



**HAL**  
open science

# Méthode des surfaces de réponses robuste pour l'analyse dynamique des structures stochastiques

Samir Ghanmi, Mohamed Guedri, Mohamed Lamjed Bouazizi, Riadh Majed, Nouredine Bouhaddi

## ► To cite this version:

Samir Ghanmi, Mohamed Guedri, Mohamed Lamjed Bouazizi, Riadh Majed, Nouredine Bouhaddi. Méthode des surfaces de réponses robuste pour l'analyse dynamique des structures stochastiques. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-00020002

**HAL Id: hal-00020002**

**<https://hal.science/hal-00020002v1>**

Submitted on 28 Apr 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Méthode des surfaces de réponses robuste pour l'analyse dynamique des structures stochastiques

S. GHANMI <sup>1,\*</sup>, M. GUEDRI <sup>1</sup>, M. L. BOUAZIZI <sup>1</sup>, R. MAJED <sup>1</sup>, N. BOUHADDI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Nabeul, 8000 M'rzouga, Nabeul - Tunisie

<sup>2</sup> Institut FEMTO ST UMR 6174 - Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat, Université de Franche-Comté, 24 Chemin de l'Épitaphe 25000 Besançon - France

## Résumé :

*Dans le domaine de l'élastodynamique stochastique, les coûts associés aux méthodes de simulation de Monte Carlo (MC) pour l'évaluation des réponses probabilistes sont souvent prohibitifs. Pour remédier à cet handicap, on propose dans ce papier, l'emploi de la méthode des surfaces de réponses stochastiques (SRSM) qui est une autre alternative efficace et robuste pour l'évaluation de la propagation des erreurs. Cette méthode est une extension des surfaces de réponses classiques (RSM). L'efficacité et la robustesse des SRSM sont étudiées et comparées à celles de la méthode MC à travers des études de cas de dynamique des structures impliquant la propagation des incertitudes.*

## Abstract:

*In the stochastic elastodynamic domain, the calculation costs associated to the Monte Carlo methods (MC) are often prohibitive in the evaluation of the probabilistic risks. To remedy to this situation, one can propose in this paper the employment of the Stochastic Responses Surfaces Method (SRSM), which is another efficacious and robust alternative in the evaluation of the errors propagation. This method is an extension of the Responses Surfaces Method (RSM). The efficacious and the robustness of the SRSM will be studied and compared to those of the MC method through the studies of dynamics structures cases including the propagation of the uncertainties.*

## Mots Clés :

Surface de réponse, Incertitudes, Dynamique Stochastique, Monte Carlo

## 1 Introduction

La prévision du comportement dynamique des structures peut être améliorée en prenant en compte l'influence des incertitudes qui sont d'origines très diverses. En effet, elles découlent des tolérances de fabrication, des conditions aux limites, des propriétés des matériaux, des instruments de contrôle et de mesures, etc. Pour prendre en compte ces incertitudes dans les problèmes d'ingénierie mécanique, plusieurs méthodes ont été menées dans ce sens et qui sont généralement classées en trois catégories : la méthode de simulation MC qui est souvent considérée comme la méthode de référence [1], les méthodes analytiques (de perturbation) qui sont basées sur une expansion en série de Taylor des réponses autour des moyennes des variables aléatoires [2] et les méthodes spectrales qui utilisent des fonctions de base de l'espace de Hilbert associé aux problèmes aléatoires. Ces fonctions peuvent être des polynômes orthogonaux d'une façon générale, et un chaos polynomial en particulier [3]. Seulement, les méthodes analytiques et de Monte Carlo présentent des inconvénients qui peuvent limiter leurs utilisations. En effet, les méthodes analytiques sont en général basées sur des approximations, ce qui peut rendre leurs emplois limités à des cas simples. La méthode de simulation de Monte Carlo est la technique la plus employée pour l'analyse d'incertitude

---

\* Auteur pour la correspondance : Tel.: +216 98 209 707; fax: +216 72 220 181  
Adresse E-mail: samir.ghanmi@ipein.rnu.tn

statistique / probabiliste, avec des applications diverses. Etant donné les distributions des incertitudes, cette méthode donne des générations répétées d'échantillons aléatoires des entrées suivies de l'application du modèle pour obtenir l'ensemble de réponses qui seront analysées statistiquement plus tard. L'inconvénient majeur de cette technique est le grand nombre de simulations exigées pour arriver à un niveau de confiance acceptable de la sortie désirée, bien que la procédure est simple à réaliser.

Pour remédier à cet inconvénient majeur de la méthode MC, on propose dans ce papier l'emploi de la Méthode de Surfaces de Réponses Stochastiques (SRSM). Cette méthode permet de réduire le nombre de simulations exigées pour l'évaluation adéquate des incertitudes, analyser les incertitudes systématiques et fournir des ordres de grandeurs sur les niveaux de confiance du modèle estimé. L'intérêt de la SRSM et ses performances sont mis en évidence sur un exemple mécanique issu de la simulation numérique.

## 2 Analyse des incertitudes

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été proposés pour caractériser les classes d'incertitudes et leurs sources. En effet, ces incertitudes sont globalement classées en deux catégories [4]:

- Les incertitudes sur les paramètres qui comportent plusieurs types:
  - Les paramètres aléatoires (les cotes de bureau d'études) ;
  - Les paramètres mal connus (conditions aux limites) ;
  - Les paramètres variables qui peuvent évoluer au cours du temps et qui sont mal maîtrisés (le vieillissement d'un matériau) ainsi que les paramètres dont on peut connaître la valeur à un moment donnée.
- Les incertitudes de modèle qui sont en général difficiles à évaluer (les lois de comportement qui représentent mal ou de façon incomplète les phénomènes physiques, les erreurs dues au maillage éléments finis, etc.)

Pour décrire les incertitudes sur les paramètres, on emploie dans cette étude des distributions probabilistes. Par exemple, la propagation des variables incertaines  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  par le modèle  $F(f_1, f_2, f_3)$  est décrite schématiquement par la figure (1).

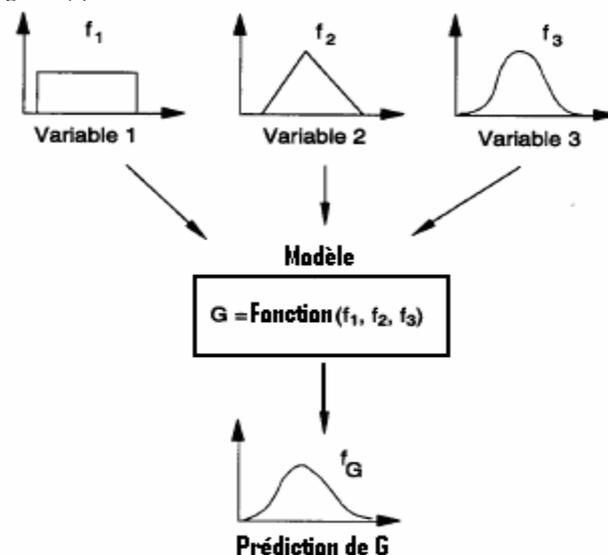


FIG. 1 – Propagation probabiliste des incertitudes par un modèle

## 3 La méthode des surfaces de réponse stochastiques

### 3.1 Principe de la méthode

La Méthode de Surface de Réponse Stochastique (SRSM) est une extension de la Méthode des Surfaces de Réponse déterministe (RSM) [5]. La différence principale réside dans la nature des paramètres d'entrée de

chacune des méthodes. En effet, les entrées de la SRSM sont aléatoires alors que celles de la RSM sont déterministes. La réduction du nombre de simulation exigé pour l'évaluation adéquate des incertitudes est basée sur l'approximation des entrées et des sorties des systèmes incertains par des séries d'expansions de variables aléatoires standard. Les séries d'expansions des sorties contiennent les coefficients inconnus qui peuvent être calculés par un nombre limité de simulations [4].

La mise en oeuvre de la méthode SRSM repose sur les étapes suivantes :

- 1- Expression des variables aléatoires d'entrée en termes d'un ensemble de variables normales standard,
- 2- Expansion spécifique pour la variable de sortie aléatoire,
- 3- Détermination des paramètres de l'expansion.

Les variables aléatoires standard sont choisies dans un ensemble de variables normales, aléatoires qui sont indépendantes et identiquement distribuées notées  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ , où  $n$  est le nombre de variables d'entrées indépendantes, et chaque  $\xi_i$  est de moyenne nulle et de variance égale à 1 ( $\mathcal{N}(0,1)$ ).

Quand les variables d'entrée aléatoires sont indépendantes, l'incertitude sur la  $i^{me}$  entrée  $X_i$  est exprimée directement en fonction de la  $i^{me}$  variable aléatoire standard  $\xi_i$ . Une telle transformation est utile pour la représentation standard des entrées aléatoires, dont chacune pourrait avoir des propriétés de distribution très différentes. La figure (2) donne les étapes nécessaires pour mener une analyse des incertitudes en employant la méthode SRSM.

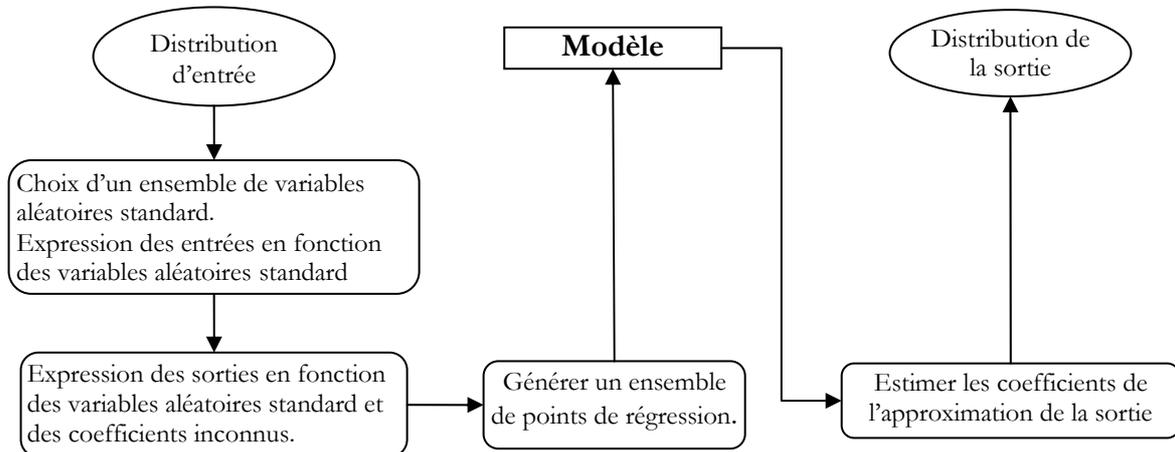


FIG. 2 – Etapes de génération des SRSM

Si le modèle d'entrée - sortie est représenté par l'équation (1) :

$$Y = F(X) ; X = h(\xi) \quad (1)$$

Alors la représentation fonctionnelle pour la variable de sortie aléatoire est de la forme :

$$Y = f(\xi, a) \quad (2)$$

Où  $X$  est le vecteur qui représente l'ensemble des entrées aléatoires et le vecteur  $Y$  représente l'ensemble des sorties.  $\xi$  indique le vecteur des variables normales standard choisies et  $a$  représente le vecteur des paramètres à estimer.

### 3.2 Représentation des entrées aléatoires

La première étape dans l'application des SRSM est la représentation de toutes les entrées en termes de "variables aléatoires standard", choisies dans l'ensemble des variables aléatoires indépendantes qui sont identiquement distribuées  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ . Le tableau (1) représente une liste des transformations de quelques distributions de probabilité qui sont généralement employées.

Type de distribution	Transformation
Uniforme ( $a, b$ )	$a + 0.5(b - a)(1 + \text{erf}(\xi/\sqrt{2}))$
Normale ( $\mu, \sigma$ )	$\mu + \sigma \cdot \xi$
Log-normale ( $\mu, \sigma$ )	$\exp(\mu + \sigma \cdot \xi)$

TAB.1 – Transformations de distributions de probabilité

### 3.3 Modélisation des sorties aléatoires

Il s'agit d'estimer les incertitudes sur les sorties du système physique à partir des entrées stochastiques. La représentation des sorties se fait par une expansion des variables normales aléatoires qui emploient les polynômes d'Hermite. Cette expansion est dénommée « l'expansion du chaos polynomial » [3]. La réponse estimée est de la forme :

$$\hat{y} = a_0 + \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} \Gamma_1(\xi_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} \Gamma_2(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}) + \dots \quad (3)$$

Où  $\hat{y}$  est la sortie aléatoire du modèle,  $a_{i_k}$  ( $k=1, \dots, p$ ) des constantes déterministes à évaluer et  $\Gamma_p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p})$  sont des polynômes d'Hermite multidimensionnels d'ordre  $p$  donnés par la relation :

$$\Gamma_p(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_p}) = (-1)^p e^{1/2 \xi^T \xi} \frac{\partial^p}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_p}} e^{-1/2 \xi^T \xi} \quad (4)$$

où  $\xi$  est un vecteur de  $p$  variables normales aléatoires.

## 4 Simulation numérique

La structure présentée dans la figure (3) est une plaque encastrée libre. Le MEF comporte 1980 DDLs. Ses caractéristiques géométriques et mécaniques sont :  $h_0 = 1 \times 10^{-3} \text{m}$ ;  $E_0 = 2,1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ;  $\rho_0 = 7800 \text{kg/m}^3$ ;  $\nu = 0,3$ . Cette structure présente trois variables incertaines  $E$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$  (Tableau 2) dont les fonctions de distributions sont connues. L'objectif est de caractériser l'incertitude du déplacement aléatoire du premier mode de la plaque au point d'observation « No » suivant Z, vis-à-vis des incertitudes sur les paramètres de conception. Dans ce cas, la méthode SRS est appliquée pour estimer le déplacement du premier mode de la plaque et ses distributions de probabilité.

	Module d'Young E	Masse volumique $\rho_2$	Masse volumique $\rho_3$
Incertitudes	2% et 5 %	2% et 5 %	2% et 5 %

TAB.2 – Paramètres incertains.

L'équation d'équilibre stochastique de la structure soumise à une excitation harmonique déterministe s'écrit:

$$(-\omega^2 \mathbf{M}(\theta) + (1 + j\eta) \mathbf{K}(\theta)) \mathbf{y}(\omega, \theta) = \mathbf{f}_e(\omega) \quad (5)$$

où  $\mathbf{M}(\theta) \approx \mathbf{M}_0 + \sum_{i=1}^p \mathbf{M}_i \xi_i(\theta)$ ,  $\mathbf{K}(\theta) \approx \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^p \mathbf{K}_i \xi_i(\theta)$ ,  $\mathbf{y}(\omega, \theta)$  et  $\mathbf{f}_e(\omega)$  représentent respectivement les matrices masse, raideur et le vecteur réponse exacte stochastiques de la structure ainsi que le vecteur des forces appliquées.

En introduisant la relation (3) dans l'équation (5) du modèle et en projetant cette équation sur les polynômes  $\Gamma_m$  ( $m = 0 \dots N$ ), on obtient le système linéaire suivant :

$$\sum_{n=0}^Q (-\omega^2 \mathbf{M}_0 + (1 + j\eta) \mathbf{K}_0) \mathbf{a}_n \langle \Gamma_n \Gamma_m \rangle + \sum_{n=0}^Q \sum_{i=1}^p (-\omega^2 \mathbf{M}_i + (1 + j\eta) \mathbf{K}_i) \mathbf{a}_n \langle \xi_i \Gamma_n \Gamma_m \rangle = \mathbf{f}_e \langle \Gamma_m \rangle \quad (7)$$

L'équation (7) pour  $m = 0 \dots N$ , conduit à un système de  $(Q+1)$  équations matricielles linéaires, dont la solution correspond aux vecteurs  $\mathbf{a}_n$ .

$$(\mathbf{D} + \mathbf{A}) \mathbf{a}_n = \mathbf{b} \quad (8)$$

avec  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale par blocs, et  $\mathbf{A}$  est matrice creuse telles que :

$$\mathbf{D}_{ii} = (-\omega^2 \mathbf{M}_0 + (1 + j\eta) \mathbf{K}_0) \langle \Gamma_i^2 \rangle ; \mathbf{A}_{ij} = \sum_{q=1}^p (-\omega^2 \mathbf{M}_i + (1 + j\eta) \mathbf{K}_i) \langle \xi_q \Gamma_i \Gamma_j \rangle$$

La figure (4) montre que le domaine de variabilité du déplacement du premier mode de la plaque croît si les incertitudes sur les paramètres augmentent. La même figure montre que la fonction de répartition et la densité de probabilité du déplacement du premier mode de la structure sont bien représentées par la méthode SRSM d'ordre 2 (par comparaison avec celles produites par la méthode MC) pour les niveaux d'incertitudes sur les paramètres de conception de 2% et 5%. Ceci prouve l'efficacité et la robustesse de la méthode SRSM pour les structures caractérisées par une propagation des incertitudes. Pour mettre en évidence l'intérêt de cette méthode, on compare son temps CPU avec celui de la méthode de Monte Carlo. L'examen du tableau (4) montre et justifie l'intérêt de l'utilisation de la SRSM. De Plus, l'examen du tableau (3) qui illustre la variation de l'erreur au sens des moindres carrés MSE (8) pour les niveaux d'incertitudes cités précédemment montre que ces erreurs sont très faibles devant la valeur pratique [6]. Cela prouve que la SRSM a une excellente qualité de prédiction à coût numérique très limité.

$$MSE = (1/N) \cdot \sum_{i=1}^N (y_E - y_{SRSM})^2 \tag{8}$$

où  $y_E$  et  $y_{SRSM}$  sont respectivement la réponse exacte et estimée et  $N$  est le nombre de points pour lesquels les valeurs sont évaluées.

$MSE_{pratique} = 0.09028$	$MSE_{2\%} = 1.046 \times 10^{-13}$	$MSE_{5\%} = 6.81 \times 10^{-13}$
----------------------------	-------------------------------------	------------------------------------

TAB.3 – La variation de l'erreur au sens des moindres carrés MSE.

La détermination des coefficients inconnus par l'application du SRSM d'ordre 2 permet l'obtention du polynôme stochastique (9) qui conduit à la surface de réponse de la figure (5).

$$\hat{y} = 10^{-6} \left( 233 + 11.6\xi_1 + 11.6\xi_2 + 11.6\xi_3 + 0.6(\xi_1^2 - 1) + 1.2\xi_1\xi_2 + 0.6\xi_1\xi_3 + 1.2(\xi_2^2 - 1) + 1.2\xi_2\xi_3 + 0.6(\xi_3^2 - 1) \right) \tag{9}$$

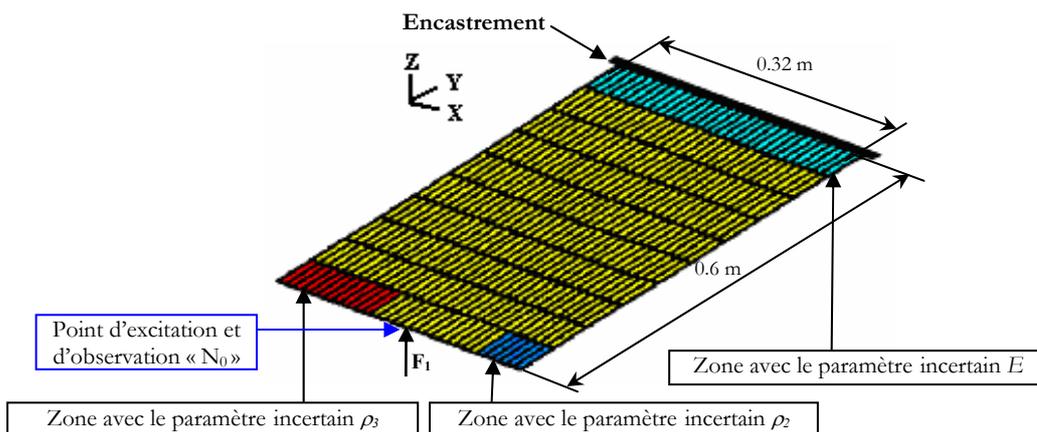


FIG.3 – MEF de la plaque

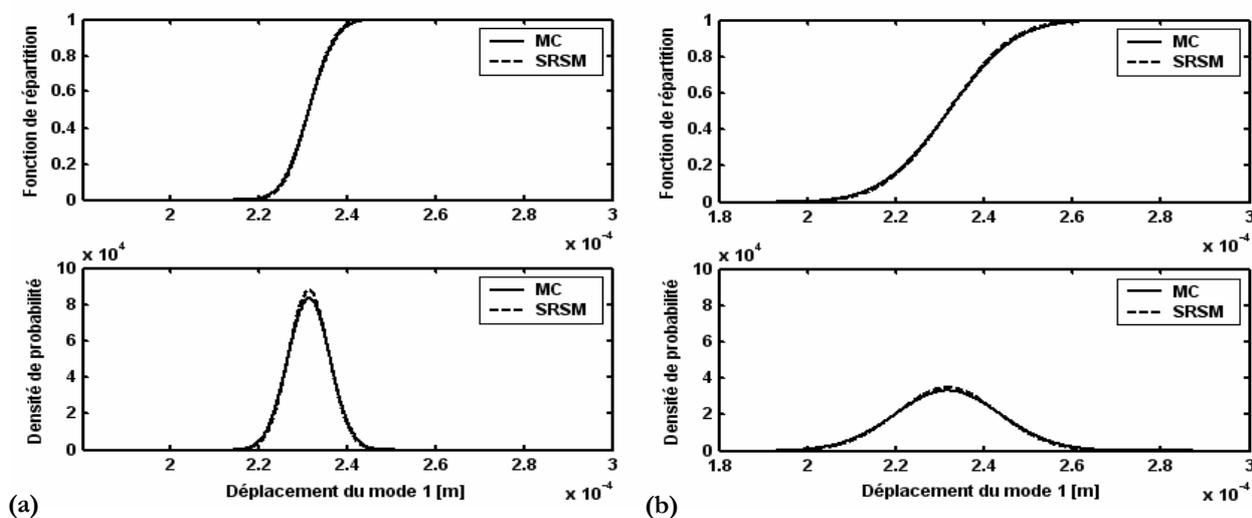
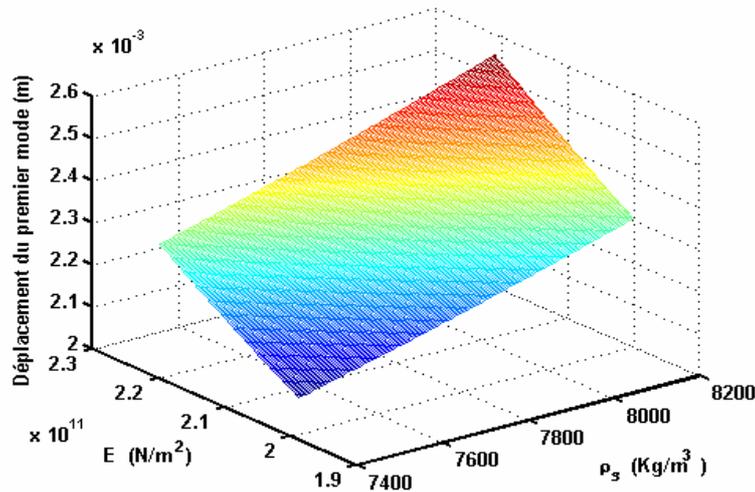


FIG. 4 – La Densité de probabilité et la fonction de répartition en fonction du déplacement du premier mode : Niveau d'incertitude sur les paramètres : (a) : 2% - (b) : 5%

Temps CPU (min)	
MC	SRSM ordre 2
10000 tirages	10000 tirages
<b>36</b>	<b>1</b>

TAB.4 – Performances des méthodes SRSM et MC

FIG. 5 – Variation du déplacement du 1<sup>er</sup> mode en fonction de  $\rho_3$  et  $E$  pour  $\rho_2$  constante

Le niveau d'incertitudes sur les paramètres de conceptions et l'ordre des SRSM influent sur la qualité de la prédiction.

## 5 Conclusion

Une méthode basée sur les surfaces de réponses stochastiques est proposée dans ce papier pour l'étude de la propagation des incertitudes en mécanique. Elle permet de représenter les réponses stochastiques des systèmes physiques complexes par des polynômes faciles à évaluer dans des problèmes non linéaires ou des procédures itératives d'optimisation multi critères. Il en découle une réduction significative des coûts de calcul en comparaison avec une méthode standard de type Monte Carlo ou éléments finis stochastiques ou perturbations tout en conservant un bon niveau de prédictivité des réponses.

## Références

- [1] Ibrahim R.A., "Structural dynamics with parameter uncertainties", *Applied Mechanics Reviews*, 40(3), 309-328, 1987.
- [2] Kleiber M., Hien T.D., "The stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation", *J.W.S.*, 1992.
- [3] Ghanem R.G., Spanos P.D., "Stochastic finite elements- A spectral approach", *Spring Verlag*, 1991.
- [4] Isukapalli, S.S., "Uncertainty analysis of transport-transformation models", *PbD dissertation*, The State University of New Jersey, New Brunswick, 1999.
- [5] Myers. R.H, Montgomery. D.C, "Response Surface Methodology", *Second Edition*, New York, Wiley, 2002.
- [6] Battaglia G.J., Maynard J.M, "Mean Square Error: A useful tool for statistical process management", *AMP J. Technol.*, Vol. 34, 1996, p. 1256-1260.