HAL open science

Discretisations des homeomorphismes du cercle

Tomasz Miernowski

To cite this version:

Tomasz Miernowski. Discretisations des homeomorphismes du cercle. 2006. hal-00020692

HAL Id: hal-00020692

https://hal.science/hal-00020692v1

Preprint submitted on 14 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Discrétisations des homéomorphismes du cercle.

Tomasz Miernowski *

UMPA, ENS Lyon, UMR 5669 CNRS, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France

Résumé

On s'intéresse aux propriétés asymptotiques de la suite des discrétisations uniformes d'un homéomorphisme du cercle. On étudie leurs dépendances en les propriétés arithmétiques du nombre de rotation de l'homéomorphisme en question. En particulier, on considère la structure des cycles périodiques, leurs distributions spatiales et le temps de stabilisation du processus de discrétisation.

Abstract

We are interested in asymptotic properties of the sequence of uniform discretizations of circle homeomorphisms. We investigate their dependance on arithmetic properties of the rotation number of the homeomorphism. In particular, we are interested in the structure of periodic cycles, their spatial distributions and the stabilisation time of the discretization process.

1 Introduction

Soit $f : (M, d) \to (M, d)$ un homéomorphisme d'un espace métrique vu comme système dynamique. Une discrétisation de ce système, avec une précision $\varepsilon > 0$, consiste en la donnée d'un ensemble fini de points $E_\varepsilon \subset M$ et d'une projection $P_\varepsilon : M \to E_\varepsilon$, qui vérifie $d(P_\varepsilon(x), x) \leq \varepsilon$, pour tout $x \in M$. De plus, on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\min\{d(x, y) : x, y \in E_\varepsilon\} > C\varepsilon$, c'est-à-dire que l'ensemble E_ε n'est pas "trop dense" dans M par rapport à la précision ε. Ceci définit une application discrète $f_\varepsilon = P_\varepsilon \circ f : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$, qui approche l'homéomorphisme f quand ε tend vers 0. L'application f_ε ainsi construite sera aussi appelée "une discrétisation" du système continu $f : M \to M$.

L'étude des discrétisations est importante particulièrement du point de vue des simulations numériques, qui constituent un outil puissant dans l'analyse des systèmes dynamiques. Dans ce cas, l'espace M, étant souvent une variété riemannienne, est automatiquement remplacé par un ensemble fini de points, qui forment l'univers de l'ordinateur. Les valeurs de l'application f sont aussi arrondies pour qu'elles puissent être traitées par l'arithmétique finie de la machine. Il faut quand même souligner que notre modèle de discrétisation uniforme est purement théorique. En particulier, il est bien différent des standards IEEE rencontrés dans la grande majorité des ordinateurs, où les nombres réels sont représentés sous le format flottant (*floating-point arithmetics*). En pratique la précision n'est pas la même dans chacun des points de l'espace. Elle est concentrée autour de zéro et devient de moins en moins importante quand le nombre que l'on veut représenter grandit.

Fixons une discrétisation $f_\varepsilon : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$. L'ensemble E_ε étant fini, l'orbite de tout point $x \in E_\varepsilon$ est prépériodique sous l'action de f_ε. La dynamique de l'application f_ε est donc caractérisée par :
• le nombre de cycles périodiques, ainsi que leurs longueurs,
• la taille des bassins d'attraction des cycles (nombre de points attirés par un cycle donné),
• le temps de stabilisation (i.e. le nombre minimal d'itérations de f_ε nécessaire pour envoyer tout point de l'ensemble E_ε sur le cycle périodique correspondant).

La question la plus naturelle qui se pose est de déterminer si le comportement asymptotique, quand $\varepsilon \to 0$, des grandeurs mentionnées ci-dessus, reflète en un certain sens les propriétés de la dynamique continue de départ.

*Adresse e-mail: Tomasz.Miernowski@umpa.ens-lyon.fr

Dans [14] et [15], on trouve une discussion autour d'un phénomène particulièrement intéressant, qui se produit lorsque l'on discrétise un système chaotique. Nombreuses simulations numériques montrent, que dans ce cas les propriétés (asymptotiquement quand $\varepsilon \to 0$) de la famille des applications discrètes (f_ε) ne dépendent pas du choix du difféomorphisme f, mais qu'elles sont plutôt communes à la dynamique chaotique elle-même. Par exemple, le nombre de cycles périodiques de l'application f_ε est typiquement de l'ordre de $\ln(\#E_\varepsilon)$, la longueur de la plus longue orbite périodique est de l'ordre de $\sqrt{\#E_\varepsilon}$, le temps de stabilisation est de l'ordre de $\sqrt{\#E_\varepsilon}$, etc. Ceci correspond aux propriétés asymptotiques, quand $N \to \infty$, des applications aléatoires d'un ensemble à N éléments dans lui-même. On peut donc espérer que, en un certain sens, la dynamique chaotique soit bien approchée par la dynamique aléatoire. En pratique, au lieu de calculer l'orbite exacte d'un point $x \in E_\varepsilon$ sous l'action de f_ε, on pourrait choisir ses images consécutives dans l'ensemble E_ε au hasard. Ce processus doit s'arrêter au moment de la première répétition, car le caractère entièrement déterministe de la dynamique de f_ε oblige le point x à suivre la trajectoire déjà définie. On peut s'attendre donc à ce que l'ensemble de points ainsi obtenu ressemble à une orbite typique de l'application discrète f_ε.

L'exemple classique de l'application $f : [0,1[\to [0,1[$, $x \mapsto 2x \pmod 1$ montre qu'il faut tout de même rester prudent. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit $E_N = \{k/2^N : k = 0, 1, \ldots, 2^N - 1\}$ et on pose $f_N = f_{|E_N} : E_N \to E_N$. On remarque, que pour tout $N \in \mathbb{N}$, tout point de l'ensemble E_N sera envoyé sur le point fixe 0, après au plus N itérations de l'application f_N. Le système continu f est cependant chaotique, ce qui implique qu'il possède une dynamique extrêmement riche. Dans ce cas particulier, la dégénérescence de la dynamique discrète provient bien sûr de la rélation arithmétique entre l'action de f et la définition de l'ensemble E_N.

Dans ce travail, on s'intéresse aux propriétés des discrétisations uniformes des homéomorphismes du cercle. Considérons $\mathbb{S}^1$ comme l'intervalle $[0,1[$ avec les extremités identifées et pour tout $N \in \mathbb{N}$, introduisons l'ensemble de discrétisation $E_N = \{k/N : k = 0, 1, \ldots, N-1\}$, à N éléments uniformément distribués sur le cercle. On définit la projection $P_N : \mathbb{S}^1 \to E_N$ associée, $P_N(x) = k/N$ si et seulement si $(2k-1)/2N \leq x < (2k+1)/2N$, (mod 1), $k = 0, 1, \ldots, N-1$. On a donc construit une suite de discrétisations $f_N = P_N \circ f$, $N \in \mathbb{N}$, dont on va étudier les propriétés asymptotiques, quand N tend vers l'infini. Dans cet article, on montre que le comportement des discrétisations d'un homéomorphisme f dépend des propriétés arithmétiques de son nombre de rotation.

Soit $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ (resp. $Diff_+{}^r(\mathbb{S}^1)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) le groupe des homéomorphismes (resp. difféomorphismes de classe C^r) du cercle préservant l'orientation. On note respectivement $q_N(f)$ et $T_N(f)$ la longueur des cycles périodiques et le temps de stabilisation de la N-ième discrétisation f_N de l'homéomorphisme $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ (lecteur pourra se reporter au paragraphe 2 pour voir les définitions précises). Notre objectif principal est de comprendre la discrétisation d'un difféomorphisme typique dont le nombre de rotation est irrationnel. Nous commençons cependant par le cas plus élémentaire, où ce nombre est rationnel.

Théorème A.1 *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme du cercle de nombre de rotation rationnel.*

1. *Si f est de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ et possède au moins une orbite périodique stable, alors pour tout N suffisamment grand, on a $q_N(f) = q$.*
2. *Dans l'ensemble des homéomorphismes semi-stables de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, il existe un ensemble ouvert dense d'homéomorphismes pour lesquels il existe une sous-suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de discrétisations vérifiant $q_{N_k}(f) = q$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Afin de présenter le résultat concernant le temps de stabilisation on introduit les notations suivantes. Soit $\phi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions positives. Par $\phi \asymp \psi$ on notera le fait que ϕ et ψ ont asymptotiquement le même ordre de croissance à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que $a \leq \phi(N)/\psi(N) \leq b$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Par un élément "générique" d'un espace topologique on comprend tout élément d'un ensemble contenant un ensemble de type G_δ dense dans cet espace.

Théorème A.2 *Soit $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Pour un homéomorphisme générique dans l'ensemble des homéomorphismes de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ on a $T_N(f) \asymp \ln N$.*

Avant de traiter le cas des homéomorphismes de nombre de rotation irrationnel, on introduit

la terminologie qui nous permettera de parler de deux notions différentes de "comportement typique" de leurs discrétisations. On note $Homeo_+^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ (resp. $Diff_+^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$) le sous-ensemble des homéomorphismes (resp. difféomorphismes de classe C^r) du cercle préservant l'orientation, dont le nombre de rotation est irrationnel. Soit $X_W \subset Homeo_+^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ l'ensemble des homéomorphismes de nombre de rotation irrationnel vérifiant une certaine propriété W.

- On dit que la propriété W est *C^r-générique* (typique au sens de Baire) dans la famille des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel, si l'ensemble X_W contient un ensemble de type G_δ dense dans $Diff_+^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$.
- On dit que la propriété W est *C^r-prévalente* (typique au sens de Kolmogorov) dans la famille des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel, si pour une famille de classe C^1 à k paramètres, $u : [0,1]^k \to Diff_+^r(\mathbb{S}^1)$, de difféomorphismes de classe C^r, contenant des difféomorphismes irrationnels, générique, on a $m_k(\{t \in [0,1]^k : u(t) \in X_W\}) > 0$, où m_k désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^k$.

Les deux théorèmes suivants montrent les différences entre les comportements générique et prévalent des discrétisations des difféomorphismes irrationnels du cercle.

Théorème B *Fixons deux fonctions $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ telles que $\lim_{N\to\infty} \phi_1(N) = +\infty$ et $\lim_{N\to\infty} \phi_2(N)/\sqrt{N} = 0$.*

1. *Soit $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. La propriété $\liminf_{N\to\infty} \frac{q_N(f)}{\phi_1(N)} = 0$ est C^r-générique dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels du cercle.*
2. *Les propriétés $\limsup_{N\to\infty} \frac{T_N(f)}{\phi_2(N)} = +\infty$ et $\liminf_{N\to\infty} \frac{T_N(f)}{N} = 0$ sont C^ω-génériques dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels du cercle.*

Théorème C *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. La propriété $q_N(f) \geq KN^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$, où $K > 0$ est une constante ne dépendant pas de N, est C^r-prévalente, $3 \leq r \leq \omega$, dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels du cercle.*

Dans la preuve du Théorème B, on s'appuie sur l'analyse des discrétisations des difféomorphismes de nombre de rotation rationnel semi-stable, pour en déduire, grâce aux arguments classiques dans des espaces de Baire, le comportement d'un difféomorphisme irrationnel générique. Le Théorème C décrit le comportement des discrétisations des difféomorphismes de nombre de rotation diophantien, ce qui permet de supposer que les difféomorphismes irrationnels du Théorème B possèdent les nombres de rotation qui se laissent bien approcher par des rationnels.

Dans le paragraphe 7, en s'appuyant sur des résultats numériques, on discute aussi le comportement prévalent du temps de stabilisation et du nombre de cycles périodiques (que l'on note $r_N(f)$) des discrétisations d'un tel difféomorphisme. Notamment on propose la conjecture suivante :

Conjecture *Soit $\varepsilon > 0$. Les propriétés $q_N(f) \asymp T_N(f) \asymp N^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$ et $r_N(f) \leq K$, où $K > 0$ est une constante ne dépendant pas de N, sont C^r-prévalentes, $3 \leq r \leq \omega$, dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels du cercle.*

La comparaison de cette conjecture avec la théorie des applications aléatoires des ensembles finis montre que la dynamique "la plus irrationnelle" (diophantienne) sur $\mathbb{S}^1$ peut être asymptotiquement considérée comme "aléatoire".

On s'intéresse aussi à la distribution spatiale des cycles périodiques de l'application discrète f_N. On prouve notamment, que si $f : M \to M$ est un homéomorphisme uniquement ergodique d'une variété compacte M, alors la distribution spatiale des cycles périodiques des applications $(f_N)_{N\in\mathbb{N}}$ associées, approche celle de l'unique mesure de probabilité f-invariante. En particulier, dans le cas des homéomorphismes du cercle on obtient la proposition suivante :

Proposition D *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme uniquement ergodique et soit μ l'unique mesure de probabilité f-invariante. Alors la distribution des cycles périodiques des applications (f_N) sur $\mathbb{S}^1$ tend vers celle de la mesure μ quand N tend vers l'infini.*

La structure de cet article est la suivante. Dans le paragraphe 2, on précise la notion de discrétisation et on fait les premières remarques concernant la structure des cycles périodiques des applications f_N. Le paragraphe 3 est entièrement consacré à l'étude de l'exemple des rotations euclidiennes du cercle. L'étude des discrétisations des homéomorphismes ayant des orbites périodiques fait l'objet des paragraphes 4 et 5 - il en résulte la preuve des Théorèmes A. Grâce au

théorème de Baire, dans le paragraphe 6, on prouve l'existence de difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel, dont les discrétisations héritent des propriétés asymptotiques du cas rationnel semi-stable. On en déduit l'énoncé du Théorème B. Le cas des difféomorphismes irrationnels diophantiens, contenant la preuve du Théorème C et la discussion autour de la Conjecture, est décrit dans le paragraphe 7. Le paragraphe 8 est consacré à la preuve d'une version plus générale de la Proposition D. Le dernier paragraphe donne des détails sur les simulations numériques effectuées pendant la réalisation de ce travail. On y trouve également une comparaison entre les résultats numériques obtenus et les résultats théoriques présentés dans cet article.

Remerciments. Je tiens à remercier Etienne Ghys pour m'avoir fait decouvrir le problème des discrétisations et pour ses nombreuses remarques qui m'ont aidé dans ce travail.

2 Notations et premières remarques

Soit $\mathbb{S}^1$ le cercle unité défini comme le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et soit $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la projection canonique associée. Sur $\mathbb{S}^1$ on considère la métrique quotient provenant de la métrique euclidienne $|\cdot|$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $x, y \in \mathbb{S}^1$ et $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ sont des relevés de x et y à $\mathbb{R}$, on pose $|x-y| = \min_{k\in\mathbb{Z}} |\tilde{x}-\tilde{y}+k|$. On utilisera aussi la notation $d_{\mathbb{S}^1}$ pour la distance induite sur $\mathbb{S}^1$ par $|\cdot|$.

On note $\mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ (resp $\mathit{Diff}_+{}^r(\mathbb{S}^1)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) le groupe des homéomorphismes (resp. difféomorphismes de classe C^r) du cercle qui préservent l'orientation. Sur $\mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, on note alors d_0 la distance qui définit la topologie C^0. De même, par d_r, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note la distance engendrant la topologie C^r sur $\mathit{Diff}_+{}^r(\mathbb{S}^1)$. Dans $\mathit{Diff}_+{}^\omega(\mathbb{S}^1)$ on considère la topologie C^∞. Pour $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ donné, on note $Per(f)$ l'ensemble de ses points périodiques et $Fix(f)$ l'ensemble de ses points fixes. Par $R_\lambda : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\lambda \in [0, 1[$, on notera la rotation euclidienne d'angle $2\pi\lambda$ sur $\mathbb{S}^1$.

Par **relevé à $\mathbb{R}$ de l'homéomorphisme du cercle** f, on désigne tout homéomorphisme $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tel que $f \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$. Le relevé d'un homéomorphisme $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ donné est défini à une translation entière près. Le relevé vérifiant $\tilde{f}(0) = f(0) \in [0, 1[$ sera appelé **le relevé canonique** de l'homéomorphisme f. Par $\tilde{R}_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, 1[$, on notera donc le relevé canonique de la rotation R_λ, i.e. la translation $x \mapsto x + \lambda$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ et $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son relevé canonique. Soit $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Sachant que la limite ci-dessous existe pour tout homéomorphisme f et qu'elle ne dépend pas de $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, on définit le **nombre de rotation** ρ de l'homéomorphisme f :

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}.$$

Cet invariant topologique donne des renseignements concernant la dynamique de l'homéomorphisme en question. L'application $\rho : \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$ est continue pour la topologie C^0 et $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si est seulement si f possède au moins une orbite périodique (de longueur minimale q si on suppose p, q premiers entre eux). Pour plus de résultats concernant le nombre de rotation ρ on pourra se reporter par exemple à [11] ou [9].

Dans cet article on appellera **homéomorphisme rationnel** tout homéomorphisme du cercle de nombre de rotation rationnel, et **homéomorphisme irrationnel** tout homéomorphisme qui n'est pas rationnel. On note respectivement $\mathit{Homeo}_+^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ et $\mathit{Homeo}_+^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ les familles des homéomorphismes rationnels et irrationnels. Les notations $\mathit{Diff}_+{}^{r,\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ et $\mathit{Diff}_+{}^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ correspondantes seront adoptées au cas de difféomorphismes.

On suppose que les fractions qui représentent des nombres de rotation apparaissant dans cet article, sont toujours réduites. Soit $f \in \mathit{Homeo}_+^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$, tel que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, et soit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son relevé canonique. Supposons que f n'est pas conjugué à la rotation $R_{\frac{p}{q}}$ et que $\tilde{f}^q(\tilde{x}) - \tilde{R}_p(\tilde{x}) \geq 0$ (resp. $\tilde{f}^q(\tilde{x}) - \tilde{R}_p(\tilde{x}) \leq 0$) pour tout $\tilde{x} \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on dit que l'homéomorphisme rationnel f est **semi-stable inférieurement** (resp. **semi-stable supérieurement**). Tout homéomorphisme rationnel qui est semi-stable ou conjugué à une rotation, sera appelé **parabolique**. Tout homéomorphisme rationnel qui n'est pas parabolique sera appelé **stable**.

On décrit maintenant le processus de discrétisation qu'on se propose d'étudier. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on introduit l'ensemble de discrétisation $\tilde{E}_N = \{\frac{k}{N}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ et la projection $\tilde{P}_N : \mathbb{R} \to \tilde{E}_N$ donnée par

$$\tilde{P}_N(x) = \frac{k}{N} \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{2k-1}{2N}, \frac{2k+1}{2N}\right[, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

On pose $E_N = P(\tilde{E}_N) \subset \mathbb{S}^1$ et on définit la projection $P_N : \mathbb{S}^1 \to E_N$ de manière que la relation $P_N \circ \Pi = \Pi \circ \tilde{P}_N$ soit vérifiée sur $\tilde{E}_N$. Si on considère $\mathbb{S}^1$ comme l'intervalle $[0,1]$ où on identifie les extrémités, on a tout simplement :

$$P_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2N}\right[\cup \left[\frac{2N-1}{2N}, 1\right[, \\ \frac{k}{N} & \text{si} \quad x \in \left[\frac{2k-1}{2N}, \frac{2k+1}{2N}\right[, k = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{2}$$

Soit $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on définit une application discrète $f_N : E_N \to E_N$, donnée par la formule $f_N = P_N \circ f$, qu'on va appeler **la N-ième discrétisation** de l'homéomorphisme f. Si $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relevé à $\mathbb{R}$ de l'homéomorphisme f, on appellera l'application discrète $\tilde{f}_N = \tilde{P}_N \circ \tilde{f} : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$ **le relevé à $\tilde{E}_N$ de l'application f_N, associé à $\tilde{f}$.**

Pour un homéomorphisme $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ donné, on veut étudier les propriétés asymptotiques, quand N tend vers l'infini, de la dynamique des applications discrètes f_N ainsi construites. On remarque tout d'abord que même si f est un homéomorphisme, l'application $f_N : E_N \to E_N$ n'est pas nécessairement bijective. Deux points différents de l'ensemble E_N, dont les images sous l'action de f sont proches, peuvent avoir même image par f_N. On remarque quand même que f_N préserve l'ordre des points de E_N sur le cercle au sens faible suivant : pour tout $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relevé de f et $\tilde{f}_N : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$ qui lui est associé, on a $\tilde{f}_N(\tilde{x}) \leq \tilde{f}_N(\tilde{y})$ pour tout $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{E}_N$ tels que $\tilde{x} < \tilde{y}$.

Le fait que l'ensemble E_N soit fini pour tout $N \in \mathbb{N}$ implique que l'orbite de tout point $x \in E_N$ sous l'action de f_N aboutit à un cycle périodique $\gamma(x) \subset E_N$. Après au plus $N-1$ itérations, toute la dynamique de l'application discrétisée f_N est concentrée sur un ensemble $C_N \subset E_N$, qui est l'union disjointe des cycles périodiques de f_N :

$$C_N = \bigcup_{x \in E_N} \gamma(x) = \bigcap_{n=0}^{N} f_N^n(E_N) \subseteq \ldots \subseteq f_N^2(E_N) \subseteq f_N(E_N) \subseteq E_N.$$

L'ensemble C_N est toujours non vide et peut être défini comme l'ensemble maximal au sens de l'inclusion parmi tous les sous-ensembles de E_N sur lesquels f_N est bijective.

Soit $\tilde{C}_N = \{x + k : x \in C_N, k \in \mathbb{Z}\} \subset \tilde{E}_N$ le relevé à $\mathbb{R}$ de l'ensemble C_N. Le lemme suivant affirme, que pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé, tous les cycles dans C_N sont du même type :

Lemme 2.1 *Soient $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ et $N \in \mathbb{N}$ fixés. Alors il existe un couple d'entiers (p_N, q_N), premiers entre eux, $p_N \geq 0$, $q_N \geq 1$, tel que pour $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le relevé canonique de f et $\tilde{f}_N : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$, le relevé de f_N associé, on a $\tilde{f}_N^{q_N}(\tilde{x}) - \tilde{x} = p_N$, pour tout $\tilde{x} \in \tilde{C}_N$ (C_N étant l'union des cycles de type (p_N, q_N)).*

Preuve. Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé, C_N est un ensemble fini de points de $\mathbb{S}^1$ et l'action de f_N sur C_N préserve l'ordre des points de C_N sur le cercle au sens strict, car elle est bijective. Ceci implique qu'il existe $g \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ tel que $g_{|C_N} = f_{N|C_N}$, d'où $C_N \subset \mathit{Per}(g)$. On en déduit l'affirmation du lemme, car on sait que toutes les orbites périodiques d'un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation donné, sont du même type (voir par exemple [11], Proposition 11.1.5, p. 390). $\square$

Le nombre rationnel $\frac{p_N}{q_N}$ ainsi obtenu est un équivalent discret du nombre de rotation $\rho(f)$ de l'homéomorphisme f. En effet, on a :

Proposition 2.2 *Pour tout $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, la suite $(\frac{p_N}{q_N})_{N \in \mathbb{N}}$ vérifie*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{p_N}{q_N} = \rho(f). \tag{3}$$

Preuve. On remarque que la définition (1) de la projection $\tilde{P}_N : \mathbb{R} \to \tilde{E}_N$ implique, que pour tout homéomorphisme $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et tout $\tilde{x} \in \tilde{E}_N$ on a

$$(\tilde{R}_{-\frac{1}{2N}} \circ \tilde{f})(\tilde{x}) \leq \tilde{f}_N(\tilde{x}) \leq (\tilde{R}_{\frac{1}{2N}} \circ \tilde{f})(\tilde{x}). \tag{4}$$

Fixons $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et $N \in \mathbb{N}$. Les inégalités (4) impliquent que $\rho(R_{-\frac{1}{2N}} \circ f) \leq \frac{p_N}{q_N} \leq \rho(R_{\frac{1}{2N}} \circ f)$, car le "nombre de rotation" associé à l'application discrète f_N est égal à p_N/q_N. D'autre part, on sait que pour tout homéomorphisme f, l'application $\rho_f : \lambda \mapsto \rho(R_\lambda \circ f)$ est continue et croissante. Ceci implique

$$\left|\rho(f) - \frac{p_N}{q_N}\right| \leq \rho(R_{\frac{1}{2N}} \circ f) - \rho(R_{-\frac{1}{2N}} \circ f) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{5}$$

□

L'estimation (5) et les propriétés du nombre de rotation entraînent :

Corollaire 2.3

- *Supposons que $\rho(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\lim_{N\to\infty} q_N(f) = +\infty$.*
- *Supposons que $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et que f possède au moins une orbite périodique stable. Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $N \geq N_0$, on a $p_N = p$ et $q_N = q$.*
- *Supposons que $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ et que f soit semi-stable supérieurement (resp. inférieurement). Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $N \geq N_0$, on a $\frac{p_N}{q_N} \leq \frac{p}{q}$ (resp. $\frac{p_N}{q_N} \geq \frac{p}{q}$).*

□

Pour terminer ce pargraphe, on introduit une autre caractéristique des discrétisations, **le temps de stabilisation**, que l'on va noter $T_N(f)$. Pour tout homéomorphisme $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on définit :

$$T_N = T_N(f) = \min\{k : {f_N}^k(E_N) = C_N\}.$$

Autrement dit, T_N est défini comme le plus petit nombre d'itérations de l'application f_N nécessaire pour envoyer tout point $x \in E_N$ sur le cycle périodique $\gamma(x) \subset C_N$ correspondant. A partir de la T_N-ième itération, l'action de f_N se stabilise en une bijection de l'ensemble C_N. On a bien sûr $T_N(f) \leq N - 1$, pour tout $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et tout $N \in \mathbb{N}$.

Soit $y, z \in \mathbb{S}^1$. Par $]y, z[\subset \mathbb{S}^1$ on note un intervalle (ouvert) du cercle aux extrémités y et z, obtenu en parcourant le cercle dans la direction de son orientation canonique, partant du point y.

Pour un homéomorphisme $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et $y, z \in \mathbb{S}^1$ on introduit aussi

$$T_N^{y,z}(f) = \max\{k : \ \exists x \in E_N \cap]y, z[, \ \forall i \neq j \text{ dans } \{1, \ldots, k\}, \quad {f_N}^i(x) \neq {f_N}^j(x) \text{ et } f_N^i(x) \in]y, z[\ \},$$

qui désigne la longueur de la plus longue trajectoire injective de l'application $f_N : E_N \to E_N$ contenue dans l'intervalle $]y, z[$. On considère $T_N^{y,z}$ comme une fonction de $N \in \mathbb{N}$.

Dans le pargraphe 5, on va poursuivre l'étude du temps de stabilisation de la discrétisation d'un homéomorphisme du cercle. En particulier, on verra qu'avant d'étudier le comportement de la suite $(T_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$, il est souvent utile d'étudier les suites $(T_N^{y,z}(f))_{N\in\mathbb{N}}$ où $y, z \in Per(f)$. On remarque deux faits suivants dont on se servira dans cet étude.

Remarque 1 Soient $f, g_1, g_2 \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et $y, z \in \mathbb{S}^1$. Supposons que pour tout $\tilde{x} \in]\tilde{y}, \tilde{z}[\subset \mathbb{R}$ on ait $\tilde{g}_1(\tilde{x}) \geq \tilde{f}(\tilde{x}) \geq \tilde{g}_2(\tilde{x}) > \tilde{x}$. Alors , pour tout $N \in \mathbb{N}$, on obtient $T_N^{y,z}(g_1) \leq T_N^{y,z}(f) \leq T_N^{y,z}(g_2)$.

Remarque 2 Supposons que $Fix(f) \neq \emptyset$ et soit $y, z \in Fix(f)$. Supposons que $]y, z[\subset \mathbb{S}^1 \setminus Fix(f)$. Alors le comportement asymptotique de l'application $T_N^{y,z}(f)$, quand N tend vers l'infini, ne dépend que du comportement de l'homéomorphisme f au voisinage des points fixes y et z. En effet, fixons $U(y) = [y, w_1[$ et $U(z) =]w_2, z]$ des voisinages dans $[y, z]$ de y et z respectivement. On peut écrire

$$T_N^{y,z} = T_N^{y,w_1} + T_N^{w_1,w_2} + T_N^{w_2,z}.$$

Comme f n'a pas de point fixe dans $[w_1, w_2]$, f_N aussi est sans point fixe dans $[w_1, w_2]$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. On remarque que la condition (4) implique $\theta_+^{w_1,w_2}(N) \leq T_N^{w_1,w_2} \leq \theta_-^{w_1,w_2}(N)$, où

$$\theta_+^{w_1,w_2}(N) = \min\{k : (\tilde{R}_{\frac{1}{2N}} \circ \tilde{f})^k(\tilde{w}_1) \geq \tilde{w}_2\},$$

$$\theta_-^{w_1,w_2}(N) = \min\{k : (\tilde{R}_{-\frac{1}{2N}} \circ \tilde{f})^k(\tilde{w}_1) \geq \tilde{w}_2\}.$$

De plus, si $N_1 < N_2$ on a

$$\theta_+^{w_1,w_2}(N_1) \leq \theta_+^{w_1,w_2}(N_2) \leq T_{N_2}^{w_1,w_2} \leq \theta_-^{w_1,w_2}(N_2) \leq \theta_-^{w_1,w_2}(N_1).$$

Fixons $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{f} - \mathrm{id} > \frac{1}{2N_0}$ sur $[\tilde{w}_1, \tilde{w}_2]$. Pour tout $N \geq N_0$, on obtient $\theta_+^{w_1,w_2}(N_0) \leq T_N^{w_1,w_2} \leq \theta_-^{w_1,w_2}(N_0)$, et $T_N^{w_1,w_2}$ est borné indépendamment de N.

3 Exemple de la rotation

Ce paragraphe est consacré à l'étude de l'exemple le plus simple d'homéomorphisme du cercle, celui de la rotation $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha \pmod 1$, $\alpha \in]0,1[$. On introduit les notations suivantes : $[x] = Ent[x]$ désigne la partie entière d'un nombre réel x ; pour a et b deux entiers positifs on note $PGCD(a,b)$ le plus grand diviseur commun et $a|b$ le fait que a divise b.

On remarque d'abord, que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in]0,1[$, l'application discrète $(R_\alpha)_N : E_N \to E_N$ est encore une rotation, restreinte à l'ensemble E_N,

$$(R_\alpha)_N : x \mapsto x + \frac{Ent[N\alpha + \frac{1}{2}]}{N} \pmod 1.$$

Ceci implique que $C_N = E_N$ et l'ensemble E_N est l'union des r_N cycles périodiques de l'application $(R_\alpha)_N$, tous de même longueur q_N. Il est facile de voir que $N = q_N r_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, et si $N\alpha + \frac{1}{2} > 0$, on a

$$r_N = PGCD([N\alpha + \tfrac{1}{2}], N). \tag{6}$$

Tout renseignement concernant la dynamique discrète est donc donné par la suite $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, des nombres de cycles des discrétisations.

Dans le cas d'une rotation irrationnelle, le résultat suivant a été énoncé dans [5] et [13] :

Théorème 3.1 *Soit $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, une rotation irrationnelle du cercle et $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, la suite des nombres de cycles des discrétisations de R_α. Alors pour tout $x \in [0,1]$ on a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\left(\left\{\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_N}\right\} \cap [0,x]\right)}{N} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{\frac{1}{n} \leq x} \frac{1}{n^2}.$$

Ce théorème peut être reformulé de manière plus explicite comme suit :

Théorème 3.1' *Soit $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, la suite des nombres de cycles périodiques des discrétisations de la rotation irrationnelle $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Alors pour tout $c \in \mathbb{N}$ on a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{M \leq N : r_M = c\}}{N} = \frac{6}{\pi^2 c^2}.$$

Notons qu'aucun des deux articles cités ci-dessus ne présente de preuve directe de ce théorème, le résultat servant juste comme une illustration dans l'analyse des modèles probabilistes de discrétisation étudiés. L'expression de la suite (r_N) donnée par (6) nous amène à donner une troisième version de l'énoncé du théorème, faisant appel à la théorie géométrique des nombres. Pour cela définissons dans le plan $\mathbb{R}^2$ une région

$$B_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \alpha x - \tfrac{1}{2} < y \leq \alpha x + \tfrac{1}{2}\}. \tag{7}$$

L'égalité (6) implique, que pour tout $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a $r_N = PGCD(N, y(N))$, où $y(N) \in \mathbb{N}$ est défini comme l'unique entier positif, tel que $(N, y(N)) \in B_\alpha$. Une version équivalente du Théorème 3.1 peut être alors énoncée ainsi :

Théorème 3.1" *Soit $\alpha \in]0,1[$ un nombre irrationnel et $B_\alpha \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ une région dans le plan, donnée par (7). Alors, pour tout $c \in \mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \cap B_\alpha : PGCD(a,b) = c,\ a \leq N\}}{N} = \frac{6}{\pi^2 c^2}.$$

La preuve d'un résultat un peu plus général a été donnée par T. Estermann dans [6], on peut aussi se reporter à [17].

On prouve maintenant un résultat analogue à celui du Théorème 3.1, décrivant le comportement de la suite (r_N) associée à une rotation rationnelle (on pourra comparer avec [17]).

Proposition 3.2 *Soit $p, q \in \mathbb{N}$, premiers entre eux, $p < q$, et $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, la suite des nombres de cycles des discrétisations de la rotation rationnelle $R_{\frac{p}{q}}$ du cercle.*

- *Si $N < \frac{q}{2p}$, alors $r_N = N$.*
- *Si $N \geq \frac{q}{2p}$ est de la forme $N = kq$, $k \in \mathbb{N}$, alors $r_N = k$.*
- *Sinon, alors $r_N \in \{1, 2, \ldots, [\frac{q}{2}]\}$ et de plus*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{M \leq N : r_M = c\}}{N} = \begin{cases} \frac{2}{cq} \sum_{r=1}^{\left[\frac{[q/2]}{c}\right]} \frac{\varphi(r)}{r} & \text{si } c = 2, \ldots, [\frac{q}{2}], \\ \frac{2}{q} \sum_{r=1}^{[q/2]} \frac{\varphi(r)}{r} & \text{si } c = 1 \text{ et } 2 \not| q, \\ \frac{2}{q} \sum_{r=1}^{[q/2-1]} \frac{\varphi(r)}{r} + \frac{\varphi(q/2)}{q^2} & \text{si } c = 1 \text{ et } 2|q, \end{cases} \tag{8}$$

où $\varphi(r) = \#\{1 \leq j \leq r : PGCD(j, r) = 1\}$ désigne la fonction d'Euler.

Preuve. Les deux premières affirmations de la proposition sont trivialement satisfaites au vu de la représentation (6) de r_N. Pour démontrer la troisième, on étudie les diviseurs des coordonnées des points de $\mathbb{N}^2$ dans la région $B_{\frac{p}{q}}$. On introduit une famille de $2[\frac{q}{2}] + 1$ demi-droites parallèles, contenues dans la région fermée $\overline{B_{\frac{p}{q}}}$, données par :

$$d_0 : px - qy = 0, \qquad d_r^+ : px - qy = r, \qquad d_r^- : px - qy = -r,$$

avec $x > 0$, $r = 1, 2, \ldots, [\frac{q}{2}]$. Tout point contenu dans $B_{\frac{p}{q}}$, dont les deux coordonnées sont entières, appartient à une de ces droites.

On remarque que les points à deux coordonnées entières appartenant à la droite d_0 correspondent exactement à la sous-suite des discrétisations décrite par la deuxième affirmation de notre proposition. La sous-suite de la suite (r_N) associée prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ et chacune d'elles une seule fois ($r_N = k$ pour $N = kq$, le point de d_0 associé étant (kq, kp)). De ce fait les discrétisations correspondant à la droite d_0 n'affectent pas la distribution asymptotique de la suite (r_N). On s'intéressera donc aux droites $d_r^{+,-}$, $r = 1, 2, \ldots, [q/2]$.

Lemme 3.3 *Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \cap (d_r^+ \cup d_r^-)$, $r \in \{1, 2, \ldots, [\frac{q}{2}]\}$, alors $PGCD(a, b)|r$. De plus pour tout $c \in \mathbb{N}$ divisant r, on a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \cap d_r^+ : PGCD(a, b) = c,\ a \leq N\}}{N} = \frac{\#\{1 \leq j \leq r : PGCD(j, r) = c\}}{rq}.$$

La même distribution est valable pour la droite d_r^-.

Preuve. On considère le cas de la droite d_r^+, $r = 1, 2, \ldots, [\frac{q}{2}]$, le cas de d_r^- étant analogue. Dans ce qui suit, (a, b) désigne toujours un élément de $\mathbb{N}^2$. Le fait que (a, b) appartienne à la droite d_r^+ implique $ap - bq = r$, d'où on déduit immédiatement que $PGCD(a, b)|r$. On remarque aussi que

- si $(a, b) \in d_r^+$, alors $(a + kq, b + kp) \in d_r^+$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,
- si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in d_r^+$, avec $a_1 < a_2$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $a_2 - a_1 = kq$ et $b_2 - b_1 = kp$.

Soit $(a_0, b_0) \in \mathbb{N}$ une des solutions de $a_0p - b_0q = 1$, d'où $PGCD(a_0, b_0) = 1$ et $(ra_0, rb_0) \in d_r^+$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a

$$PGCD(ra_0 + jq, rb_0 + jp) = PGCD(j, r).$$

Ceci montre que la suite $(PGCD(a, b))$, $(a, b) \in \mathbb{N}^2 \cap d_r^+$, est finalement périodique et aboutit sur le cycle $\{PGCD(j, r) : j = 1, \ldots, r\}$. Il en résulte la distribution limite annoncée dans le lemme. □

Revenons à la preuve de la proposition. Pour faciliter les notations, une fois $p/q \in \mathbb{Q}$ fixé on pose $B = B_{p/q}$ et $B^N = B \cap \{x \leq N\}$. Fixons $c \in \{1, 2, \ldots, [q/2]\}$. Pour la plus grande clareté

des formules on notera toutes les variables avec un prime (') après la division par c : $N' = N/c$, $r' = r/c$ etc.

A chaque point $(a,b) \in \mathbb{N}^2 \cap B^N$, tel que $PGCD(a,b) = c$, il correspond un point $(a',b') \in \mathbb{N}^2 \cap B^{[N']}$ dont les coordonnées sont premières entre elles. On remarque aussi que $(a',b') \in d_{r'}^{+,-}$, où $r' \in \{1,2,\ldots,[[q/2]']\}$. Notons

$$m_r(N) = \#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \cap B^N \cap (d_r^+ \cup d_r^-) : PGCD(a,b) = 1\},$$

pour $r = 1,2,\ldots,[\frac{q}{2}]$ et tout $N \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \cap B^N : PGCD(a,b) = c\} = \sum_{r'=1}^{[[q/2]']} m_{r'}\left([N']\right).$$

D'après le lemme précédent, on a la distribution suivante :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{m_r(N)}{N} = \begin{cases} \frac{2\varphi(r)}{rq} & r = 1,2,\ldots,[q/2]-1, \\ \frac{2\varphi(r)}{rq} & r = [q/2] \text{ et } 2 \not| q, \\ \frac{\varphi(r)}{rq} & r = [q/2] \text{ et } 2|q. \end{cases} \tag{9}$$

On remarque que lorsque q est pair, la droite $d_{q/2}^+$ reste en dehors de la région $B_{p/q}$, tandis que quand q est impair les deux droites $d_{[q/2]}^{+,-}$ restent à l'intérieur de $B_{p/q}$, d'où la différence entre ces deux cas dans la formule ci-dessus. Cette distribution implique, que pour tout $c \in \{1,2,\ldots,[\frac{q}{2}]\}$ on obtient

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{M \le N : r_M = c\}}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \cap B^N : PGCD(a,b) = c\}}{N} =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{r'=1}^{[[q/2]']} m_{r'}([N']) = \lim_{N\to\infty} \frac{[N']}{N} \sum_{r'=1}^{[[q/2]']} \frac{m_{r'}([N'])}{[N']} = \frac{2}{cq} \sum_{r'=1}^{[[q/2]']} \frac{\varphi(r')}{r'}.$$

De la même manière on déduit de (9) la distribution limite (8) dans le cas $c = 1$. □

Remarque. La Proposition 3.2 montre que la distribution asymptotique de la suite $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, associée à la rotation rationnelle $R_{\frac{p}{q}}$, ne dépend que de q. De plus, si on fixe $c \in \mathbb{N}$ et on fait tendre q vers l'infini, on obtient la distribution limite $\frac{6}{\pi^2 c^2}$, comme dans le cas irrationnel. Pour un nombre irrationnel $\alpha \in]0,1[$ fixé, on voudrait donc "approcher" la région B_α par des régions $B_{\frac{p_n}{q_n}}$, où $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n = \alpha$, pour trouver directement la distribution annoncée dans le Théorème 3.1. Le mieux que nous sachions faire est de justifier ce passage à la limite dans le cas d'un nombre irrationnel α, qui se laisse bien approcher par des rationnels, c'est-à-dire sous l'hypothèse d'existence d'une suite des rationnels $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tendant vers α et vérifiant $\lim_{n\to\infty} |\alpha q_n - p_n| q_n^2 = 0$. L'ensmeble des irrationnels α admettant cette propriété est malheureusement de mesure de Lebesgue nulle dans $[0,1]$.

4 Homéomorphismes rationnels - longueurs des cycles

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la suite des longueurs des cycles discrétisés dans le cas d'homéomorphismes admettant des orbites périodiques. On s'intéressera surtout au comportement des homéomorphismes paraboliques, qui n'ont que des orbites périodiques semi-stables. En effet, l'ensemble de ces homéomorphismes appartient à l'adhérence de l'ensemble $Homeo_+^{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et dans le paragraphe 6, on verra que typiquement (au sens de Baire) des homéomorphismes irrationnels héritent les propriétés des discrétisations des homéomorphismes rationnels paraboliques.

Le Corollaire 2.3 laisse supposer que dans le cas d'un homéomorphisme rationnel parabolique, les longueurs des cycles des applications f_N peuvent diverger vers l'infini. On va montrer cependant

qu'un homéomorphisme ayant des orbites périodiques semi-stables générique, possède la propriété suivante :

Propriété Q. *On dit qu'un homéomorphisme $f \in Homeo_+^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ possède la Propriété Q, s'il existe une sous-suite $f_{N_k} : E_{N_k} \to E_{N_k}$, $k \in \mathbb{N}$, de discrétisations pour laquelle on a $\frac{p_{N_k}}{q_{N_k}} = \rho(f)$.*

Comme, pour tout $N \in \mathbb{N}$, les entiers p_N et q_N sont premiers entre eux, la Propriété Q implique l'existence d'une sous-suite de discrétisations, dont les cycles périodiques sont de longueur constante, égale à la longueur des orbites périodiques de l'homéomorphisme en question. On remarque que tout homéomorphisme $f \in Homeo_+^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$, ayant une orbite périodique constituée de points rationnels, possède trivialement cette propriété. Ceci est vérifié pour un ensemble dense, mais d'intérieur vide, des homéomorphismes rationnels paraboliques. Pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ soit $F^+_{p/q}$ (resp. $F^-_{p/q}$) l'ensemble des homéomorphismes de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ semi-stables inférieurement (resp. supérieurement). La proposition suivante montre que l'ensemble des homéomorphismes paraboliques admettant la Propriété Q est même plus grand - il contient un ensemble ouvert et dense dans chacun des ensembles $F^{+,-}_{p/q}$.

Proposition 4.1 *Pour tout nombre rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ il existe un ensemble $U^+_{p/q} \subset F^+_{p/q}$ (resp. $U^-_{p/q} \subset F^-_{p/q}$) ouvert et dense dans $F^+_{p/q}$ (resp. $F^-_{p/q}$) des homéomorphismes possédant la Propriété Q.*

Avant de procéder à la preuve de la proposition, on demontrera le lemme suivant, dont on aura besoin pour construire les ensembles $U^{+,-}_{p/q}$.

Lemme 4.2 *Considérons le tore q-dimensionnel $\mathbb{T}^q$ obtenu par identification usuelle des points du bord de $[0,1]^q$. Pour tout $\gamma \in \mathbb{T}^q$ notons $T_\gamma : \mathbb{T}^q \to \mathbb{T}^q$ la translation $x \mapsto x + \gamma \pmod 1$. Alors il existe un ensemble ouvert et dense $\hat{U}_q \subset \mathbb{T}^q$ tel que pour tout $\gamma \in \hat{U}_q$, l'orbite positive $\mathcal{O}^+_\gamma(0)$ du point $0 \in \mathbb{T}^q$ sous l'action de T_γ intersecte une infinité de fois chacun des ensembles $]0, \frac{1}{2}[^q$ et $]\frac{1}{2}, 1[^q$.*

Preuve. On commence par définir les deux ensembles suivants :

$$V_q = \{\gamma \in \mathbb{T}^q : \mathcal{O}^+_\gamma(0) \cap]0, \tfrac{1}{2}[^q \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad W_q = \{\gamma \in \mathbb{T}^q : \mathcal{O}^+_\gamma(0) \cap]\tfrac{1}{2}, 1[^q \neq \emptyset\}.$$

Il est clair que V_q et W_q sont ouverts dans $\mathbb{T}^q$. On va montrer qu'il sont aussi denses. Soit $\gamma_0 \in \mathbb{T}^q$ un point dont toutes les coordonnées (en tant qu'un point de $[0,1[^q$) sont rationnelles. Il existe donc un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $T^m_{\gamma_0}(0) = m\gamma_0 \pmod 1 \ = 0 \in \mathbb{T}^q$. Considérons l'application $S_m : \mathbb{T}^q \to \mathbb{T}^q$ donnée par $S_m(\gamma) = m\gamma \pmod 1$. La restriction de S_m à un voisinage suffisamment petit de γ_0 est un difféomorphisme, d'où son image sera un voisinage de 0. Ceci implique que dans tout voisinage de γ_0 il existe un point $\bar{\gamma}_0$ tel que $S_m(\bar{\gamma}_0) = T^m_{\bar{\gamma}_0}(0) \in]0, \frac{1}{2}[^q$. L'ensemble V_q est donc dense dans le tore et de la même manière on prouve la densité de W_q.

Pour démontrer notre lemme il suffit de prouver que si $\gamma \in V_q$ (respectivement $\gamma \in W_q$) alors $\#\{m \in \mathbb{N} : T^m_\gamma(0) \in]0, \ \frac{1}{2}[^q\} = +\infty$ (respectivement $\#\{m \in \mathbb{N} : T^m_\gamma(0) \in]\frac{1}{2}, 1[^q\} = +\infty$). Dans ce cas on pourra poser $\hat{U}_q = V_q \cap W_q$.

Considérons le tore $\mathbb{T}^q$ en tant qu'un groupe de Lie. Il est facile de voir que pour tout $\gamma \in \mathbb{T}^q$, l'adhérence de l'orbite de 0 sous l'action de T_γ est un sous-groupe fermé et alors une sous-variété (une union finie de tores) de dimension k, $0 \leq k \leq q$. Soit $\gamma \in V_q$ et notons $\Sigma_\gamma = \overline{\mathcal{O}_\gamma(0)}$. Si $\dim(\Sigma_\gamma) = 0$ alors c'est un ensemble fini de points qui sont permutés sous l'action de T_γ et trivialement la semi-orbite positive $\mathcal{O}^+_\gamma(0)$ rencontre $]0, \frac{1}{2}[^q$ une infinité de fois. Si $\dim(\Sigma_\gamma) \geq 1$, alors $\Sigma_\gamma \cap]0, \frac{1}{2}[^q$ est un ensemble non dénombrable. Comme l'orbite $\mathcal{O}_\gamma(0)$ est dense dans Σ, elle rencontre $]0, \frac{1}{2}[^q$ un nombre infini de fois. D'autre part, pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $T^m_\gamma(0) = 1 - T^{-m}_\gamma(0) \pmod 1$. Ceci, avec le fait que $0 \in \mathcal{O}_\gamma(0)$, implique que la semi-orbite positive (tout comme la semi-orbite négative) est dense dans Σ_γ elle-aussi, et alors elle rencontre $]0, \frac{1}{2}[^q$ une infinité de fois. Le même raisonnement s'applique dans le cas de l'ensemble W_q. $\square$

Preuve de la Proposition 4.1 Fixons $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On va présenter d'abord l'idée de la preuve de l'existence de l'ensemble $U^+_{p/q} \subset F^+_{p/q}$. D'après le Corollaire 2.3 on sait que pour tout homéomorphisme $f \in F^+_{p/q}$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\frac{p_N}{q_N} \geq \rho(f) = \frac{p}{q}$. Si on veut que f possède la Propriété Q, il suffit que l'on prouve l'existence d'une sous-suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{p_{N_k}}{q_{N_k}} \leq \rho(f)$ pour tout $k \in N$.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le relevé canonique de f et $\tilde{f}_N : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$ le relevé associé de l'application f_N. Pour prouver que $\frac{p_N}{q_N} \leq \rho(f)$, il suffit que l'on trouve un point $x \in \mathbb{S}^1$ et un point $x_N \in E_N$ tels que leurs relevés vérifient $\tilde{x}_N \leq \tilde{x}$ et $\tilde{f}^k_N(\tilde{x}_N) \leq \tilde{f}^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il faut donc s'assurer que l'orbite discrétisée ne puisse pas "sauter" au-dessus de la vraie orbite de f, c'est-à-dire qu'elle reste toujours "à gauche" par rapport à cette deuxième. On va prouver que ce saut n'est pas possible dès que l'homéomorphisme f possède une orbite périodique $(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ vérifiant $P_N(\gamma_i) \leq \gamma_i$ pour tout $i = 1, \ldots, q$. Le Lemme 4.2 nous aidera à prouver, que l'ensemble des homéomorphismes admettant une orbite périodique qui satisfait à cette propriété pour une infinité d'entiers $N \in \mathbb{N}$, contient un ouvert dense dans $F^+_{p/q}$.

Soit $\hat{U}_q \subset \mathbb{T}^q$ l'ensemble donné par le Lemme 4.2. On définit $U^+_{p/q}$ (resp. $U^-_{p/q}$) l'ensemble des difféomorphismes semi-stables inférieurement (resp. supérieurement), admettant une orbite q-périodique $(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ qui, vue comme un point du tore $\mathbb{T}^q$, appartient à $\hat{U}_q$. D'après le lemme précédent, l'ensemble $\hat{U}_q$ est ouvert et dense dans le tore, ce qui implique que $U^{+,-}_{p/q}$ ainsi construit est ouvert et dense dans $F^{+,-}_{p/q}$. Il reste à montrer que tout $f \in U^{+,-}_{p/q}$ possède la Propriété Q.

Soit $f \in U^+_{p/q}$ et $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$, $\gamma_i \neq \gamma_j$ pour $i \neq j$, une orbite périodique de f, appartenant à $\hat{U}_q$. Le Lemme 4.2 affirme l'existence d'une sous-suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(N_k\gamma_1, \ldots, N_k\gamma_q) \in]0, \tfrac{1}{2}[^q \pmod 1.$$

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Le fait que $N_k\gamma_i \in]0, \frac{1}{2}[$, (mod 1), implique que pour tout $i = 1, \ldots, q$ il existe un entier $n^i_k \in \{0, 1, \ldots, N_k - 1\}$ tel que $\frac{n^i_k}{N_k} < \gamma_i < \frac{2n^i_k+1}{2N_k}$, d'où $P_{N_k}(\gamma_i) = \frac{n^i_k}{N_k} < \gamma_i$. On voit donc que la projection P_{N_k} déplace l'orbite γ "à gauche" sur $\mathbb{S}^1$. Soit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le relevé canonique de f et $\tilde{f}_{N_k} : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$ le relevé associé de l'application f_{N_k}. On obtient

$$\tilde{f}_{N_k}\left(\frac{n^1_k}{N_k}\right) = \tilde{P}_{N_k}\left(\tilde{f}\left(\frac{n^1_k}{N_k}\right)\right) \leq \tilde{P}_{N_k}\left(\tilde{f}(\gamma_1)\right) = \tilde{P}_{N_k}(\gamma_2) < \gamma_2 = \tilde{f}(\gamma_1),$$

$$\tilde{f}^{\,2}_{N_k}\left(\frac{n^1_k}{N_k}\right) = \tilde{P}_{N_k}\left(\tilde{f}\left(\tilde{P}_{N_k}\left(\tilde{f}\left(\frac{n^1_k}{N_k}\right)\right)\right)\right) \leq \tilde{P}_{N_k}\left(\tilde{f}(\tilde{f}(\gamma_1))\right) = \tilde{P}_{N_k}(\gamma_3) < \gamma_3 = \tilde{f}^{\,2}(\gamma_1),$$

et par récurrence $\tilde{f}^{\,m}_{N_k}(\frac{n^1_k}{N_k}) < \tilde{f}^m(\gamma_1)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On peut donc écrire

$$\frac{\tilde{f}^{\,m}_{N_k}\left(\frac{n^1_k}{N_k}\right) - \frac{n^1_k}{N_k}}{m} + \frac{\frac{n^1_k}{N_k} - \gamma_1}{m} < \frac{\tilde{f}^m(\gamma_1) - \gamma_1}{m},$$

d'où

$$\frac{p_{N_k}}{q_{N_k}} = \lim_{m\to\infty} \frac{\tilde{f}^{\,m}_{N_k}\left(\frac{n^1_k}{N_k}\right) - \frac{n^1_k}{N_k}}{m} \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\tilde{f}^m(\gamma_1) - \gamma_1}{m} = \rho(f).$$

On obtient alors $\frac{p_{N_k}}{q_{N_k}} \leq \rho(f)$. D'autre part, f est un homéomorphisme semi-stable inférieurement, donc le Corollaire 2.3 donne l'inégalité inverse. Cela donne la Propriété Q pour l'homéomorphisme f. La démonstration dans le cas où $f \in U^-_{p/q}$ est analogue, ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Soit $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme de nombre de rotation rationnel $p/q \in \mathbb{Q}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $q_N(f) > q$. On vient de voir que dans ce cas toute orbite périodique de l'application discrète f_N doit effectuer "un saut" au-dessus d'un point périodique de l'homéomorphisme f. Ceci permet d'enoncer le résultat suivant concernant le nombre de cycles périodiques d'une discrétisation.

Proposition 4.3 *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme de nombre de rotation rationnel p/q. Supposons que f possède un nombre fini de points périodiques. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $q_N > q$. Alors le nombre de cycles périodiques de l'application discrète f_N est majoré par le nombre de points périodiques de f.*

Preuve. Supposons que $q_N > q$. Soit $x \in C_N$. Il existe deux points $y_1, y_2 \in Per(f)$ tels qu'il n'y a pas d'autre point périodique de f dans l'intervalle $]y_1, y_2[$ et tels que $y_1 \leq x < y_2$. Soit $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le relevé canonique de f, $\tilde{f}_N : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$ le relevé associé de l'application f_N et $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{x}$ les relevés de trois points en question. Si on avait $\tilde{f}^m(\tilde{y}_1) \leq \tilde{f}_N^m(\tilde{x}) \leq \tilde{f}^m(\tilde{y}_2)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on aurait $q_N = q$. Ceci implique qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\tilde{f}(\tilde{f}_N^{k-1}(\tilde{x})) \in [\tilde{f}^k(\tilde{y}_1), \tilde{f}^k(\tilde{y}_2)]$ et $\tilde{f}_N^k(\tilde{x}) \notin [\tilde{f}^k(\tilde{y}_1), \tilde{f}^k(\tilde{y}_2)]$. Il existe alors un point $y \in Per(f)$ tel que $\tilde{f}_N^k(\tilde{x}) = P_N(y)$. Il est aussi facile de voir que si $x' \in C_N$ engendre un autre cycle périodique dans C_N, alors son orbite ne passe pas par $P_N(y)$. On obtient une application injective qui à chaque orbite périodique de l'application discrète f_N associe un point périodique de f. $\square$

Pour terminer ce pargarphe on construit un exemple d'un homéomorphisme de nombre de rotation rationnel, n'admettant pas la Propriété Q.

Exemple. On va présenter la construction d'un homéomorphisme du cercle f de nombre de rotation $\frac{1}{2}$, tel que la suite $(q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini avec N. On verra que la construction présentée ci-dessous s'appuie sur la non existence de la dérivée de l'homéomorphisme f en les points de l'orbite périodique. Il est très probable que la Propriété Q soit satisfaite par tout difféomorphisme du cercle de classe C^1.

L'idée principale de la construction de f repose sur deux faits qui découlent du Lemme 4.2 et de la Proposition 4.1. Premièrement, l'orbite périodique de f doit être de la forme $(\gamma, 1-\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De plus, pour que toute orbite périodique de l'application discrète f_N puisse "sauter" au-dessus de l'orbite $(\gamma, 1-\gamma)$, il faut s'assurer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il reste assez d'espace entre celle-ci et l'ensemble E_N. Comme les points des ensembles E_N sont rationnels, on choisira donc γ irrationnel diophantien.

Soit $\gamma = \frac{\sqrt{2}}{4}$. On sait que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$ on a $|\gamma - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{6q^2}$. Bien sûr $1-\gamma$ possède la même propriété. On va construire f de manière que $(\gamma, 1-\gamma)$ soit son unique orbite périodique. On commence par définir f au voisinage de cette orbite :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - 10^{-3}|\frac{\sqrt{2}}{4} - x|^2 & \text{si} \quad x \in [\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{10}, \frac{\sqrt{2}}{4}], \\ \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} + 10|\frac{\sqrt{2}}{4} - x|^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad x \in]\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{10}], \end{cases} \tag{10}$$

et par une formule analogue, en échangeant $1-\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{4}$, sur l'intervalle $[(1-\frac{\sqrt{2}}{4})-\frac{1}{10}, (1-\frac{\sqrt{2}}{4})+\frac{1}{10}]$. On prolonge f en un homéomorphisme du cercle de sorte que f soit de classe C^1 et concave sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{\gamma, 1-\gamma\}$. Par construction, γ et $1-\gamma$ sont les seuls points fixes de f^2 (les seuls points périodiques de f) et f^2 est concave sur $\mathbb{S}^1 \setminus \{\gamma, 1-\gamma\}$. L'orbite $(\gamma, 1-\gamma)$ est donc semi-stable inférieurement, attractive "à gauche" et répulsive "à droite". On va prouver que si $N \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand et $x \in E_N$, alors $f_N^2(x) > x$, ce qui implique que f n'admet pas la Propriété Q.

Fixons $N \in \mathbb{N}$ grand, disons $N > 100$. On a deux possibilités. Soit $P_N(\gamma) > \gamma$ et $P_N(1-\gamma) < 1-\gamma$, soit $P_N(\gamma) < \gamma$ et $P_N(1-\gamma) > 1-\gamma$. Suposons que l'on soit dans ce premier cas et notons $P_N(\gamma) = \frac{k}{N}$, $P_N(1-\gamma) = \frac{N-k}{N}$.

• Soit $x \in]1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{N}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}[\cap E_N$. On a

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{4} - f(x)\right| = 10^{-3}\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - x\right|^2 < 10^{-3}\frac{25}{N^2} < \frac{1}{24N^2}.$$

D'autre part, la propriété diophantienne donne $|\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{2k-1}{2N}| \geq \frac{1}{6(2N)^2} = \frac{1}{24N^2}$, d'où $f(x) \in]\frac{2k-1}{2N}, \frac{\sqrt{2}}{4}[$

ce qui implique que $f_N(x) = \frac{k}{N} > \frac{\sqrt{2}}{4}$. De plus $|\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{k}{N}| \geq \frac{1}{6N^2}$, d'où

$$\left|1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - f(f_N(x))\right| = 10\left|\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{k}{N}\right|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{N},$$

ce qui implique que $f_N^2(x) > 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} > x$. De même manière on prouve que $f_N^2(x) > x$ pour $x \in]\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{N}, \frac{\sqrt{2}}{4}[\cap E_N$.

• Pour $x \in (]\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{10}, \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{N}[\cup]1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{10}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{5}{N}[) \cap E_N$ il est facile de prouver que $f_N^2(x) > x$ car sur cet ensemble on a $f'(x) < \frac{1}{5000}$ et donc x est fortement attiré par l'orbite périodique.

• Soit $x \in (]\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{10}[\cup]1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{10}[) \cap E_N$. On remarque que $d_{\mathbb{S}^1}(x, \{\frac{\sqrt{2}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\}) \geq \frac{1}{6N^2}$ et l'orbite périodique est suffisamment répulsive pour que $f_N^2(x) > x$.

• Notons $I = \{x \in \mathbb{S}^1 : d_{\mathbb{S}^1}(x, \{\frac{\sqrt{2}}{4}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\}) > \frac{1}{10}\}$. Soit $x \in I \cap E_N$. Le fait que f soit de classe C^1 sur I implique qu'il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend pas de N, telle que

$$|f_N^2(x) - f^2(x)| < \left|f\left(f(x) - \frac{1}{2N}\right) - \frac{1}{2N} - f^2(x)\right| \leq \frac{C+1}{2N}.$$

D'autre part on a $f^2 - \mathrm{id} > \varepsilon > 0$ sur I, où $\varepsilon > 0$ ne dépend pas de N. Alors pour $N > \frac{C+3}{\varepsilon}$ on a $|f^2(x) - x| > \frac{C+3}{N}$, ce qui implique que pour tout N suffisamment grand $f_N^2(x) > x$.

Le raisonnement symétrique s'applique au cas où $P_N(\gamma) < \gamma$ et $P_N(1-\gamma) > 1-\gamma$. L'homéomorphisme f ne satisfait pas la Propriété Q. De plus, de l'analyse effectuée ci-dessus on peut déduire que $\lim_{N\to\infty} q_N = +\infty$.

5 Homéomorphismes rationnels - temps de stabilisation

Dans ce paragraphe, on poursuit l'analyse des homéomorphismes rationnels. Pour un homéomorphisme $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$ fixé, on va étudier le temps de stabilisation des discrétisations de f, en fonction de la finesse $N \in \mathbb{N}$ de la discrétisation. On s'intéressera surtout à son comportement asymptotique quand N tend vers l'infini. Nous commençons cependant par l'étude du comportement de l'application $T_N^{y,z}(f)$, introduite dans le paragraphe 2, où $]y, z[$ est une composante connexe de $\mathbb{S}^1 \setminus \mathit{Per}(f)$.

Tout d'abord on présente le lemme suivant, dont la preuve est un simple calcul, qui sera un outil dans ce qui suit.

Lemme 5.1 *Soit $\Lambda(\tilde{x}) = \lambda\tilde{x} + b$, $\lambda > 1$, $b > 0$, une transformation linéaire de $\mathbb{R}$. Fixons $\delta > 0$. Soit $\tilde{x} \in]-\frac{b}{\lambda}, \delta[$. Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(\tilde{x}) - \tilde{x} > |c|$, on a*

$$\min\{k \in \mathbb{N} : (\tilde{R}_c \circ \Lambda)^k(\tilde{x}) > \delta\} = \mathit{Ent}\left[\frac{1}{\ln\lambda}\left(\ln\left(\delta + \frac{b+c}{\lambda-1}\right) - \ln\left(\tilde{x} + \frac{b+c}{\lambda-1}\right)\right)\right] + 1.$$

Preuve. On remarque que si $\tilde{x} > -\frac{b}{\lambda}$, alors $\Lambda(\tilde{x}) > 0$ et $\Lambda(\tilde{x}) - \tilde{x} > 0$. Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $\Lambda(\tilde{x}) - \tilde{x} > |c|$. Il est facile de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$(\tilde{R}_c \circ \Lambda)^k(\tilde{x}) = \lambda^k\tilde{x} + (\lambda^{k-1} + \ldots + \lambda + 1)(b+c) = \lambda^k\tilde{x} + \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1}(b+c) = \lambda^k\left(\tilde{x} + \frac{b+c}{\lambda-1}\right) - \frac{b+c}{\lambda-1}.$$

Les hypothèses du lemme impliquent que $\tilde{x} + \frac{b+c}{\lambda-1} > 0$, d'où il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(\tilde{R}_c \circ \Lambda)^k(\tilde{x}) > \delta$. De plus, si c'est le cas on a forcement $\lambda^k > (\delta + \frac{b+c}{\lambda-1})(\tilde{x} + \frac{b+c}{\lambda-1})^{-1}$, d'où l'affirmation du lemme. $\square$

On commence notre analyse par le cas d'un homéomorphisme ayant un point fixe isolé. Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ et $y \in Fix(f)$ un point fixe isolé de f. Supposons qu'il existe un voisinage $V \subset \mathbb{S}^1$ du point y et deux constantes $b \geq a > 0$, telles que

$$a|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x}| \leq b|\tilde{x} - \tilde{y}|, \tag{11}$$

pour tout $x \in V$. On dira alors que l'homéomorphisme f est **transverse à l'identité** en y.

Lemme 5.2 *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme tel que $Fix(f) \neq \emptyset$. Soit $y \in Fix(f)$ un point fixe isolé, et $]w_1, w_2[$ un voisinage de y qui ne contient pas d'autre point fixe de f. Supposons que f soit transverse à l'identité en y. Alors on a $T_N^{w_1,w_2}(f) \asymp \ln N$.*

Preuve. Dans notre cas particulier, le comportement de f est du même type dans $]w_1, y]$ et dans $[y, w_2[$. Grâce à la deuxième remarque faite à la fin du pargraphe 2, il suffit donc de montrer que $T_N^{y,w}(f) \asymp \ln N$, où w est un point dans $]y, w_2[$.

Sans perte de généralité on peut supposer que $\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x} > 0$ pour tout $x \in]y, w_2[$. Notons $\phi_1, \phi_2 : [\tilde{y}, \tilde{w}_2[\to \mathbb{R}$ deux fonctions linéaires données par $\phi_1(\tilde{x}) = a(\tilde{x} - \tilde{y})$ et $\phi_2(\tilde{x}) = b(\tilde{x} - \tilde{y})$.

Fixons $w \in]y, w_2[$ et $N \in \mathbb{N}$. Tout point $x \in E_N \cap]y, w[$ tel que $\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x} < \frac{1}{2N}$, est fixé par f_N. Il est donc évident que la plus longue trajectoire injective de f_N contenue dans $]y, w[$ sera celle du point

$$x_N = \min\{x \in E_N \cap]y, w[: \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x} \geq \tfrac{1}{2N}\}.$$

La condition (11) implique que $x_N \in \left[y + \frac{1}{2N(\Lambda-1)}, y + \frac{1}{2N(\lambda-1)}\right[$. Notons $y_1 = y_1(N)$ et $y_2 = y_2(N)$ l'extremité gauche et droite de cet intervalle respectivement. Les estimations (4) et (11) donnent

$$\min\left\{k \in \mathbb{N} : (\tilde{R}_{\frac{1}{2N}} \circ (\phi_2 + \mathrm{id}))^k(\tilde{y_2}) > \tilde{w}\right\} \leq T_N^{y,w} \leq \min\left\{k \in \mathbb{N} : (\tilde{R}_{-\frac{1}{2N}} \circ (\phi_1 + \mathrm{id}))^k(\tilde{y_1}) > \tilde{w}\right\}.$$

Comme ϕ_1 et ϕ_2 sont linéaires, le Lemme 5.1 entraîne que $T_N^{y,w}(f)$ croît logarithmiquement. $\square$

Soit toujours $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ admettant un point fixe isolé $y \in Fix(f)$. Supposons maintenant qu'il existe un voisnage $V \subset \mathbb{S}^1$ de y, deux constantes $b \geq a > 0$ et un entier $n \geq 2$, tels que

$$a|\tilde{x} - \tilde{y}|^n \leq |\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x}| \leq b|\tilde{x} - \tilde{y}|^n, \tag{12}$$

pour tout $x \in V$. On dira que f est **tangent à l'identité** en y et l'exposant n sera appelé **l'ordre de contact** entre f et l'identité en y. Ceci implique en particulier que f est différentiable en y et que $f'(y) = 1$.

On demontrera le lemme suivant.

Lemme 5.3 *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ tel que $Fix(f) \neq \emptyset$ et soit $y \in Fix(f)$ un point fixe isolé. Supposons que f soit tangent à l'identité en y avec l'ordre de contact $n \geq 2$. Alors $T_N^{w_1,w_2}(f) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$.*

Preuve. Comme dans la preuve du lemme précédent, il suffit de montrer que $T_N^{y,w}(f) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$, où w est un point dans $]y, w_2[$. Encore une fois, sans perdre de généralité, on peut supposer que $\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{x} > 0$ pour tout $x \in]y, w_2[$. Notons $\phi_1, \phi_2 : [\tilde{y}, \tilde{w_2}[\to \mathbb{R}$ deux fonctions données par $\phi_1(\tilde{x}) = a(\tilde{x} - \tilde{y})^n$ et $\phi_2(\tilde{x}) = b(\tilde{x} - \tilde{y})^n$. En choisissant $w \in]y, w_2[$ suffisamment proche de y, on peut construire deux homéomorphismes $g_1, g_2 \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, tel que $\tilde{g}_i(\tilde{x}) = \tilde{x} + \phi_i(\tilde{x})$, $i = 1, 2$. On a $\tilde{g}_1 \leq \tilde{f} \leq \tilde{g}_2$ sur $[\tilde{y}, \tilde{w}]$. Il suffit donc de prouver que $T_N^{y,w}(g_i) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$, $i = 1, 2$.

Pour simplifier les notations supposons que $y = 0 \in \mathbb{S}^1$ et considérons un homéomorphisme $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ donné sur l'intervalle $[0, w[\subset \mathbb{S}^1$ par $g(x) = x + \phi(x)$, où $\phi(x) = ax^n$. Il faut que l'on prouve que $T_N^{0,w}(g) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$ indépendamment de la constante $a > 0$.

Fixons $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ notons

$$A_N^k = \{x \in]0, w[: \tfrac{2k-1}{2N} \leq \phi(x) < \tfrac{2k+1}{2N}\} = \{x \in]0, w[: \phi^{-1}(\tfrac{2k-1}{2N}) \leq x < \phi^{-1}(\tfrac{2k+1}{2N})\}.$$

L'ensemble $E_N \cap A_N^0$ est fixé par g_N et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, w[$ on a $g_N(x) = x + \frac{k}{N}$ si et seulement si $x \in A_N^k$. Ceci implique que toute orbite de l'application discrète g_N, traversant

l'intervalle A_N^k, passe dans son interieur un temps égal à $Ent[\frac{N|A_N^k|}{k}]$ ou $Ent[\frac{N|A_N^k|}{k}]+1$, où on note $|A_N^k|$ la longueur de A_N^k. On obtient donc l'estimation suivante (voir figure 1) :

$$\sum_{k=1}^{k(N)} Ent\left[\frac{N|A_N^k|}{k}\right] + T_N^{w_N,w}(g) \leq T_N^{0,w}(g) \leq \sum_{k=1}^{k(N)} Ent\left[\frac{N|A_N^k|}{k}\right] + k(N) + T_N^{w_N,w}(g), \tag{13}$$

où $w_N = \phi^{-1}(\frac{2k(N)+1}{2N}) \in]0,w[$ et $k(\cdot) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sera défini dans ce qui suit.

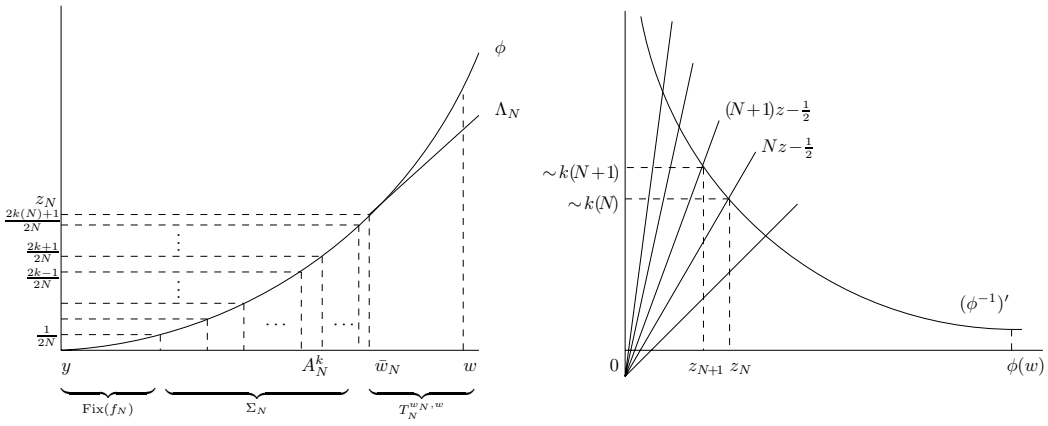

FIG. 1 – Représentation de $T_N(f)$ et construction de la suite $k(N)$ associée.

On remarque que les termes de la somme dans (13) sont non nuls seulement si $N|A_N^k| \geq k$. Ceci nous indique la façon de définir la fonction $k(N)$. La convexité de ϕ sur $]0,w[$ implique

$$(\phi^{-1})'(\tfrac{2k-1}{2N}) \geq N|A_N^k| = \frac{\phi^{-1}(\frac{2k+1}{2N}) - \phi^{-1}(\frac{2k-1}{2N})}{\frac{1}{N}} \geq (\phi^{-1})'(\tfrac{2k+1}{2N}).$$

Pour que la condition $N|A_N^k| \geq k$ soit vérifiée pour tout $k = 1, 2, \ldots, k(N)$, définissons pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand

$$k(N) = \max\{k : (\phi^{-1})'(\tfrac{2k+1}{2N}) \geq k\}. \tag{14}$$

Cette définition entraîne immédiatement que $(\phi^{-1})'(\frac{2k(N)+1}{2N}) > k(N)$ et $(\phi^{-1})'(\frac{2k(N)+3}{2N}) \leq k(N)+1$. Introduisant une suite $(z_N)_{N\in\mathbb{N}}$ par la relation suivante (voir figure 1)

$$(\phi^{-1})'(z_N) = Nz_N - \frac{1}{2}, \tag{15}$$

on peut aussi représenter $k(N)$ sous la forme

$$k(N) = Ent[Nz_N - \tfrac{1}{2}] = Ent[(\phi^{-1})'(z_N)].$$

En même temps il est facile de voir qu'on peut modifier la suite (z_N) en exigeant $(\phi^{-1})'(z_N) = Nz_N$, ce qui facilite le calcul et ne change pas l'ordre de croissance $k(N) \asymp (\phi^{-1})'(z_N)$.

L'estimation (13) montre que pour trouver l'ordre de croissance de $T_N^{0,w}(g)$ il faut estimer l'ordre des trois termes suivants : $k(N)$, $T_N^{w_N,w}(g)$ et $\Sigma_N(g) = \sum_{k=1}^{k(N)} \frac{N|A_N^k|}{k}$. On commence par le deuxième. Posons $\bar{w}_N = \phi^{-1}(z_N)$, où z_N est donné par (15). On a

$$|\bar{w}_N - w_N| \leq \left|\phi^{-1}(\tfrac{2k(N)+3}{2N}) - \phi^{-1}(\tfrac{2k(N)+1}{2N})\right| \leq \tfrac{k(N)+1}{N},$$

d'où $T_N^{w_N,w}(g) \leq T_N^{\bar{w}_N,w}(g) + k(N)$. Soit $\lambda_N = \phi'(\bar{w}_N)$. On a

$$\frac{1}{\lambda_N} = \frac{1}{\phi'(\bar{w}_N)} = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(z_N))} = (\phi^{-1})'(z_N) = Nz_N - \frac{1}{2} \in]k(N), k(N)+1[.$$

Ceci implique $\lambda_N \in]\frac{1}{k(N)+1}, \frac{1}{k(N)}[$. Comme ϕ est convexe, on a aussi

$$g(x) \geq x + \Lambda_N(x) = x + \lambda_N(x - \bar{w}_N) + z_N$$

pour tout $x \in [\bar{w}_N, w[$. Cette analyse permet de majorer $T_N^{w_N,w}(g)$, avec l'aide de Lemme 5.1, de la manière suivante :

$$T_N^{w_N,w}(g) \leq T_N^{\bar{w}_N,w}(g) + k(N) \leq T_N^{\bar{w}_N,w}(\Lambda_N + \mathrm{id}) + k(N) =$$

$$Ent\left[\frac{1}{\ln(1+\lambda_N)}\left(\ln\left(w + \frac{z_N - \lambda_N\bar{w}_N - \frac{1}{2N}}{\lambda_N}\right) - \ln\left(\bar{w}_N + \frac{z_N - \lambda_N\bar{w}_N - \frac{1}{2N}}{\lambda_N}\right)\right)\right] + k(N) + 1 =$$

$$Ent\left[\frac{1}{\ln(1+\lambda_N)}\ln\left(1 + (w - \bar{w}_N)\frac{\lambda_N}{z_N - \frac{1}{2N}}\right)\right] + k(N) + 1 \leq$$

$$Ent\left[\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{k(N)+1})}\ln\left(1 + (w - y)\frac{N}{k(N)^2}\right)\right] + k(N) + 1. \tag{16}$$

En ce qui concerne l'estimation de $\Sigma_N(g)$, on a

$$\sum_{k=1}^{k(N)} \frac{1}{k}(\phi^{-1})'(\tfrac{2k-1}{2N}) \geq \Sigma_N(g) = \sum_{k=1}^{k(N)} \frac{\phi^{-1}(\frac{2k+1}{2N}) - \phi^{-1}(\frac{2k-1}{2N})}{\frac{k}{N}} \geq \sum_{k=1}^{k(N)} \frac{1}{k}(\phi^{-1})'(\tfrac{2k+1}{2N}). \tag{17}$$

Dans notre cas particulier où $\phi(x) = ax^n$, il est facile de voir que $k(N) \asymp N^{\frac{n-1}{2n-1}}$. De plus l'estimation (16) implique que l'ordre de croissance de $T_N^{w_N,w}(g)$ est au plus égal à $N^{\frac{n-1}{2n-1}}\ln N$. Dans l'estimation de $T_N^{0,w}(g)$, l'ordre dominant en N vient alors de la somme $\Sigma_N(g)$. Effectivement, reprenons les inégalités (17) :

$$\sum_{k=1}^{k(N)} \frac{1}{nk}\left(\frac{2k+1}{2N}\right)^{\frac{1-n}{n}} \leq \Sigma_N(g) \leq \sum_{k=1}^{k(N)} \frac{1}{nk}\left(\frac{2k-1}{2N}\right)^{\frac{1-n}{n}}.$$

Comme les séries $\sum_1^\infty \frac{1}{k}(2k \pm 1)^{\frac{1-n}{n}}$ convergent, ceci implique que $\Sigma_N(g) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$. Les inégalités (13) entraînent l'ordre $N^{\frac{n-1}{n}}$ de croissance de $T_N^{0,w}(g)$. Ceci conclut la preuve du lemme. □

Remarque. L'idée générale permettant d'obtenir les diverses estimations dans la preuve du Lemme 5.3 marche pour tout homéomorphisme $g \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ qui peut être représenté dans un voisinage "à droite" $[y, w[$ de son point fixe isolé $y \in Fix(g)$ sous la forme $g = \mathrm{id} + \phi$, où ϕ est une fonction de classe C^1, croissante, convexe et telle que $\lim_{x\to y^+} \phi'(x) = 0$. En particulier, l'exposant $n \geq 2$ apparaîssant dans la définition de tangence à l'identité peut être remplacé par un nombre réel $\alpha > 1$ et une version modifiée du lemme sera toujours vraie.

Maintenant on s'intéresse plus généralement aux homéomorphismes ayant de points périodiques. Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme de nombre de rotation $\rho(f) = p/q$. Dans ce cas f^q admet de points fixes et on peut alors parler de tangence ou transversalité de f^q par rapport à l'identité en un point périodique isolé de f.

Proposition 5.4 *Soit $f \in Homeo_+^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme rationnel, ayant un nombre fini de points périodiques. Supposons que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, avec p et q premiers entre eux.*

(i). Si f^q est transverse à l'identité en tout point $y \in Per(f)$, alors $T_N(f) \asymp \ln N$.

(ii). Si le maximum des ordres de contact entre f^q et l'identité sur l'ensemble des points périodiques de f est égal à n ($n \geq 2$), alors $T_N(f) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$.

Preuve. Dans le cas d'un homéomorphisme $f \in Homeo_+^{\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ ayant des points fixes, comme $\#Fix(f) < \infty$, on déduit l'énoncé de la proposition directement des Lemmes 5.2 et 5.3.

Supposons maintenant que $\rho(f) = \frac{p}{q}$, $q \geq 2$. On remarque que l'homéomorphisme f est lipschitzien au voisinage de l'ensemble de ses points périodiques. Notons par $L > 0$ la constante de

Lipschitz correspondante. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et tout $x \in E_N$ suffisamment proche de l'ensemble $Per(f)$, on a

$$|(f_N)^q(x) - f^q(x)| \leq \frac{c}{2N},$$

où $c = \frac{L^q-1}{L-1}$ ne dépend pas de N. On remarque que ceci implique

$$|(f_N)^q(x) - (f^q)_N(x)| \leq \frac{c+1}{2N},$$

pour tout $x \in E_N$. On en déduit facilement qu'une orbite injective de $(f_N)^q$ ne peut effectuer qu'un nombre fini, majoré indépendamment de N, de tours autour du cercle.

Pour prouver notre proposition, il est donc suffisant de calculer l'ordre maximal de la longueur d'une orbite de l'application f_N, qui fait un seul tour de $\mathbb{S}^1$:

$$T_N^1(f) = \max_{x \in E_N} \{k : f_N^i(x) \neq f_N^j(x) \text{ pour } i \neq j,\ i,j = 0,1,\ldots,k, \text{ et } |\tilde{f}_N^k(\tilde{x}) - \tilde{x}| < 1\},$$

où $\tilde{f}_N : \tilde{E}_N \to \tilde{E}_N$ est un relevé canonique de l'application f_N et $\tilde{x}$ un relevé du point x.

Sur l'ensemble $B_N = \{x \in \mathbb{S}^1 : |f^q(x) - x| > \frac{c}{2N}\}$, l'estimation de $T_N^1(f)$ est la même que celle de $T_{Ent[N/c]}(f^q)$, qui est donnée par les deux lemmes cités ci-dessus et qui correspond à celle énoncée dans la proposition. Pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, le complémentaire dans $\mathbb{S}^1$ de l'ensemble B_N est inclus dans une union d'intervalles de cercle, chacun contenant un point fixe de f^q. Les longueurs de ces intervalles peuvent être majorées par :

(i). λN^{-1}, avec $\lambda > 0$ ne dépendant pas de N, dans le cas transverse ;

(ii). $\lambda N^{-\frac{1}{n}}$, avec $\lambda > 0$ ne dépendant pas de N, dans le cas de la tangence d'ordre n.

On voit donc que $T_N^1(f)$ est d'ordre 1 sur $\mathbb{S}^1 \setminus B_N$ dans le premier cas et d'ordre au plus $N^{\frac{n-1}{n}}$ dans le deuxième. Ceci conclut la preuve de la proposition. □

La Proposition 5.4 et le raisonnement présenté dans sa preuve permettent d'énoncer les corollaires suivants :

Corollaire 5.5 *Soit $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$ un homéomorphisme de nombre de rotation rationnel $\rho(f) = \frac{p}{q}$, ayant un nombre fini de points périodiques et tel que f^q est transverse à l'identité en tout point $y \in Per(f)$. Alors il existe une constante $C > 0$, ne dépendant pas de N, telle que $q_N(f) < C \ln N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.*

Corollaire 5.6 *Soit $f \in Diff_+^{\omega,\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ un difféomorphisme analytique, de nombre de rotation rationnel, semi-stable. Il existe un entier $n \geq 2$ tel que $T_N(f) \asymp N^{\frac{n-1}{n}}$.*

On remarque que le premier de ces deux corollaires complète en un sens l'énoncé du Théorème A.1.

6 Difféomorphismes irrationnels - le cas générique

Dans ce paragraphe, on va montrer l'existence de difféomorphismes irrationnels dont les discrétisations héritent des propriétés des discrétisations des difféomorphismes paraboliques. On prouve que ce comportement est générique au sens de Baire dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels.

Introduisons d'abord quelques notations. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit

$$E_{2N}^* = \{(2k+1)/2N : k = 0,1,\ldots,N-1\} \subset E_{2N} \subset \mathbb{S}^1,$$

l'ensemble des points de discontinuité de la projection P_N. On définit aussi les ensembles

$$D_N = \{f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1) : f(E_N) \cap E_{2N}^* = \emptyset\}, \quad \text{et} \quad D = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} D_N.$$

On remarque que tous les ensembles D_N, $N \in \mathbb{N}$, sont ouverts et denses non seulement dans $Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, mais aussi dans l'ensemble des homéomorphismes de nombre de rotation irrationnel,

ainsi que dans chaque ensemble $F_{p/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}$, des homéomorphismes paraboliques de nombre de rotation p/q. De même si on se restreint aux difféomorphismes du cercle de classe C^r et si on s'intéresse aux ensembles $D_N \cap \mathit{Diff}_+{}^r(\mathbb{S}^1)$.

On cherche à énoncer un résultat concernant le comportement générique de la suite $(q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ associée aux discrétisations d'un difféomorphisme irrationnel. Un tel difféomorphisme f n'admet pas d'orbite périodique et cette "non périodicité" de l'action continue se reflète dans le comportement des discrétisations du difféomorphisme f. On observe notamment que les longueurs q_N des cycles périodiques de l'application discrète $f_N : E_N \to E_N$ tendent vers l'infini avec N. On prouve maintenant, que dans le cas d'un difféomorphisme irrationnel générique, cette divergence vers l'infini peut être aussi lente qu'on veut.

Théorème 6.1 *Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, telle que $\lim_{N\to\infty} \psi(N) = +\infty$. Soit $r \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Alors dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels de classe C^r, il existe un ensemble de type G_δ dense de difféomorphismes qui vérifient*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{q_N(f)}{\psi(N)} = 0. \tag{18}$$

Preuve. Soit X^r l'adhérence de l'ensemble des difféomorphismes irrationnels de classe C^r dans l'ensemble de tous les difféomorphismes de classe C^r. Outre les difféomorphismes irrationnels, l'ensemble X^r contient tous les difféomorphismes rationnels paraboliques. Muni de la topologie induite par celle de $\mathit{Diff}_+{}^r(\mathbb{S}^1)$, X^r est un espace de Baire. Il est facile de voir que $\mathit{Diff}_+{}^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ est un G_δ dense dans X^r.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on introduit une application $H_N : \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}$ définie par

$$H_N(f) = \frac{q_N(f)}{\psi(N)}.$$

On voit facilement que l'application H_N est localement constante, et donc continue, sur D_N. On définit maintenant l'application limite $H : \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1) \to [0, \infty]$ par

$$H(f) = \liminf_{N\to\infty} H_N(f) = \liminf_{N\to\infty} \frac{q_N(f)}{\psi(N)}.$$

Puisqu'elle est limite inférieure de fonctions continues sur D, H est semi-continue supérieurement sur D.

L'ensemble $D^r = D \cap X^r$ est un G_δ dense dans X^r. Comme X^r est un espace de Baire, D^r avec la topologie induite l'est aussi. L'application H est semi-continue supérieurement sur D^r, ce qui implique que $(H_{|D^r})^{-1}(0)$ est un G_δ dans D^r. On verra que cet ensemble est aussi dense dans D^r.

Premièrement, on remarque que si un homéomorphisme parabolique f admet la Propriété Q indtroduit dans le pargraphe 4, alors $H(f) = 0$. C'est un simple corollaire de l'existence d'une sous-suite constante dans la suite $(q_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$. Soit $F^r_{p/q}$ l'ensemble des homéomorphismes paraboliques de nombre de rotation $p/q \in \mathbb{Q}$ et de classe C^r. La Proposition 4.1 affirme l'existence d'un ouvert dense (dans $F^r_{p/q}$) $U^r_{p/q} \subset F^r_{p/q}$ des homéomorphismes admettant la Propriété Q. L'ensemble $D \cap U^r_{p/q}$ est un G_δ dense dans $F^r_{p/q}$. De plus, il est contenu dans $(H_{|D^r})^{-1}(0)$ pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$. Comme $\bigcup_{p/q\in\mathbb{Q}} F^r_{p/q}$ est dense dans X^r, ceci implique que la préimage $(H_{|D^r})^{-1}(0)$ est dense dans $D^r = D \cap X^r$.

D'autre part, D^r est un G_δ dense dans X^r, d'où $H^{-1}(0) \cap X^r$ contient un G_δ dense dans X^r. De plus, l'ensemble $\mathit{Diff}_+{}^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ des difféomorphismes irrationnels de classe C^r est un G_δ dense dans X^r, alors $H^{-1}(0) \cap \mathit{Diff}_+{}^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$ contient un ensemble G_δ dense dans $\mathit{Diff}_+{}^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$. Ceci conclut la preuve du théorème.

□

Le même type de raisonnement permet de prouver des résultats concernant le temps de stabilisation du processus de discrétisation. Dans ce cas, on va utiliser l'analyse présentée dans le paragraphe précédent, et en particulier le Corollaire 5.6. On se place alors dans le cadre des difféomorphismes analytiques du cercle $\mathit{Diff}_+{}^\omega(\mathbb{S}^1)$.

Théorème 6.2 *Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive telle que $\lim_{N\to\infty} \psi(N)/\sqrt{N} = 0$. Alors dans l'ensemble des difféomorphismes irrationnels de classe C^ω il existe un ensemble G_δ dense de difféomorphismes vérifiant*

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{T_N(f)}{\psi(N)} = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{N\to\infty} \frac{T_N(f)}{N} = 0.$$

Preuve. Le raisonnement est analogue à celui de la preuve du théorème précédent. Soit X^ω l'adhérence de l'ensemble des difféomorphismes analytiques irrationnels. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on introduit deux applications $H_N^1, H_N^2 : \mathit{Diff}_+^\omega(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}_+$ définies par $H_N^1(f) = T_N(f)/\psi(N)$ et $H_N^2(f) = T_N(f)/N$, ainsi que les applications limites H^1 et H^2 données par $H^1(f) = \limsup_{N\to\infty} H_N^1(f)$ et $H^2(f) = \liminf_{N\to\infty} H_N^2(f)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$. Chacune des applications H_N^i, $i = 1, 2$, est continue sur l'ensemble D_N et donc les H^i, $i = 1, 2$, sont continues sur D.

L'ensemble $D^\omega = D \cap X^\omega$ est un G_δ dense dans X^ω et les applications H^i, $i = 1, 2$, sont semi-continues respectivement inférieurement et supérieurement sur D^ω. Ceci implique, que les ensembles $(H^1_{|D^\omega})^{-1}(\infty)$ et $(H^2_{|D^\omega})^{-1}(0)$ sont de type G_δ dans D^ω et donc aussi dans X^ω. De plus, grâce au Corollaire 5.6, on sait que tout difféomorphisme parabolique appartenant à D^ω, appartient à l'intersection des deux préimages considérées. D'autre part, l'ensemble des difféomorphismes paraboliques appartenant à D^ω est dense dans X^ω. Ceci implique que l'ensemble $(H^1_{|D^\omega})^{-1}(\infty) \cap (H^2_{|D^\omega})^{-1}(0)$ est non seulement de type G_δ, mais aussi dense dans X^ω. On conclut la preuve de la même manière que celle du théorème précédent. □

Le Théorème B présenté dans l'introduction est un corollaire immédiat des Théorèmes 6.1 et 6.2.

Remarque. Le raisonnement présenté dans les preuves de deux derniers théorèmes permet aussi d'étudier le comportement des discrétisations de difféomorphismes irrationnels génériques dans des familles de difféomorphismes. Soit E un espace métrique complet et séparable (on a besoin d'un espace de Baire) et soit $u : E \to \mathit{Diff}_+^r(\mathbb{S}^1)$ une application continue. Supposons que $u(E) \cap \mathit{Diff}_+^{r,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1) \neq \emptyset$ et que

- les difféomorphismes paraboliques appartenant à $u(E)$ sont denses dans l'adherence de l'ensemble des difféomorphismes irrationnels appartenant à $u(E)$;
- les difféomorphismes appartenant à l'ensemble D sont denses dans les ensembles de difféomorphismes paraboliques et irrationnels appartenant à $u(E)$.

Dans ce cas, on peut prouver qu'un difféomorphisme irrationnel générique hérite les propriétés des difféomorphismes paraboliques appartenant à $u(E)$. Les deux conditions ci-dessus ne sont pas difficiles à satisfaire car l'ensemble des difféomorphismes irrationnels de classe C^r est d'intérieur vide et l'ensemble D est un G_δ dense dans les ensembles des difféomorphismes irrationnels et paraboliques.

7 Difféomorphismes diophantiens - le cas prévalent

On dit qu'un nombre irrationnel α satisfait une condition diophantienne de type (C, ε) si

$$\forall\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}, \tag{19}$$

où C et ε sont des constantes positives ne dépendant que de α. Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, l'ensemble $D(\varepsilon)$ des nombres qui sont diophantiens de type (C, ε) pour un certain $C > 0$, est de mesure de Lebesgue pleine dans $]0, 1[$.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux discrétisations des difféomorphismes $f \in \mathit{Diff}_+^r(\mathbb{S}^1)$, $r \geq 3$, dont le nombre de rotation $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ satisfait une condition diophantienne. Par le théorème de Denjoy, le difféomorphisme en question est conjugué à la rotation R_α correspondante (ceci est vrai pour tout difféomorphisme du cercle irrationnel continûment différentiable, dont le logarithme de la dérivée est à variation bornée, cf. par exemple [11]). De plus cette conjugaison est de classe C^1, ce qui est vérifié par tout difféomorphisme de nombre de rotation diophantien et de classe de différentiabilité au moins $C^{2+\delta}$, $\delta > 0$ (voir par exemple [9] et [12]). On montrera que le comportement des discrétisations d'un tel difféomorphisme diffère de celui présenté dans le paragraphe précédent.

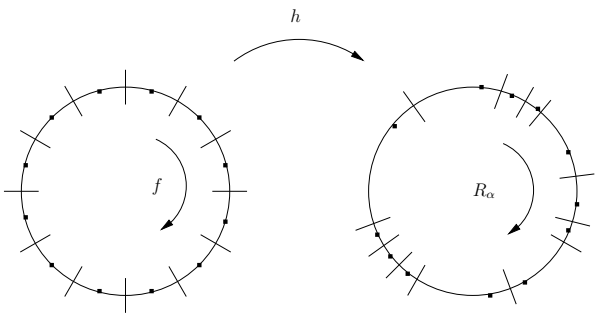

FIG. 2 – Une discrétisation uniforme d'un difféomorphisme $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, conjugué à la rotation, est équivalente à une discrétisation non uniforme de la rotation elle-même.

Supposons que f soit conjugué à la rotation R_α par un difféomorphisme h. On remarque que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé, l'étude de la discrétisation uniforme du difféomorphisme f sur l'ensemble E_N revient à celle de la discrétisation de R_α sur l'ensemble $E_N^h = h(E_N)$, la projection $P_N^h : \mathbb{S}^1 \to E_N^h$ étant définie par $P_N^h = h \circ P_N \circ h^{-1}$. On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 7.1 *Soit f un difféomorphisme de classe $C^{2+\delta}$, $\delta > 0$, de nombre de rotation $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ qui satisfait une condition diophantienne du type (C, ε). Alors il existe une constante $K > 0$, ne dépendant pas de N, telle que*

$$\forall\ N \in \mathbb{N}, \qquad q_N \geq K N^{\frac{1}{2+\varepsilon}}. \tag{20}$$

Preuve. Notons h le difféomorphisme conjugant f à la rotation R_α. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, les cycles périodiques de l'application discrète $f_N : E_N \to E_N$ sont de type $(p_N(f), q_N(f))$, tout comme ceux de l'application $(R_\alpha)_N^h : E_N^h \to E_N^h$. Comme le difféomorphisme h est de classe C^1, on a

$$\max_{x \in \mathbb{S}^1} |h(x) - h(x + \tfrac{1}{2N})| \leq \max_{x \in \mathbb{S}^1} |h'(x)| \frac{1}{2N} = \|Dh\| \frac{1}{2N}.$$

Ceci implique que $\max_{x \in \mathbb{S}^1} |P_N^h(x) - x| \leq \frac{\|DH\|}{2N}$. Un raisonnement analogue à celui de la preuve de la Proposition 2.2 nous amène à l'inégalité suivante :

$$\left| \alpha - \frac{p_N}{q_N} \right| \leq \rho(R_{\frac{\|Dh\|}{2N}} \circ R_\alpha) - \rho(R_{-\frac{\|Dh\|}{2N}} \circ R_\alpha) = \frac{\|Dh\|}{N}.$$

D'autre part, la condition diophantienne (C, ε) donne

$$\left| \alpha - \frac{p_N}{q_N} \right| \geq \frac{C}{q_N^{2+\varepsilon}}.$$

On rassemble les deux inégalités ci-dessus pour obtenir l'assertion du théorème. □

On va montrer maintenant que les propriétés des discrétisations des difféomorphismes irrationnels diophantiens sont prévalentes dans $\mathit{Diff}_+^{r,\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)$, $r \geq 3$. Introduisons l'espace

$$\mathcal{F}_1^r([0,1]^k) = \{u \in C^1([0,1]^k, \mathit{Diff}_+^r(\mathbb{S}^1)),\ u^{-1}(\mathit{Homeo}_+^{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}(\mathbb{S}^1)) \neq \emptyset\}$$

de familles de classe C^1 à k paramètres de difféomorphismes de classe C^r, contenant des difféomorphismes irrationnels. On considère sur cette espace la topologie induite par la convergence uniforme. Notons aussi m_k la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^k$. Dans [8] on trouve le résultat suivant :

Théorème 7.2 (Herman) *Soit $3 \leq r \leq \omega$ et $u : [0,1] \to \mathit{Diff}_+^r(\mathbb{S}^1)$ une famille appartenant à $\mathcal{F}_1^r([0,1])$ telle que $\rho \circ u : [0,1] \to [0,1]$ n'est pas constante. Posons*

$$Y = \{t \in [0,1] : u(t) \text{ est } C^{r-2} \text{ conjugué à la rotation irrationnelle}\}.$$

Alors $m_1[Y] > 0$. De plus, si $Z \subset [0,1]$ est un borélien de mesure nulle, alors $m_1[\rho \circ u(Z)] = 0$.

On remarque que par le théorème de Denjoy l'ensemble Y contient tout difféomorphisme irrationnel de nombre de rotation diophantien appartenant à u. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'ensemble $D(\varepsilon)$ des nombres diophantiens de type (C, ε) avec une constante $C > 0$, est de mesure pleine dans $[0,1]$. Le théorème de Herman implique en particulier que $m_1[(\rho \circ u)^{-1}(D(\varepsilon))] > 0$. La proposition suivante complétera la preuve du Théorème C énoncé dans l'introduction.

Proposition 7.3 *Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $3 \leq r \leq \omega$. Alors il existe un ensemble ouvert et dense $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}_1^r([0,1]^k)$ tel que toute famille $u \in \tilde{\mathcal{F}}$ vérifie*

$$m_k \left[\{t \in [0,1]^k : \rho(u(t)) \in D(\varepsilon)\}\right] > 0. \tag{21}$$

Preuve. Pour tout $s = (s_1, \ldots, s_k) \in [0,1]^k$ et tout $i = 1, \ldots, k$ on note

$$u_i^s(\cdot) = u(s_1, \ldots, s_{i-1}, \cdot, s_{i+1}, \ldots, s_k) : [0,1] \to \mathit{Diff}_+{}^r(\mathbb{S}^1).$$

Posons

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{u \in \mathcal{F}_1^r([0,1]^k) : \exists t \in [0,1]^k \ \forall i = 1, \ldots, k, \quad \rho \circ u_i^t : [0,1] \to [0,1] \text{ n'est pas constante}\}.$$

Par la continuité de l'application ρ, l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}$ est clairement ouvert. On montrera qu'il est aussi dense dans $\mathcal{F}_1^r([0,1]^k)$. Soit $u \in \mathcal{F}_1^r([0,1]^k)$. On remarque que par la définition même, il existe $t = (t_1, \ldots, t_k) \in [0,1]^k$ tel que $\rho(u(t)) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout $\delta > 0$ définissons une application $\phi_\delta : [0,1]^k \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\phi_\delta(s_1, \ldots, s_k) = \delta \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (s_i - t_i).$$

Soit $u_\delta \in \mathcal{F}_1^r([0,1]^k)$ une famille de difféomorphismes donnée par $u_\delta(s) = R_{\phi_\delta(s)} \circ u(s) \in \mathit{Diff}_+{}^r(\mathbb{S}^1)$. On remarque que $\rho(u_\delta(t)) = \rho(u(t)) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d'où $u_\delta \in \mathcal{F}_1^r([0,1]^k)$. De plus $d(u, u_\delta) \leq \delta$.

On va prouver que u_δ appartient à $\tilde{\mathcal{F}}$ pour tout δ suffisamment petit. Plus précisement on montrera que $\rho \circ (u_\delta)_i^t$ n'est pas constante pour tout $i = 1, \ldots, k$. Si $i \in \{1, \ldots, k\}$ est tel que $\rho \circ u_i^t$ n'est pas constante, alors par continuité de ρ, pour tout δ petit, on obtient que $\rho \circ (u_\delta)_i^t$ n'est pas constante. Soit $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $\rho \circ u_j^t$ est constante sur $[0,1]$. On a donc $\rho \circ u_j^t(s) = \rho \circ u_j^t(t_j) = \rho(u(t)) = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour tout $s \in [0,1]$. Mais dans ce cas l'application $\rho \circ (u_\delta)_j^t$ ne peux pas être constante car :

- $\rho \circ (u_\delta)_j^t(t_j) = \rho(u_\delta(t)) = \rho(u(t)) = \alpha$ est irrationnel.
- Pour tout $s \in [0,1]$, $s \neq t_j$, on a $\rho \circ (u_\delta)_j^t(s) = \rho(R_{\phi_\delta(s)} \circ u_j^t(s))$. Mais pour tout $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, l'application $t \mapsto \rho(R_t \circ f)$ est strictement croissante en tout point t tel que $\rho(R_t \circ f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\phi_\delta(s) \neq 0$ et $\rho(u_j^t(s)) = \alpha$, on a $\rho \circ (u_\delta)_j^t(s) \neq \alpha$.

Ceci implique que l'ensemble $\tilde{\mathcal{F}}$ est ouvert et dense dans $\mathcal{F}_1^r([0,1]^k)$. On va prouver maintenant que toute famille $u \in \tilde{\mathcal{F}}$ vérifie (21). Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $u \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $t \in [0,1]^k$ tel que $\rho \circ u_i^t : [0,1] \to [0,1]$ n'est pas constante pour tout $i = 1, \ldots, k$. Pour tout i il existe donc l'intervalle $I_i \subset [0,1]$ contenant t_i et tel que pour tout $s \in I = I_1 \times \ldots \times I_k$, l'application $\rho \circ u_i^s$ n'est pas constante pour tout $i = 1, \ldots, k$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ notons

$$J_m = \left\{(s_1, \ldots, s_{k-1}) \in I_1 \times \ldots \times I_{k-1} : m_1[t_k \in I_k : \rho \circ u(s_1, \ldots, s_{k-1}, t_k) \in D(\varepsilon)] \in \left[\tfrac{1}{m+1}, \tfrac{1}{m}\right[\right\}.$$

On a $J_m \cap J_{m'} = \emptyset$ pour $m \neq m'$ et par le théorème de Herman $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_m = I_1 \times \ldots \times I_{k-1}$. On en déduit qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $m_{k-1}[J_{m_0}] > 0$. De plus, par définition de J_{m_0}, pour tout $s \in J_{m_0}$ on a $m_1[(\rho \circ u)^{-1}(D(\varepsilon)) \cap (\{s\} \times I_k)] \geq 1/(m_0 + 1)$. Ceci implique que $m_k[(\rho \circ u)^{-1}(D(\varepsilon)) \cap (J_{m_0} \times I_k)] > 0$, ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Pour compléter ce paragraphe on va présenter une discussion autour d'une conjecture qui semble être confirmée par les simulations numériques effectuées.

Conjecture 7.4 *Soit $\varepsilon > 0$ fixé et soit $3 \leq r \leq \omega$. Les propriétés suivantes sont C^r-prévalentes dans des familles de difféomorphismes irrationnels :*

- $q_N(f) \asymp T_N(f) \asymp N^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$, *ce qui est l'ordre de croissance minimal prévu par le Théorème 7.1 ;*
- $r_N(f) \leq C$, *où* $C > 0$ *est une constante qui ne dépend pas de* $N \in \mathbb{N}$ *et* r_N *désigne le nombre de cycles périodiques de l'application discrète* f_N.

On a déjà vu qu'une discrétisation uniforme du difféomorphisme f peut être considérée comme une discrétisation de la rotation R_α sur un ensemble E_N^h non uniformément distribué sur $\mathbb{S}^1$. On sait par ailleurs (cf. par exemple [16] et [10]) que si on demande qu'une orbite $\mathcal{O}(x)$ de la rotation diophantienne R_α soit $1/N$-séparée sur $\mathbb{S}^1$, sa longueur maximale sera d'ordre $N^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$ quand N tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$\max\{k \geq 1 : \min_{i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq k} |R_\alpha^i(x) - R_\alpha^j(x)| > \tfrac{1}{N}\} \asymp N^{\frac{1}{2+\varepsilon}}. \tag{22}$$

Dans ce contexte, la conjecture dit que si le difféomorphisme h qui déforme l'ensemble de discrétisation est assez régulier et n'est pas trop particulier, alors le comportement des discrétisations $(R_\alpha)_N^h$ reflète celui de la rotation elle-même. Notamment, si on supposait que toute orbite discrétisée $\mathcal{O}_N^h(x)$, $x \in E_N^h$, restait $\tilde{C}/N$-proche de la vraie orbite $\mathcal{O}(x)$ pendant suffisamment longtemps ($\tilde{C} > 0$ une constante ne dépendant pas de N), on aurait l'analogue de l'estimation (22) pour l'application discrète $(R_\alpha)_N^h$. Ceci, au vu du Théorème 7.1, impliquerait la première affirmation de la conjecture. Pour justifier la deuxième, on remarque que (22) implique aussi que toute orbite de longueur d'ordre $N^{\frac{1}{2+\varepsilon}}$ contient deux points dont la distance sur le cercle est bornée par C/N, où la constante $C > 0$ ne dépend pas de N.

Mais il existe des difféomorphismes h pour lesquels les affirmations de la conjecture sont fausses. Il suffit de reprendre l'exemple de la discrétisation uniforme d'une rotation irrationnelle étudié dans le paragraphe 3 (ici $h = \mathrm{id}$). On peut peut-être expliquer cette différence de comportement par le fait qu'une orbite discrétisée non uniformément $\mathcal{O}_N^h(x)$ approche en général mieux la vraie orbite $\mathcal{O}(x)$ de R_α qu'une orbite $\mathcal{O}_N(x)$ correspondant à une discrétisation uniforme. Dans le cas uniforme on a :

$$(R_\alpha)_N(x) - R_\alpha(x) = \frac{Ent[N\alpha + \frac{1}{2}]}{N} - \alpha = \Delta_N,$$

indépendamment de $x \in E_N$. Ceci implique qu'à chaque itération la distance entre les R_α-itérés et $(R_\alpha)_N$-itérés augmente du même facteur $|\Delta_N|$. Cependant, dans le cas d'une discrétisation non uniforme, on peut espérer que les différences apparaissant à chaque itération vont se compenser le long la trajectoire de sorte que les orbites $\mathcal{O}_N^h(x)$ et $\mathcal{O}(x)$ restent "prés" l'une de l'autre.

Pour conclure ce paragraphe on remarque une certaine analogie entre le comportement de la suite des discrétisations d'un difféomorphisme diophantien et la théorie des applications aléatoires des ensembles finis. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ soit $X_N = \{1, 2, \ldots, N\}$ et $\mathcal{A}_N = X_N^{X_N}$ l'ensemble de toutes les applications de l'ensemble X_N dans lui même. On considère la probabilité $\mathcal{P}_N$ uniforme sur $\mathcal{A}_N$ et on note $\mathcal{E}_N$ l'espérance associée. Pour tout $a \in \mathcal{A}_N$ et tout $x \in X_N$ on définit les grandeurs suivantes :

- $\gamma(a)$ le nombre de cycles périodiques de l'application $a : X_N \to X_N$;
- $\bar{\gamma}(a)$ le nombre de points appartenant à tous les cycles de l'application a ;
- $\delta(a, x)$ la longueur du cycle périodique de l'application a contenu dans l'orbite de x ;
- $\beta(a, x)$ la longueur maximale de l'orbite injective de l'application a partant de x ;

Dans [3] (section 14.5, p. 412), on trouve la preuve du résultat suivant :

Théorème 7.5 *Quand* N *tend vers l'infini, on a* $\mathcal{E}_N(\gamma) \asymp \ln N$ *et* $\mathcal{E}_N(\bar{\gamma}) \asymp \mathcal{E}_N(\delta) \asymp \mathcal{E}_N(\beta) \asymp \sqrt{N}$.

L'étude des applications aléatoires comme modèle de la structure de cycles périodiques des applications chaotiques a été proposée par D. Ruelle. L'idée principale consiste à dire que si la dynamique du système en question est suffisamment compliquée et imprévisible, on peut pour l'approcher choisir "au hasard" les images de points (jusqu'à la première répétition - ensuite l'orbite doit suivre la trajectoire déjà déterminée). Le lecteur se reportera à [14] pour une discussion plus détaillée de ce problème ainsi que pour des références supplémentaires.

Notre conjecture affirme que la dynamique discrète induite par des difféomorphismes diophantiens est dans un sens "asymptotiquement aléatoire". Il est remarquable que ce phénomène persiste dans la dimension 1 où la dynamique doit tenir compte de l'ordre naturel des points provenant de la droite réelle.

8 Propriétés ergodiques des discrétisations

On s'intéresse maintenant à la distribution spatiale des orbites des discrétisations. On se place dans un cadre plus général suivant. Soit M une variété riemannienne compacte et notons d_M la distance correspondante. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on se donne un ensemble fini de points $E_N \subset M$ et une projection $P_N : M \to E_N$. A tout homéomorphisme $f : M \to M$ on peut associer la suite de ses discrétisations définies par $f_N = P_N \circ f_{|E_N}$. Supposons que cette discrétisation est "uniforme", c'est-à-dire qu'il existe une constante $K > 0$, ne dépendant pas de N, telle que $d_M(x, P_N(x)) < K/N$ pour tout $x \in M$. Dans l'introduction on a proposé une condition additionnelle de l'unformité de la discrétisation : l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\min_{x,y \in E_N} d_M(x, y) > C/N$. Elle n'est pas vraiment nécessaire dans la preuve de notre résultat, mais elle semble raisonnable pour que le modèle discret approche le système continue avec la même précision, indépendamment du point de l'espace choisi.

Rappelons la définition de la convergence faible de mesures. Soit X un espace métrique et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité, boréliennes sur X. On dira que cette suite converge faiblemet vers une mesure borélienne ν si

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \phi d\nu_n = \int_X \phi d\nu$$

pour toute fonction continue et bornée $\phi : X \to \mathbb{R}$.

On a le résultat suivant :

Proposition 8.1 *Soit $f : M \to M$ un homéomorphisme uniquement ergodique et soit μ l'unique mesure de probabilité f-invariante. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $\gamma_N \subset E_N$ un cycle périodique de la N-ième discrétisation $f_N : E_N \to E_N$ de l'homéomorphisme f. Soit μ_N la mesure de probabilité uniformément distribuée sur le cycle γ_N. Alors on a une convergence faible $\mu_N \to \mu$, quand N tend vers l'infini, indépendamment du choix du cycle γ_N à chaque instant $N \in \mathbb{N}$.*

En pratique, la proposition implique que pour tout sous-intervalle $I \subset \mathbb{S}^1$ fixé, le nombre de points d'un cycle γ_N appartenant à I, divisé par la longueur de ce cycle q_N, converge quand N tend vers l'infini vers la mesure $\mu(I)$ de cet intervalle. Si on fixait une décomposition du cercle en $M \in \mathbb{N}$ intervalles de même longueur $1/M$ et si on comptait le nombre de points d'un cycle discrétisé γ_N (où $N \gg M$) dans chacun des intervalles, alors l'histogramme associé approcherait la densité de la mesure f-invariante μ.

Comme f est uniquement ergodique, le théorème ergodique de Birkhoff implique que l'orbite sous l'action de f de μ-presque tout point $x \in M$ est distribuée dans M selon la mesure μ. Ceci n'explique pas le phénomène présenté dans la proposition, car pour tout $N \in \mathbb{N}$, toute f_N-orbite est contenue dans l'ensemble E_N, qui est fini et donc en général de μ-mesure nulle.

De plus, P. Góra et A. Boyarsky remarquent dans [7] que même si une application $f : [0, 1] \to [0, 1]$ admet plusieurs mesures invariantes, on observe toujours que les orbites discrétisées reflètent la distribution de celle qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ceci est aussi valable dans le cas où, après quelques itérations seulement, l'orbite discrétisée devient complètement différente de l'orbite de l'application continue f, correspondant au même point de départ.

Ce phénomène a été expliqué de manière très intuitive par Boyarsky [4] par l'argumentation suivante. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application ayant une mesure ergodique μ, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de support total. Dans ce cas, il n'existe pas d'autre mesure absolument continue, f-invariante, de support total. Alors il existe $x \in [0, 1]$, dont l'orbite $O(x)$ sous l'action de f est dense dans $[0, 1]$ et distribuée selon la mesure μ. Soit $O_N(x_N)$ une orbite de la discrétisation f_N de l'application f. Supposons que la longueur de l'orbite O_N croisse vers l'infini quand N augmente. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $O(x)$ est dense dans $[0, 1]$, il existe un point $f^{i_1}(x) \in O(x)$, tel que $|f_N^k(x_N) - f^{i_1+k}(x)| < \varepsilon$, pour $k = 0, 1, \ldots, n_1 - 1$. Même si $|f_N^{n_1}(x_N) - f^{i_1+n_1}(x)| \geq \varepsilon$, on trouve un autre point $f^{i_2}(x) \in O(x)$, tel que $|f_N^k(x_N) - f^{i_2+k}(x)| < \varepsilon$, pour $k = n_1, \ldots, n_2 - 1$, etc. On voit ici l'importance du fait, que la mesure μ soit de support total. Grâce à cette propriété, l'orbite $O(x)$ peut approcher tout point de l'orbite discrétisée, avec une précision arbitraire fixée au départ. On obtient donc une suite des segments $\theta^1, \ldots, \theta^j$, de longueurs $n_1, \ldots, n_j$, de l'orbite

$O(x)$, qui suivent à ε-près les segments $\theta_N^1, \ldots, \theta_N^j$ correspondants de l'orbite discrétisée $O_N(x_N)$. Quand la discrétisation f_N devient de plus en plus fine, les longueurs $n_1, \ldots, n_j$ deviennent de plus en plus grandes. Comme l'orbite entière $O(x)$ est distribuée selon la mesure μ et celle-ci est l'unique mesure absolument continue f-invariante, alors la distribution des longs segments de $O(x)$ converge faiblement (uniformément avec leur longueur) vers μ. Ceci implique que, pour $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, l'orbite discrétisée $O_N(x_N)$ est "à ε-près" distribuée selon la densité de μ.

Dans le cas d'un homéomorphisme uniquement ergodique d'une variété compacte on n'a pas besoin de détailler cette analyse. Avant de présenter la preuve de notre proposition, on rappelle la version partielle suivante d'un théorème de Prohorov.

Théorème 8.2 (Prohorov) *Soit X un espace métrique compact et Π une famille de mesures de probabilité définies sur la σ-algèbre borélienne de X. Alors Π est faiblement rélativement compacte, c'est-à-dire toute sous-suite de mesures appartenant à Π contient une sous-suite faiblement convergente (non nécéssairement dans Π).*

Preuve de la Proposition 8.1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on note $C_N \subset E_N$, l'ensemble sur lequel l'action de la N-ième discrétisation de f est bijective. Soit μ_N une mesure de probabilité uniformément distribuée sur un cycle périodique $\gamma_N \subset C_N$. On obtient une suite $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de mesures de probabilité et on veut montrer qu'elle converge faiblement vers μ quand N tend vers l'infini.

Fixons $N \in \mathbb{N}$. L'application $f_N : C_N \to C_N$ est bijective et on peut la prolonger en un homéomorphisme g_N de la variété M. En chaque point $x \in C_N$ on a $|f(x) - f_N(x)| \leq \frac{K}{N}$, d'où on peut construire la suite d'applications g_N de sorte qu'elle tende vers f dans la topologie C^0 quand N tend vers l'infini. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ la mesure μ_N est invariante pour g_N.

La variété M étant compacte, le théorème de Prohorov implique que toute sous-suite de la suite (μ_N) contient une sous-suite faiblement convergente. De plus, comme les mesures μ_N sont g_N-invariantes et la suite (g_N) converge vers f, les mesures limites sont f-invariantes. L'unique ergodicité de f permet d'identifier chaque mesure limite avec μ. Ceci implique que la suite (μ_N) converge faiblement vers μ. $\square$

On remarque que dans le cas particulier d'un homéomorphisme uniquement ergodique du cercle, on obtient la Proposition D énoncée dans l'introduction.

9 Simulations numériques

Ce dernier paragraphe est consacré à la description des simulations numériques effectuées au cours de ce travail. Nous avons été amenés à étudier les représentants de deux familles particulières d'homéomorphismes du cercle.

Famille PL. C'est une famille d'homéomorphismes linéaires par morceaux, dépendant des paramètres $L \in]1, +\infty[$ et $a \in [0, 1[$, donnés par

$$\forall\ x \in [0, 1[, \qquad f_{L,a}(x) = R_a \circ h_L(x) = h_L(x) + a \pmod 1,$$

où $h_L(x) = Lx$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{L+1}$ et $h_L(x) = \frac{x}{L} + \frac{L-1}{L}$ pour $\frac{1}{L+1} \leq x < 1$.

Famille ARN. C'est une famille de difféomorphismes analytiques dépendant des paramètres $a \in [0, 1[$ et $b \in [0, \frac{1}{2\pi}[$, donnés par

$$\forall\ x \in [0, 1[, \qquad f_{a,b}(x) = x + b\sin(2\pi x) + a \pmod 1.$$

Notons que c'est une famille classique de difféomorphismes du cercle. Elle a été étudiée par V.I.Arnold, cf. par exemple [1].

En itérant une application f donnée à l'aide d'un ordinateur, il faut tenir compte de deux types d'erreurs qui apparaissent. Premièrement, l'ordinateur travaille dans un cadre discret. Ceci veut dire qu'en introduisant notre modèle discret du cercle, on remplace par un ensemble fini des points non pas l'intervalle $[0, 1]$ lui-même, mais un espace qui est déjà une discrétisation de

cet intervalle. Un deuxième type d'approximation vient du fait que si le calcul de la valeur de l'application f nécessite plusieurs étapes, non seulement la valeur finale, mais aussi chacune des valeurs intermédiaires est arrondie. Malgré tout, la grande différence d'ordre de grandeur entre la précision des calculs numériques (10^{15} points dans l'intervalle $[0,1]$) et la finesse des discrétisations considérées (10^7 points au maximum) permet de supposer que ces deux types d'erreurs n'ont pas eu d'influence sur les résultats numériques obtenus.

Lorsqu'on effectue des simulations numériques jusqu'à une précision N_{max} donnée, on n'examine pas en général les discrétisations correspondant à toutes les valeurs $1 < N < N_{max}$. On choisit plutôt une sous-suite (N_k), $k = 1, \ldots, k_{max}$, dont on espère qu'elle va représenter toute la famille (f_N) étudiée. Il faut s'assurer ici, que la suite (N_k) choisie reste insensible aux éventuelles propriétés arithmétiques de l'application f, ce qui pourrait affecter les résultats obtenus. Dans nos simulations, on a considéré des suites de discrétisations de la forme $N_k = kN_0 + \varepsilon_0$, $k = 1, \ldots, k_{max}$, où $N_0 \in \mathbb{N}$ était une grandeur de base et ε_0 un élément aléatoire distribué uniformément sur l'ensemble fini $\mathbb{N} \cap]-\frac{N_0}{2}, \frac{N_0}{2}[$.

On présente maintenant le schèma des simulations numériques effectuées. On fixe l'application f qu'on veut étudier.

1. On se donne la finesse initiale $N \in \mathbb{N}$ de la discrétisation.
2. On code par $V1 = [1, \ldots, N]$ l'ensemble de discrétisation E_N ; à chaque point $\frac{k}{N} \in E_N$, $k \neq 0$, on associe $k \in \{1, \ldots, N-1\}$; on associe N à $0 \in E_N$.
3. On évalue l'homéomorphisme f sur l'ensemble E_N et on applique la projection P_N. Le même processus de codage donne un vecteur $V2 = [(V2)_1, \ldots, (V2)_N]$, où $(V2)_i \in \{1, \ldots, N\}$ code la valeur $f_N(\frac{i}{N})$, $i = 1, \ldots, N$. On obtient donc une matrice A de taille $2 \times N$, dont les deux lignes sont constituées des vecteurs $V1$ et $V2$ respectivement, qui porte toute l'information sur l'action de l'application f_N sur l'ensemble E_N.
4. On détermine l'ensemble C_N. On réduit la matrice A en ne prenant que les colonnes de A dont les numéros apparaissent comme éléments de la deuxième ligne. La matrice A_1 ainsi obtenue code l'ensemble $f_N(E_N)$ et la dynamique de f_N sur cet ensemble. On itère ce processus (on obtient ainsi à chaque i-ème itération la matrice A_i codant l'ensemble $f_N^i(E_N)$) jusqu'au premier moment $j(N) \in \{1, \ldots, N-1\}$ tel que $A_{j(N)} = A_{j(N)+1}$. Le premier rang de $A_{j(N)}$ code alors l'ensemble C_N et sa longueur donne le cardinal de C_N. On obtient aussi le temps de stabilisation $T_N = j(N)$ de la discrétisation.
5. On choisit un point dans l'ensemble C_N (par exemple celui qui est codé par le plus petit nombre). A l'aide de la matrice $A_{j(N)}$, on suit son orbite sous l'action de f_N pour déterminer p_N et q_N.
6. Etant donné la matrice $A_{j(N)}$, on peut choisir un ou plusieurs cycles périodiques de f_N et déterminer leur distribution spatiale dans $[0,1)$.
7. On augmente le finesse N de la discrétisation et on répète les étapes 2-7.

Les résultats typiques de nos simulations sont présentés sur les figures ci-dessous.

La figure 3 illustre l'affirmation de la Proposition 2.2 - la convergence du nombre de rotation discret vers le vrai nombre de rotation de l'homéomorphisme que l'on discrétise. On remarque que bien que la suite $(p_N/q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ soit convergente, son comportement en fonction de N est plutôt chaotique. De plus, la vitesse de cette convergence est donnée uniquement par l'estimation (5). Étant donné un homéomorphisme $f \in \mathit{Homeo}_+(\mathbb{S}^1)$, l'application $\rho : t \mapsto \rho(R_t \circ f)$ est continue et croissante, mais en général constante presque partout. Son comportement compliqué rend difficile l'estimation de la grandeur de $|\rho(f) - p_N/q_N|$. Pour la même raison, il n'est pas évident de décrire explicitement une sous-suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui correspondrait à une suite (p_{N_k}/q_{N_k}) convergeant "raisonnablement" vite vers $\rho(f)$.

On peut remarquer tout de même une certaine régularité dans la suite $(q_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de longueurs de cycles discrétisés. Supposons qu'un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ approche bien le nombre de rotation $\rho(f)$. Alors des rationnels de la forme $\frac{a_k}{b_k}$, où a_k et b_k sont premiers entre eux et proches de kp et kq respectivement, sont de bons candidats, au sens de la Proposition 2.2, pour apparaître aussi dans la suite $(\frac{p_N}{q_N})$. Ceci implique que les valeurs de la suite (q_N) auront une tendance à s'accumuler autour des points kq, $k \in \mathbb{N}$. Effectivement, on trouve souvent ce phénomène de "quantification" dans nos simulations numériques - cf. figure 4.

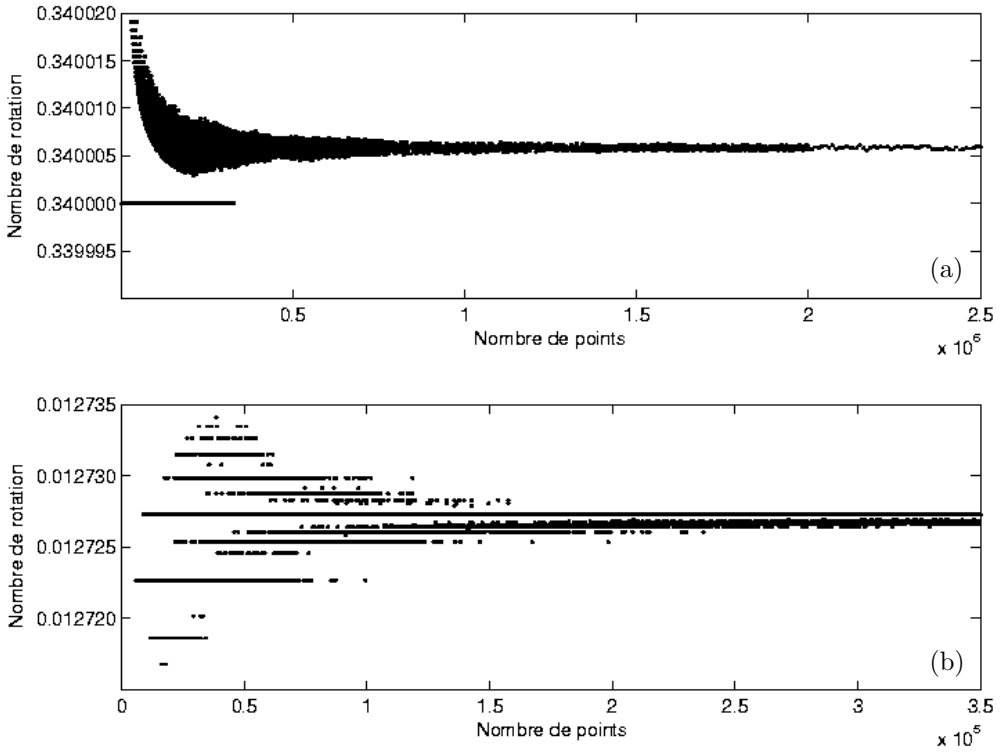

FIG. 3 − La convergence du nombre de rotation discret vers le vrai nombre de rotation. En haut un exemple d'homéomorphisme appartenant à la famille PL ($L = 1.76$ et $a = 0.2215$, nombre de rotation égal à 0.3400058...), en bas un difféomorphisme de la famille ARN ($a = 0.081$ et $b = 0.08$, nombre de rotation égal à 0.0127268...).

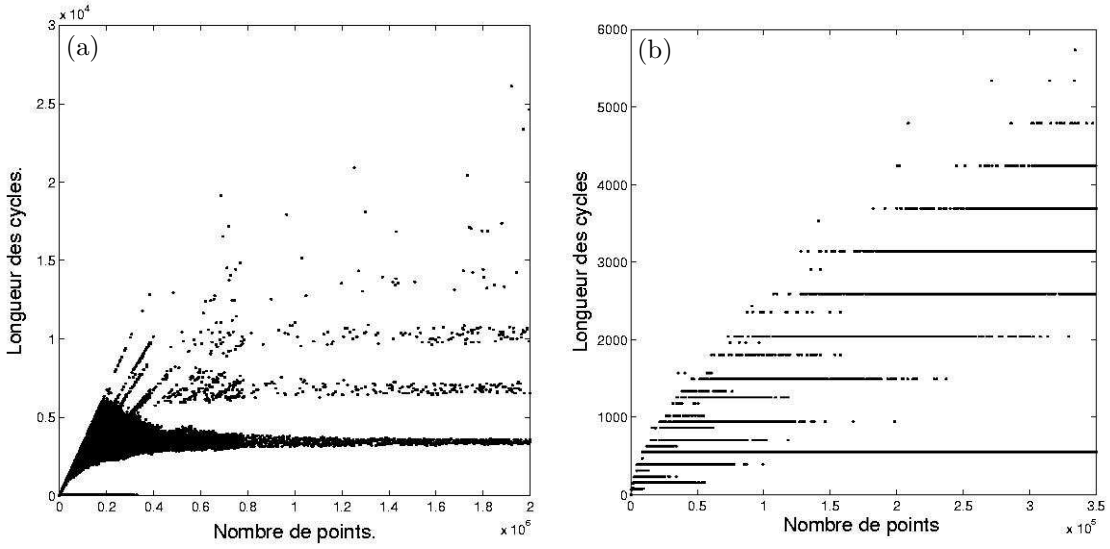

FIG. 4 − La longueur des cycles de discrétisations en fonction du nombre de points du modèle discret. À gauche l'homéomorphisme de la famille PL avec $L = 1.76$, $a = 0.2215$, à droite le difféomorphisme de la famille ARN avec $a = 0.081$, $b = 0.08$.

En regardant les figures 3 et 4 on s'aperçoit qu'il existe deux types de graphes associés aux discrétisations. L'image obtenue peut être plutôt "continue" (figures 3a et 4a) ou bien "discrète" (figures 3b et 4b). Il n'est pas clair de définir les propriétés du système continu responsables de

l'appartenance de ses discrétisations à l'une des deux catégories (cf. aussi le travail de C. Beck et G. Roepstorff [2]).

La figure 5 illustre partiellement les résultats du pargraphe 5. Nous avons étudié ici le comportement du temps de stabilisation de la discrétisation dans la famille PL. Nous avons fixé la valeur du paramètre $L = 2$ et nous avons varié le paramètre a. La figure 5a correspond au cas $a = 0.19$ où l'homéomorphisme associé a le nombre de rotation égal à $1/3$, stable. Le comportement logarithmique du temps de stabilisation a été prévu par la Proposition 5.4. De même sur la figure 5b, où $a = 0.2$ et le nombre de rotation toujours égal à $1/3$ devient semi-stable inférieurement. La figure 5c correspond au cas $a = 0.20001$, que l'on peu considérer irrationnel, où le nombre de rotation est égal à 0.3380667.... On voit qu'une petite perturbation du paramètre entraîne un changement radical du comportement des discrétisations. En même temps on remarque que le comportement reste le même pour N suffisamment petit ($< 0.5 \times 10^5$), avant que la finesse de la discrétisation ne se rende pas compte de l'irrationnalité de l'homéomorphisme étudié.

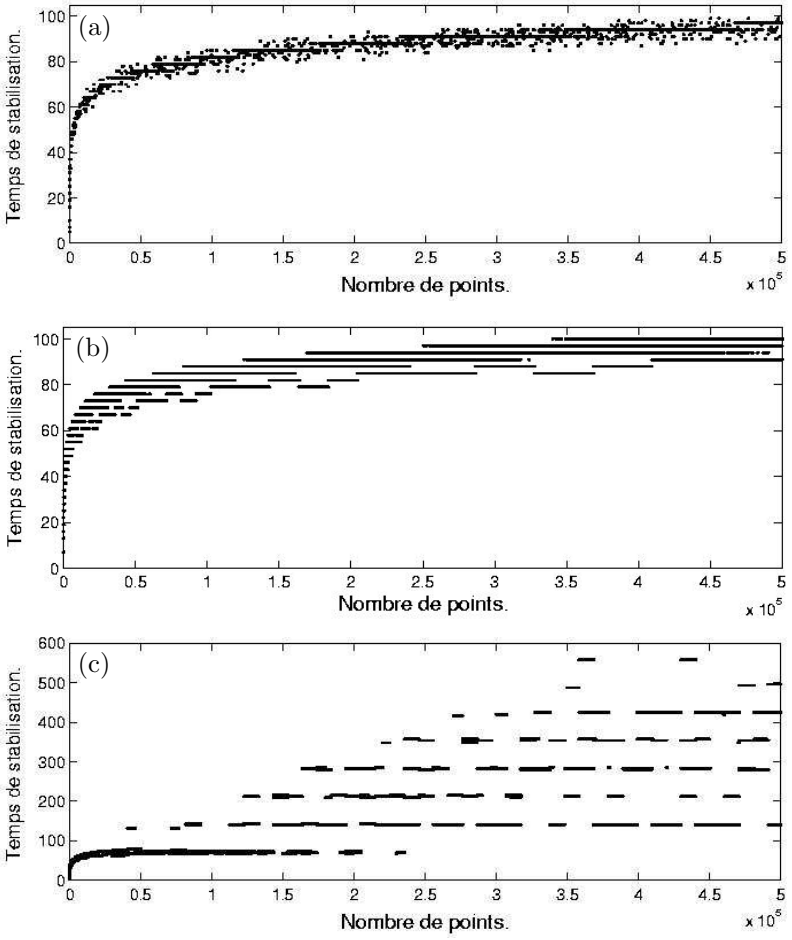

FIG. 5 − Comportement logarithmique du temps de stabilisation dans la famille PL avec $L = 2$ et (a) $a = 0.19$, (b) $a = 0.2$, (c) $a = 0.20001$

La dernière figure présente les discrétisations d'un difféomorphisme de nombre de rotation irrationnel diophantien. On constate en outre, que $T_N \asymp q_N$ et que T_N se comporte asymptotiquement comme une puissance de N. Ceci est bien différent du cas de l'homéomorphisme présenté sur la figure 5c, où la suite (T_N) associée semble admettre des sous-suites linéaires en N ainsi que des sous-suites à croissance seulement logarithmique. De plus, le nombre de cycles périodiques des discrétisations de la figure 6 est toujours inférieur ou égal à 3. Dans la grande majorité des cas

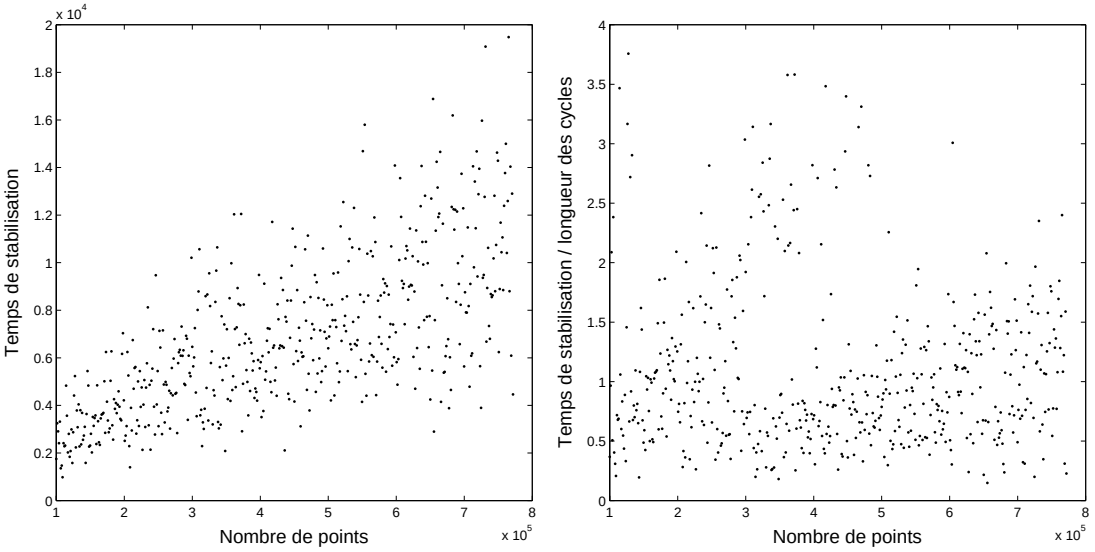

FIG. 6 – Comportement du temps de stabilisation des discrétisations du difféomorphisme diophantient f qui est conjugué à la rotation $R_{\sqrt{2}/2}$ par $h(x) = (2\sin t)^{-1}\sin(2tx - t) + 1/2$ avec $t = 1.42$.

($> 94\%$ des valeurs de N étudiées) on trouve un seul cycle périodique. On peut donc considérer que la figure 6, étant typique en ce qui concerne les difféomorphismes diophantiens étudiés, donne des "motivations numériques" à la Conjecture 7.4.

Références

[1] V. I. Arnol′d. Small denominators. I. Mapping the circle onto itself. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 25 :21–86, 1961.

[2] C. Beck and G. Roepstorff. Effects of phase space discretization on the long-time behavior of dynamical systems. *Phys. D*, 25(1-3) :173–180, 1987.

[3] B. Bollobás. *Random graphs*, volume 73 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.

[4] A. Boyarsky. Computer orbits. *Comput. Math. Appl. Ser. A*, 12(10) :1057–1064, 1986.

[5] P. Diamond, A. Klemm, P. Kloeden, and A. Pokrovskii. Basin of attraction of cycles of discretizations of dynamical systems with SRB invariant measures. *J. Statist. Phys.*, 84(3-4) :713–733, 1996.

[6] T. Estermann. On the number of primitive lattice points in a parallelogram. *Canadian J. Math.*, 5 :456–459, 1953.

[7] P. Góra and A. Boyarsky. Why computers like Lebesgue measure. *Comput. Math. Appl.*, 16(4) :321–329, 1988.

[8] M. R. Herman. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. In *Geometry and topology (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976)*, pages 271–293. Lecture Notes in Math., Vol 597. Springer, Berlin, 1977.

[9] M. R. Herman. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (49) :5–233, 1979.

[10] P. Kargaev and A. Zhigljavsky. Approximation of real numbers by rationals : some metric theorems. *J. Number Theory*, 61(2) :209–225, 1996.

[11] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[12] Y. Katznelson and D. Ornstein. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(4) :643–680, 1989.

[13] P. Kloeden, J. Mustard, and A. Pokrovskii. Statistical properties of some spatially discretized dynamical systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 50(4) :638–660, 1999.

[14] O. E. Lanford, III. Informal remarks on the orbit structure of discrete approximations to chaotic maps. *Experiment. Math.*, 7(4) :317–324, 1998.

[15] Y. E. Levy. Some remarks about computer studies of dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 88(1) :1–3, 1982.

[16] N. B. Slater. Gaps and steps for the sequence $n\theta$ mod 1. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 63 :1115–1123, 1967.

[17] G. L. Watson. On integers n relatively prime to $[\alpha n]$. *Canadian J. Math.*, 5 :451–455, 1953.