



STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN

Hassimiou Diallo

► To cite this version:

Hassimiou Diallo. STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN. African Diaspora Journal of Mathematics, 2008, 7 (2), pp.135-150. hal-00018748v3

HAL Id: hal-00018748

<https://hal.science/hal-00018748v3>

Submitted on 14 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN

Hassimiou Diallo

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,

ENS, Université de Cocody

08 B.P. 10 , Abidjan, CÔTE D'IVOIRE.

Email:diallomh@yahoo.fr

December 15, 2006

Abstract

The aim of this paper is to show that any stable complete Riemannian flag on a compact and connected manifold is conjugated to a flag of homogenous foliations (see Définitions).

Also, we give a characterization of complete Riemannian flags that are homogenous.

This result is a step toward the classification of Riemannian flags.

1 Introduction

L'objet de ce travail est l'étude d'une classe de drapeaux riemanniens . Avant d'exposer la position du problème, il est utile de rappeler les définitions suivantes.

Quelques définitions:

1) Un *drapeau de feuilletages* (ou tout simplement un *drapeau*) sur une variété M est la donnée sur cette variété d'une suite croissante de feuilletages $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$ telle que $\dim \mathcal{F}_i = i$. L'entier p est la longueur du drapeau. Le drapeau est dit *complet* si le dernier feuilletage est de codimension un . Un drapeau de longueur un est réduit à son flot.

2) Un drapeau est dit *riemannien* (*de Lie, minimal, parallélisable*) si chacun de ses feuilletages est riemannien (de Lie, minimal, transversalement parallélisable).

3) Un drapeau sur $M = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}^n$ est dit *linéaire* si chacun de ses feuilletages est linéaire.

4) Etant donné un drapeau $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$ sur une variété M et une submersion π d'une variété $M^\#$ sur M , un *relèvement du drapeau* $\mathcal{D}$ sur $M^\#$ est, s'il existe, un drapeau $\mathcal{D}^\# = (\mathcal{F}_1^\#, \dots, \mathcal{F}_p^\#)$ sur $M^\#$, tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p-1\}$, le feuilletage $\mathcal{F}_i^\#$ se projette sur le feuilletage $\mathcal{F}_i$ par π .

5) Un drapeau $\mathcal{D} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$ sur une variété M et un drapeau $\mathcal{D}' = (\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_p)$ sur une variété M' sont dits *conjugués* s'il existe un difféomorphisme de M sur M' échangeant $\mathcal{F}_i$ et $\mathcal{F}'_i$.

6) Un drapeau de feuilletages riemanniens $\mathcal{D}$ est dit *stable* si tout feuilletage du drapeau est soit minimal, soit régulier et d'adhérence dans $\mathcal{D}$.

Si F est l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}_r$ d'un drapeau stable $(M, \mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p))$, les restrictions des feuilletages $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$ à F , où $r \leq s < \min(p, \dim F)$, forment un drapeau qu'on appellera *trace* de $\mathcal{D}$ sur F .

Position du problème

L'objectif dans l'étude des drapeaux de feuilletages, a été au départ en partant des résultats de Y. Carrière, de E. Fédida et de P. Molino sur les feuilletages ([4], [9], [12]) , de voir ce qu'on peut dire des drapeaux de feuilletages de Lie et des drapeaux riemanniens en général.

Les résultats obtenus sont les suivants:

Sur une variété compacte,

1) Tout drapeau riemannien minimal est conjugué à un drapeau linéaire [2].

2) Tout drapeau riemannien se relève sur le fibré des repères orthonormés directs transverses du dernier feuilletage en un drapeau de feuilletages transversalement parallélisables. Ce qui a permis d'établir qu'un drapeau riemannien complet d'une *variété compacte* est un drapeau parallélisable [7].

3) Le théorème de relèvement de E. Fédida permet d'écrire un théorème de structure des drapeaux de Lie [6].

Ici, il s'agit d'aborder l'étude de la structure d'un type particulier de drapeau riemannien.

De façon précise ,

1) on montre que *tout drapeau riemannien complet stable d'une variété compacte est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.*

2) On établit *une condition nécessaire et suffisante pour qu'un drapeau riemannien complet d'une variété compacte soit un drapeau de feuilletages homogènes.*

Le 1) permet alors de statuer sur les drapeaux riemanniens complets ou non d'une *3-variété compacte* et sur les drapeaux riemanniens complets d'une *4-variété compacte*, et représente un pas important vers la classification des drapeaux riemanniens.

Il s'agira pour la suite d'achever la classification de ces drapeaux lorsqu'ils sont supportés par une n -variété compacte ($n \geq 4$), qu'ils soient complets ou non , stables ou non.

Dans tout ce qui suit les objets sont C^∞ , la variété M est connexe et orientable, et les feuilletages considérés sont supposés orientables.

2 Structure d'un drapeau riemannien complet

Pour établir le théorème de structure d'un drapeau riemannien complet, nous allons montrer que pour un drapeau riemannien, admet toujours une métrique quasi-fibrée par rapport à chaque feuilletage du drapeau.

Proposition 2.1 *Etant donné un drapeau riemannien, il existe toujours une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages.*

Preuve. Il suffit de prouver que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont deux feuilletages riemanniens d'une variété M tels que $\mathcal{F}'$ soit une extension de $\mathcal{F}$, alors, il existe sur M une métrique riemannienne quasi-fibrée à la fois pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. Et on achève par récurrence.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de M formé d'ouverts distingués à la fois pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de sorte que les feuilletages riemanniens soient définis respectivement par les cocycles $(U_i, T, f_i, g_{ij})_{i \in I}$ et $(U_i, T', f'_i, g'_{ij})_{i \in I}$. Pour chaque $i \in I$, il existe une submersion locale θ_i de $f_i(U_i)$ dans T' telle $f'_i = \theta_i \circ f_i$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & T & \xrightarrow{\theta_i} & T' \\ Id_{U_i \cap U_j} \downarrow & & \downarrow g_{ji} & & \downarrow g'_{ji} \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_j} & T & \xrightarrow{\theta_j} & T' \end{array}$$

Et si h et h' sont les métriques riemanniennes respectives de T et T' définissant les feuilletages riemanniens $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, comme $g'_{ji} \circ \theta_i = \theta_j \circ g_{ji}$, et que g_{ji} est une isométrie locale, alors

$$Tg_{ji}(KerT\theta_i) = KerT\theta_j \quad \text{et} \quad Tg_{ji}((KerT\theta_i)^\perp) = (KerT\theta_j)^\perp$$

Sur chaque ouvert $f_i(U_i)$ modifions la métrique induite par h de la façon suivante: tout en la préservant sur $KerT\theta_i$ et en gardant l'orthogonalité des sous-fibrés $KerT\theta_i$ et $(KerT\theta_j)^\perp$, on la substitue sur $(KerT\theta_i)^\perp$ par l'image réciproque par θ_i de la métrique riemannienne h' de T' . Avec ces nouvelles métriques sur les $f_i(U_i)$, les θ_i deviennent par construction des submersions riemanniennes, et les g_{ij} restent encore des isométries. Comme la variété transverse modèle T du feuilletage riemannien $\mathcal{F}$, est par construction, la somme disjointe des $f_i(U_i)$, alors la somme disjointe de ces nouvelles métriques sur les $f_i(U_i)$ définissent sur T une métrique $\tilde{h}$. A cette nouvelle métrique de T , il est loisible d'y associer des métriques $\mathcal{F}$ -quasi-fibrées. Et chacune de ces métriques est aussi quasi-fibrée pour $\mathcal{F}'$. ■

Ainsi, étant donné un drapeau riemannien, il existe toujours une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages. On dira d'une telle métrique qu'elle est *quasi-fibrée pour le drapeau*.

Ceci étant , le premier résultat porte sur la structure d'un drapeau riemannien complet stable.

Nous rappelons qu'un drapeau de feuilletages riemanniens $\mathcal{D}$ est dit *stable* si tout feuilletage du drapeau est soit *minimal*, soit *régulier et d'adhérence dans* $\mathcal{D}$. Cela signifie que chaque feuilletage à feuilles non fermées est dense dans les feuilletages suivants ([12]) jusqu'au prochain feuilletage à feuilles fermées du drapeau s'il en contient.

2.1 Structure d'un drapeau riemannien complet stable

Proposition 2.2 *Soit $(M, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1})$ un drapeau d'une $n + 1$ -variété compacte connexe tel que:*

- i) le flot est un feuilletage transversalement parallélisable,*
- ii) la variété basique de ce flot admet pour revêtement universel un groupe de Lie résoluble,*
- iii) le feuilletage $\mathcal{F}_{k+1}$ coïncide avec le feuilletage basique du flot.*

Alors la variété M est difféomorphe à une variété homogène d'un groupe de Lie résoluble et le drapeau est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.

Preuve. L'entier k étant la dimension de l'algèbre de Lie structurale du flot

$(M, \mathcal{F})$, si $\mathbb{T}^{k+1} \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_k} W$ est sa fibration basique, alors, on sait qu'il existe une matrice $A \in \text{SL}(k+1; \mathbb{Z})$ diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres positives telle que la restriction du flot à chaque fibre soit conjuguée à un même flot modèle linéaire du tore $\mathbb{T}^{k+1}$ de direction v_1 un des vecteurs propres de $A[1]$. Des exemples de telles matrices peuvent être trouvés dans [8].

Puisque chacun des feuilletages contient le flot, alors il laisse invariant les feuilletages et ensuite comme l'action de ce flot est transitive, le drapeau induit sur chacune des adhérences du flot— le tore $\mathbb{T}^{k+1}$ —, le même drapeau $\mathcal{D}'_k = (\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_k)$. Comme les feuilletages de $\mathcal{D}'_k$ en tant que restriction de feuilletages riemanniens sur une partie saturée pour chacun des feuilletages $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$, sont aussi des feuilletages riemanniens, alors d'après [2] le drapeau $\mathcal{D}'_k$ est linéaire.

On peut préciser que, si $v_1, \dots, v_{k+1}$ sont les $(k+1)$ -vecteurs propres associés aux $(k+1)$ -valeurs propres non nécessairement distinctes de A , le drapeau modèle $\mathcal{D}'_k$ induit sur chaque adhérence est tel que pour tout i , $1 \leq i \leq k$, $\overline{\langle v_1, \dots, v_i \rangle}$ soit une direction du feuilletage linéaire $\mathcal{F}'_i$.

On peut noter pour la suite que la projection linéaire σ_i de $\mathbb{R}^{k+1}$ sur le sous-espace $\overline{\langle v_{i+1}, \dots, v_{k+1} \rangle} \cong \mathbb{R}^{k-i+1}$ suivant la direction $\overline{\langle v_1, \dots, v_i \rangle}$ est une développante de $\mathcal{F}'_i$ et qu'ensuite, puisque A laisse invariant le feuilletage relevé de $\mathcal{F}'_i$ sur $\mathbb{R}^{k+1}$ et le sous-espace $\overline{\langle v_{i+1}, \dots, v_{k+1} \rangle}$, il existe une matrice carrée A_i d'ordre $k-i+1$, dont l'application linéaire ρ_{A_i} associée est telle qu'on ait $\rho_{A_i} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \rho_A$. Il en résulte que cette matrice A_i est diagonalisable, à valeurs propres positives et de vecteurs propres $v_{i+1}, \dots, v_k$, de sorte que pour $t \in \mathbb{R}$, la matrice A_i^t est définie et l'on a:

$$\rho_{A_i^t} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \rho_{A^t} \quad (\star)$$

Ceci dit, soit G_W le groupe de Lie connexe résoluble (donc simplement connexe [5]) revêtement universel de W et $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$ la structure de groupe de Lie sur $\mathbb{R}^{k+1} \times G_W$ définie par la loi :

$$(x, g) \cdot (x', g') = (A^{\rho(g)^{-1}} x' + x, gg')$$

où ρ est le prolongement linéaire d'une représentation non nulle de $\pi_1(W)$ sur $\mathbb{Z}[13]$.

Ensuite, puisque la variété $W = \frac{G_W}{\pi_1(W)}$ est compacte, et $\pi_1(W)$ s'identifiant à un sous-groupe discret uniforme de G_W ; alors, il est clair que $\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)$ est aussi un sous-groupe discret uniforme de G et par suite $P = \frac{G}{\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)}$ est une $n+1$ - variété compacte.

Par ailleurs, comme le groupe produit semi-direct de deux groupes résolubles est résoluble, alors G est résoluble. Ensuite, le groupe résoluble G_W , étant topologiquement isomorphe à un $\mathbb{R}^m[5]$, est alors contractile. Il en résulte que le fibré réciproque du revêtement universel de W par la projection basique π_k est triviale.

Ceci étant, considérons la submersion Φ de $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$ sur $\pi_k^*(G_W)$ définie par $\Phi(t, g) = \psi^{-1}(\theta(t), g)$ où θ est la projection canonique de $\mathbb{R}^{k+1}$ sur $\mathbb{T}^{k+1}$ et $\psi : \pi_k^*(G_W) \rightarrow \mathbb{T}^{k+1} \times G_W$ une trivialisatoin de $\pi_k^*(G_W)$. Pour tous $s \in \pi_1(W)$ et $(t, g) \in \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$ on a

$$\Phi(s \bullet (t, g)) = s \cdot \Phi(t, g)$$

où la seconde action est l'action canonique de $\pi_1(W)$ sur $\pi_k^*(G_W)$; Φ passe au quotient et définit une submersion surjective φ de $P = G / \mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)$ sur M rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & \pi_k^*(G_W) \\ p \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

où pr_1 est la première projection de $\pi_k^*(G_W) = M \times_W G_W$ et p la projection canonique de G sur P . En s'aidant du diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{\theta \times Id_{G_W}} & \mathbb{T}^{k+1} \times G_W & \xrightarrow{pr_2} & G_W \\ Id_G \downarrow & & \downarrow \psi^{-1} & & \downarrow Id_{G_W} \\ G & \xrightarrow{\Phi} & \pi_k^*(G_W) & \xrightarrow{pr_2} & G_W \\ p \downarrow & & \downarrow pr_1 & & \downarrow p_W \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\pi_k} & W \end{array}$$

on a, pour tout $m \in M$,

$$\begin{aligned} & ((\theta \times Id_{G_W})^{-1} \circ \psi) pr_1^{-1}(m) = \\ & (\theta \times Id_{G_W})^{-1} \{ (z_0, sg_0) \in \mathbb{T}^{k+1} \times G_W / p_W(g_0) = \pi_k(m) \text{ et } s \in \pi_1(W) \} = \end{aligned}$$

$$(\theta \times Id_{G_W})^{-1}(\pi_1(W).(z_0, g_0)) = (\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)).(t_0, g_0) = p^{-1}(\varphi^{-1}(m)) ,$$

où

$$\theta(t_0) = z_0 = (pr_1 \circ \psi)(m, g_0);$$

alors

$$\varphi^{-1}(m) = p((\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)).(t_0, g_0))$$

est un singleton et il en résulte que φ est une submersion bijective, *i.e* un isomorphisme de variétés.

Le relevé horizontal du drapeau $\mathcal{D}'_k$ sur $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$ est le relevé par p du drapeau $\varphi^*\mathcal{D}_k = (\varphi^*\mathcal{F}_1, \dots, \varphi^*\mathcal{F}_k)$. Ensuite en s'aidant de la formule (*), il est facile de voir que les feuilletages $\varphi^*\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq k$, sont des feuilletages de Lie dont les développantes respectives sont les morphismes de groupes $D_i : \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W \rightarrow \mathbb{R}^k \times_{A_i} G_W$ définis par

$$D_i(t, g) = (\sigma_i(t), g) ,$$

et que le feuilletage $\varphi^*\mathcal{F}_{k+1}$ correspond au feuilletage défini par la projection $\mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W \rightarrow G_W$; et qu'au total le drapeau considéré $(M, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1})$ est conjugué, au moyen de φ , à un drapeau de feuilletages homogènes ([9], [10]). ■

Thorme 2.3 *Tout drapeau riemannien complet stable $(M, \mathcal{D})$ d'une $n+1$ -variété compacte connexe est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.*

De façon plus précise:

- La variété M est difféomorphe à un espace homogène quotient d'un groupe de Lie résoluble G par un sous-groupe discret Γ , et
- il existe une suite strictement décroissante de sous-groupes distingués dont les orbites déterminent le drapeau.

Preuve. On pose $\dim M = n + 1$ et on va raisonner par récurrence sur le nombre l de feuilletages à feuilles fermées du drapeau.

- Si $l = 0$, le flot est minimal, le résultat est évident [2].

Sinon, soit M_{n+1} une variété compacte connexe supportant un drapeau riemannien complet stable $\mathcal{D}_n = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$. On sait que les feuilletages du drapeau sont tous transversalement parallélisables [7]. Soit k la dimension de l'algèbre de Lie structurale du flot de $(M_{n+1}, \mathcal{D}_n)$; $k \leq n - 1$ et

$$\mathbb{T}^{k+1} \hookrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\pi_k} W_{n-k}$$

sa fibration basique. Comme le drapeau est stable et $l \neq 0, \overline{\mathcal{F}_1}$, le feuilletage par les adhérences du flot, coïncide avec le feuilletage $\mathcal{F}_{k+1}$; leurs fibrations basiques sont alors identiques. Dans la suite exacte d'Atiyah de $C^0(W_{n-k})$ -modules et d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow \Gamma g_{W_{n-k+1}} \rightarrow l(M, \mathcal{F}_{k+1}) \xrightarrow{\pi_k} \Xi(W_{n-k}) \rightarrow 0$$

associée au feuilletage à feuilles fermées $\mathcal{F}_{k+1}$ [11], le $C^0(W_{n-k})$ -module $\Gamma g_{W_{n-k}}$ est alors nul; π_k est donc un isomorphisme d'algèbres. Le drapeau

se projette sur la variété basique W_{n-k} du flot $\mathcal{F}_1$ en un drapeau riemannien complet stable $\mathcal{D}_{n-k-1}^b = (\mathcal{F}_1^b, \dots, \mathcal{F}_{n-k-1}^b)$ où pour tout $s, 1 \leq s \leq n-k-1$, $\mathcal{F}_s^b = \pi_k(\mathcal{F}_{k+1+s})$.

Comme précédemment $\mathcal{D}_{n-k-1}^b$ va se projeter sur la variété basique de $\mathcal{F}_1^b$ en drapeau riemannien complet stable qui est aussi le projeté de $\mathcal{D}_n$ sur la variété basique du second feuilletage à feuilles fermées de $\mathcal{D}_n$. Soit $W'_1 = W_{n-k}$, ..., W'_l , la suite des variétés basiques ainsi obtenue par projections successives. La projection de $\mathcal{D}_n$ sur W'_l est un drapeau riemannien dont aucun feuilletage n'est à feuilles fermées car sinon $\mathcal{D}_n$ contiendrait, contrairement à l'hypothèse, plus de l feuilletages à feuilles fermées. Ensuite puisque ce drapeau sur W'_l est stable, ses feuilletages sont nécessairement minimaux ; par suite on peut considérer que $W'_l = \mathbb{T}^q$ et que le drapeau qu'il supporte est linéaire [2]. Comme le revêtement universel $\widetilde{W}'_l = \mathbb{R}^q$ est un groupe de Lie résoluble, alors par la proposition 2.2, la projection de $\mathcal{D}_n$ sur W'_{l-1} est un drapeau de feuilletages homogènes et le revêtement universel $\widetilde{W}'_{l-1}$ est un groupe de Lie résoluble. Par récurrence, toutes les variétés basiques considérées sont des variétés homogènes de groupes de Lie résolubles. Il vient donc avec la même proposition 2.2, que la variété M_{n+1} est difféomorphe à une variété homogène d'un groupe résoluble. En clair, il existe une suite d'entiers strictement positifs $k_1, \dots, k_{l-1}$, des groupes de Lie résolubles $G_1, \dots, G_l$, et des matrices carrées $A_1, \dots, A_{l-1}$ tels que :

$$\begin{aligned} M &\cong \frac{G}{\pi_1(M)}; G = \mathbb{R}^{k_1} \times_{A_1} G_1 = \mathbb{R}^{k_1} \times_{A_1} (\mathbb{R}^{k_2} \times_{A_2} G_2) = \dots, \\ G_i &= \mathbb{R}^{k_i} \times_{A_i} G_{i+1}, G_{l-1} = \mathbb{R}^{k_{l-1}} \times_{A_{l-1}} \mathbb{R}^s, G_l = \mathbb{R}^q, \end{aligned}$$

et il est facile de voir que le relévé de chaque feuilletage du drapeau $\mathcal{D}_n$ sur G est soit le relévé d'un feuilletage homogène, soit le produit du relévé d'un feuilletage basique et du relévé d'un feuilletage homogène. Mais comme les feuilletages basiques des feuilletages du drapeau sont aussi des feuilletages homogènes, alors le drapeau $\mathcal{D}_n$ est à une conjugaison près, un drapeau de feuilletages homogènes.

Enfin, la considération de la suite $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$, où $H_i = \text{Ker } D_i$ et les D_i des développantes de ces feuilletages homogènes, permet de conclure. ■

Remarques

1) Le revêtement universel d'une variété compacte connexe supportant un drapeau riemannien complet stable (donc un drapeau de Lie) est un groupe de Lie finement résoluble et le groupe d'holonomie de chacun des feuilletages est finement polycyclique [6].

2) La preuve du théorème 2.3 montre que si chacune des matrices A_i est réduite à la matrice identité alors le groupe de Lie est abélien ; $G = \mathbb{R}^{n+1}$, et le drapeau est linéaire.

En particulier un drapeau riemannien complet dont les feuilletages sont à feuilles fermées est un drapeau linéaire du tore.

3) Les adhérences des feuilles des feuilletages d'un drapeau stable sont isomorphes à des variétés homogènes de groupes de Lie finement résolubles. Et la trace du drapeau sur chacune de ces adhérences est un drapeau de feuilletages homogènes.

4) La preuve de la proposition 2.2, le théorème 2.3 et [6] permettent de voir que tout drapeau riemannien complet d'une 3-variété compacte connexe est, à une conjugaison près, un drapeau de Lie du tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^3 (tr A \geq 2)$.

Il en résulte qu'un flot riemannien sur la sphère $\mathbb{S}^3$ ou sur un espace lentillaire de dimension 3 n'admet aucune extension riemannienne propre.

De même en dimension 3 ou 4, on a :

Corollaire 2.4 *Tout drapeau riemannien complet d'une 4-variété compacte connexe est conjugué à un drapeau de Lie de flot homogène.*

Preuve. Soit $(M, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ un tel drapeau. Les deux derniers feuilletages étant de Lie, il reste seulement à montrer que le flot est de Lie.

- Si le drapeau est stable, le problème est résolu.

- Si le flot est à feuilles fermées, le flot est un feuilletage de Lie en cercles puisque la variété basique du flot est le tore hyperbolique $\mathbb{T}_A^3 (tr A \geq 2)$ (prop. 2.2). Et dans ce cas, $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}_A^3$.

- Si l'algèbre de Lie structurale du flot est de dimension un, la variété basique du flot étant le tore $\mathbb{T}^2$, alors le drapeau $(\mathcal{F}_1, \overline{\mathcal{F}}_1)$ peut être complété en un drapeau riemannien complet stable. Et ici aussi $M = \mathbb{T}^2 \times_A \mathbb{T}^2$, où A appartient à la famille des matrices décrites plus haut. ■

2.2 Structure d'un drapeau riemannien complet

Le second résultat fournit une obstruction à l'existence d'un drapeau riemannien complet sur une variété (non nécessairement compacte) et montre que les drapeaux riemanniens complets ont des propriétés assez riches et proches des drapeaux complets de feuilletages de Lie homogènes. Ce qui nous permet d'obtenir pour une variété compacte une caractérisation des drapeaux riemanniens complets qui sont des drapeaux de feuilletages homogènes.

Thorme 2.5 *Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{n-1})$ un drapeau riemannien d'une n -variété connexe non nécessairement compacte M . Alors on a les propriétés suivantes.*

1) *La variété M est complètement parallélisable et les feuilletages du drapeau sont à la fois transversalement parallélisables et transversalement intégrables. De façon précise, il existe un unique parallélisme $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de M dit **parallélisme du drapeau** tel que :*

- *Pour tout $i \geq 1$, Y_i est unitaire, tangent à $\mathcal{F}_i$, et oriente le flot qu'il définit*

- *Pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $[Y_i, Y_j] = k_{ij} Y_i$, où les fonctions k_{ij} , dites **fonctions de structure du drapeau**, sont, pour $i \geq 2$, basiques pour le feuilletage $\mathcal{F}_{i-1}$.*

2) *Si la variété est compacte, son revêtement universel est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ et le drapeau relevé est un drapeau de feuilletages simples transversalement parallélisables. Et le drapeau $\mathcal{D}$ est un drapeau de feuilletages homogènes si et seulement si ses fonctions de structure sont constantes.*

Preuve. Pour un feuilletage riemannien $(M, \mathcal{F})$ on désigne par :

- $\mathcal{A}(M)$ l'anneau des fonctions numériques C^∞ sur M

- $\Xi\mathcal{F}$ le $\mathcal{A}(M)$ - module des champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$,
- $\nu(\mathcal{F})$ le fibré normal de $\mathcal{F}$,
- $l(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs globaux feuilletés transverses,
- $(T\mathcal{F})^\perp$ le fibré orthogonal de $T\mathcal{F}$ relativement à une métrique quasi-fibrée de $\mathcal{F}$,
- si $X \in \Xi\mathcal{F}$, $\overline{\langle X \rangle}$ le sous- fibré de rang un qu'il engendre,

Soit $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$ un drapeau riemannien sur la n -variété riemannienne (M, g) , où g est une métrique quasi-fibrée du drapeau (prop.2.1) et $\mathcal{F}$ un feuilletage quelconque de $\mathcal{D}$. Soient $m = \dim \mathcal{F}$ (i.e. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$). Alors pour tout $i, m \leq i \leq n-2$, les sous-fibrés $(T\mathcal{F}_i)^\perp \cap T\mathcal{F}_{i+1}$ et $(T\mathcal{F}_{n-1})^\perp$ sont de rang un (l'orthogonalité étant bien sûr entendue dans le sens de la métrique quasi-fibrée du drapeau). Soient respectivement Y_{i+1} et Y_n les champs de vecteurs unitaires qui les engendrent et qui orientent chacun des flots associés.

D'après ce qui précède, puisque g est quasi-fibrée pour $\mathcal{F}$, il est clair que:

1) $Y_{m+1}, \dots, Y_n$ sont $(n-m)$ champs globaux linéairement indépendants en chaque point de M , formant une base de $\nu(\mathcal{F}_m) \cong (T\mathcal{F}_m)^\perp$.

2) Pour tout $k, 0 \leq k \leq n-m-1$

$$T\mathcal{F}_{m+k+1} = T\mathcal{F}_{m+k} \oplus \overline{\langle Y_{m+k+1} \rangle} = T\mathcal{F}_m \oplus \left(\bigoplus_{m+1 \leq j \leq m+k+1} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$$

3) Pour tout $i \geq m+1$ et pour tout $X \in \Xi\mathcal{F}$, Y_i étant unitaire alors on a:

$$0 = Xg(Y_i, Y_i) = 2g([X, Y_i], Y_i).$$

Il résulte de 2) et 3) que pour tout $i \geq m+1$, $[X, Y_i] \in \Xi\mathcal{F}_i$ et est orthogonal à Y_i ; ce qui implique que $[X, Y_i]$ est tangent à $\mathcal{F}_{i-1}$ puisque $T\mathcal{F}_i = T\mathcal{F}_{i-1} \oplus \overline{\langle Y_i \rangle}$. Ensuite pour tous $i, j, m+1 \leq i < j \leq n$, on a

$$0 = Xg(Y_i, Y_j) = g([X, Y_i], Y_j) + g(Y_i, [X, Y_j]) = g([X, Y_i], Y_i)$$

car $[X, Y_i] \in \Xi\mathcal{F}_{i-1}$ est orthogonal à Y_j puisque $Y_j \perp T\mathcal{F}_{j-1}$ et $T\mathcal{F}_{i-1} \subset T\mathcal{F}_{j-1}$.

Ceci montre que $[X, Y_i]$ est tangent à $\mathcal{F}_{i-1}$ et est orthogonal à $Y_{m+1}, \dots, Y_n$. Comme $T\mathcal{F}_{i-1} = T\mathcal{F}_m \oplus \left(\bigoplus_{m+1 \leq j \leq i-1} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$ alors $[X, Y_i]$ est tangent à $\mathcal{F}_m$, i.e. pour tout $i \geq m+1$, $Y_j \in l(M, \mathcal{F})$. Ce qui assure que $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement parallélisable; par suite le drapeau est parallélisable.

Pour $m=1$, soit Y_1 un champ unitaire complet tangent au flot $\mathcal{F}_1$, $(Y_2, \dots, Y_n)$ le parallélisme transverse de $\mathcal{F}_1$, alors par construction, $(Y_1, \dots, Y_n)$ est un parallélisme de $TM = T\mathcal{F}_1 \oplus \left(\bigoplus_{2 \leq j \leq n} \overline{\langle Y_j \rangle} \right) = \left(\bigoplus_{1 \leq j \leq n} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$ et $(Y_{i+1}, \dots, Y_n)$ un parallélisme de $\mathcal{F}_i$. Ce parallélisme est alors tel que :

pour tous $i, j, 1 \leq i \leq j \leq n$, $[Y_i, Y_j] \in \Xi\mathcal{F}_i$ et pour tout $k < i$,

$$g([Y_i, Y_j], Y_k) = Y_j g(Y_k, Y_i) - g([Y_k, Y_j], Y_i) = 0$$

Il en résulte que $[Y_i, Y_j] \in \overline{\langle Y_1, \dots, Y_{i-1} \rangle}^\perp \cap \Xi\mathcal{F}_i = \overline{\langle Y_i \rangle}$, donc pour tous $i, j, 1 \leq i < j \leq n$ on a

$$[Y_i, Y_j] = k_{ij} Y_i, (**)$$

et alors la variété M est complètement parallélisable.

Pour $l < i < j$, la relation de Jacobi appliquée au triplet (Y_l, Y_i, Y_j) et l'identité(**) permettent de voir que les fonctions de structure k_{ij} sont basiques pour le feuilletage $\mathcal{F}_{i-1}$. L'identité(**) montre également que le $\mathcal{A}(M) - \Xi v(\mathcal{F}_i)$ des champs normaux à $\mathcal{F}_i$ est un module libre de base $Y_{i+1}, \dots, Y_n$, et que les distributions $v(\mathcal{F}_i) \cong (T\mathcal{F}_i)^\perp$ sont intégrables. On notera pour la suite, $\mathcal{F}_i^\perp$ le feuilletage transverse ainsi défini.

2) Supposons maintenant que la variété de base M est compacte.

a) Dans ce cas la métrique g et sa relevée $\tilde{g}$ sur le revêtement universel de M étant complètes, et $\mathcal{F}_i$ transversalement intégrable, le théorème de décomposition de Blumenthal- Hebda [3] assure que le revêtement universel $\tilde{M}$ de M s'identifie au produit $\tilde{F}_i \times \tilde{F}_i^\perp$, où $\tilde{F}_i$ est une feuille du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}_i$ de $\mathcal{F}_i$ et $\tilde{F}_i^\perp$ une feuille du feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}_i^\perp$ de $\mathcal{F}_i^\perp$, et que la projection sur le second facteur est une submersion riemannienne qui définit le feuilletage relevé $\tilde{\mathcal{F}}_i$. Il en résulte comme $\tilde{F}_1$ est un revêtement simplement connexe de la feuille F_1 de $\mathcal{F}_1$ projetée de $\tilde{F}_1$, que $\tilde{M} \cong \mathbb{R} \times \tilde{F}_1^\perp$. Comme le drapeau relevé sur $(\tilde{M}, \tilde{g})$ est aussi un drapeau parallélisable et comme la projection sur le second facteur est la fibration basique du flot relevé, alors le drapeau relevé se projette sur $\tilde{F}_1^\perp$ en un drapeau riemannien complet d'une variété complète connexe et simplement connexe et le même théorème de décomposition de Blumenthal- Hebda assure que $\tilde{F}_1^\perp \cong \mathbb{R} \times \tilde{F}_2^\perp$ et on a $\tilde{M} \cong \mathbb{R}^2 \times \tilde{F}_2^\perp$. De proche en proche on obtient que $\tilde{M} \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \tilde{F}_{n-1}^\perp \cong \mathbb{R}^n$. On notera de même que le revêtement universel des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_i$ du drapeau sont toutes isomorphes à $\mathbb{R}^i$.

b) - Si $(M, \mathcal{D})$ est un drapeau de feuilletages homogènes, le théorème de relèvement d'un drapeau de Lie[6], relève $\mathcal{D}$ en un drapeau de feuilletages homogènes simples sur un groupe de Lie G connexe et simplement connexe revêtement universel de M . Comme l'action à gauche d'éléments de G est une isométrie et que les feuilletages relevés sont homogènes, il est clair que le parallélisme de ce drapeau relevé est composé de champs invariants à gauche. Si les C_{ij}^k sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie de G dans la base définie par ce parallélisme, il est alors clair que les fonctions de structure de $\tilde{k}_{ij}$ de ce drapeau relevé sont alors constantes, soit $\tilde{k}_{ij} = C_{ij}^j$. Comme la projection sur M de ce parallélisme est le parallélisme du drapeau $(M, \mathcal{D})$ avec les mêmes fonctions de structure, alors on a le résultat.

- Réciproquement si les fonctions de structure k_{ij} du parallélisme $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'un drapeau riemannien complet $(M, \mathcal{D})$ sont constantes, alors le parallélisme relevé $(\tilde{Y}_i)_{1 \leq i \leq n}$ sur le revêtement universel $\tilde{M}$ de M , définit une algèbre de Lie réelle de dimension n , de groupe de Lie connexe et simplement connexe G . On peut supposer, à un difféomorphisme près, que $\tilde{M} = G$ et que M est un espace homogène. Puisque le feuilletage relevé de tout feuilletage $\mathcal{F}_i$ du drapeau est, comme on le voit, défini par les orbites du sous-groupe distingué correspondant à l'idéal engendré par $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_i$ (**), alors le feuilletage $\mathcal{F}_i$ est un feuilletage homogène. ■

References

- [1] **R. Almeida and P.Molino,1986.** Flots riemanniens sur les 4- variétés compactes, Tôhoku Mathematical Journal, 2,313-326.
- [2] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002.** Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens, JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3, 281-288.
- [3] **R.A. Blumenthal and J. Hebda,1983.** De Rham decomposition theorem for foliated manifolds, Ann. Inst. Fourier 33 (2) , 133-198.
- [4] **Y.Carrière,1984 .** Flots riemanniens, in ” Structures transverses des feuilletages, Astérisque, 116 31-52.
- [5] **J.Dieudonné,1971.** Eléments d’analyse, Gauthier -Villars, Paris, tome 4,192.
- [6] **H.Diallo, 2002 .**Sur les drapeaux de Lie.Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [7] **H.Diallo, 2002 .**Relèvement d’un drapeau riemannien et drapeaux de Lie du tore hyperbolique $n + 1$ -dimensionnel, Ann. Math. Blaise Pascal 12, 2005 no. 2, 245–258.
- [8] **A. El Kacimi Alaoui and M.Nicolau,1993.**A class of C^∞ stable foliations, Ergod.Th.and Dynam.Sys, 13, 667-704.
- [9] **E.Fédida, 1973 .**Feuilletages du plan. Feuilletages de Lie, thèse d’Etat , Strasbourg.
- [10] **E. Ghys, 1984.** Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [11] **P.Molino, 1977.** Etude des feuilletages transversalement complets et applications, Anna.Scient. E.N.S., 289-307.
- [12] **P.Molino, 1982.** Géométrie des feuilletages riemanniens, Proc. Kon. Akad., A 85(1).
- [13] **Raghunatan, M.S., 1968.** Discrete subgroups of Lie groups, Springer.