HAL open science

Différentes approches pour estimer les faibles non linéarités dans les systèmes en vibration

Minh-Ningh Ta, Joseph Lardies, Emmanuel Foltete

To cite this version:

Minh-Ningh Ta, Joseph Lardies, Emmanuel Foltete. Différentes approches pour estimer les faibles non linéarités dans les systèmes en vibration. 17e Congrès Français de Mécanique, 2005, Troyes, France. hal-00019984

HAL Id: hal-00019984

https://hal.science/hal-00019984v1

Submitted on 23 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Différentes approches pour estimer les faibles non linéarités dans les systèmes en vibration

Minh-Nghi TA ; Joseph LARDIES ; Emmanuel FOLTETE
Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat (L.M.A.R.C) ;
FEMTO-ST ; UMR CNRS 6174
24 rue de l'Epitaphe – 25000 Besançon
minh_nghi.ta@edu.univ-fcomte.fr , joseph.lardies@univ-fcomte.fr

Résumé :

Cette communication est une contribution à l'estimation des paramètres non linéaires dans un système en vibration. Le système est en mouvement libre et deux méthodes sont développées pour déterminer les coefficients d'amortissement et de raideur non linéaires. Seule la réponse temporelle du système est utilisée. La première méthode est basée sur l'approximation en différences finies de l'équation différentielle non linéaire du mouvement. En développant cette équation on arrive à un système d'équations surdéterminé comportant les coefficients non linéaires. La deuxième méthode utilise la transformée en ondelettes de mesures de déplacement en certains points de la structure. Ces méthodes sont comparées avec des exemples numériques ainsi que sur un cas test réalisé en laboratoire.

Abstract :

This communication is a contribution to estimate the nonlinear parameters of a vibrating system. The system is moving free and two methods are developed to determine the nonlinear stiffness and nonlinear damping coefficients. Only the time response of the system is used. The first method is based on the approximation of finite differences of the nonlinear differential equation of the movement. Developing this equation leads to an over-determined system including the nonlinear coefficients. The second method uses the wavelet transform of measurements coming from the displacement at some points of the structure. These methods are compared by numerical examples and an experimental test performed in laboratory.

Mots clés :

Oscillations non linéaires, transformée en ondelettes, méthode directe, oscillateur de Duffing, amortissement composé

1 Introduction

Cette communication a pour but de comparer deux méthodes différentes appliquées à l'identification et à la quantification des non-linéarités sur l'amortissement et la raideur d'un système en vibration. Nous considérons la vibration libre du système et seul le déplacement est mesuré. Nous utilisons deux méthodes pour obtenir les paramètres non linéaires. La première méthode, appelée méthode d'estimation directe, est basée sur la discrétisation temporelle du déplacement. En utilisant une différentiation numérique approchée, nous obtenons la vitesse et l'accélération. Un système d'équations surdéterminé contenant les paramètres inconnus est alors établi. Ce système est résolu par la méthode des moindres carrés ordinaires ou des moindres carrés totaux. La deuxième méthode utilise la transformée en ondelettes du déplacement. La transformée en ondelettes a été appliquée avec succès à la réponse libre pour identifier les paramètres modaux de systèmes linéaires [1-3]. L'identification de systèmes non linéaires par la transformation par ondelettes a été étudiée par W.J. Staszewski [4] et T.P. Le et P. Argoul [5] , M.N Ta et J. Lardiès [6] . W. J. Staszewski [4] a utilisé l'ondelette de Morlet pour analyser un système avec frottement de coulomb et raideur cubique. T.P. Le et P. Argoul [5] considèrent l'ondelette de Cauchy comme ondelette analysante pour étudier des oscillateurs faiblement amortis, ayant des non linéarités en raideur, telles que des raideurs linéaires par morceaux, bilinéaires et cubiques. Dans cette communication on généralise la méthode aux systèmes non linéaires en amortissement et en raideur. La section 2 présente les équations approchées de l'amplitude et de la phase d'un système à un degré de liberté (d.d.l) avec des non-linéarités en amortissement et en raideur. La méthode directe d'évaluation des paramètres est brièvement présentée dans la section 3. Dans la section 4, la méthode de la transformée en ondelettes et ses propriétés sont exposées. Le concept d'arête et de squelette permettant la reconstitution du signal est également décrit.

Dans la section 5, on applique ces deux méthodes à un système simulé ainsi que sur des essais expérimentaux. Une conclusion est formulée dans la section 6.

2 Réponse libre d'un système non linéaire à 1 d.d.l.

2.1 Etude générale

L'équation différentielle non linéaire d'un système à 1d.d.l. peut s'écrire :

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \varepsilon f(\dot{x}, x) = 0 \tag{1}$$

où ω_n est la pulsation naturelle du système linéaire, ε un paramètre infiniment petit et $f(\dot{x}, x)$ une fonction non linéaire de $\dot{x}$ et de x. La solution du problème linéaire correspondant ($\varepsilon = 0$) est $x(t) = A\cos(\omega_n t + \beta)$ où A et β sont constants. Conformément à Krylov-Bogolioubov [7, 8] nous allons chercher une solution de la forme :

$$x(t) = A(t)\cos\left(\omega_n t + \beta(t)\right) = A(t)\cos\left(\varphi(t)\right) \tag{2}$$

avec $A(t)$ et $\varphi(t)$ les modulations en amplitude et en phase de la réponse libre du système. Puisqu'on a deux fonctions $A(t)$ et $\varphi(t)$ à déterminer, deux conditions doivent être imposées. La première condition est relative à la vitesse $\dot{x}(t)$: elle a la même forme que celle d'un oscillateur harmonique ($\varepsilon = 0$), la deuxième condition est que les deux fonctions $A(t)$ et $\varphi(t)$ doivent vérifier l'équation (1). Sur une période nous obtenons [7, 8]

$$\dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n}\int_0^{2\pi} \sin\left(\varphi(t)\right) f\left(A(t)\cos\left(\varphi(t)\right), -\omega_n A(t)\sin\left(\varphi(t)\right)\right) d\varphi \tag{3}$$

$$\dot{\beta}(t) = \left(\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_n A(t)}\right)\int_0^{2\pi} \cos\left(\varphi(t)\right) f\left(A(t)\cos\left(\varphi(t)\right), -\omega_n A(t)\sin\left(\varphi(t)\right)\right) d\varphi \tag{4}$$

Ces deux équations nous permettent d'obtenir des expressions analytiques approchées permettant de décrire le comportement libre d'un système non linéaire à un degré de liberté, pour une fonction $f(\dot{x}, x)$ donnée.

2.2 Enveloppe et phase d'un oscillateur à amortissement composé et à raideur non linéaire

Considérons le cas d'oscillateurs à amortissement composé et à raideur non linéaire :

$$\varepsilon f(\dot{x}, x) = \sum_{i=0}^{p} \mu_i \left|\dot{x}\right|^i \operatorname{sgn}(\dot{x}) + \eta_q \left|x\right|^q \operatorname{sgn}(x) \tag{5}$$

où p est l'ordre maximum du système étudié et μ_i le i^{ème} coefficient d'amortissement normalisé à la masse, η_q est la raideur à l'ordre q normalisée à la masse du système. En considérant l'équation (3) on déduit que la dérivée de l'enveloppe est la somme d'un premier terme provenant de l'amortissement composé et d'un deuxième terme provenant de la raideur non linéaire. On obtient :

$$\dot{A}(t) = \dot{A}_1(t) + \dot{A}_2(t) \tag{6}$$

avec :

$$\dot{A}_1(t) = -\frac{1}{\pi\omega_n}\int_0^{\pi} \sum_{i=0}^{p} \mu_i \omega_n^i A^i(t) \sin^{i+1}\varphi \; d\varphi = \sum_{i=0}^{p} c_i A^i(t) \tag{7}$$

$$c_i = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \mu_i \omega_n^{i-1} \frac{\Gamma(i/2+1)}{\Gamma(i/2+3/2)} \tag{8}$$

$$\dot{A}_2(t) = \frac{\eta_q}{2\pi\omega_n}\int_0^{2\pi} \sin\left(\varphi(t)\right)\left|A(t)\cos\left(\varphi(t)\right)\right|^q \operatorname{sgn}\left(A(t)\cos\left(\varphi(t)\right)\right) d\varphi = 0 \tag{9}$$

La présence des non linéarités au niveau de la raideur n'influe pas sur l'amplitude instantanée A(t) du signal obtenu. De façon similaire, en considérant l'équation (4), on déduit $\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}_1(t) + \dot{\beta}_2(t)$. Le terme $\dot{\beta}_1(t)$ provient de l'amortissement composé et on montre que $\dot{\beta}_1(t) = 0$. Le terme $\dot{\beta}_2(t)$ provient de la raideur non linéaire et on a donc :

$$\dot{\beta}(t) = \dot{\beta}_2(t) = \frac{\eta_q}{2\pi\omega_n A(t)} \int_0^{2\pi} \left| A(t)\cos\left(\varphi(t)\right)\right|^q \operatorname{sgn}\left(A(t)\cos\left(\varphi(t)\right)\right)\cos\varphi \, d\varphi = r_q A^{q-1}(t) \tag{10}$$

avec
$$r_q = \frac{\eta_q}{2\omega_n}\left[1 + (-1)^{q+1}\right]\left[\frac{\Gamma(q+2)}{2^{q+1}\left(\Gamma(q/2+3/2)\right)^2}\right] \tag{11}$$

Les relations (7) et (8) nous permettent de caractériser et déterminer l'amortissement composé μ_i. En utilisant (10) et (11), on peut identifier l'ordre q et la raideur non linéaire η_q.

3 Détermination directe des paramètres non linéaires par différentiation approchée

Nous connaissons le déplacement $x(t)$, ou plus précisément les valeurs échantillonnées du déplacement $\{x_k\}$,(k =1, 2,…, N) au temps discrétisé t_k. La vitesse $\dot{x}(t)$ et l'accélération $\ddot{x}(t)$ peuvent être approchées par la formule de différentiation numérique à cinq points [9] :

$$\dot{x}_k = (-x_{k+2} + 8x_{k+1} - 8x_{k-1} + x_{k-2})/(12\Delta t), \qquad \ddot{x}_k = (-\dot{x}_{k+2} + 8\dot{x}_{k+1} - 8\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2})/(12\Delta t) \tag{12}$$

A chaque instant t_k, on obtient l'équation suivante :

$$\ddot{x}_k + \omega_n^2 x_k + \sum_{i=0}^{p} \mu_i \left|\dot{x}_k\right|^i \operatorname{sgn}(\dot{x}_k) + \eta_q \left|x_k\right|^q \operatorname{sgn}(x_k) = 0 \tag{13}$$

En utilisant N échantillons, on déduit le système linéaire surdéterminé :

$$\begin{bmatrix} x_5 & \operatorname{sgn}(\dot{x}_5) & \dots & \left|\dot{x}_5\right|^p \operatorname{sgn}(\dot{x}_5) & \left|x_5\right|^q \operatorname{sgn}(x_5) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N-4} & \operatorname{sgn}(\dot{x}_{N-4}) & \cdots & \left|\dot{x}_{N-4}\right|^p \operatorname{sgn}(\dot{x}_{N-4}) & \left|x_{N-4}\right|^q \operatorname{sgn}(x_{N-4}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_n^2 \\ \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_p \\ \eta_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot{x}_5 \\ -\ddot{x}_6 \\ \vdots \\ -\ddot{x}_{N-4} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Le système (14) nous permet d'obtenir les paramètres ($\omega_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p, \eta_q$) en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires (M.C.O) ou des moindres carrés totaux (M.C.T).

4 Identification des paramètres non linéaires par la transformée en ondelettes

4.1 Théorie et généralités

La Transformée en Ondelettes (T.O) continue d'un signal $x(t)$ est définie par [10, 11] :

$$W_\psi\left[x\right](a,b) = \langle x, \psi_{a,b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \tag{15}$$

où : $x(t)$ est le signal à analyser, $\psi_{a,b}(t) = \left(1/\sqrt{a}\right)\psi\left((t-b)/a\right)$ est l'ondelette analysante engendrée par une ondelette mère $\psi(t)$ et $\psi^*_{a,b}(t)$ est le complexe conjugué de $\psi_{a,b}(t)$. Le paramètre d'échelle a joue le rôle de l'inverse de la fréquence. Le paramètre b est le paramètre de translation. La transformée en ondelettes est une représentation linéaire du signal, ceci implique que la transformée en ondelettes de P signaux devient :

$$W_\psi\left[\sum_{i=1}^{P} x_i\right](a,b) = \sum_{i=1}^{P} W_\psi\left[x_i\right](a,b) \tag{16}$$

Cette propriété est pratique pour l'analyse de signaux multi-composants.
L'ondelette mère choisie est l'ondelette de Morlet modifiée qui est définie par :

$$\psi(t) = e^{\frac{-t^2}{N}} e^{j\omega_o t} \tag{17}$$

où ω_o est la pulsation de l'ondelette et N le paramètre qui commande la forme de l'ondelette, ce paramètre équilibre les résolutions temporelle et fréquentielle. Ces résolutions sont respectivement $\Delta t_\psi = \sqrt{N}/2$ et $\Delta\omega_\psi = 1/\sqrt{N}$. La valeur optimale de N est obtenue par minimisation de l'entropie des coefficients de la transformée en ondelettes [3].
La version dilatée dans le domaine fréquentiel de l'ondelette de Morlet modifiée est :

$$\hat{\psi}(a\omega) = \sqrt{N\pi}\, e^{-\frac{N}{4}(a\omega-\omega_o)^2} \tag{18}$$

4.2 Transformée en ondelettes des signaux asymptotiques

Soit $x(t) = A(t)\cos(\varphi(t))$ un signal modulé en amplitude et en fréquence à analyser. Par définition un signal est asymptotique si les variations d'amplitude sont moins importantes que les variations de sa phase. Sous l'hypothèse que $x(t)$ est asymptotique, on montre que [10] :

$$W_\psi[x](a,b) = (1/2)\sqrt{a}A(b)e^{j\varphi(b)}\hat{\psi}^*(a\dot{\varphi}(b)) \tag{19}$$

A partir de (19), on constate que si l'ondelette mère $\psi(t)$ possède un maximum dans le domaine fréquentiel en ω_ψ (centre de fréquence), le maximum du module de la transformée en ondelettes $|W_\psi[x](a,b)|$ est localisé en $a = a_{rm}(b) = \omega_\psi / \dot{\varphi}(b)$ (où $\dot{\varphi}(b)$ par définition est la pulsation instantanée du signal $x(t)$). Cette courbe est appelée arête de la transformée en ondelettes, sa définition à partir du module des coefficients d'ondelettes est la suivante :

$$A_M = \{(a_{rm}(b),b),\ tel\ que\ |W_\psi[x](a_{rm}(b),b)| = \max_a |W_\psi[x](a,b)|\} \tag{20}$$

La restriction des coefficients de la transformée en ondelettes à cette arête est appelée le squelette :

$$W_\psi[x](a_{rm}(b),b) = (1/2)\sqrt{a_{rm}(b)}A(b)e^{j\varphi(b)}\hat{\psi}^*(\omega_\psi) \tag{21}$$

En utilisant l'ondelette de Morlet modifiée, on obtient :

$$W_\psi[x](a_{rm}(b),b) = (1/2)\sqrt{N\pi}\sqrt{a_{rm}(b)}A(b)e^{j\varphi(b)} \tag{22}$$

A partir de (22), on peut déduire l'enveloppe $A(t)$ et la phase $\varphi(t)$ du signal $x(t)$. On peut alors effectuer l'identification des coefficients d'amortissement en utilisant les équations (7), (8) et des coefficients de raideur en utilisant (9), (10). Pour un signal à plusieurs composantes, la linéarité de la transformée en ondelettes nous permet de séparer chaque mode et d'effectuer la même procédure d'identification.

5 Applications

5.1 Exemple numérique

On considère l'oscillateur à amortissement composé (visqueux + carré) et à raideur cubique. Il est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{x}(t) + 0.45\dot{x}(t) + 0.12\dot{x}(t) * |\dot{x}(t)| + 400x(t) + 500x^3(t) = 0 \tag{23}$$

La réponse libre $x(t)$ est obtenue numériquement par l'algorithme de Runge-Kutta, sur une durée de 14,5 secondes avec 1024 points temporels avec les conditions initiales : $x(t)$ = 0,5 m et $\dot{x}(t) = 0\, m/s$. Les paramètres non linéaires et la pulsation identifiés par différentiation approchée sont répertoriés dans le *TAB. 1*. Les erreurs sur l'estimation des paramètres non linéaires et sur la pulsation sont faibles. La méthode par différentiation approchée au cinquième ordre se montre efficace dans ce cas.

Paramètres	Valeurs exactes	Valeurs identifiées par M.C.O.	Erreur (%)	Valeurs identifiées par T.O	Erreur (%)
μ_1 (s^{-1})	0,45	0,471	4,6	0,473	5,1
μ_2 (m^{-1})	0,12	0,121	0,3	0,118	1,7
ω_n (rad/s)	20	20,01	0,05	20,01	0,05
η_3 $(m.s)^{-2}$	500	492,2	1,6	500,4	0,07

TAB. 1-Paramètres exacts et identifiés par les deux méthodes

On applique la transformée en ondelettes à cette réponse temporelle. La *FIG. 1(a)* montre l'amplitude de la transformée en ondelettes ainsi que son arête. A partir de cette arête on détermine le squelette de la transformée en ondelettes qui est utilisé pour reconstituer le signal et son enveloppe $A(t)$. Ceux-ci sont représentés sur la *FIG. 1(b)*. *La FIG. 1(c)* montre la variation de la fréquence en fonction de l'amplitude. La pulsation ω_n est obtenue à partir de cette figure en considérant $A = 0$ et le coefficient de raideur η_3 est obtenu par régression linéaire de l'équation $\dot{\beta}(t) = (3\eta_3 / 8\omega_n) A(t)^2$. En traçant la variation de $\dot{A}$ en fonction de A, on obtient une parabole représentée par la *FIG. 1(d)*. On effectue une interpolation polynomiale au sens des moindres carrés de cette parabole. Le degré obtenu est deux, ce qui est en concordance avec l'amortissement composé étudié, puisque d'après les équations (7) et (8) on a: $\dot{A} = -(\mu_1 / 2) A - (4\omega_n \mu_2 / 3\pi) A^2$. Les coefficients du polynôme nous permettent de déterminer les deux coefficients d'amortissement. Le *TAB. 1* présente les résultats de l'identification.

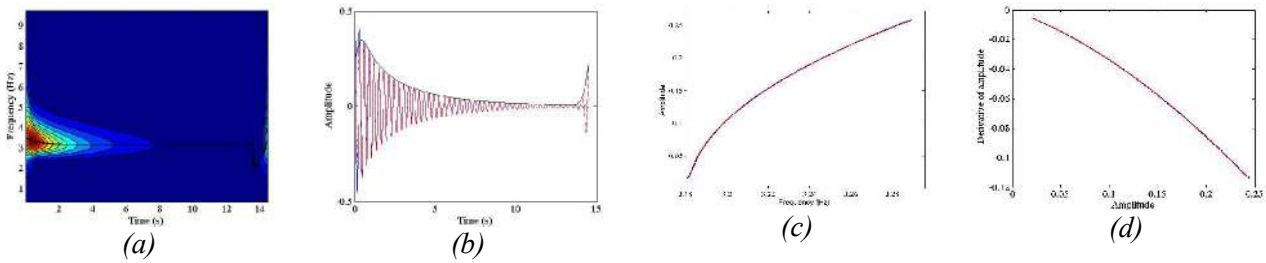

FIG. 1-Procédure d'identification par la méthode T.O

5.2 Essais expérimentaux

Les essais sont réalisés au LMARC à Besançon. La structure testée est une poutre encastrée-libre. On a au départ une structure linéaire connue, sur laquelle on va introduire des non linéarités (en amortissement et en raideur) par l'intermédiaire de contre-réactions (*FIG. 2*). Une contre-réaction non-linéaire en raideur est générée au point 1 par l'intermédiaire d'un capteur de déplacement et d'une bobine excitatrice. Une contre-réaction non-linéaire en amortissement est introduite au point 2 par un capteur de vitesse et une bobine excitatrice. Pour obtenir la réponse libre du premier mode on excite la poutre grâce à une bobine située au point 3 et on coupe par la suite l'excitation. On enregistre alors la réponse libre du système. Les résultats d'identification par les deux méthodes présentés dans le *TAB. 2* sont cohérents entre eux.

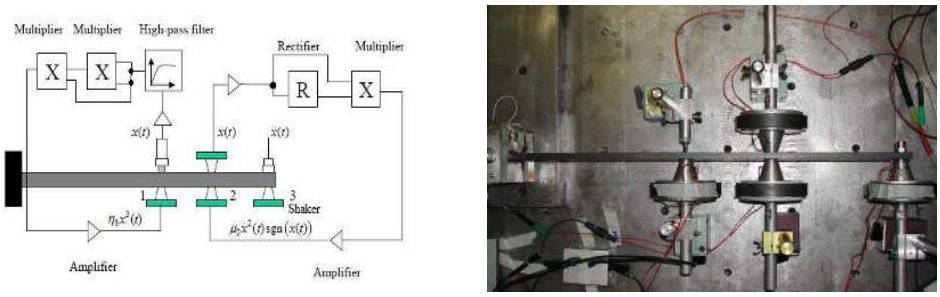

FIG. 2- Montage expérimental

Paramètres	Test	
	M.C.O	T.O
μ_1 (s^{-1})	10,3	9,3
μ_2 (m^{-1})	0,24	0,22
ω_n (rad/s)	24,11	23,97
η_3 $(m.s)^{-2}$	1408	1374

TAB. 2- Paramètres identifiés par les deux méthodes

6 Conclusion

Une méthode directe d'évaluation de paramètres et la méthode de la transformée en ondelettes ont été utilisées pour l'identification, la classification et la quantification des non-linéarités dans les systèmes vibrants. Un exemple numérique et des essais expérimentaux ont été menés pour valider les méthodes proposées. On peut montrer que s'il existe des bruits dans les mesures, la méthode de la transformée en ondelettes donne de meilleurs résultats que la méthode directe utilisant les moindres carrés ordinaires. Une étude sur l'identification des paramètres modaux d'oscillateurs non linéaires à plusieurs d.d.l utilisant la transformée en ondelettes est en cours de développement.

Références

[1] Ruzzene M., A. Fasana, et al. (1997), *Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: application to real data*. Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. **11**, p. 207-218.

[2] Lamarque C.H., S. Pernot and A. Cuer (2000), *Damping identification in multi-degree-of-freedom systems via a wavelet-logarithmic decrement - Part 1: Theory.* Journal of Sound and Vibration, Vol. **235** (3), p. 361-374.

[3] Lardies J., M.N. Ta and M. Berthillier (2004), *Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data*. Archive of Applied Mechanics, Vol. **73**, p. 718-733.

[4] Staszewski W.J. (1998), *Identification of non-linear systems using multi-scale ridges and skeletons of the wavelet transform*. Journal of Sound and Vibration, Vol. **214** (4), p. 639-658.

[5] Le T.P. and P. Argoul, *Utilisation de la transformée en ondelettes pour l'identification des systèmes mécaniques non linéaires en vibration*. Congrès Français de Mécanique, Nice, 1-5 Septembre 2003, Vol., p.

[6] Ta M.N., J. Lardiès, et al., *Identification des systèmes mécaniques non-linéaires par la transformée en ondelettes*. XIVème Colloque Vibrations Chocs et Bruit, Lyon 16-18 juin 2004, Vol., p.

[7] Bogolioubov N. and I. Mitropolski, *Les méthodes Asymptotiques en Théorie des Oscillations non linéaires*. Gauthier-Villars Edition, 1962.

[8] Nayfeh A.H., *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, 1973.

[9] Worden K. and G.R. Tomlinson, *Nonlinearity in structural dynamics : detection identification and modelling*. IOP, Bristol, 2001.

[10] Torrésani B., *Analyse continue par ondelettes*. Éditions du CNRS, EDP sciences, 1995.

[11] Mallat S.,U*ne exploration des signaux en ondelettes*. Les Edit. de l'Ecole Polytechnique, 2000.