chaque point de la forme  $(t, \pm it)$ ,  $t \in \mathbb{C}$ . Ceci nous donnera la forme cherchée de la métrique, mais sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ . Pour terminer la preuve du théorème il faut s'assurer que l'application  $\Phi$  commute avec l'involution complexe  $\sigma$  et donc qu'elle induit un changement des coordonnées de classe  $C^\omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On construit une application  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$  comme suit :





**Figure 2.** La symétrie de  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  par rapport à  $\sigma$ .



**Figure 3.** L'idée de la construction de l'application  $\Phi$ .

1. L'application  $\Phi$  fixe l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ .
2.  $\Phi$  envoie holomorphiquement la courbe  $\psi_1(0) \in \mathcal{F}_1$  sur la droite complexe engendrée par  $(1, i)$  et la courbe  $\psi_2(0)$  sur celle engendrée par  $(1, -i)$ . On exige de plus que  $\Phi$  commute avec l'involution complexe  $\sigma$ , ce qui est possible car  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  commutent avec  $\sigma$ .
3. Soit  $q \in U$  n'appartenant pas à  $\psi_1(0) \cup \psi_2(0)$ . Les courbes  $\psi_1(q)$  et  $\psi_2(q)$  passant par  $q$  coupent  $\psi_2(0)$  et  $\psi_1(0)$  en deux points  $q_1$  et  $q_2$  respectivement. Les images  $\Phi(q_1)$  et  $\Phi(q_2)$  étant déjà définies, on définit  $\Phi(q)$  comme l'intersection des droites engendrées par les vecteurs  $(1, i)$  et  $(1, -i)$  passant par  $\Phi(q_1)$  et  $\Phi(q_2)$  respectivement.

On obtient une application bien définie et holomorphe sur  $U$ . De plus, grâce à la symétrie de l'équation (3) par rapport à  $\sigma$ , notre application commute avec l'involution complexe. La restriction  $\Phi_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de classe  $C^\omega$  et fournit le changement des coordonnées cherché.  $\square$

## 4 Cas dégénéré transverse

Nous allons maintenant modifier le raisonnement présenté dans le paragraphe précédent afin de démontrer le Théorème A énoncé dans l'introduction. Soit  $q$  un point de dégénérescence de type transverse pour une métrique analytique réelle  $g$  générique. Grâce au

Corollaire 3, on peut supposer que  $q$  est placé en l'origine dans le plan et que dans un voisinage  $U$  de l'origine notre métrique  $g$  est donnée par une forme quadratique  $a(x, y)(dx^2 + yc(x, y)dy^2)$ , où  $a, c \in C^\omega$ ,  $a(0, 0) > 0$  et  $c(0, 0) > 0$ . Notons  $K = c(0, 0)$  et soit  $g_K$  la métrique donnée par la forme  $du^2 + Kvdv^2$ . On va prouver l'existence d'un changement de coordonnées de classe  $C^\omega$  qui envoie notre métrique  $g$  sur une métrique conformément équivalente à  $g_K$ . Par un changement de coordonnées  $(u, v) \mapsto (u, K^{-3}v)$  on pourra se ramener par la suite à la forme normale proposée par le Théorème A.

Pour construire le changement de coordonnées cherché, on va étendre les deux métriques  $g$  et  $g_K$  sur un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  et on va construire un difféomorphisme holomorphe  $\Phi$  envoyant les courbes isotropes pour  $g$  sur celles isotropes pour  $g_K$ , tout en prenant soin que  $\Phi$  commute avec l'involution complexe  $\sigma$ . Ceci impliquera que  $\Phi^*g$  soit conformément équivalente à  $g_K$ . La restriction de difféomorphisme  $\Phi$  à un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  fournira le changement de coordonnées désiré.

**Notations.** Dans ce qui suit, on travaille simultanément dans deux copies de  $\mathbb{C}^2$  correspondant aux métriques  $g$  et  $g_K$ . On notera  $z = (x, y)$  un point dans le domaine de définition de la métrique  $g$ , i.e. dans un voisinage de l'origine  $U \subset \mathbb{C}^2$ . Par  $(x, y)$  on comprend les coordonnées canoniques de  $\mathbb{C}^2$ . Les notations respectives  $w = (u, v) \in V \subset \mathbb{C}^2$  seront employées dans le cas de la métrique modèle  $g_K$ . Pour éviter toute ambiguïté, on notera aussi  $\mathbb{C}_{xy}^2$  et  $\mathbb{C}_{uv}^2$  les deux espaces complexes correspondant.

On commence par étendre les métriques  $g$  et  $g_K$  en deux métriques complexes définies sur les voisinages d'origine  $U$  et  $V$  dans  $\mathbb{C}_{xy}^2$  et  $\mathbb{C}_{uv}^2$  respectivement. Notons  $\Gamma = U \cap \{y = 0\}$  et  $\Delta = V \cap \{v = 0\}$ . On remarque qu'en tout point  $w \in V \setminus \Delta$  il existe deux directions complexes isotropes pour la métrique  $g_K$ , mutuellement transverses. En tout point de la droite complexe  $\Delta$  on a une seule direction isotrope, transverse à cette droite. Il est facile de voir que les courbes isotropes pour  $g_K$  sont définies dans  $V$  par

$$(u - t)^2 + \frac{4K}{9}v^3 = 0, \quad (4)$$

où  $t \in \mathbb{C}$  est un paramètre. Notons  $\phi_t$  la courbe complexe donnée par (4). La famille  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{C}}$  des courbes isotropes pour  $g_K$  vérifie les propriétés suivantes :

- P1. Pour tout  $t \in \mathbb{C}$ , la courbe  $\phi_t$  coupe la droite  $\Delta$  en un seul point  $(t, 0)$  qui constitue son unique singularité.
- P2. Étant donné un point  $w \in V \setminus \Delta$  il existe deux courbes  $\phi_{t_1}$  et  $\phi_{t_2}$ ,  $t_1 \neq t_2$ , passant par ce point, qui rencontrent  $\Delta$  en  $(t_1, 0)$  et  $(t_2, 0)$ . Notons  $\pi_K(q) = \{t_1, t_2\}$  cette "projection".
- P3. Étant donné deux paramètres  $t_1 \neq t_2$  suffisamment proches de l'origine dans  $\mathbb{C}$ , l'intersection  $\phi_{t_1} \cap \phi_{t_2}$  contient exactement trois points différents  $\{w_1, w_2, w_3\}$  contenus dans  $V$ .

Il est facile de voir que les coordonnées de trois points  $\{w_1, w_2, w_3\}$  évoqués dans P3 sont données par

$$2u_j = t_1 + t_2, \quad 16K^2v_j^3 = -9(t_1 - t_2)^2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Pour pouvoir construire une application  $\Phi$  conjuguant les deux familles de courbes isotropes en question, il faut qu'on s'assure qu'elles vérifient les mêmes conditions topologiques.

**Lemme 5** *La famille de courbes isotropes pour la métrique  $g$  vérifie dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  les trois propriétés analogues à P1-P3.*

**Preuve** On remarque tout d'abord, qu'en tout point de  $U \setminus \Gamma$  on a deux directions isotropes pour  $g$ , mutuellement transverses. En tout point de la droite  $\Gamma$  elles se confondent en une seule direction isotrope pour  $g$ , transverse à  $\Gamma$ . Les courbes isotropes pour  $g$  sont données dans  $U$  par l'équation différentielle

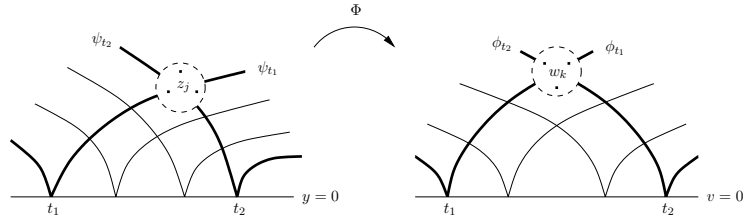
$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + yc(x, y) = 0.$$

La condition  $c(0, 0) \neq 0$  implique que, dans un voisinage de l'origine, les solutions de cette équation admettent sur la droite  $\Gamma$  un point de rebroussement de type  $x^2 = y^3$ . Notons par  $\psi_t$  la courbe isotrope pour  $g$  passant par  $(t, 0)$ . La famille  $(\psi_t)_{t \in \mathbb{C}}$  vérifie donc les propriétés analogues à P1-P3.  $\square$

Étant donné un point  $z \in U \setminus \Gamma$  suffisamment proche de l'origine, il existe deux courbes  $\psi_{t_1}$  et  $\psi_{t_2}$  isotropes pour  $g$ , passant par  $z$ , qui coupent  $\Gamma$  en  $(t_1, 0)$  et  $(t_2, 0)$  respectivement. Notons  $\pi(z) = \{t_1, t_2\}$  la projection associée à la famille  $(\psi_t)$ .

Les propriétés des deux familles de courbes isotropes présentées ci-dessus suggèrent la méthode de la construction de changement de coordonnées  $\Phi$  :

1. Dans un voisinage de l'origine, on définit  $\Phi$  comme identité sur la droite complexe  $\Gamma$ , i.e.  $\Gamma \ni (x, 0) \mapsto (x, 0) \in \Delta$ .
2. Étant donnés deux paramètres  $t_1 \neq t_2$ , suffisamment proches de l'origine dans  $\mathbb{C}$ , il existe trois points  $z_j \in U$ ,  $j = 1, 2, 3$ , et trois points  $w_k \in V$ ,  $k = 1, 2, 3$ , tels que  $\pi(z_j) = \pi(w_k) = \{t_1, t_2\}$ . On demande donc que l'application  $\Phi$  réalise une bijection  $\{z_1, z_2, z_3\} \mapsto \{w_1, w_2, w_3\}$  pour tout choix  $t_1 \neq t_2$ .



**Figure 5.** L'idée de la construction de l'application  $\Phi$  dans le cas transverse.

Supposons qu'il soit possible de construire une application  $\Phi$  vérifiant les deux propriétés ci-dessus, holomorphe dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ . Clairement elle envoie les courbes isotropes pour  $g$  sur celles isotropes pour  $g_K$ . De plus, comme  $g$  et  $g_K$  proviennent de deux métriques réelles, les champs de directions isotropes correspondant commutent avec l'involution complexe. D'après la manière dont on a construit  $\Phi$ , elle aussi commute avec  $\sigma$  et, restreinte à  $\mathbb{R}^2$ , définit le changement de coordonnées cherché.

Il reste à prouver le lemme suivant :

**Lemme 6** *Il existe un voisinage de l'origine  $\tilde{U} \subset U$  dans  $\mathbb{C}^2$  sur lequel on peut définir un difféomorphisme holomorphe  $\Phi : \tilde{U} \rightarrow \Phi(\tilde{U}) \subset \mathbb{C}^2$  vérifiant les trois propriétés présentées ci-dessus.*

**Preuve.** Il faut qu'on montre qu'il existe une manière canonique de définir une bijection  $\psi_{t_1} \cap \psi_{t_2} \mapsto \phi_{t_1} \cap \phi_{t_2}$ , pour tout choix  $t_1 \neq t_2$  dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}$ . On va prouver qu'étant donné  $t_1$  et  $t_2$  suffisamment proches de l'origine, dans un "petit" voisinage de chacun des points  $w_k$  on trouve exactement un point  $z_j$  correspondant, tandis que les distances entre les points  $w_k$  eux-mêmes sont "grandes".

On rappelle que les courbes isotropes pour la métrique  $g$  sont données par la forme quadratique  $dx^2 + yc(x,y)dy^2$ , où  $c(0,0) = K > 0$ . Dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  la fonction  $c(x,y)$  admet donc une racine carrée que l'on va noter  $\sqrt{c}(x,y)$  et que l'on représente sous la forme

$$\sqrt{c}(x,y) = \sqrt{K} + xh_1(x) + yh_2(x,y),$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont holomorphes et commutent avec l'involution complexe  $\sigma$ . Choisissons aussi les déterminations de  $(-y)^{\frac{1}{2}}$  et  $(-v)^{\frac{1}{2}}$ . La famille  $(\psi_t)_{t \in \mathbb{C}}$  des courbes isotropes pour  $g$  est définie donc par l'équation différentielle suivante :

$$\psi_t : \begin{cases} \frac{dx}{dy} = \pm(-y)^{\frac{1}{2}}(\sqrt{K} + xh_1(x)) \mp (-y)^{\frac{3}{2}}h_2(x,y), \\ x(0) = t. \end{cases} \quad (5)$$

La famille  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{C}}$  correspondant à la métrique  $g_K$  est donnée par

$$\phi_t : \begin{cases} \frac{du}{dv} = \pm(-Kv)^{\frac{1}{2}}, \\ u(0) = c. \end{cases} \quad (6)$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $U_\varepsilon \subset U$  un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  tel que pour tout  $(x,y) \in U_\varepsilon$  on ait  $|x||h_1(x)| + |y|^{\frac{3}{2}}|h_2(x,y)| < \varepsilon$ . Il existe un voisinage  $W_\varepsilon$  de l'origine dans  $\mathbb{C}$ , tel que pour tout point  $z = (x_z, y_z)$  vérifiant  $\pi(z) = \{t_1, t_2\} \in W_\varepsilon \times W_\varepsilon$ , on a  $\psi_{t_j} \cap \{|y| < |y_z|\} \subset U_\varepsilon$ ,  $j = 1, 2$ . Notons  $\tilde{U}_\varepsilon = \{z \in U_\varepsilon : \pi(z) \in W_\varepsilon \times W_\varepsilon\}$ .

Soit  $z \in \tilde{U}_\varepsilon \setminus \Gamma$  et  $\pi(z) = \{t_1, t_2\}$ . Soit  $w \in V$  le point dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}_{uv}^2$ , donné par les mêmes coordonnées que celles du point  $z$ . On note  $\pi_K(w) = \{s_1, s_2\}$  sa projection associée à la famille  $(\phi_t)$ . On calcule explicitement

$$s_1 = x_z + \frac{2\sqrt{K}}{3}(-y_z)^{\frac{3}{2}}, \quad s_2 = x_z - \frac{2\sqrt{K}}{3}(-y_z)^{\frac{3}{2}}.$$

De plus, grâce au fait que  $z \in \tilde{U}_\varepsilon$ , les équations (5) et (6) impliquent que  $|t_1 - s_1| < \varepsilon$  et  $|t_2 - s_2| < \varepsilon$ . On peut calculer maintenant les coordonnées de trois points d'intersection  $\phi_{t_1} \cap \phi_{t_2}$  des courbes de la famille correspondante à la métrique  $g_K$ , mais avec les paramètres correspondants à la projection associée à la métrique  $g$ . On s'aperçoit qu'il existe un point  $\tilde{w} = (\tilde{u}_w, \tilde{v}_w) \in \phi_{t_1} \cap \phi_{t_2}$  tel que

$$|\tilde{u}_w - x_z| < \varepsilon|y_z|^{\frac{3}{2}}, \quad |\tilde{v}_w - y_z| < \tilde{\varepsilon}|\tilde{v}_w|,$$

où  $\tilde{\varepsilon} > 0$  ne dépend que de  $\varepsilon$  et tend vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  petit et  $t_1, t_2 \in W_\varepsilon$ ,  $t_1 \neq t_2$ . Pour tout point  $w_k = (u_k, v_k) \in \phi_{t_1} \cap \phi_{t_2}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , il existe un point  $z_k = (x_k, y_k) \in \psi_{t_1} \cap \psi_{t_2}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , tel que  $|v_k - y_k| \leq \frac{1}{2}|v_k|$ . D'autre part, on sait que si  $k \neq j$ , alors  $|v_k| = |v_j|$  et  $|v_k - v_j| = \sqrt{3}|v_k|$ . Ceci implique qu'on a une méthode canonique pour construire une bijection  $\psi_{t_1} \cap \psi_{t_2} \mapsto \phi_{t_1} \cap \phi_{t_2}$  pour tout  $t_1 \neq t_2$  suffisamment proche de l'origine.

Notons  $U$  un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  sur lequel il est possible d'effectuer la construction d'un homéomorphisme  $\Phi$  présentée ci-dessus. Cette application vérifie les

deux propriétés désirées. On va prouver qu'elle est aussi holomorphe. Soit  $z \in U \setminus \Gamma$  et notons  $w = \Phi(z)$  son image par  $\Phi$ . Bien sûr  $w \notin \Delta$ , donc il existe un voisinage  $V_w$  de  $w$ , tel que la projection  $\pi_K : V_w \rightarrow \pi_K(V_w)$  soit bijective. Il existe aussi un voisinage  $U_z$  du point  $z$  sur lequel la projection  $\pi$  est bijective. Quitte à restreindre  $U_z$ , on peut supposer que  $\pi(U_z) \subset \pi_K(V_w)$ . On remarque que  $\Phi : U_z \rightarrow \Phi(U_z)$  est donnée par  $\Phi = ((\pi_K)|_{V_w})^{-1} \circ \pi$  et donc est holomorphe sur  $U_z$ , car les deux familles de courbes, définissant les deux projections, dépendent holomorphiquement du paramètre  $t \in \mathbb{C}$ . Ceci prouve que  $\Phi$  est holomorphe sur  $U \setminus \Gamma$ . De sa continuité et bijectivité sur  $U$ , on déduit que  $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$  est un difféomorphisme bi-holomorphe.  $\square$

Ceci termine la preuve du Théorème A.

## 5 Classification des godrons génériques.

On s'intéresse maintenant aux courbes isotropes pour une métrique générique dans le voisinage d'un godron. D'après la Proposition 1, on peut supposer que  $g$  est dégénérée sur la droite  $\Gamma = \{y = 0\}$  et qu'elle admet un godron isolé en l'origine. Comme  $g$  est analytique réelle, on l'étend en une métrique complexe définie sur un voisinage de l'origine  $U$  dans  $\mathbb{C}^2$ . Grâce au Corollaire 3, on sait que les courbes isotropes pour  $g$  vérifient dans  $U$  une équation différentielle de la forme

$$a(x, y) + 2b(x, y)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad (7)$$

où  $a(x, y) = k(x)^2 + y\alpha(x, y)$ ,  $b(x, y) = k(x) + y\beta(x, y)$ ,  $\alpha(0, 0) \neq 0$ ,  $\beta(0, 0) \neq 0$ ,  $k(0) = 0$  et  $k'(0) \neq 0$ . En tout point de  $U \setminus \Gamma$  on a encore deux directions complexes isotropes pour  $g$ , mutuellement transverses, qui définissent deux feuilletages par courbes complexes de  $U \setminus \Gamma$ . En tout point de  $\Gamma$  les deux directions se confondent en une seule direction isotrope pour  $g$ , transverse à  $\Gamma$  en tout point sauf en l'origine (godron isolé).

Considérons la surface  $S_g$  définie par l'équation (7) dans l'espace de 1-jets de fonctions  $y(x)$  munie de coordonnées  $(x, y, p)$ , où  $p$  correspond à  $dy/dx$ . Dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^3$ , la surface  $S_g$  est donnée par

$$a(x, y) + 2b(x, y)p + p^2 = 0.$$

On remarque que c'est un cylindre parabolique "au-dessus" de  $U$ . Comme en tout point  $(x, y) \in U \setminus \Gamma$  on a deux directions isotropes transverses, un tel point admet exactement deux préimages par la projection  $\pi_{xy} : S_g \rightarrow U$ ,  $\pi(x, y, p) = (x, y)$ . Au-dessus de tout point de la droite  $\Gamma$  on a un seul point de la surface  $S_g$ . L'ensemble  $\pi_{xy}^{-1}(\Gamma)$  forme sur la surface  $S_g$  une courbe  $\tilde{\Gamma}$ , appelée **la courbe criminant**, étant l'ensemble des points critiques de la projection  $\pi_{xy}$ .

Sur la surface  $S_g$  on a un champ de directions canoniquement défini par la métrique  $g$ . Notamment, en tout point de  $S_g \setminus \tilde{\Gamma}$  on considère l'intersection du plan tangent à la surface  $S_g$  avec le plan donné par la forme de contact  $dx = pdy$ . Les courbes intégrales de ce champ de directions sont données sur  $S_g \setminus \tilde{\Gamma}$  par l'équation

$$(a_x(x, y) + 2b_x(x, y)p)dx + (a_y(x, y) + 2b_y(x, y)p)dy + 2(b(x, y) + p)dp = 0 \quad (8)$$

et sont envoyées par la projection  $\pi_{xy}$  sur les courbes isotropes pour la métrique  $g$  dans  $U$ . Grâce à cette construction, on a réussi à "séparer" nos deux familles transverses des courbes isotropes pour  $g$ . Par tout point de  $S_g \setminus \tilde{\Gamma}$  passe une seule courbe intégrale définie par (8).

On remarque maintenant que dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^3$ , le couple  $(x, p)$  fournit un système de coordonnées pour notre surface, qui peut être donc représentée localement sous la forme  $y = S(x, p)$ , où  $S$  est une fonction holomorphe définie dans un voisinage de l'origine dans le plan  $(x, p)$ . On peut alors considérer l'équation (8) comme définissant un champ de directions  $V_g$  induit par la métrique  $g$  dans le plan  $(x, p)$ . Il est défini par

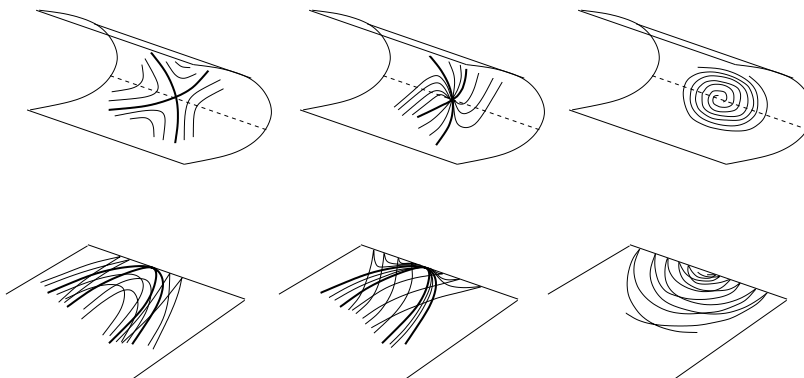
$$(a_x(x, y) + 2b_x(x, y)p + a_y(x, y)p + 2b_y(x, y)p^2)dx + 2(b(x, y) + p)dp = 0, \quad (9)$$

où  $y = S(x, p)$  est considéré comme une fonction des variables  $x$  et  $p$ . Les courbes intégrales du champ  $V_g$  sont envoyées par la projection

$$\pi_{xy} \circ \pi_{xp}^{-1} : (x, p) \mapsto (x, S(x, p), p) \mapsto (x, S(x, p))$$

sur les courbes isotopes pour la métrique  $g$  dans le plan  $(x, y)$ .

On prolonge notre champ  $V_g$  par continuité sur la projection  $\pi_{xp}(\tilde{\Gamma})$  de la courbe criminant. Le fait que l'origine soit un godron pour la métrique  $g$  implique, que  $V_g$  admette un point singulier en l'origine dans le plan  $(x, p)$ , génériquement non dégénéré. On a donc génériquement trois possibilités - une singularité de type col, nœud ou foyer. Dans chacun de ces trois cas, les courbes intégrales du champ  $V_g$  sont holomorphiquement conjuguées aux solutions d'une équation différentielle linéaire, donnée par la partie linéaire de  $V_g$  en l'origine. Les courbes isotopes de la métrique  $g$  "en bas" sont topologiquement équivalentes aux projections sur  $U$ , via la surface  $S_g$ , des solutions d'une équation linéaire dans le plan  $(x, p)$ .



**Figure 6.** Familles des courbes intégrales de l'équation linéarisée sur la surface  $S_g$  dans l'espace de 1-jets et leurs projections sur le plan  $(x, y)$  - courbes isotopes pour la métrique  $g$  au voisinage d'un godron générique (de type col, nœud et foyer respectivement).

Le type "col", "nœud" ou "foyer" du godron est un invariant de changement analytique de coordonnées. Notons  $L_g$  la partie linéaire en l'origine du champ  $V_g$  induit par la métrique  $g$ . Il est facile de voir que deux métriques  $g_1$  et  $g_2$ , conformément équivalentes à un changement de coordonnées près, induisent deux champs de directions  $V_{g_1}$  et  $V_{g_2}$  qui sont conjugués par un difféomorphisme dans le plan  $(x, p)$ . Ceci implique que leurs parties linéaires sont conjuguées, d'où un autre invariant associé à un godron : le rapport des valeurs propres de  $L_g$ . Le résultat de Davydov [5] affirme que dans le cas d'une équation différentielle de type (2), donnée par une fonction  $F$  de classe  $C^\infty$ , ce rapport décrit entièrement un godron à un changement de coordonnées de classe  $C^\infty$  près.

Il se trouve que dans le cas analytique cette description n'est pas suffisante. Étant donné un champ de directions  $V$  avec une partie linéaire prescrite, il faut savoir encore comment plier le plan  $(x, p)$  afin d'obtenir la surface  $S$ , pour pouvoir ensuite projeter ses courbes intégrales sur le plan  $(x, y)$ . Cette information est portée par l'involution  $\eta_g$ , aussi induite par la métrique  $g$  dans un voisinage de l'origine dans le plan  $(x, p)$ . Elle correspond tout simplement à l'échange sur la surface  $S_g$  des couples de points admettant la même projection par  $\pi_{xy}$ . Plus précisément, si  $y = S(x, p)$  définit la surface  $S_g$ , alors  $\eta(x, p) = (x, f(x, p))$ , où  $f$  est la fonction vérifiant  $S(x, p) = S(x, f(x, p))$  pour tout point  $(x, p)$ . Bien sûr, l'ensemble  $Fix(\eta_g)$  correspond à la projection sur le plan  $(x, p)$  de la courbe criminant  $\tilde{\Gamma} \subset S_g$ .

Dans ce paragraphe nous allons présenter la preuve du Théorème B de l'introduction qui dit qu'il n'existe pas de modèle canonique pour une métrique analytique réelle générique dans un voisinage d'un godron générique. La classification des modèles conformes des godrons génériques sera effectuée à travers la classification des couples  $(V_g, \eta_g)$ , à la conjugaison par un difféomorphisme près. Avant de préciser l'espace des objets avec lesquels on va travailler, on remarque le fait suivant :

**Lemme 7** *Le champ de directions  $V_g$  est  $\eta_g$ -invariant sur la courbe  $Fix(\eta_g)$  et seulement sur cette courbe.*

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $\pi_{xy} \circ \eta_g = \pi_{xy}$ . □

Maintenant on peut introduire la définition suivante :

**Définition.** Un couple  $(V, \eta)$ , constitué d'un germe en l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  d'un champ de directions holomorphe  $V$  et d'un germe en l'origine d'une involution  $\eta$ , tous les deux commutant avec l'involution complexe  $\sigma : (x, p) \mapsto (\bar{x}, \bar{p})$ , sera appelé **un couple admissible** si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Le champ  $V$  admet un point singulier non dégénéré en l'origine ;
- (ii) L'ensemble  $Fix(\eta)$  est une courbe lisse passant par l'origine ;
- (iii) Le champ  $V$  est  $\eta$ -invariant en un point  $(x, p)$  si et seulement si  $(x, p) \in Fix(\eta)$ .

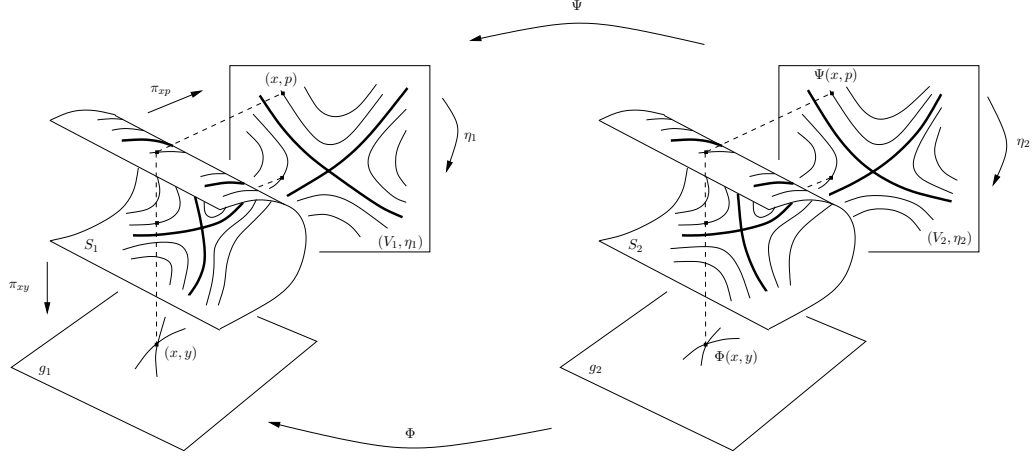
On montre que la classification des couples admissibles  $(V, \eta)$  permet de classifier les modèles conformes des godrons génériques.

**Lemme 8** *Supposons qu'on ait deux germes de métriques  $g_1$  et  $g_2$  en l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  et soit  $(V_1, \eta_1)$  et  $(V_2, \eta_2)$  les couples (germe de champ de directions, germe d'involution) associés. Les deux conditions sont équivalentes :*

1. *Il existe un changement de coordonnées  $\Phi$  dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ , tel que la métrique  $\Phi_*g_1$  est conformément équivalente à  $g_2$ .*
2. *Il existe un difféomorphisme  $\Psi$  dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  tel que  $V_2 = \Psi_*V_1$  et  $\eta_2 = \Psi^{-1} \circ \eta_1 \circ \Psi$ .*

**Preuve.** Supposons que  $g_2$  soit conformément équivalente à  $\Phi_*g_1$  dans un voisinage de l'origine  $U \subset \mathbb{C}^2$ . Notons  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ ,  $\Phi_{1,2} : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Soient  $y = S_1(x, p)$  et  $y = S_2(x, p)$  les équations des deux surfaces dans l'espace de 1-jets correspondant à nos métriques. Soit  $(x, p)$  un point dans le domaine de définition du champ  $V_2$ . Pour construire le difféomorphisme  $\Psi$ , on projette tout d'abord le point  $(x, p)$  sur la surface  $S_2$  et puis sur  $U$  - on obtient un point  $(x, S_2(x, p))$ . De plus, si  $(x, p) \notin Fix(\eta_2)$ , on a en ce point une direction  $W_2(x, p)$ , isotrope pour la métrique  $g_2$ , qui est l'image de la direction  $V_2(x, p)$  par cette double projection. On applique maintenant le difféomorphisme  $\Phi$ . Si  $(x, p) \in Fix(\eta_2)$ ,

il existe un unique point sur la surface  $S_1$  situé au-dessus du point  $\Phi(x, S_2(x, p))$ . On prend sa projection sur le plan  $(x, p)$  comme l'image par  $\Psi$  du point  $(x, p)$ . Si  $(x, p) \notin \text{Fix}(\eta_2)$ , on a le choix entre deux points différents sur la surface  $S_1$  correspondant à  $\Phi(x, S_2(x, p))$ . On choisit celui dont la troisième coordonnée est donnée par l'image de la direction  $W_2(x, p)$  par la différentielle de  $\Phi$ . En le projetant sur le plan  $(x, p)$  on obtient l'image par  $\Psi$  de notre point de départ.



**Figure 7.** La conjugaison des métriques équivaut la conjugaison des couples  $(V, \eta)$ .

On peut exprimer  $\Psi$  sous la forme explicite suivante :

$$\Psi_1(x, p) = \Phi_1(x, S_2(x, p)),$$

$$\Psi_2(x, p) = \frac{\Phi_{2x}(x, S_2(x, p)) + p\Phi_{2y}(x, S_2(x, p))}{\Phi_{1x}(x, S_2(x, p)) + p\Phi_{1y}(x, S_2(x, p))}.$$

Par la construction même, l'application  $\Psi$  est bijective. C'est un difféomorphisme d'un voisinage de l'origine, privé de la courbe  $\text{Fix}(\eta_2)$ , sur un voisinage de l'origine privé de  $\text{Fix}(\eta_1)$ . On en déduit que  $\Psi$  est le difféomorphisme cherché car il est facile de vérifier que  $V_2 = \Psi_*V_1$  et  $\eta_2 = \Psi^{-1} \circ \eta_1 \circ \Psi$ .

Réciproquement, supposons que les couples  $(V_1, \eta_1)$  et  $(V_2, \eta_2)$  proviennent de deux métriques  $g_1$  et  $g_2$  et qu'il existe un difféomorphisme  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$  qui les conjugue. Étant donné un point  $(x, p)$  dans le domaine de définition de  $\Psi$ , il lui correspond exactement un point  $(x, S_2(x, p))$  dans le plan  $(x, y)$ . De même, on a exactement un point  $(\Psi_1(x, p), S_1(\Psi_1(x, p), \Psi_2(x, p)))$  correspondant à l'image par  $\Psi$  du point  $(x, p)$ . On définit  $\Phi$  par

$$\Phi : (x, S_2(x, p)) \mapsto (\Psi_1(x, p), S_1(\Psi_1(x, p), \Psi_2(x, p))).$$

Encore une fois par la construction même, on voit que  $\Phi$  envoie les directions isotropes de la métrique  $g_2$  sur celles de la métrique  $g_1$ , d'où  $\Phi_*g_1$  et  $g_2$  sont conformément équivalentes dans un voisinage de l'origine.  $\square$

On prouve maintenant qu'à tout couple admissible  $(V, \eta)$  il correspond une classe conforme de métrique complexe admettant un godron en l'origine (cf. Theorem 5 de [5]).



**Lemme 9** Soit  $(V, \eta)$  un couple admissible. Il existe un germe de métrique complexe en l'origine dans  $\mathbb{C}^2$ , tel que le couple  $(V_g, \eta_g)$  associé est conjugué par un difféomorphisme à  $(V, \eta)$ .

**Preuve.** Soit  $(V, \eta)$  un couple admissible. Par un changement holomorphe de coordonnées on peut toujours se ramener au cas où l'involution  $\eta$  devient l'involution classique  $\tau : (x, p) \mapsto (x, -p)$ . Dans ce cas, le champ  $V$  est vertical sur la droite complexe  $\{p = 0\}$ . Il est donc engendré par un champ de vecteurs  $\tilde{V}$  de la forme  $\tilde{V}(x, p) = p \frac{\partial}{\partial x} + (A(x, p^2) + pB(x, p^2)) \frac{\partial}{\partial p}$ . On va projeter ce champ de vecteurs sur le plan  $(x, y)$ , en passant par la surface  $y = p^2$  qui “commute” bien sûr avec  $\tau$ . Dans les coordonnées  $(x, y) = (x, p^2)$  on obtient une métrique  $g$  donnée par la forme quadratique

$$4(A(x, y)^2 - yB(x, y)^2)dx^2 - 4A(x, y)dxdy + dy^2. \quad (10)$$

Clairement, elle admet un godron non dégénéré en l'origine. On peut lui associer un couple  $(V_g, \eta_g)$  à l'aide de la surface définie par l'équation (10). Grâce à un raisonnement similaire à celui présenté dans la preuve du lemme précédent, on prouve que le couple  $(V_g, \eta_g)$  est conjugué à  $(V, \eta)$ .  $\square$

On présente maintenant la preuve du résultat principal de ce travail.

**Preuve du Théorème B** Notons  $\mathcal{G}$  l'ensemble de germes de métriques analytiques réelles admettant un godron isolé en l'origine dans le plan. On dira que deux germes  $g_1$  et  $g_2$  sont équivalents s'il existe un germe en l'origine d'un difféomorphisme analytique  $\Phi$ , tel que  $\Phi_*g_1$  est conformément équivalent à  $g_2$ . On note ce fait par  $g_1 \sim g_2$ . D'autre part, notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des couples admissibles  $(V, \eta)$  et introduisons une relation d'équivalence  $\approx$  qui dénote le fait que deux couples admissibles sont conjugués par un germe en l'origine d'un difféomorphisme holomorphe  $\Psi$ . Les deux derniers lemmes permettent d'identifier les deux espaces quotients  $\mathcal{G}/\sim$  et  $\mathcal{A}/\approx$ . On va étudier ce deuxième quotient afin d'effectuer une classification des modèles conformes des godrons génériques.

Notons  $L_\mu$  et  $L_\nu$  les champs de directions linéaires, dépendant d'un paramètre réel, engendrés par les champs de vecteurs

$$\tilde{L}_\mu(x, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{L}_\nu(x, p) = \begin{pmatrix} 1 & -\nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}.$$

Soit  $(V, \eta)$  un couple admissible. Notons  $\mu$  le rapport des deux valeurs propres de la partie linéaire de  $V$  en l'origine dans le cas d'une singularité de type col ou nœud. Également, soit  $\nu$  le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle (si celle-ci est non nulle) d'une des valeurs propres correspondantes, dans le cas où c'est un foyer. Le théorème de Poincaré (cf. par exemple [2]) affirme que génériquement, i.e. quand ces valeurs propres ne sont pas résonantes, il existe un germe de difféomorphisme holomorphe  $\Psi_L$  conjuguant  $V$  avec le modèle linéaire  $L_\mu$  ou  $L_\nu$  correspondant. D'autre part, il existe aussi un difféomorphisme  $\Psi_\tau$  conjuguant l'involution  $\eta$  avec l'involution standard  $\tau : (x, p) \mapsto (x, -p)$ . Même si deux champs  $V_1$  et  $V_2$  possèdent le même modèle linéaire et donc peuvent être conjugués par un difféomorphisme, les deux involutions  $\eta_1$  et  $\eta_2$  peuvent ne pas être compatibles avec cette conjugaison. Le vrai problème consiste donc à classifier en même temps les couples des difféomorphismes  $\Psi_L$  et  $\Psi_\tau$  correspondant aux couples admissibles  $(V, \eta)$ .

$$\begin{array}{ccc}
& (V, \eta) & \\
\Psi_L \swarrow & & \searrow \Psi_\tau \\
(L_\mu, \eta_L) & \xleftarrow{h} & (V_\tau, \tau)
\end{array}$$

Soit  $(V, \eta)$  un couple admissible générique et supposons que le modèle linéaire du champ  $V$  soit de type  $L_\mu$ . Notons  $(L_\mu, \eta_L)$  un des modèles linéaires du couple (où  $\eta_L$  est définie à la conjugaison avec un difféomorphisme préservant  $L$  près) et  $(V_\tau, \tau)$  un de ses modèles correspondant à la normalisation de l'involution (où le champ de directions  $V_\tau$  est défini à la conjugaison par un difféomorphisme préservant  $\tau$  près). On va classifier les couples  $(\Psi_L, \Psi_\tau)$  introduits ci-dessus en classifiant les difféomorphismes  $h = \Psi_L \circ \Psi_\tau^{-1}$  conjuguant un modèle d'involution à un modèle linéaire correspondant à un couple admissible.

Représentons  $h$  sous la forme suivante :

$$h(x, p) = (h_1(x, p), h_2(x, p)) = (A(x, p^2) + pB(x, p^2), C(x, p^2) + pD(x, p^2)).$$

Comme on a déjà remarqué, le difféomorphisme  $h$  n'est pas unique. On peut le conjuguer par un difféomorphisme préservant  $\tau$  à la source et par un difféomorphisme préservant  $L_\mu$  à l'arrivée. Il est facile de voir, que dans le cas où  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , donc dans le cas générique, les seuls difféomorphismes préservant le champ linéaire  $L_\mu$  sont ceux de la forme diagonale  $(x, p) \mapsto (\alpha x, \beta p)$ . D'autre part, tout difféomorphisme préservant l'involution  $\tau$  est clairement de la forme  $g(x, p) = (g_1(x, p^2), pg_2(x, p^2))$ . Étant donné un difféomorphisme  $h$ , en le conjuguant à la source par un difféomorphisme  $g$  bien choisi, on peut "tuer" la partie paire en  $p$  de  $h_1$  et la partie impaire en  $p$  de  $h_2$ . Ceci nous permet de nous ramener au cas où

$$h(x, p) = \left( x + \sum_{n, m \geq 0} b_{n, m} x^n p^{2m+1}, \sum_{n, m \geq 0} c_{n, m} x^n p^{2m} + p \right), \quad (11)$$

où  $b_{n, m}, c_{n, m} \in \mathbb{R}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ . Cette forme de difféomorphisme  $h$  est unique dans la classe d'équivalence du couple  $(V, \eta)$ . Réciproquement, pour qu'un difféomorphisme de la forme (11) définisse une classe d'équivalence dans  $\mathcal{A}$ , il faut que  $h_* L_\mu$  soit  $\tau$ -invariant sur la droite  $\{p = 0\}$ . On réécrit cette condition sous la forme  $Dh|_{(x, 0)} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right) = \lambda L_\mu(h(x, 0))$ , où  $\lambda \neq 0$ . Ceci implique que  $h$  doit vérifier

$$\mu \left( \sum_{n \geq 0} b_{n, 0} x^n \right) \left( \sum_{n \geq 0} c_{n, 0} x^n \right) = x. \quad (12)$$

On a prouvé que tout difféomorphisme  $h$  de la forme (11), vérifiant la condition (12), code une classe d'équivalence dans  $\mathcal{A}/\approx$ , qui correspond elle-même à un modèle conforme d'un godron de type col ou nœud générique. La preuve dans le cas d'un godron-foyer est analogue. Ceci finit la preuve du Théorème.  $\square$

**Remarque.** Il n'est pas difficile d'obtenir une métrique mixte représentant chacune des classes d'équivalence données dans la preuve du Théorème B. Une telle classe est codée par un nombre irrationnel  $\mu$  (où  $\nu$  s'il s'agit d'un godron de type topologique "foyer") et un difféomorphisme  $h$  vérifiant (11) et (12). On considère le champ linéaire  $L_\mu$  correspondant et sont "pull-back"  $V$  par difféomorphisme  $h$ . Le couple  $(V, \tau)$  réalise donc notre classe d'équivalence dans le plan  $(x, p)$ . Maintenant on procède comme dans la preuve du Lemme

9. On projette le champ  $V$  à l'aide de la surface  $y = p^2$  afin d'obtenir une métrique  $g$  dans un voisinage de l'origine dans le plan  $(x, y)$  qui peut être considérée comme modèle du godron codé par le couple  $(\mu, h)$ .

## Références

- [1] L. Ahlfors and L. Bers. Riemann's mapping theorem for variable metrics. *Ann. of Math. (2)*, 72 :385–404, 1960.
- [2] V. Arnol'd. *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. “Mir”, Moscow, 1984. Translated from the Russian by Djilali Embarek, Reprint of the 1980 edition.
- [3] S. S. Chern, P. Hartman, and A. Wintner. On isothermic coordinates. *Comment. Math. Helv.*, 28 :301–309, 1954.
- [4] L. Dara. Singularités génériques des équations différentielles multiformes. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 6(2) :95–128, 1975.
- [5] A. A. Davydov. The normal form of a differential equation, that is not solved with respect to the derivative, in the neighborhood of its singular point. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(2) :1–10, 96, 1985.
- [6] C. F. Gauß. *Werke. Band IV*. Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1973. Reprint of the 1873 original.
- [7] Y. L. Kergosien and R. Thom. Sur les points paraboliques des surfaces. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 290(15) :A705–A710, 1980.
- [8] A. Korn. Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen. *Schwarz Abhandlungen*, pages 215–229.
- [9] L. Lichtenstein. Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer, singularitätenfreier Klächenstücke auf ebene Gebiete.
- [10] R. Thom. Sur les équations différentielles multiformes et leurs intégrales singulières. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 3(1) :1–11, 1972.
- [11] R. Uribe-Vargas. New projective invariant associated to the special parabolic points of surfaces and to swallowtails. Preprint of Banach Center, Warsaw.
- [12] R. Uribe-Vargas. Surface evolution, implicit differential equations end pairs of legendrian fibrations. 2005. Preprint.
- [13] A. Wintner. On the local role of the theory of the logarithmic potential in differential geometry. *Amer. J. Math.*, 75 :679–690, 1953.