



Le groupe des traces de Poisson de la variété quotient $h+h^*/W$ en rang 2

Jacques Alev, Loïc Foissy

► To cite this version:

Jacques Alev, Loïc Foissy. Le groupe des traces de Poisson de la variété quotient $h+h^*/W$ en rang 2. 2006. hal-00020120v1

HAL Id: hal-00020120

<https://hal.science/hal-00020120v1>

Preprint submitted on 6 Mar 2006 (v1), last revised 9 Jul 2007 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le groupe des traces de Poisson de la variété quotient $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*/W$ en rang 2

Jacques Alev^{*} et Loïc Foissy[†]

*Laboratoire de Mathématiques - UMR6056, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France*

1 Introduction

1.1. Soit V un espace vectoriel symplectique sur $\mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} V = 2l$, et soit G un sous-groupe fini de $Sp(V)$. L'algèbre des fonctions régulières invariantes $\mathbb{C}[V]^G$ hérite naturellement d'une structure d'algèbre de Poisson induite et munit ainsi la variété quotient $\mathcal{X} = V/G$ d'une structure de variété de Poisson. On peut alors considérer la déformation non commutative de $\mathcal{X}$ définie par l'algèbre des invariants $A_l(\mathbb{C})^G$, où $A_l(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre de Weyl de rang l . Il existe une littérature récente abondante sur l'étude des désingularisations (symplectiques) de $\mathcal{X}$, le calcul des (co)homologies équivariantes de $\mathcal{X}$ et les algèbres de réflexions symplectiques qui en fournissent les déformations les plus riches.

1.2. Il existe deux familles particulières d'exemples de la situation décrite en 1.1. La première consiste à commencer avec un sous-groupe fini Γ de $SL(2, \mathbb{C})$, à considérer $V = (\mathbb{C}^2)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et à prendre pour G le produit en couronne de Γ par S_n , produit semi-direct de Γ^n par le groupe symétrique S_n . Comme cas particulier, nous avons ici les surfaces dites de Klein, $\mathcal{X}_{\Gamma} = \mathbb{C}^2/\Gamma$, pour Γ de type $A_n, D_n, E_{6,7,8}$. La deuxième famille consiste à commencer avec une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, considérer $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ et prendre pour G le groupe de Weyl W avec l'action diagonale, d'où le titre de cette note.

1.3. Conformément à l'esprit des déformations algébriques, la question standard consiste à comparer la (co)homologie de Poisson de $\mathcal{X}$ à la (co)homologie de Hochschild de $A_l(\mathbb{C})^G$. Le théorème 6.1 de [AFLS00] donne le calcul complet de la (co)homologie de Hochschild de $A_l(\mathbb{C})^G$. Si a_k désigne le nombre de classes de conjugaison de G agissant dans la représentation V avec un sous-espace de points fixes de dimension k , $0 \leq k \leq 2l$, alors, $\dim_{\mathbb{C}} HH_k(A_l(\mathbb{C})^G) = a_k$. Curieusement, le calcul de la (co)homologie de Poisson de $\mathcal{X}$ se révèle bien plus compliqué : cela est dû au fait qu'en ce qui concerne $A_l(\mathbb{C})^G$, on dispose d'une équivalence de Morita qui ramène les calculs à ceux relatifs au produit croisé $A_l(\mathbb{C}) \rtimes G$ qui se prête beaucoup mieux aux calculs (co)homologiques. Pour le calcul de la (co)homologie de Poisson, nous n'avons actuellement que la méthode directe.

1.4. Dans la généralité du paragraphe 1.1, on démontre dans [BEG04] que $HP_0(\mathcal{X})$ est de dimension finie. Le but de cette note est de présenter le calcul du groupe d'homologie de Poisson de $\mathcal{X}$ en degré zéro, $HP_0(\mathcal{X})$, dans différents cas où $HP_0(\mathcal{X})$ a même dimension que $HH_0(A_l(\mathbb{C})^G)$. Cette coïncidence de dimensions peut être interprétée comme étant le reflet d'une bonne déformation. Pour les trois exemples en rang 2 de la deuxième famille, on trouve ainsi :

Théorème. Avec les notations précédentes, on a l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{C}} HP_0(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*/W) = \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A_l(\mathbb{C})^W)$$

et cette dimension commune vaut 1 en type A_2 , 2 en type B_2 et 3 en type G_2 . Cette coïncidence de dimensions peut être interprétée comme étant le reflet d'une bonne déformation, comme c'est le cas pour les surfaces de Klein ([AL98]).

^{*}e-mail : jacques.alev@univ-reims.fr

[†]e-mail : loic.foissy@univ-reims.fr

La méthode est la suivante : dans les différents cas étudiés, la composante homogène de degré 2 de $\mathbb{C}[V]^G$, munie du crochet de Poisson, est une algèbre de Lie que nous noterons $\mathfrak{g}$, agissant sur $\mathbb{C}[V]^G$ de manière semi-simple. De plus, les composantes isotypiques non triviales de $\mathbb{C}[V]^G$ sous l'action de $\mathfrak{g}$ sont inclus dans $\{\mathfrak{g}, \mathbb{C}[V]^G\}$; par suite, le calcul de $HP_0(\mathcal{X})$ se restreint à calculer la composante isotypique triviale de $\mathbb{C}[V]^G$ et son intersection avec $\{\mathbb{C}[V]^G, \mathbb{C}[V]^G\}$. Dans les exemples de la deuxième partie (groupes cycliques) et de la dernière partie (sous-groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^n$), l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne. Dans les exemples de la troisième partie (groupes de Weyl de rang 2), il s'agit de $\mathfrak{sl}(2)$. Dans les exemples de la cinquième partie (sous-groupes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$), il s'agit de $\mathfrak{sl}(2)^{\oplus n}$.

1.5. Le papier s'organise de la manière suivante : nous considérons d'abord un exemple simple, puis nous continuons en effectuant une étude commune des trois groupes de Weyl de rang 2 en présentant les détails d'un calcul basé essentiellement sur le pléthysme des représentations de $\mathfrak{sl}(2)$; nous poursuivons par une remarque-question sur le fait que l'idéal dérivé de Poisson de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$, algèbre de fonctions régulières sur la variété quotient affine $\mathcal{X}$, est également un idéal associatif. A notre connaissance, les premiers exemples où cela ne se produit pas sont les cas B_2 et G_2 . Nous donnons ensuite une présentation de ces trois algèbres d'invariants. La partie suivante expose une famille d'exemples pour lesquels ces deux dimensions diffèrent. Nous terminons par l'étude d'une famille d'exemples qui montrent que la différence des deux dimensions considérées dans le théorème principal peut être arbitrairement grande.

Remerciements. Le premier auteur tient à remercier Y. Berest, D. Farkas, B. Fu et T. Lambre pour des conversations fructueuses à l'origine de ce travail.

2 Une famille d'exemples simples

2.1. Soit $n \geq 2$ et soit $G = C_n = \langle \sigma \rangle$ le groupe cyclique d'ordre n , agissant sur $\mathbb{C}^2$ par le caractère $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et donc sur $V = \mathbb{C}^2 \oplus (\mathbb{C}^2)^*$. Soit $S = S(V)$ l'algèbre symétrique de V , A l'algèbre de Weyl $A_2(\mathbb{C})$, avec pour coordonnées respectives x_1, x_2, y_1, y_2 et p_1, p_2, q_1, q_2 . L'action de G sur S et A est alors donnée par :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \\ \hline \sigma & \zeta x_1 & \zeta x_2 & \zeta^{n-1} y_1 & \zeta^{n-1} y_2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} & p_1 & p_2 & q_1 & q_2 \\ \hline \sigma & \zeta p_1 & \zeta p_2 & \zeta^{n-1} q_1 & \zeta^{n-1} q_2 \end{array}$$

On note S^G et A^G les algèbres d'invariants respectives. Par la structure symplectique standard, S est une algèbre de Poisson et G agit sur S par automorphismes de Poisson, ce qui implique que S^G est une sous-algèbre de Poisson de S . Autrement dit, S^G est une algèbre de Poisson commutative et peut être considérée comme l'algèbre des fonctions régulières sur une variété de Poisson algébrique affine.

2.2. D'autre part, S est (en tant qu'algèbre de Poisson) graduée par le degré total, le crochet de Poisson étant homogène de degré -2 . Comme G agit de manière homogène sur S , S^G est une sous-algèbre de Poisson graduée de S . On note $S^G(n)$ sa composante homogène de degré n . En particulier, $S^G(2)$ munie du crochet de Poisson est une algèbre de Lie et l'identité de Jacobi implique que S^G est un $S^G(2)$ -module. Remarquons que $x_1 y_1$ et $x_2 y_2$ appartiennent à $S^G(2)$ et que $\mathfrak{g} = \text{Vect}(x_1 y_1, x_2 y_2)$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $S^G(2)$. Par suite, S^G est un $\mathfrak{g}$ -module. Pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^4$:

$$\begin{aligned} \{x_1 y_1, x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}\} &= (\beta_1 - \alpha_1) x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}, \\ \{x_2 y_2, x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}\} &= (\beta_2 - \alpha_2) x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}, \end{aligned}$$

donc S est une somme directe de $\mathfrak{g}$ -modules de dimension 1 : $\mathfrak{g}$ agit de manière semi-simple sur S . Décomposons S en composantes isotypiques :

$$S = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} S_{(i,j)},$$

avec :

$$\begin{aligned} S_{(i,j)} &= \{X \in S / \{x_1 y_1, X\} = iX, \{x_2 y_2, X\} = jX\} \\ &= \text{Vect}(x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} / \beta_1 - \alpha_1 = i, \beta_2 - \alpha_2 = j). \end{aligned}$$

De plus, pour tous $(i, j), (k, l) \in \mathbb{Z}^2$, $S_{(i,j)} S_{(k,l)} \subseteq S_{(i+k, j+l)}$ et $\{S_{(i,j)}, S_{(k,l)}\} \subseteq S_{(i+k, j+l)}$: S est ainsi $\mathbb{Z}$ -graduée en tant qu'algèbre de Poisson.

2.3. Décrivons maintenant S^G :

Proposition 1 *i) Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, posons $S_{(i,j)}^G = S^G \cap S_{(i,j)}$. Alors $S^G = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} S_{(i,j)}^G$.*

ii) Si $i + j \not\equiv 0[n]$, alors $S_{(i,j)}^G = 0$.

iii) Si $i + j \equiv 0[n]$, alors $S_{(i,j)}^G = S_{(i,j)}$.

iv) $S_{(0,0)}^G = \mathbb{C}[t_1, t_2]$, avec $t_1 = x_1 y_1$ et $t_2 = x_2 y_2$.

v) S^G est engendrée par $t_1 = x_1 y_1$, $t_2 = x_2 y_2$, $x_1^n, y_1^n, x_2^n, y_2^n, x_1^\alpha x_2^{n-\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq n-1$), $y_1^\alpha y_2^{n-\alpha}$ ($1 \leq \alpha \leq n-1$), $x_1 y_2$ et $x_2 y_1$.

Preuve. *i)* Comme $\mathfrak{g} \subseteq S^G$, S^G est un sous- $\mathfrak{g}$ -module de S et donc se décompose selon les composantes isotypiques de S , d'où le premier point.

ii) et iii) Pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^4$, $\sigma.x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} = \zeta^{\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2} x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$. Par suite :

$$S^G = Vect(x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} / \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \equiv 0[n]).$$

Les points *ii)* et *iii)* s'en déduisent immédiatement.

iv) On a :

$$S_{(0,0)}^G = Vect\left(x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} / \beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 = 0\right) = Vect\left(t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} / (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2\right) = \mathbb{C}[t_1, t_2].$$

v) Notons S' la sous-algèbre de S engendrée par les éléments décrits dans l'énoncé de la proposition. De manière immédiate, ces générateurs proposés sont dans S^G , donc $S' \subseteq S^G$.

Soit $X = x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$, avec $\alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 \equiv 0[n]$. Suivant les valeurs de α_1, β_1 et de α_2, β_2 , on peut alors écrire X sous l'une des formes suivantes :

$$X = t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} x_1^{\alpha'_1} x_2^{\alpha'_2} \text{ ou } X = t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} x_1^{\alpha'_1} y_2^{\beta'_2} \text{ ou } X = t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} y_1^{\beta'_1} x_2^{\alpha'_2} \text{ ou } X = t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} y_1^{\beta'_1} y_2^{\beta'_2}.$$

En effectuant une division euclidienne par n , on peut écrire X sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} X &= t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (x_1^n)^{\delta_1} (x_2^n)^{\delta_2} x_1^{\alpha''_1} x_2^{\alpha''_2}, \quad 0 \leq \alpha''_1, \alpha''_2 < n \\ \text{ou } X &= t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (x_1^n)^{\delta_1} (y_2^n)^{\delta_2} x_1^{\alpha''_1} y_2^{\beta''_2}, \quad 0 \leq \alpha''_1, \beta''_2 < n \\ \text{ou } X &= t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (y_1^n)^{\delta_1} (x_2^n)^{\delta_2} y_1^{\beta''_1} x_2^{\alpha''_2}, \quad 0 \leq \beta''_1, \alpha''_2 < n \\ \text{ou } X &= t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (y_1^n)^{\delta_1} (y_2^n)^{\delta_2} y_1^{\beta''_1} y_2^{\beta''_2}, \quad 0 \leq \beta''_1, \beta''_2 < n. \end{aligned}$$

Dans le premier cas, on a $\alpha''_1 + \alpha''_2 \equiv 0[n]$ et donc $\alpha''_1 + \alpha''_2 = 0$ ou n . Par suite, soit X est de la forme $t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (x_1^n)^{\delta_1} (x_2^n)^{\delta_2}$, soit X est de la forme $t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (x_1^n)^{\delta_1} (x_2^n)^{\delta_2} (x_1^{\alpha''_1} x_2^{n-\alpha''_1})$, avec $0 < \alpha''_1 < n$. Donc $X \in S'$. De même, dans le quatrième cas, Soit X est de la forme $t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (y_1^n)^{\delta_1} (y_2^n)^{\delta_2}$, soit X est de la forme $t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (y_1^n)^{\delta_1} (y_2^n)^{\delta_2} (y_1^{\beta''_1} y_2^{n-\beta''_1})$, avec $0 < \beta''_1 < n$, donc $X \in S'$.

Dans le deuxième cas, on a $\alpha''_1 - \beta''_2 \equiv 0[n]$, donc $\alpha''_1 = \beta''_2$ et X s'écrit :

$$X = t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} (x_1^n)^{\delta_1} (y_2^n)^{\delta_2} (x_1 y_2)^{\alpha''_1}.$$

Par suite, $X \in S'$. De même, dans le troisième cas, on montre que $X \in S'$ et donc $S^G = S'$. $\square$

2.4. Soit M un sous- $\mathfrak{g}$ -module simple non trivial de S^G . Alors $\mathfrak{g}.M$ est un sous-module non nul de M , donc est égal à M . Par suite, $M = \mathfrak{g}.M = \{g, M\} \subseteq \{S^G, S^G\}$. Donc les composantes isotypiques non triviales de S^G sont incluses dans $\{S^G, S^G\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} S_{(i,j)}^G &\subseteq \{S^G, S^G\}, \\ S^G &= S_{(0,0)}^G + \{S^G, S^G\}, \\ HP_0(S^G) &= \frac{S_{(0,0)}^G}{S_{(0,0)}^G \cap \{S^G, S^G\}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant montrer que $HP_0(S^G)$ est de dimension $n-1$.

Théorème 2 $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) = n-1$.

Preuve. Utilisons l'identité générale suivante, valable pour toute algèbre de Poisson, et qui est une application directe de l'identité de Leibniz :

$$\{ab, c\} = \{a, bc\} + \{b, ca\}.$$

En utilisant cette identité autant que nécessaire et le point v) de la proposition 1 :

$$\begin{aligned} \{S^G, S^G\} &= \{t_1, S^G\} + \{t_2, S^G\} + \{x_1 y_2, S^G\} + \{x_2 y_1, S^G\} \\ &\quad + \{x_1^n, S^G\} + \{y_1^n, S^G\} + \{x_2^n, S^G\} + \{y_2^n, S^G\} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\{x_1^\alpha x_2^{n-\alpha}, S^G\} + \{y_1^\alpha y_2^{n-\alpha}, S^G\}). \end{aligned}$$

Par homogénéité du crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G &= \{t_1, S_{(0,0)}^G\} + \{t_2, S_{(0,0)}^G\} + \{x_1 y_2, S_{(1,-1)}^G\} + \{x_2 y_1, S_{(-1,1)}^G\} \\ &\quad + \{x_1^n, S_{(n,0)}^G\} + \{y_1^n, S_{(-n,0)}^G\} + \{x_2^n, S_{(0,n)}^G\} + \{y_2^n, S_{(0,-n)}^G\} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{n-1} (\{x_1^\alpha x_2^{n-\alpha}, S_{(\alpha,n-\alpha)}^G\} + \{y_1^\alpha y_2^{n-\alpha}, S_{(-\alpha,\alpha-n)}^G\}) \\ &= \{t_1, S_{(0,0)}^G\} + \{t_2, S_{(0,0)}^G\} + \{x_1 y_2, S_{(1,-1)}^G\} + \{x_2 y_1, S_{(-1,1)}^G\} \\ &\quad + \sum_{\alpha=0}^n (\{x_1^\alpha x_2^{n-\alpha}, S_{(\alpha,n-\alpha)}^G\} + \{y_1^\alpha y_2^{n-\alpha}, S_{(-\alpha,\alpha-n)}^G\}). \end{aligned}$$

$S_{(0,0)} = \mathbb{C}[t_1, t_2]$ étant la composante isotypique triviale de S^G , $\{t_1, S_{(0,0)}^G\} = \{t_2, S_{(0,0)}^G\} = (0)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} S_{(1,-1)}^G &= Vect(x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} / \beta_1 - \alpha_1 = 1, \beta_2 - \alpha_2 = -1) \\ &= Vect(t_1^{\alpha_1} t_2^{\beta_2} y_1 x_2 / \alpha_1, \beta_2 \in \mathbb{N}) \\ &= y_1 x_2 \mathbb{C}[t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Calculons :

$$\{x_1 y_2, y_1 x_2 t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2}\} = (1 + \alpha_1) t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+1} - (1 + \alpha_2) t_1^{\alpha_1+1} t_2^{\alpha_2}.$$

Par suite :

$$\{x_1 y_2, S_{(1,-1)}^G\} = Vect((1 + \alpha_1) t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+1} - (1 + \alpha_2) t_1^{\alpha_1+1} t_2^{\alpha_2} / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}).$$

Un calcul semblable montre que $\{x_2 y_1, S_{(-1,1)}^G\} = \{x_1 y_2, S_{(1,-1)}^G\}$.

Fixons $0 \leq \alpha \leq n$.

$$\begin{aligned} S_{(\alpha,n-\alpha)}^G &= Vect(x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} / \beta_1 - \alpha_1 = \alpha, \beta_2 - \alpha_2 = n - \alpha) \\ &= Vect(t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} y_1^\alpha y_2^{n-\alpha} / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}) \\ &= y_1^\alpha y_2^{n-\alpha} \mathbb{C}[t_1, t_2]. \end{aligned}$$

Calculons :

$$\{x_1^\alpha x_2^{n-\alpha}, y_1^\alpha y_2^{n-\alpha} t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2}\} = \alpha(\alpha + \alpha_1) t_1^{\alpha-1+\alpha_1} t_2^{n-\alpha+\alpha_2} + (n - \alpha)(n - \alpha + \alpha_2) t_1^{\alpha+\alpha_1} t_2^{n-\alpha-1+\alpha_2}.$$

En particulier, pour $\alpha = 0$ et $\alpha = n$:

$$\{x_2^n, y_2^n t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2}\} = n(n + \alpha_2) t_1^{\alpha_1} t_2^{n-1+\alpha_2}, \quad \{x_1^n, y_1^n t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2}\} = n(n + \alpha_1) t_1^{n-1+\alpha_1} t_2^{\alpha_2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} &\{x_1 y_2, S_{(1,-1)}^G\} + \{x_2 y_1, S_{(-1,1)}^G\} + \sum_{\alpha=0}^n \{x_1^\alpha x_2^{n-\alpha}, S_{(\alpha,n-\alpha)}^G\} \\ &= Vect((1 + \alpha_1) t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+1} - (1 + \alpha_2) t_1^{\alpha_1+1} t_2^{\alpha_2} / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}) + t_1^{n-1} \mathbb{C}[t_1, t_2] + t_2^{n-1} \mathbb{C}[t_1, t_2]. \end{aligned}$$

On obtient un résultat semblable pour $\{y_1^\alpha y_2^{n-\alpha}, S_{(-\alpha,\alpha-n)}^G\}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
& \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G \\
&= Vect \left((1 + \alpha_1)t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2+1} - (1 + \alpha_2)t_1^{\alpha_1+1}t_2^{\alpha_2} / \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \right) + t_1^{n-1}\mathbb{C}[t_1, t_2] + t_2^{n-1}\mathbb{C}[t_1, t_2] \\
&= Vect \left((1 + \alpha_1)t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2+1} - (1 + \alpha_2)t_1^{\alpha_1+1}t_2^{\alpha_2} / \alpha_1 + \alpha_2 < n-1 \right) + Vect(t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2} / \alpha_1 + \alpha_2 \geq n-1).
\end{aligned}$$

Une base de $S_{(0,0)}^G / \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G$ est donc donnée par $(\overline{t_1^0}, \dots, \overline{t_1^{n-2}})$, d'où $S_{(0,0)}^G / \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G$ est de dimension $n-1$. $\square$

2.5. Remarques.

- i) a) Si $n = 2$, $\{S^G, S^G\}$ est l'idéal d'augmentation de S^G .
- b) Si $n = 3$, $S_{(0,0)}^G / \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G$ est $Vect(t_1 - t_2) + Vect(t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2} / \alpha_1 + \alpha_2 \geq n-1)$ et est donc l'idéal de $S_{(0,0)}^G$ engendré par $t_1 - t_2$, t_1^2 , t_2^2 et t_1t_2 .
- c) Si $n \geq 4$, $t_1 - t_2 \in \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G$ et $(t_1 - t_2)t_2 \notin \{S^G, S^G\} \cap S_{(0,0)}^G$, donc $\{S^G, S^G\}$ n'est pas un idéal de S^G .
- ii) Si $n \geq 3$, alors $S^G(2) = \mathfrak{g}$. Si $n = 2$, alors $S^G(2) = S(2)$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$. On peut alors en déduire une preuve plus rapide du théorème 2 en utilisant la composante isotypique triviale de S^G sous l'action de $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ plutôt que l'action de $\mathfrak{g}$. En effet, cette composante isotypique $S_{\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)}^G$ vérifie :

$$\begin{aligned}
S_{\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)}^G &\subseteq Ker(\{x_1^2, \cdot\}) \cap Ker(\{x_2^2, \cdot\}) \cap Ker(\{y_1^2, \cdot\}) \cap Ker(\{y_2^2, \cdot\}) \\
&\subseteq Ker\left(x_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\right) \cap Ker\left(x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\right) \cap Ker\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \cap Ker\left(y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) \\
&\subseteq \mathbb{C}[x_1, x_2, y_2] \cap \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1] \cap \mathbb{C}[x_2, y_1, y_2] \cap \mathbb{C}[x_1, y_1, y_2] \\
&\subseteq \mathbb{C},
\end{aligned}$$

donc $S_{\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)}^G = \mathbb{C}$. Par suite, $S^G = \mathbb{C} + \{S^G, S^G\}$ et on vérifie aisément que $\mathbb{C} \cap \{S^G, S^G\} = (0)$.

3 Les trois groupes de Weyl de rang 2

3.1 Méthode utilisée

3.1.1. Nous allons, pour ces trois groupes, utiliser l'action d'une sous-algèbre de Lie incluse dans S^G . Cette algèbre de Lie est isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. Plus précisément, nous supposons maintenant que nous avons les hypothèses suivantes :

Hypothèses

- a) $S = S(V)$, avec V de dimension 4, graduée avec les éléments de V homogènes de degré 1. La composante homogène de degré n de S est notée $S(n)$. De plus, S est munie d'un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ homogène de degré -2 .
- b) G est un groupe fini agissant par automorphismes de Poisson homogènes de degré 0 sur S . On note S^G l'ensemble des éléments de S invariants sous l'action de G ; c'est une sous-algèbre de Poisson graduée de S .
- c) Il existe trois éléments non nuls de $S^G(2)$ notés E, F, H vérifiant :

$$\{E, F\} = H, \quad \{H, E\} = 2E, \quad \{H, F\} = -2F.$$

Autrement dit, $Vect(E, F, H)$ muni de $\{\cdot, \cdot\}$ est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. Alors $\mathfrak{sl}(2)$ agit sur S de la manière suivante : pour tous $P \in S$, $X \in \mathfrak{sl}(2)$,

$$X.P = \{X, P\}.$$

Cette action est homogène de degré 0. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ est somme directe d'espaces de poids :

$$S(n) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S(n)_i.$$

d) $S(1)$ se décompose en deux sous-espaces de poids $S(1)_1$ et $S(1)_{-1}$, tous deux de dimension 2.

3.1.2. Notations. Soit M un $\mathfrak{sl}(2)$ -module. On note $M_{\mathfrak{sl}(2)}$ sa composante isotypique triviale :

$$M_{\mathfrak{sl}(2)} = \{P \in M / \forall X \in \mathfrak{sl}(2), X.P = 0\}.$$

Dans le cas de S , comme E , F et H sont G -invariants, l'action de $\mathfrak{sl}(2)$ et l'action de G commutent et donc :

$$(S^G)_{\mathfrak{sl}(2)} = (S_{\mathfrak{sl}(2)})^G.$$

Nous noterons par la suite $S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$ cette sous-algèbre de Poisson.

3.1.3. Soit M un sous- $\mathfrak{sl}(2)$ -module simple de S^G . Si M n'est pas trivial, alors $\mathfrak{sl}(2).M$ est un sous-module non nul de M , donc est égal à M . Par suite, $M \subseteq \{S^G, S^G\}$. Les composantes isotypiques non triviales de S^G sont donc incluses dans $\{S^G, S^G\}$ et par suite :

$$\begin{aligned} S^G &= S_{\mathfrak{sl}(2)}^G + \{S^G, S^G\}, \\ HP_0(S^G) &= \frac{S_{\mathfrak{sl}(2)}^G}{\{S^G, S^G\} \cap S_{\mathfrak{sl}(2)}^G}. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons donc maintenant à $S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$ et à $\{S^G, S^G\} \cap S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$.

Proposition 3 *i) Il existe un élément non nul D de $S_{\mathfrak{sl}(2)}(2)$, unique à multiplication par un scalaire non nul près.*

ii) $S_{\mathfrak{sl}(2)}$ est la sous-algèbre de S engendrée par D .

iii) Il existe $N \in \mathbb{N}^$, tel que $S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$ soit la sous-algèbre de S engendrée par D^N .*

Lemme 4 *m (produit de S) et $\{, \}$ sont des morphismes de $\mathfrak{sl}(2)$ -modules de $S \otimes S$ dans S .*

Preuve. Soient $X \in \mathfrak{sl}(2)$, $P, Q \in S$.

$$\begin{aligned} m(X.(P \otimes Q)) &= m(X.P \otimes Q + P \otimes X.Q) \\ &= \{X, P\}Q + P\{X, Q\} \\ &= \{X, PQ\} \\ &= X.m(P \otimes Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{X.(P \otimes Q)\} &= \{X.P \otimes Q + P \otimes X.Q\} \\ &= \{\{X, P\}, Q\} + \{P, \{X, Q\}\} \\ &= \{X, \{P, Q\}\} \\ &= X.\{P \otimes Q\}. \end{aligned}$$

(On a utilisé l'égalité de Jacobi pour l'avant dernière égalité). Donc m et $\{, \}$ sont des morphismes de $\mathfrak{sl}(2)$ -modules. $\square$

Preuve de la proposition 3. Graduons S sur $\mathbb{N}^2$ en mettant les éléments de $S(1)_1$ homogènes de degré $(1, 0)$ et les éléments de $S(1)_{-1}$ homogènes de degré $(0, 1)$. On note $S(i, j)$ les composantes homogènes de S pour cette graduation. Alors la série formelle de Poincaré-Hilbert $\Phi(x, y)$ de S est :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i, j} \dim_{\mathbb{C}} S(i, j) x^i y^j = \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 \left(\frac{1}{1-y} \right)^2 = \sum_{i, j} (i+1)(j+1) x^i y^j.$$

On remarque que :

$$\begin{cases} S(1)_1 = S(1, 0) = \bigoplus_{i+j=1, i-j=1} S(i, j), \\ S(1)_{-1} = S(0, 1) = \bigoplus_{i+j=1, i-j=-1} S(i, j). \end{cases}$$

Par suite, comme $S(1)_k = (0)$ si $k \neq 1$ et $k \neq -1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$S(1)_k = \bigoplus_{i+j=1, i-j=k} S(i, j).$$

Comme m est un morphisme de modules, m est homogène pour le poids. Comme S est engendrée par $S(1)$, on a donc pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$S(n)_k = \bigoplus_{i+j=n, i-j=k} S(i, j). \quad (1)$$

On note χ_n le caractère du $\mathfrak{sl}(2)$ -module $S(n)$:

$$\chi_n(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} S(n)_k q^k.$$

On pose alors :

$$\chi(q, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) h^n = \sum_{n,k} \dim_{\mathbb{C}} S(n)_k h^n q^k.$$

Par (1) :

$$\begin{aligned} \chi(q, h) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{C}} S(n)_k h^n q^k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}} \sum_{i+j=n, i-j=k} \dim_{\mathbb{C}} S(i, j) h^n q^k \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{C}} S(i, j) h^{i+j} q^{i-j} \\ &= \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \dim_{\mathbb{C}} S(i, j) (hq)^i \left(\frac{h}{q}\right)^j \\ &= \Phi(hq, h/q) \\ &= \sum_{i,j} (i+1)(j+1) h^{i+j} q^{i-j}. \end{aligned}$$

Comme la dimension de $S(n)_{\mathfrak{sl}(2)}$ est la différence du terme constant et du terme en q^2 de χ_n , cherchons ces deux coefficients. Il faut donc prendre :

$$\begin{cases} i = \frac{n}{2} \\ j = \frac{n}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} i = \frac{n}{2} + 1 \\ j = \frac{n}{2} - 1, \end{cases}$$

Par suite, si n est impair, ces deux coefficients sont nuls et donc $S(n)_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$. Si $n = 2l$ est pair, le terme constant est $(l+1)^2$ et le terme en q^2 est $l(l+2)$, donc :

$$\dim_{\mathbb{C}} S(n)_{\mathfrak{sl}(2)} = (l+1)^2 - l(l+2) = 1.$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{C}} S(2)_{\mathfrak{sl}(2)}$ est de dimension 1, ce qui implique le premier point. Comme m est un morphisme de $\mathfrak{sl}(2)$ -modules, pour tout $l \in \mathbb{N}$, D^l est un élément non nul de $S(2l)_{\mathfrak{sl}(2)}$ et donc forme une base de $S(2l)_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par suite, $S_{\mathfrak{sl}(2)} = \mathbb{C}[D]$.

Comme G agit de manière homogène sur $S_{\mathfrak{sl}(2)}$ et que $S_{\mathfrak{sl}(2)}(2)$ est de dimension 1, il existe un unique caractère κ de G tel que pour tout $\sigma \in G$, $\sigma.D = \kappa(\sigma)D$. Comme $S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$ est une sous-algèbre graduée de $S_{\mathfrak{sl}(2)}$:

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{sl}(2)}^G &= \text{Vect}(D^k / \forall \sigma \in G, \sigma.D^k = D^k) \\ &= \text{Vect}(D^k / \forall \sigma \in G, \kappa(\sigma)^k = 1) \\ &= \text{Vect}(D^k / \kappa^k = 1) \\ &= \text{Vect}(D^k / o(\kappa) \mid k). \end{aligned}$$

(Comme G est fini, son groupe de caractères est fini et donc $o(\kappa)$ est fini). Posons $N = o(\kappa)$. Alors $S_{\mathfrak{sl}(2)} = \text{Vect}(D^k / N \mid k) = K[D^N]$. $\square$

3.1.4. Par homogénéité, les composantes homogènes de $S_{\mathfrak{sl}(2)}$ étant nulles ou de dimension 1,

$$\{S^G, S^G\} \cap S_{\mathfrak{sl}(2)}^G = \text{Vect}(D^{kN} / D^{kN} \in \{S^G, S^G\}).$$

Décrivons maintenant un procédé permettant de construire des éléments de $\{S^G, S^G\} \cap S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$:

Proposition 5 Soit $P \in S^G$ un vecteur de plus haut poids β homogène de degré α_1 et $Q \in S^G$ un vecteur de plus haut poids β homogène de degré α_2 . On pose $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2)/2$, qu'on supposera entier. On définit par récurrence sur i :

$$\begin{aligned} P^{(\beta)} &= P, & P^{(\beta-2i)} &= \{F, P^{(\beta-2i+2)}\}, \\ Q^{(\beta)} &= Q, & Q^{(\beta-2i)} &= \{F, Q^{(\beta-2i+2)}\}. \end{aligned}$$

Alors il existe deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)} D^k\} = (\lambda + k\mu) D^{\alpha+k}.$$

En particulier, si $N \mid \alpha + k$, $(\lambda + k\mu) D^{\alpha+k} \in \{S^G \otimes S^G\} \cap S_{\mathfrak{sl}(2)}^G$.

Preuve.

Montrons d'abord que l'élément suivant est dans $(S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i)}.$$

Comme P et Q sont des vecteurs de plus haut poids β , pour tout i , $P^{(\beta-2i)}$ et $Q^{(\beta-2i)}$ sont des vecteurs de poids $\beta - 2i$ et $\{F, P^{(-\beta)}\} = \{F, Q^{(-\beta)}\} = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} H.\mathcal{P} &= \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{H, P^{(\beta-2i)}\} \otimes Q^{-(\beta-2i)} + \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes \{H, Q^{-(\beta-2i)}\} \\ &= \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i (\beta - 2i) P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i)} - \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i (\beta - 2i) P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i)} \\ &= 0, \\ F.\mathcal{P} &= \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{F, P^{(\beta-2i)}\} \otimes Q^{-(\beta-2i)} + \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes \{F, Q^{-(\beta-2i)}\} \\ &= \sum_{i=0}^{\beta-1} (-1)^i P^{(\beta-2i-2)} \otimes Q^{-(\beta-2i)} + \sum_{i=1}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i+2)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}$ est un vecteur de plus bas poids 0, donc est un élément de $(S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P} \otimes D^k \in (S \otimes S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$.

Comme m et $\{, \}$ sont des morphismes de $\mathfrak{sl}(2)$ -modules, $\{, \} \circ (Id \otimes m)(\mathcal{P} \otimes D^k) \in S_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par homogénéité, il s'agit d'un élément homogène de degré $\alpha_1 + \alpha_2 + 2k - 2 = 2(\alpha + k)$, donc il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\{, \} \circ (Id \otimes m)(\mathcal{P} \otimes D^k) = \lambda_k D^{\alpha+k}$. En particulier, posons $\lambda = \lambda_0$.

De la même manière, $D \otimes \mathcal{P} \in (S \otimes S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$, homogène de degré $2\alpha + 4$, donc en appliquant $m \circ (\{, \} \otimes Id)$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{D, P^{(\beta-2i)}\} Q^{-(\beta-2i)} = -\mu D^{\alpha+1}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \{, \} \circ (Id \otimes m)(\mathcal{P} \otimes D^k) &= \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)} D^k\} \\ &= \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} D^k \\ &\quad + \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} k Q^{-(\beta-2i)} D^{k-1} \\ &= \lambda D^{\alpha} D^k + k\mu D^{\alpha+1} D^{k-1} \\ &= (\lambda + k\mu) D^{\alpha+k}, \end{aligned}$$

donc $\lambda_k = \lambda + k\mu$. $\square$

3.1.5. Remarques.

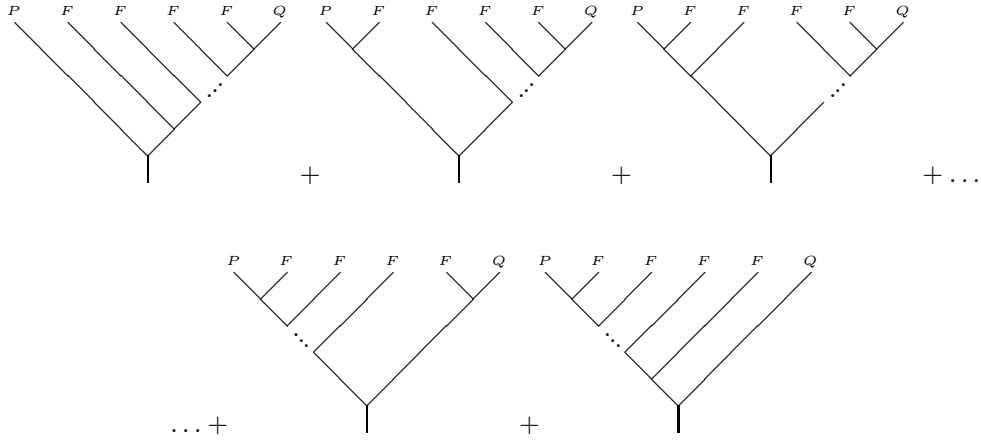
i) λ et μ sont déterminés par :

$$\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} = \lambda D^\alpha,$$

$$\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} Q^{-(\beta-2i)} = \mu D^{\alpha+1}.$$

ii) On peut éventuellement prendre $P = Q$.

iii) Pour $k = 0$, l'élément $\sum (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\}$ peut être représenté à l'aide d'arbres de la manière suivante, en utilisant l'anti-symétrie de $\{\cdot, \cdot\}$:



3.1.6. Donnons maintenant un critère permettant de montrer que $D^k \notin \{S^G, S^G\}$:

Proposition 6 Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\left\{ \left(\sum_{i=0}^{k+1} S^G(2k+2-i) \otimes S^G(i) \right)_{\mathfrak{sl}(2)} \right\} = 0.$$

Alors $D^k \notin \{S^G, S^G\}$.

Preuve. Supposons $D^k \in \{S^G, S^G\}$. Comme $\{\cdot, \cdot\}$ est un morphisme de $\mathfrak{sl}(2)$ -modules, $\{\cdot, \cdot\}$ envoie les composantes isotypiques de $S^G \otimes S^G$ sur les composantes isotypiques de S correspondantes, donc D^k possède un antécédent dans $(S^G \otimes S^G)_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par homogénéité, il possède un antécédent dans $(S^G \otimes S^G)_{\mathfrak{sl}(2)}(2k+2)$. Par antisymétrie de $\{\cdot, \cdot\}$, il possède un antécédent dans :

$$\sum_{i=0}^{k+1} (S^G(2k+2-i) \otimes S^G(i))_{\mathfrak{sl}(2)} = \left(\sum_{i=0}^{k+1} S^G(2k+2-i) \otimes S^G(i) \right)_{\mathfrak{sl}(2)}.$$

Donc l'image par $\{\cdot, \cdot\}$ de ce sous-espace de $S^G \otimes S^G$ est non nulle. $\square$

3.2 Calculs pour B_2

3.2.1. Soit $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, muni du crochet de Poisson donné par :

$\{\cdot, \cdot\}$	x_1	y_1	x_2	y_2
x_1	0	1	0	0
y_1	-1	0	0	0
x_2	0	0	0	1
y_2	0	0	-1	0

On prend $G = B_2 = (\pm 1)^2 \rtimes S_2$, agissant par automorphismes de Poisson homogènes sur l'algèbre S de la manière suivante :

	x_1	y_1	x_2	y_2
$(\epsilon, \epsilon', id)$	ϵx_1	ϵy_1	$\epsilon' x_2$	$\epsilon' y_2$
$(\epsilon, \epsilon', (12))$	$\epsilon' x_2$	$\epsilon' y_2$	ϵx_1	ϵy_1

Lemme 7 *Considérons les éléments de S suivants :*

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \quad F = -\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \quad H = -(x_1 y_1 + x_2 y_2).$$

Alors (E, F, H) vérifie l'hypothèse c).

Preuve. Calculs directs. $\square$

E, F et H agissent par dérivation sur S . Donnons leur action sur les générateurs :

	x_1	y_1	x_2	y_2
E	0	x_1	0	x_2
F	y_1	0	y_2	0
H	x_1	$-y_1$	x_2	$-y_2$

Par suite, l'action de E, F et H est donnée par :

$$\begin{aligned} \{E, \cdot\} &= x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\ \{F, \cdot\} &= y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \{H, \cdot\} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a donc $S(1)_1 = Vect(x_1, x_2)$ et $S(1)_{-1} = Vect(y_1, y_2)$, donc l'hypothèse d) est satisfaite.

3.2.2. On considère l'élément suivant de S :

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Alors $\{E, D\} = \{F, D\} = \{H, D\} = 0$. D'après la proposition 3, $S_{\mathfrak{sl}(2)} = \mathbb{C}[D]$. De plus,

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma).D = \epsilon_1 \epsilon_2 \varepsilon(\sigma)D,$$

donc, avec les notations de la proposition 3, $N = 2$ et $S_{\mathfrak{sl}(2)}^{B_2} = \mathbb{C}[D^2]$.

3.2.3. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 8 $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{B_2}) = 2$.

Preuve. On considère les éléments suivants :

$$\begin{aligned} P &= x_1^4 + x_2^4, \\ Q &= x_1^4 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2^4 - x_1^3 y_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^3 y_2. \end{aligned}$$

Alors $P, Q \in S^{B_2}$. De plus :

$$\{E, P\} = 0, \quad \{H, P\} = 4P, \quad \{E, Q\} = 0, \quad \{H, Q\} = 4Q.$$

Donc P est un vecteur de plus haut poids 4 homogène de degré 4 et Q est un vecteur de plus haut poids 4 homogène de degré 6. Appliquons la proposition 5. Par un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^4 (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} &= (-288)D^4, \\ \sum_{i=0}^4 (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} Q^{-(\beta-2i)} &= (-48)D^5. \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $-48(6 + 2k)D^{4+2k} \in \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$. Autrement dit, pour tout l pair supérieur ou égal à 4, $D^l \in \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$.

Reste à étudier le cas de 1 et D^2 . Graduons S sur $\mathbb{N}^2$ en mettant x_1 et x_2 en degré $(1, 0)$ et y_1 et y_2 en degré $(0, 1)$. Soient $S(i, j)$ les composantes homogènes pour cette graduation. On pose :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j} \dim_{\mathbb{C}} S^{B_2}(i, j) x^i y^j.$$

Posons $H = (\pm 1)^2$ et $K = S_2$. Comme $B_2 = H \rtimes K$, $S^{B_2} = (S^H)^K$. Une base de S^H est donnée par les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$, α_1, β_1 ayant la même parité, α_2, β_2 ayant la même parité. Soit $\xi_{i,j}$ le caractère du S_2 -module $S^H(i, j)$ et posons :

$$\xi(x, y) = \sum_{i,j} \xi_{i,j} x^i y^j.$$

S_2 agissant par permutation sur les monômes, $\xi_{i,j}(\sigma)$ est le nombre de monômes de S^H de degré (i, j) fixés par σ . En conséquence :

a) Pour $\sigma = id$, les monômes fixés par id sont les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$, α_1, β_1 ayant la même parité, α_2, β_2 ayant la même parité. Donc :

$$\xi(id) = \left(\frac{1 + xy}{(1 - x^2)(1 - y^2)} \right)^2.$$

b) Pour $\sigma = (12)$, les monômes fixés par (12) sont les monômes $(x_1 x_2)^{\alpha} (y_1 y_2)^{\beta}$, α, β ayant la même parité. Donc :

$$\xi((12)) = \frac{1 + x^2 y^2}{(1 - x^4)(1 - y^4)}.$$

Par suite :

$$\Phi(x, y) = \frac{\xi(id) + \xi((12))}{2} = \frac{1 + xy + 2x^2 y^2 + xy^3 + x^3 y + x^3 y^3 + x^4 y^4}{(1 + x^2)(1 - x)^2(1 + x)^2(1 + y^2)(1 - y)^2(1 + y)^2}.$$

On note χ_n le caractère du $\mathfrak{sl}(2)$ -module $S^{B_2}(n)$. On pose alors :

$$\chi(q, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) h^n = \sum_{n,k} \dim_{\mathbb{C}} S^{B_2}(n)_k h^n q^k.$$

De manière semblable à la preuve de la proposition 3 :

$$\chi(q, h) = \Phi(hq, h/q) = \frac{q^6 + h^2 q^6 + h^4 q^4 + 2h^4 q^6 + h^4 q^8 + h^6 q^6 + h^8 q^6}{(h^2 q^2 + 1)(h^2 + q^2)(hq + 1)^2(q - h)^2(h + q)^2(hq - 1)^2}.$$

En développant cette fraction rationnelle en série relativement à h :

$$\begin{aligned} \chi_0(q) &= 1, \\ \chi_2(q) &= q^2 + 1 + q^{-2}, \\ \chi_4(q) &= 2q^4 + 2q^2 + 3 + 2q^{-2} + 2q^{-4}, \\ \chi_6(q) &= 2q^6 + 3q^4 + 4q^2 + 4 + 4q^{-2} + 3q^{-4} + 2q^{-6}. \end{aligned}$$

(Notons que $S^H(n) = (0)$ si n est impair, donc $S^{B_2}(n) = 0$ si n est impair).

Appliquons la proposition 6 pour $k = 0$. Le caractère de $S(2) \otimes S(0) + S(1) \otimes S(1)$ est $\chi_2(q)$, donc $(S(2) \otimes S(0) + S(1) \otimes S(1))_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$, donc $1 \notin \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$.

Appliquons la proposition 6 pour $k = 2$. Le caractère de $S(6) \otimes S(0) + S(5) \otimes S(1) + S(4) \otimes S(2) + S(3) \otimes S(3)$ est :

$$\chi_6(q) + \chi_4(q)\chi_2(q) = 4q^6 + 7q^4 + 11q^2 + 11 + 11q^{-2} + 7q^{-4} + 4q^{-6},$$

donc $(S(6) \otimes S(0) + S(5) \otimes S(1) + S(4) \otimes S(2) + S(3) \otimes S(3))_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$, donc $D^2 \notin \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$.

En conclusion, seuls 1 et D^2 n'appartiennent pas à $\{S^{B_2}, S^{B_2}\}$. Donc $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{B_2}) = 2$. $\square$

3.3 Calculs pour A_2

3.3.1. Soit $S' = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$, muni du crochet de Poisson donné par :

$\{, \}$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x_1	0	1	0	0	0	0
y_1	-1	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	0
y_2	0	0	-1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	1
y_3	0	0	0	0	-1	0

$G = A_2 = S_3$ agit par permutation des indices. S est la sous-algèbre de S' engendrée par $x_1 - x_2$, $x_1 - x_3$, $y_1 - y_2$ et $y_1 - y_3$. C'est une sous-algèbre de Poisson graduée et un sous A_2 -module ; en fait :

$$S' = S[x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] \otimes S.$$

Comme $x_1 + x_2 + x_3$ et $y_1 + y_2 + y_3$ sont A_2 -invariants :

$$(S')^{A_2} = S[x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] \otimes S^{A_2}.$$

De plus, S est l'algèbre des polynômes en les éléments :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2x_1 - x_2 - x_3, \\ a_2 &= -x_1 + 2x_2 - x_3, \\ b_1 &= 2y_1 - y_2 - y_3, \\ b_2 &= -y_1 + 2y_2 - y_3. \end{aligned}$$

On pose également :

$$a_3 = -x_1 - x_2 + 2x_3, \quad b_3 = -y_1 - y_2 + 2y_3,$$

de sorte que :

- a) A_2 agit sur a_1 , a_2 et a_3 par permutation des indices.
- b) A_2 agit sur b_1 , b_2 et b_3 par permutation des indices.
- c) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ et $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.
- d) Le crochet de Poisson de S est donné par le tableau suivant :

$\{, \}$	a_1	b_1	a_2	b_2
a_1	0	6	0	-3
b_1	-6	0	3	0
a_2	0	-3	0	6
b_2	3	0	-6	0

3.3.2. Mettons en évidence la copie de $\mathfrak{sl}(2)$ de S^{A_2} :

Lemme 9 *Considérons les éléments de S suivants :*

$$\begin{aligned} E &= \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{18} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2}{9}, \\ F &= -\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{18} = -\frac{b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2}{9}, \\ H &= -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{9} = -\frac{2a_1 b_1 + a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2a_2 b_2}{9}, \end{aligned}$$

Alors (E, F, H) vérifie l'hypothèse c).

Preuve. Comme A_2 agit par permutation des indices, E , F et H sont A_2 -invariants. Le reste se démontre par des calculs directs. $\square$

E , F et H agissent par dérivation sur S . Donnons leur action sur les générateurs :

	a_1	b_1	a_2	b_2
E	0	a_1	0	a_2
F	b_1	0	b_2	0
H	a_1	$-b_1$	a_2	$-b_2$

Par suite, l'action de E , F et H est donnée par :

$$\begin{aligned}\{E, \cdot\} &= a_1 \frac{\partial}{\partial b_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial b_2}, \\ \{F, \cdot\} &= b_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial a_2}, \\ \{H, \cdot\} &= a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} - b_1 \frac{\partial}{\partial b_1} - b_2 \frac{\partial}{\partial b_2}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a donc $S(1)_{+1} = Vect(a_1, a_2)$ et $S(1)_{-1} = Vect(b_1, b_2)$, donc l'hypothèse d) est satisfaite.

3.3.3. On considère l'élément suivant de S :

$$D = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Alors $\{E, D\} = \{F, D\} = \{H, D\} = 0$. D'après la proposition 3, $S_{\mathfrak{sl}(2)} = \mathbb{C}[D]$. De plus, $\sigma.D = \varepsilon(\sigma)D$, donc, avec les notations de la proposition 3, $N = 2$.

3.3.4. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 10 $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{A_2}) = 1$.

Preuve. On considère l'élément suivant :

$$P = -\frac{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3}{3} = a_1^2 a_2 + a_1 a_2^2.$$

Comme A_2 agit par permutation des indices, $P \in S^{A_2}$. De plus, $\{E, P\} = 0$ et $\{H, P\} = 3$, donc P est un vecteur de plus haut poids 3, homogène de degré 3. Utilisons la proposition 5, avec $P = Q$. Par un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^3 (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, P^{-(\beta-2i)}\} &= (-144)D^2, \\ \sum_{i=0}^3 (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} P^{-(\beta-2i)} &= (-36)D^3.\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $-36(4 + 2k)D^{2+2k} \in \{S^{A_2}, S^{A_2}\}$. Autrement dit, pour tout l pair supérieur ou égal à 2, $D^l \in \{S^{A_2}, S^{A_2}\}$.

Reste à étudier le cas de 1. On procède comme pour B_2 , avec des notations semblables. S' est graduée en mettant les x_i en degré $(1, 0)$ et les y_i en degré $(0, 1)$. On pose :

$$\Phi'(x, y) = \sum_{i,j} \dim_{\mathbb{C}} (S')^{A_2}(i, j) x^i y^j, \quad \Phi(x, y) = \sum_{i,j} \dim_{\mathbb{C}} S^{A_2}(i, j) x^i y^j.$$

Une base de S' est donnée par les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3}$. Soit $\xi'_{i,j}$ le caractère du A_2 -module $S'(i, j)$ et posons :

$$\xi'(x, y) = \sum_{i,j} \xi'_{i,j} x^i y^j.$$

A_2 agissant par permutation sur les monômes, $\xi'_{i,j}(\sigma)$ est le nombre de monômes de S^{A_2} de degré (i, j) fixés par σ . En conséquence :

a) Pour $\sigma = id$, les monômes fixés par id sont les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3}$. Donc :

$$\xi'(id) = \left(\frac{1}{(1-x)(1-y)} \right)^3.$$

b) Pour $\sigma = (12)$, les monômes fixés par (12) sont les monômes $(x_1 x_2)^\alpha (y_1 y_2)^\beta x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3}$. Donc :

$$\xi'((12)) = \frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)(1-x)(1-y)}.$$

c) Pour $\sigma = (123)$, les monômes fixés par (123) sont les monômes $(x_1 x_2 x_3)^\alpha (y_1 y_2 y_3)^\beta$. Donc :

$$\xi'((123)) = \frac{1}{(1-x^3)(1-y^3)}.$$

Par suite :

$$\Phi'(x, y) = \frac{\xi'(id) + 3\xi'((12)) + 2\xi'((123))}{6}.$$

Comme $(S')^{A_2} = S[x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] \otimes S^{A_2}$, $\Phi' = \frac{1}{(1-x)(1-y)} \Phi$ et donc :

$$\Phi(x, y) = \frac{1 + xy + xy^2 + x^2 y + x^2 y^2 + x^3 y^3}{(x+1)(x^2+x+1)(1-x)^2(y+1)(y^2+y+1)(1-y)^2}.$$

Comme pour B_2 , en notant χ_n le caractère du $\mathfrak{sl}(2)$ -module $S^{A_2}(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) h^n = \Phi(hq, h/q) = \frac{q^5 + h^2 q^5 + h^3 q^4 + h^3 q^6 + h^4 q^5 + h^6 q^5}{(hq+1)(h+q)(h^2+hq+q^2)(h^2 q^2 + hq+1)(h-q)^2(1-hq)^2}.$$

En développant cette fraction rationnelle en série relativement à h :

$$\begin{aligned} \chi_0(q) &= 1, \\ \chi_1(q) &= 0, \\ \chi_2(q) &= q^2 + 1 + q^{-2}, \\ \chi_3(q) &= q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}, \\ \chi_4(q) &= q^4 + q^2 + 2 + q^{-2} + q^{-4}, \\ \chi_5(q) &= q^5 + 2q^3 + 2q + 2q^{-1} + 2q^{-3} + q^{-5}, \\ \chi_6(q) &= 2q^6 + 2q^4 + 3q^2 + 3 + 3q^{-2} + 2q^{-4} + 2q^{-6}, \\ \chi_7(q) &= q^7 + 2q^5 + 3q^3 + 3q + 3q^{-1} + 3q^{-3} + 2q^{-5} + q^{-7}, \\ \chi_8(q) &= 2q^8 + 3q^6 + 4q^4 + 4q^2 + 5 + 4q^{-2} + 4q^{-4} + 3q^{-6} + 2q^{-8}, \\ \chi_9(q) &= 2q^9 + 3q^7 + 4q^5 + 5q^3 + 5q + 5q^{-1} + 5q^{-3} + 4q^{-5} + 3q^{-7} + 2q^{-9}, \\ \chi_{10}(q) &= 2q^{10} + 3q^8 + 5q^6 + 5q^4 + 6q^2 + 6 + 6q^{-2} + 5q^{-4} + 5q^{-6} + 3q^{-8} + 2q^{-10}. \end{aligned}$$

Appliquons la proposition 6 pour $k = 0$. Le caractère de $S(2) \otimes S(0) + S(1) \otimes S(1)$ est $\chi_2(q)$, donc $(S(2) \otimes S(0) + S(1) \otimes S(1))_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$, donc $1 \notin \{S^{A_2}, S^{A_2}\}$.

En conclusion, seul 1 n'appartient pas à $\{S^{A_2}, S^{A_2}\}$. Donc $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{A_2}) = 1$. $\square$

3.4 Calculs pour G_2

3.4.1. On reprend les notations du paragraphe précédent. Comme $G_2 = A_2 \times (-Id)$, $S^{G_2} = (S^{A_2})^{(-Id)}$, par suite :

$$S^{G_2} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^{A_2}(2k).$$

Donc $E, F, H, D^2 \in S^{G_2}$. Par suite, $S_{\mathfrak{sl}(2)}^{G_2} = \mathbb{C}[D^2]$.

3.4.2. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 11 $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{G_2}) = 3$.

Preuve. On considère les éléments suivants de S :

$$\begin{aligned} P &= a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 \\ &= 2a_1^6 + 2a_2^6 + 6a_1^5a_2 + 15a_1^4a_2^2 + 20a_1^3a_2^3 + 15a_1^2a_2^4 + 6a_1a_2^5, \\ Q &= a_1^6(a_2b_2 + a_3b_3) + a_2^6(a_1b_1 + a_3b_3) + a_3^6(a_1b_1 + a_2b_2) \\ &\quad - a_1^5b_1(a_2^2 + a_3^2) - a_2^5b_2(a_1^2 + a_3^2) - a_3^5b_3(a_1^2 + a_2^2) \\ &= -2a_1^6a_2b_2 - 2a_1b_1a_2^6 - 5a_1^5a_2^2b_2 + 2a_1^5b_1a_2^2 + 5a_1^4a_2^4b_2 + 5a_1^4b_1a_2^3 + 2a_1^2a_2^5b_2 - 5a_1^2b_1a_2^5. \end{aligned}$$

Comme A_2 agit par permutation sur les indices, P et Q sont A_2 -invariants. Comme ils sont homogènes de degrés pairs, ils sont dans S^{G_2} . De plus :

$$\{E, P\} = 0, \quad \{H, P\} = 6P, \quad \{E, Q\} = 0, \quad \{H, Q\} = 6Q,$$

donc P et Q sont des vecteurs de plus haut poids 6. Utilisons la proposition 5. Par un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^6 (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} &= 207\,360D^6, \\ \sum_{i=0}^6 (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} Q^{-(\beta-2i)} &= 25\,920D^7. \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $25\,920(8+2k)D^{6+2k} \in \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Autrement dit, pour tout l pair supérieur ou égal à 6, $D^l \in \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$.

Reste à étudier les cas de 1, D^2 et D^4 . Comme $1 \notin \{S^{A_2}, S^{A_2}\}$, $1 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Appliquons la proposition 6 pour $k = 4$. Nous avons calculé le caractère de $S^{A_2}(n)$ pour $n \leq 10$ dans la section précédente et donc le caractère $\chi_n(q)$ de $S^{G_2}(n)$:

$$\begin{aligned} \chi_0(q) &= 1, \\ \chi_2(q) &= q^2 + 1 + q^{-2}, \\ \chi_4(q) &= q^4 + q^2 + 2 + q^{-2} + q^{-4}, \\ \chi_6(q) &= 2q^6 + 2q^4 + 3q^2 + 3 + 3q^{-2} + 2q^{-4} + 2q^{-6}, \\ \chi_8(q) &= 2q^8 + 3q^6 + 4q^4 + 4q^2 + 5 + 4q^{-2} + 4q^{-4} + 3q^{-6} + 2q^{-8}, \\ \chi_{10}(q) &= 2q^{10} + 3q^8 + 5q^6 + 5q^4 + 6q^2 + 6 + 6q^{-2} + 5q^{-4} + 5q^{-6} + 3q^{-8} + 2q^{-10}. \end{aligned}$$

($\chi_n(q) = 0$ si n est impair). Par suite, le caractère de $S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(4) \otimes S^{G_2}(2)$ est :

$$\chi_6 + \chi_2\chi_4 = 3q^6 + 4q^4 + 7q^2 + 7 + 7q^{-2} + 4q^{-4} + 3q^{-6},$$

donc $(S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(4) \otimes S^{G_2}(2))_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$. Par suite, $D^2 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$.

Appliquons la proposition 6 pour $k = 4$. Le caractère de $S^{G_2}(10) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(8) \otimes S^{G_2}(2) + S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(4)$ est :

$$\begin{aligned} &\chi_{10}(q) + \chi_8(q)\chi_2(q) + \chi_6(q)\chi_4(q) \\ &= 6q^{10} + 12q^8 + 23q^6 + 28q^4 + 35q^2 + 35 + 35q^{-2} + 28q^{-4} + 23q^{-6} + 12q^{-8} + 6q^{-10}, \end{aligned}$$

donc $(S^{G_2}(10) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(8) \otimes S^{G_2}(2) + S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(4))_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$. Par suite, $D^4 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$.

Enfin, seuls 1, D^2 et D^4 n'appartiennent pas à $\{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Donc $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{G_2}) = 3$. $\square$

3.4.3. Remarques.

- a) $\{S^{A_2}, S^{A_2}\}$ est un idéal : c'est l'idéal d'augmentation de S^{A_2} .
- b) $\{S^{B_2}, S^{B_2}\}$ n'est pas un idéal de S^{B_2} . En effet, $E = \frac{1}{2}\{H, E\}$, $F = -\frac{1}{2}\{H, F\}$ et $H = \{E, F\}$, donc E, F et H appartiennent à $\{S^{B_2}, S^{B_2}\}$. Un calcul direct montre que :

$$H^2 + 4EF = D^2.$$

Or $D^2 \notin \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$, qui n'est donc pas un idéal.

c) $\{S^{G_2}, S^{G_2}\}$ n'est pas un idéal de S^{G_2} . En effet, $E = \frac{1}{2}\{H, E\}$, $F = -\frac{1}{2}\{H, F\}$ et $H = \{E, F\}$, donc E , F et H appartiennent à $\{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Un calcul direct montre que :

$$H^2 + 4EF = \frac{-1}{27}D^2.$$

Or $D^2 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$, qui n'est donc pas un idéal.

4 Présentations des algèbres d'invariants par générateurs et relations pour les trois groupes de Weyl de rang 2

4.1 Cas de A_2

4.1.1. Reprenons les notations du paragraphe 3.3. Rappelons que S^{A_2} est $\mathbb{N}^2$ -graduée en mettant a_1 , a_2 homogènes de degré $(1, 0)$ et b_1 , b_2 homogènes de degré $(0, 1)$. La série formelle de Poincaré-Hilbert de S^{A_2} est :

$$\Phi(x, y) = \frac{1 + xy + xy^2 + x^2y + x^2y^2 + x^3y^3}{(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - y^2)(1 - y^3)}.$$

4.1.2. Considérons les éléments suivants de S^{A_2} :

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3}{9} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2}{9}, \\ T_1 &= -\frac{a_1a_2a_3}{9} = \frac{a_1a_2^2 + a_2a_1^2}{9}, \\ U_1 &= -\frac{a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2}{9} = \frac{2a_1b_1b_2 + 2a_2b_1b_2 + a_1b_2^2 + a_2b_1^2}{9}, \\ S_2 &= -\frac{b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3}{9} = \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_1b_2}{9}, \\ T_2 &= -\frac{b_1b_2b_3}{9} = \frac{b_1b_2^2 + b_2b_1^2}{9}, \\ U_2 &= -\frac{a_1^2b_1 + a_2^2b_2 + a_3^2b_3}{9} = \frac{2a_1a_2b_1 + 2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2 + a_2^2b_1}{9}, \\ H &= -\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{9} = -\frac{2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2}{9}. \end{aligned}$$

Comme $A_2 = S_3$ agit sur (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) par permutation des indices, ces éléments sont bien dans S^{A_2} . On note $R = \mathbb{C}[S_1, T_1, S_2, T_2]$. Par la théorie des fonctions symétriques, S_1 et T_1 sont algébriquement indépendants et S_2 et T_2 sont algébriquement indépendants. Par suite, R est une algèbre de polynômes à quatre variables et sa série de Poincaré-Hilbert est :

$$\frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - y^2)(1 - y^3)}.$$

Lemme 12 *Tout élément de S^{A_2} s'écrit de manière unique :*

$$P_0 + P_1H + P_2H^2 + P_3H^3 + Q_1U_1 + Q_2U_2,$$

avec $P_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2$ des éléments de R . Autrement dit, S^{A_2} est un R -module libre de base $(1, H, H^2, H^3, U_1, U_2)$.

Preuve. *Unicité.* Supposons que $Q \in S^{A_2}$ s'écrit :

$$Q = P_0 + P_1H + P_2H^2 + P_3H^3 + Q_1U_1 + Q_2U_2,$$

avec $P_0, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2$ des éléments de R . On introduit l'action de A_2 par automorphismes d'algèbre sur S suivante : pour tout $\sigma \in S_3$,

$$\sigma \star a_i = \sigma.a_i = a_{\sigma(i)}, \quad \sigma \star b_i = b_i.$$

Comme S_1 , T_1 , S_2 et T_2 sont invariants sous cette action, les éléments de R sont invariants sous cette action. Par suite, pour tout $\sigma \in S_3$:

$$\sigma \star Q = P_0 + P_1(\sigma \star H) + P_2(\sigma \star H^2) + P_3(\sigma \star H^3) + Q_1(\sigma \star U_1) + Q_2(\sigma \star U_2).$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & H & H^2 & H^3 & U_1 & U_2 \\ (12) \star 1 & (12) \star H & (12) \star H^2 & (12) \star H^3 & (12) \star U_1 & (12) \star U_2 \\ (23) \star 1 & (23) \star H & (23) \star H^2 & (23) \star H^3 & (23) \star U_1 & (23) \star U_2 \\ (123) \star 1 & (123) \star H & (123) \star H^2 & (123) \star H^3 & (123) \star U_1 & (123) \star U_2 \\ (132) \star 1 & (132) \star H & (132) \star H^2 & (132) \star H^3 & (132) \star U_1 & (132) \star U_2 \\ (13) \star 1 & (13) \star H & (13) \star H^2 & (13) \star H^3 & (13) \star U_1 & (13) \star U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ (12) \star Q \\ (123) \star Q \\ (132) \star Q \\ (13) \star Q \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice du membre de gauche est :

$$\begin{aligned} & \frac{-1}{9^7} (a_1 - a_2)^3 (a_1 - a_3)^3 (a_2 - a_3)^3 (b_1 - b_2)^3 (b_1 - b_3)^3 (b_2 - b_3)^3 \\ &= \frac{-1}{9^7} (a_1 - a_2)^3 (2a_1 + a_2)^3 (a_1 + 2a_2)^3 (b_1 - b_2)^3 (2b_1 + b_2)^3 (b_1 + 2b_2)^3. \end{aligned}$$

Il est donc non nul. Par suite, les P_i et les Q_j sont entièrement déterminés en multipliant le vecteur du membre de droite par l'inverse de la matrice du membre de gauche.

Existence. D'après ce qui précède, le R -module M engendré par $1, H, H^2, H^3, U_1$ et U_2 est libre de base $(1, H, H^2, H^3, U_1, U_2)$. Par suite, sa série de Poincaré-Hilbert est :

$$\frac{1 + xy + xy^2 + x^2y + x^2y^2 + x^3y^3}{(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - y^2)(1 - y^3)}.$$

C'est également la série de Poincaré-Hilbert de S^{A_2} . Comme $M \subseteq S^{A_2}$, $M = S^{A_2}$. $\square$

4.1.3. Remarque. La preuve du lemme précédent est algorithmique et permet donc de calculer explicitement la décomposition des éléments de S^{A_2} dans la base $(1, H, H^2, H^3, U_1, U_2)$.

4.1.4. Nous pouvons maintenant donner une présentation de S^{A_2} :

Théorème 13 S^{A_2} est engendrée par $S_1, T_1, U_1, S_2, T_2, U_2$ et H et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} H^4 &= -4S_1^2S_2^2 - 3T_1T_2H + 5S_1S_2H^2 - T_1S_2U_1 - S_1T_2U_2, \\ HU_1 &= -3S_1T_2 - S_2U_2, \\ HU_2 &= -3T_1S_2 - S_1U_1, \\ U_1^2 &= 12S_1S_2^2 - 3S_2H^2 + 3T_2U_2, \\ U_2^2 &= 12S_1^2S_2 - 3S_1H^2 + 3T_1U_1, \\ U_1U_2 &= 9T_1T_2 - 12S_1S_2H + 3H^2. \end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme précédent, S^{A_2} est engendrée par $S_1, T_1, U_1, S_2, T_2, U_2$ et H . Les relations entre ces éléments sont données en décomposant les produits des éléments de la base $(1, H, H^2, H^3, U_1, U_2)$ du R -module S^{A_2} dans cette même base. Des calculs directs utilisant l'algorithme de la preuve du lemme précédent donnent le résultat annoncé. $\square$

4.1.5. Le tableau suivant donne le crochet de Poisson entre les générateurs de S^{A_2} :

	S_1	S_2	T_1	T_2	H	U_1	U_2
S_1	0	$-H$	0	U_1	$-2S_1$	$2U_2$	$3T_1$
S_2	H	0	$-U_2$	0	$2S_2$	$-3T_2$	$-2U_1$
T_1	0	U_2	0	$-6S_1S_2 + 3H^2$	$-3T_1$	$-6S_1H$	$6S_1^2$
T_2	$-U_1$	0	$6S_1S_2 - 3H^2$	0	$3T_2$	$-6S_2^2$	$6S_2H$
H	$2S_1$	$-2S_2$	$3T_1$	$-3T_2$	0	$-U_1$	U_2
U_1	$-2U_2$	$3T_2$	$6S_1H$	$6S_2^2$	U_1	0	$-30S_1S_2 + 3H^2$
U_2	$-3T_1$	$2U_1$	$-6S_1^2$	$-6S_2H$	$-U_2$	$30S_1S_2 - 3H^2$	0

En particulier, $H = \{S_2, S_1\}$, $U_1 = \{S_2, T_2\}$ et $U_2 = \{T_1, S_2\}$.

4.1.6. Enfin, on peut aisément montrer que les formules précédentes définissent un crochet de Poisson sur l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[S_1, T_1, U_1, S_2, T_2, U_2, H]$. (Il suffit de vérifier l'identité de Jacobi sur les sept générateurs, ce qui se fait par un calcul direct long, mais sans difficulté).

4.2 Présentations de S^{G_2} et S^{B_2}

4.2.1. Reprenons les notations du paragraphe 3.4. Comme S^{G_2} est la somme directe des composantes homogènes de degré pair de S^{A_2} , on déduit immédiatement les résultats suivants :

Théorème 14 *i) S^{G_2} est engendrée par $S_1, T'_1 = T_1^2, S_2, T'_2 = T_2^2, Z = T_1T_2, H, U_{11} = T_1U_1, U_{12} = T_1U_2, U_{21} = T_3U_1$ et $U_{22} = T_2U_2$.*

ii) Posons $R' = R \cap S^{G_2} = \mathbb{C}[S_1, T'_1, S_2, T'_2, Z]$. Tout élément de S^{G_2} s'écrit de manière unique :

$$Q = P_0 + P_1H + P_2H^2 + P_3H^3 + Q_{11}U_{11} + Q_{21}U_{21} + Q_{12}U_{12} + Q_{22}U_{22},$$

où les P_i et les Q_{jk} sont des éléments de R' .

iii) S^{G_2} est engendrée par $S_1, T'_1, S_2, T'_2, Z, H, U_{11}, U_{12}, U_{21}$ et U_{22} et les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Z^2 &= T'_1T'_2, \\ H^4 &= -4S_1^2S_2^2 - 3ZH + 5S_1S_2H^2 - S_2U_{11} - S_1U_{22}, \\ HU_{11} &= -3S_1Z - S_2U_{12}, \\ HU_{12} &= -3S_2T'_1 - S_2U_{11}, \\ HU_{21} &= -3S_1T'_2 - S_2U_{22}, \\ HU_{22} &= -3S_2Z - S_2U_{21}, \\ U_{11}^2 &= 12S_1S_2^2T'_1 - 3S_2T'_1H^2 + 3T'_1U_{22}, \\ U_{11}U_{12} &= 9ZT'_1 - 12S_1S_2T'_1H + 3T'_1H^3, \\ U_{11}U_{21} &= 12S_1S_2^2Z - 3S_2ZH^2 + 3ZU_{22}, \\ U_{11}U_{22} &= 9Z^2 - 12S_1S_2ZH + 3ZH^3, \\ U_{12}^2 &= 12S_1^2S_2T'_1 - 3S_1T'_1H^2 + 3T'_1U_{11}, \\ U_{12}U_{21} &= 9Z^2 - 12S_1S_2ZH + 3ZH^3, \\ U_{12}U_{22} &= 12S_1^2S_2Z - 3S_1ZH^2 + 3ZU_{11}, \\ U_{21}^2 &= 12S_1S_2^2T'_2 - 3S_2T'_2H^2 + 3T'_2U_{22}, \\ U_{21}U_{22} &= 9ZT'_2 - 12S_1S_2T'_2H + 3T'_2H^3, \\ U_{22}^2 &= 12S_1^2S_2T'_2 - 3S_1T'_2H^2 + 3T'_2U_{11}. \end{aligned}$$

4.2.2. Reprenons les notations du paragraphe 3.2. Par une méthode semblable à celle utilisée pour A_2 , on montrerait le résultat suivant :

Théorème 15 *i) S^{B_2} est engendrée par $S_1 = x_1^2 + x_2^2, S_2 = x_1^2x_2^2, T_1 = y_1^2 + y_2^2, T_2 = y_1^2u_2^2, Z_1 = x_1y_1 + x_2y_2, Z_2 = x_1y_1x_2y_2, Z_3 = x_1y_1^3 + x_2y_2^3$ et $Z_4 = x_1^3y_1 + x_2^3y_3$.*

ii) Posons $R = \mathbb{C}[S_1, T_1, S_2, T_2]$. Il s'agit d'une algèbre de polynômes à quatre variables. Tout élément de S^{B_2} s'écrit de manière unique :

$$Q = P_0 + P_1Z_1 + P_2Z_1^2 + P_3Z_1^3 + P_4Z_1^4 + Q_2Z_2 + Q_3Z_3 + Q_4Z_4,$$

où les P_i et les Q_j sont des éléments de R .

iii) S^{B_2} est engendrée par $S_1, T_1, S_2, T_2, Z_1, Z_2, Z_3$ et Z_4 et les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
Z_1^5 &= 16S_2T_2 - 5S_2T_1^2 - 5S_1^2T_2 + \frac{S_1^2T_1^2}{2} + \frac{3S_1T_1}{2}Z_1^2 \\
&\quad + \left(4S_2T_1 - \frac{S_1^2T_1}{2}\right)Z_3 + \left(4S_1T_2 - \frac{S_1T_1^2}{2}\right)Z_4, \\
Z_1Z_2 &= \frac{S_1T_1}{4}Z_1 + \frac{1}{4}Z_1^3 - \frac{S_1}{4}Z_3 - \frac{T_1}{4}Z_4, \\
Z_1Z_3 &= -S_1T_2 + T_1Z_1^2 - T_1Z_2, \\
Z_1Z_4 &= -S_2T_1 + S_1Z_1^2 - S_1Z_2, \\
Z_2^2 &= S_2T_2, \\
Z_2Z_3 &= \left(\frac{S_1T_1^2}{4} - S_1T_2\right)Z_1 + \frac{T_1}{4}Z_1^3 - \frac{S_1T_1}{4}Z_3 + \left(T_2 - \frac{T_1^2}{4}\right)Z_4, \\
Z_2Z_4 &= \left(\frac{S_1^2T_1}{4} - S_2T_1\right)Z_1 + \frac{S_1}{4}Z_1^3 + \left(S_2 - \frac{S_1^2}{4}\right)Z_3 - \frac{S_1T_1}{4}Z_4, \\
Z_3^2 &= -S_1T_1T_2 + (T_1^2 - T_2)Z_1^2 + (4T_2 - 2T_1^2)Z_2, \\
Z_3Z_4 &= 4S_2T_2 - \frac{5S_2T_1^2}{4} - \frac{5S_1^2T_2}{4} + \frac{5S_1T_1}{4}Z_1^2 - \frac{1}{4}Z_1^4 - \frac{3S_1T_1}{2}Z_2, \\
Z_4^2 &= -S_1S_2T_1 + (S_1^2 - S_2)Z_1^2 + (4S_2 - 2S_1^2)Z_2.
\end{aligned}$$

5 Sous-groupes de $(\pm 1)^n$

5.1. Soit maintenant G un sous-groupe de $(\pm 1)^n$ agissant sur $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ et sur l'algèbre de Weyl $A = A_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : en notant $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ les coordonnées de $A_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}
(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \cdot x_i &= \epsilon_i x_i, & (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \cdot p_i &= \epsilon_i p_i, \\
(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \cdot y_i &= \epsilon_i y_i; & (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \cdot q_i &= \epsilon_i q_i.
\end{aligned}$$

5.2. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 16

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) &= \begin{cases} 0 & \text{s'il existe } i \text{ tel que } G \subseteq (\pm 1)^{i-1} \times \{1\} \times (\pm 1)^{n-i}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \\
\dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) &= \begin{cases} 0 & \text{si } (-1, \dots, -1) \notin G, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Preuve. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $\mathfrak{g}_i = Vect(x_i^2, x_i y_i, x_i^2)$ est inclus dans S^G est forme une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. Par suite, comme dans les exemples précédents, avec $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$, la composante isotypique triviale $S_{\mathfrak{g}}^G$ de S^G sous l'action de $\mathfrak{g}$ est un complémentaire de $\{S^G, S^G\}$. D'autre part :

$$\begin{aligned}
S_{\mathfrak{g}}^G &\subseteq \bigcap_{i=1}^n Ker(\{x_i^2, \cdot\}) \cap \bigcap_{i=1}^n Ker(\{y_i^2, \cdot\}) \\
&\subseteq \bigcap_{i=1}^n Ker\left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i}\right) \cap \bigcap_{i=1}^n Ker\left(y_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&\subseteq \bigcap_{i=1}^n Ker\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \cap \bigcap_{i=1}^n Ker\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&\subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \cap \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] \\
&\subseteq \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Donc $S_{\mathfrak{g}}^G = \mathbb{C}$ et $S^G = \mathbb{C} + \{S^G, S^G\}$. Par suite, $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G)P = 0$ si $1 \in \{S^G, S^G\}$ et 0 sinon.

Supposons qu'il existe i tel que $G \subseteq (\pm 1)^{i-1} \times \{1\} \times (\pm 1)^{n-i}$. Alors x_i et $y_i \in S^G$ et donc $1 = \{x_i, y_i\} \in \{S^G, S^G\}$. Sinon, G agit sans points fixes sur $Vect(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ et donc la composante homogène de S^G de degré 1 est nulle. Comme $\{, \}$ est homogène de degré -2 , $1 \notin \{S^G, S^G\}$.

Enfin, rappelons que $\dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G)$ est le nombre de classes de conjugaison de G agissant sur $Vect(x_1, \dots, x_n)$ sans points fixes. Le seul élément de $(\pm 1)^n$ agissant sans points fixes étant $(-1, \dots, -1)$,

le résultat sur $\dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G)$ est immédiat. $\square$

5.3. Remarque. Dans tous les cas, on a $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) \geq \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G)$. Ces deux nombres ne sont pas nécessairement égaux, comme le montre le troisième exemple ci-dessous :

- i) Pour $G = (\pm 1)^{n-1} \times (1)$, alors $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) = \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) = 0$.
- ii) Pour $G = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in (\pm 1)^n / \epsilon_1 \dots \epsilon_n = 1\}$, avec n pair, $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) = \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) = 1$.
- iii) Pour $G = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in (\pm 1)^n / \epsilon_1 \dots \epsilon_n = 1\}$, avec n impair supérieur ou égal à 3, $\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) = 1$ et $\dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) = 0$.

5.4. En particulier, pour l'exemple iii), les constantes sont dans $[A^G, A^G]$. Voici une manière de les exprimer :

Proposition 17 Dans A^G , avec les notations de l'exemple iii) ci-dessus :

$$\sum_{(x_i, y_i) = (p_i, q_i) \text{ ou } (q_i, p_i)} (-1)^{\alpha_{x,y}} [x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n] = 2,$$

où $\alpha_{x,y}$ désigne le nombre de x_i égaux à q_i .

Par exemple, pour $n = 1$ et pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} 2 &= [p_1, q_1] - [q_1, p_1], \\ 2 &= [p_1 p_2 p_3, q_1 q_2 q_3] - [q_1 p_2 p_3, p_1 q_2 q_3] - [p_1 q_2 p_3, q_1 p_2 q_3] - [p_1 p_2 q_3, q_1 q_2 p_3] \\ &\quad + [p_1 q_2 q_3, q_1 p_2 p_3] + [q_1 p_2 q_3, p_1 q_2 p_3] + [q_1 q_2 p_3, p_1 p_2 q_3] - [q_1 q_2 q_3, p_1 p_2 p_3]. \end{aligned}$$

Preuve.

Première étape. Dans A , on pose, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$E_i = \frac{p_i^2}{2}, F_i = -\frac{q_i^2}{2}, H_i = -\frac{p_i q_i + q_i p_i}{2}.$$

Alors $\mathfrak{g}_i = Vect(E_i, F_i, H_i)$ munie du crochet $[\cdot, \cdot]$ est une sous-algèbre Lie de A isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. En posant $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_n$, $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de A isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)^{\oplus n}$. Elle est de plus incluse dans A^G , donc A^G est ainsi muni d'une structure de $\mathfrak{g}$ -module. De manière semblable à la preuve du théorème 16, la composante isotypique triviale de A^G est $\mathbb{C}$.

Deuxième étape. Considérons l'élément suivant de l'algèbre $A \otimes A$:

$$X = (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n).$$

En développant :

$$X = \sum_{(x_i, y_i) = (p_i, q_i) \text{ ou } (q_i, p_i)} (-1)^{\alpha_{x,y}} x_1 \dots x_n \otimes y_1 \dots y_n,$$

donc $X \in A^G \otimes A^G$. D'autre part, $\mathfrak{g}$ agit par dérivation sur A et donc agit également par dérivation sur $A \otimes A$. Par suite, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} E_i.X &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots E_i.(p_i \otimes q_i - q_i \otimes p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) + 0 \\ &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (E_i.p_i \otimes q_i + p_i \otimes E_i.q_i - E_i.q_i \otimes p_i - q_i \otimes E_i.p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) \\ &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (0 + p_i \otimes p_i - p_i \otimes p_i - 0) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_i.X &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots F_i.(p_i \otimes q_i - q_i \otimes p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) + 0 \\ &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (F_i.p_i \otimes q_i + p_i \otimes F_i.q_i - F_i.q_i \otimes p_i - q_i \otimes F_i.p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) \\ &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (q_i \otimes q_i + 0 - 0 - q_i \otimes q_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_i.X &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots H_i.(p_i \otimes q_i - q_i \otimes p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) + 0 \\ &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (H_i.p_i \otimes q_i + p_i \otimes H_i.q_i - H_i.q_i \otimes p_i - q_i \otimes H_i.p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) \\ &= (p_1 \otimes q_1 - q_1 \otimes p_1) \dots (p_i \otimes q_i - p_i \otimes q_i + q_i \otimes p_i - q_i \otimes p_i) \dots (p_n \otimes q_n - q_n \otimes p_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc X est dans la composante isotypique triviale de $A^G \otimes A^G$.

Troisième étape. L'identité de Jacobi montre que $[\cdot, \cdot] : A^G \otimes A^G \longrightarrow A^G$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$ -modules. Par suite, $[X]$ est dans la composante isotypique triviale de A^G , c'est-à-dire dans $\mathbb{C}$. Pour calculer $[X]$, il suffit donc de calculer le terme constant de chacun des $[x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n]$ dans la base $(p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} q_1^{\beta_1} \dots q_n^{\beta_n})_{\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}}$ de A . Trois cas se présentent.

i) Il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i = p_i$ et $y_j = p_j$. Alors :

$$[x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n] = \underbrace{x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n}_{\in p_i A} - \underbrace{y_1 \dots y_n x_1 \dots x_n}_{\in p_j A} \in p_i A + p_j A.$$

Or une base de $p_i A + p_j A$ est $(p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} q_1^{\beta_1} \dots q_n^{\beta_n})_{\alpha_i > 0 \text{ ou } \alpha_j > 0}$. Par suite le terme constant de $[x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n]$ est nul.

ii) Tous les x_i sont égaux à p_i . Une récurrence montre que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, dans l'algèbre de Weyl $A_k(\mathbb{C})$:

$$[p_1 \dots p_k, q_1 \dots q_k] = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} (-1)^{k-j-1} p_{i_1} \dots p_{i_j} q_{i_1} \dots q_{i_j}.$$

Par suite, le terme constant de $[p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n]$ est $(-1)^{n-1-0} = 1$ car n est impair.

iii) Tous les x_i sont égaux à q_i . Par antisymétrie de $[\cdot, \cdot]$, le terme constant de $[q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n]$ est -1 .

En conclusion, le terme constant de $[X]$ est $1 + (-1)^n(-1) = 2$. Comme $[X] \in \mathbb{C}$, $[X] = 2$. $\square$

5.5. Remarque. On a montré au passage que S et A sont deux $\mathfrak{sl}(2)^{\oplus n}$ -modules. On peut montrer que le morphisme de symétrisation de S dans A est un isomorphisme de $\mathfrak{sl}(2)^{\oplus n}$ -modules; comme il commute à l'action de G , il induit un isomorphisme de $\mathfrak{sl}(2)^{\oplus n}$ -modules de S^G dans A^G .

6 Sous-groupe de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^n$

6.1. Soit $n \in \mathbb{N}$, plus grand que 2. Considérons le sous-groupe suivant de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^n$:

$$G = \left\{ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^n / \bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_n = \bar{0} \right\}.$$

Ce groupe agit sur $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ munie du crochet de Poisson standard et sur l'algèbre de Weyl $A = A_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : en notant $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ les coordonnées de $A_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n).x_i &= \zeta^{k_i} x_i, \\ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n).y_i &= \zeta^{-k_i} y_i; \\ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n).p_i &= \zeta^{k_i} p_i, \\ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n).q_i &= \zeta^{-k_i} q_i, \end{aligned}$$

où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

6.2. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 18

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) &= 2^n - 2, \\ \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) &= \frac{2}{3} (2^{n-1} - (-1)^{n-1}). \end{aligned}$$

Preuve.

Première étape. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, considérons $t_i = x_i y_i \in S^G$ et posons $\mathfrak{g} = \text{Vect}(t_1, \dots, t_n)$; il s'agit d'une sous-algèbre de Lie de S^G . De plus :

$$\{t_i, x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}\} = (\beta_i - \alpha_i) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}.$$

Donc $\mathfrak{g}$ agit de manière semi-simple sur S et donc aussi sur S^G . Sa composante isotypique triviale est $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$. Comme dans les exemples précédents, on en déduit :

$$\begin{aligned} S^G &= \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] + \{S^G, S^G\}, \\ HP_0(S^G) &= \frac{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]}{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \cap \{S^G, S^G\}}. \end{aligned}$$

De plus, dans S^G , si $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$\begin{aligned} \{t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n} x_i^3, y_i^3\} &= \{x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i+3} \dots x_n^{\alpha_n}, y_i^3\} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n} \\ &= 3(\alpha_i + 3) x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i+2} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\alpha_1} \dots y_i^{\alpha_i+2} \dots y_n^{\alpha_n} \\ &= t_1^{\alpha_1} \dots t_i^{\alpha_i+2} \dots t_n^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Donc $\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle \subseteq \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \cap \{S^G, S^G\}$. Par suite :

$$HP_0(S^G) = \frac{\frac{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]}{\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle}}{\frac{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \cap \{S^G, S^G\}}{\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle}}.$$

On pose $R = \frac{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]}{\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle}$. Il s'agit d'une algèbre ayant pour base $(\overline{t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}})_{0 \leq \alpha_i \leq 2}$, donc de dimension 2^n . On pose $J = \frac{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \cap \{S^G, S^G\}}{\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle}$, de sorte que $HP_0(S^G) = R/J$.

Deuxième étape. S^G est engendrée par les monômes fixés par G . Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$. Alors :

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n} &\in S^G \\ \iff \forall (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in G, k_1(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + k_n(\alpha_n - \beta_n) &\equiv 0[3] \\ \iff \exists \lambda \in \{0, 1, 2\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i - \beta_i &\equiv \lambda[3]. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \cap \{S^G, S^G\} \\ &= Vect \left(\frac{\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}, x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}\}}{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}, x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n} \in S^G, \forall i, \alpha_i - \beta_i + \gamma_i - \delta_i = 0} \right) \\ &= Vect \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i \gamma_i - \beta_i \delta_i) t_1^{\alpha_1 + \gamma_1} \dots t_i^{\alpha_i + \gamma_i - 1} \dots t_n^{\alpha_n + \gamma_n}}{\exists 0 \leq \lambda \leq 2, \forall i, \alpha_i - \beta_i \equiv \lambda[3], \alpha_i - \beta_i + \gamma_i - \delta_i = 0} \right). \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe i , tel que $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ou δ_i soit supérieur ou égal à 3. Alors tous les monômes apparaissant dans $\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \dots y_n^{\beta_n}, x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} y_1^{\delta_1} \dots y_n^{\delta_n}\}$ sont dans $\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle$. Par suite :

$$J = Vect \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i \gamma_i - \beta_i \delta_i) \overline{t_1^{\alpha_1 + \gamma_1} \dots t_i^{\alpha_i + \gamma_i - 1} \dots t_n^{\alpha_n + \gamma_n}}}{\exists 0 \leq \lambda \leq 2, \forall i, \alpha_i - \beta_i \equiv \lambda[3], \alpha_i - \beta_i + \gamma_i - \delta_i = 0, 0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \leq 2} \right).$$

Par la suite, nous noterons J cet espace. Considérons un élément générateur de J pour lequel $\lambda = 0$. Comme pour tout i , $\alpha_i - \beta_i \equiv 0[3]$ et $-2 \leq \alpha_i - \beta_i \leq 2$, nécessairement $\alpha_i = \beta_i$. De même, $\gamma_i = \delta_i$, donc $(\alpha_i \gamma_i - \beta_i \delta_i) = 0$. Par suite :

$$J = Vect \left(\frac{\sum_{i=1}^n (\alpha_i \gamma_i - \beta_i \delta_i) \overline{t_1^{\alpha_1 + \gamma_1} \dots t_i^{\alpha_i + \gamma_i - 1} \dots t_n^{\alpha_n + \gamma_n}}}{\exists 1 \leq \lambda \leq 2, \forall i, \alpha_i - \beta_i \equiv \lambda[3], \alpha_i - \beta_i + \gamma_i - \delta_i = 0, 0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \leq 2} \right).$$

Troisième étape. Considérons un élément générateur de J pour lequel $\lambda = 1$. Comme pour tout i , $\alpha_i - \beta_i \equiv 1[3]$ et $-2 \leq \alpha_i - \beta_i \leq 2$, nécessairement :

$$\begin{cases} \alpha_i = \beta_i + 1, \\ \gamma_i = \delta_i - 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha_i = \beta_i - 2, \\ \gamma_i = \delta_i + 2 \end{cases}$$

a) Dans le premier cas, on obtient $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) \in \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 2), (2, 1, 0, 1), (2, 1, 1, 2)\}$. Quatre sous-cas apparaissent :

- i) Il existe j tel que $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) = (2, 1, 1, 2)$. Alors tous les monômes apparaissant dans le générateur ont une puissance en t_j supérieur ou égale à 2, donc sont dans $\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle$: le générateur est nul.
- ii) Il existe j, k distincts tels que $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ et $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k)$ sont des éléments de $\{(1, 0, 1, 2), (2, 1, 0, 1)\}$. Alors tous les monômes apparaissant dans le générateur ont une puissance en t_j ou en t_k supérieur ou égale à 2, donc sont dans $\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle$: le générateur est nul.
- iii) Il existe j tel que $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) \in \{(1, 0, 1, 2), (2, 1, 0, 1)\}$ et si $k \neq j$, $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k) = (1, 0, 0, 1)$. Alors le générateur vaut $2t_1 \dots t_n$.
- iv) Si pour tout j , $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) = (1, 0, 0, 1)$, alors le générateur vaut $\sum_{i=1}^n \overline{t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n}$.

b) Dans le second cas, pour tout i , $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i) = (0, 2, 2, 0)$ et donc tous les monômes apparaissant dans le générateur ont une puissance en t_1 ou en t_2 supérieur ou égal à 2, donc sont dans $\langle t_1^2, \dots, t_n^2 \rangle$: le générateur est nul.

Le cas où $\lambda = 2$ se traite de la même manière, en permutant les rôles de (α_i, β_i) et (γ_i, δ_i) . On obtient donc :

$$J = Vect \left(\overline{t_1 \dots t_n}, \sum_{i=1}^n \overline{t_1 \dots t_{i-1} t_{i+1} \dots t_n} \right).$$

Il s'agit donc d'un espace de dimension 2. Comme $HP_0(S^G) = R/J$, $HP_0(S^G)$ est de dimension $2^n - 2$.

Quatrième étape. La dimension de $HH_0(A^G)$ est le nombre de classes de conjugaison de G agissant sans points fixes, c'est-à-dire le nombre d'éléments de G sans composantes nulles. On pose, pour $n \geq 1$:

$$a_n = \text{card} \left(\left\{ (\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n) \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} - \{\bar{0}\} \right)^n / \bar{k}_1 + \dots + \bar{k}_n = \bar{0} \right\} \right).$$

On pose également $a_0 = 1$. On a alors :

$$|G| = 3^{n-1} = 1 + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} a_i.$$

Par suite, en passant aux séries génératrices exponentielles :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) - 1.$$

Par suite :

$$\frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} = e^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) - 1,$$

$$\frac{1}{3} e^{2x} + \frac{2e^{-x}}{3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

$$\text{Donc } a_n = \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) = \frac{1}{3} (2^n + 2(-1)^n) = \frac{2}{3} (2^{n-1} - (-1)^{n-1}). \quad \square$$

6.3. Remarque. Par suite,

$$\dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^G) - \dim_{\mathbb{C}} HH_0(A^G) = \frac{2}{3} (2^n + (-1)^{n-1} - 3).$$

Cette différence tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Références

- [AF00] Jacques Alev et Daniel R. Farkas, *Finite group actions on Poisson algebras*, The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000), Progr. Math., vol. 213, Birkhuser Boston, 2000, pp. 9–28.
- [AFLS00] Jacques Alev, Marco A. Farinati, Thierry Lambre et Andrea L. Solotar, *Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini*, J. Algebra **232** (2000), no. 2, 564–577.
- [AL98] Jacques Alev et Thierry Lambre, *Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein*, Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 25–38.
- [BEG04] Yuri Berest, Pavel Etingof et Victor Ginzburg, *Morita equivalence of Cherednik algebras*, J. Reine Angew. Math. **568** (2004), 81–98.
- [BG03] Kenneth A. Brown et Iain Gordon, *Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory*, J. Reine Angew. Math. **559** (2003), 193–216.
- [EG02] Pavel Etingof et Victor Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 243–348.
- [Fre98] Benoît Fresse, *Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), no. 9, 1053–1058.
- [Fu05] Baohua Fu, *A survey on symplectic singularities and resolutions*, math.AG/05 10346, 2005.
- [GK04] Victor Ginzburg et Dmitry Kaledin, *Poisson deformations of symplectic quotient singularities*, Adv. Math. **186** (2004), no. 1, 1–57.
- [Hun97] Markus Hunziker, *Classical invariant theory for finite reflection groups*, Transform. Groups **2** (1997), no. 2, 147–163.
- [Pic05] Anne Pichereau, *Poisson (co)homology and isolated singularities*, math.QA/05 11201, 2005.
- [Wal93] Nolan R. Wallach, *Invariant differential operators on a reductive Lie algebra and Weyl group representations*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 779–816.