



**HAL**  
open science

# STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN

Hassimiou Diallo

► **To cite this version:**

| Hassimiou Diallo. STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN. 2006. hal-00018748v2

**HAL Id: hal-00018748**

**<https://hal.science/hal-00018748v2>**

Preprint submitted on 20 Oct 2006 (v2), last revised 14 Dec 2006 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN

*Hassimiou Diallo*  
*Laboratoire de Mathématiques Fondamentales,*  
*ENS, Université de Cocody*  
*08 B.P. 10 , Abidjan, CÔTE D'IVOIRE.*  
*Email: diallomh@yahoo.fr*

October 20, 2006

## Abstract

*The aim of this paper is to show that any stable complete Riemannian flag on a compact and connected manifold is conjugated to a flag of homogenous foliations ( see Définitions).*

This result is a step toward the classification of Riemannian flags.

## 1 Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des drapeaux riemanniens complets. Avant d'exposer la position du problème, il est utile de rappeler les définitions suivantes.

*Quelques définitions:*

1) Un *drapeau de feuilletages* (ou tout simplement un *drapeau*) sur une variété  $M$  est la donnée sur cette variété d'une suite croissante de feuilletages  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  telle que  $\dim \mathcal{F}_i = i$ . L'entier  $p$  est la longueur du drapeau. Le drapeau est dit *complet* si le feuilletage  $\mathcal{F}_p$  est de codimension un. Un drapeau de longueur un est réduit à son flot.

2) Un drapeau est dit *riemannien* ( *de Lie, minimal, parallélisable*) si chacun de ses feuilletages est riemannien (de Lie, minimal, transversalement parallélisable).

3) Un drapeau sur  $M = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{T}^n$  est dit *linéaire* si chacun de ses feuilletages est linéaire.

4) Etant donné un drapeau  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  sur une variété  $M$  et une submersion  $\pi$  d'une variété  $M^\#$  sur  $M$ , un *relèvement du drapeau*  $\mathcal{D}$  sur  $M^\#$  est, s'il existe, un drapeau  $\mathcal{D}^\# = (\mathcal{F}_1^\#, \dots, \mathcal{F}_p^\#)$  sur  $M^\#$ , tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_i^\#$  se projette sur le feuilletage  $\mathcal{F}_i$  par  $\pi$ .

5) Un drapeau  $\mathcal{D} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$  sur une variété  $M$  et un drapeau  $\mathcal{D}' = (\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_p)$  sur une variété  $M'$  sont dits *conjugués* s'il existe un difféomorphisme de  $M$  sur  $M'$  échangeant  $\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{F}'_i$ .

6) Un drapeau de feuilletages riemanniens  $\mathcal{D}$  est dit *stable* si tout feuilletage du drapeau est soit minimal, soit régulier et d'adhérence dans  $\mathcal{D}$ .

*Position du problème*

L'objectif dans l'étude des drapeaux de feuilletages, a été au départ en partant des résultats de Yves Carrière, de E. Fédida et de P. Molino sur les feuilletages ([3], [8], [11]), de voir ce qu'on peut dire des drapeaux de feuilletages de Lie et des drapeaux riemanniens en général.

Les résultats obtenus sont les suivants:

Sur une variété compacte,

1) Tout drapeau riemannien minimal est conjugué à un drapeau linéaire [2].

2) Tout drapeau riemannien se relève sur le fibré des repères orthonormés directs transverses du dernier feuilletage en un drapeau de feuilletages transversalement parallélisables. Ce qui a permis d'établir qu'un drapeau riemannien complet d'une *variété compacte* est parallélisable [6].

3) Le théorème de relèvement de Fédida permet d'écrire un théorème de structure des drapeaux de Lie [5].

Ici, il s'agit d'aborder l'étude de la structure d'un drapeau riemannien. On montre:

1) tout drapeau riemannien complet d'une variété non nécessairement compacte est un drapeau de feuilletages transversalement parallélisables.

2) tout drapeau riemannien complet stable d'une variété compacte est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.

Ce résultat permet de statuer sur les drapeaux riemanniens complets ou non d'une *3-variété compacte* et représente un pas important vers la classification des drapeaux riemanniens.

Il s'agira pour la suite de trouver un plan d'attaque du problème épineux de la classification de ces drapeaux, lorsqu'ils sont supportés par une  $n$ -variété compacte ( $n \geq 4$ ), qu'ils soient complets ou non, stables ou non, puisque la classification des feuilletages riemanniens de codimension  $\geq 4$  s'avère être déjà une tâche laborieuse compte tenu du nombre des dimensions possibles de des algèbres de Lie structurale [11]. Et comme le suggère la dernière remarque de l'article, la connaissance des algèbres de Lie structurale des feuilletages (surtout du dernier) du drapeau permettrait d'avancer dans cette étude.

Le papier est structuré comme suit

- Après le chapitre introductif, le chapitre 2 est consacré à l'étude de la structure d'un drapeau riemannien complet.

- enfin le chapitre 3 qui contient le résultat essentiel de ce travail, porte sur la structure d'un drapeau riemannien stable.

Dans tout ce qui suit les objets sont  $C^\infty$ , la variété  $M$  est connexe et orientable, et les feuilletages considérés sont supposés orientables.

## 2 Structure d'un drapeau riemannien complet

Pour établir le théorème de structure d'un drapeau riemannien complet, nous aurons besoin du lemme suivant:

**Lemme 2.1** *Etant donné un drapeau riemannien , il existe une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages.*

**Preuve.** Il suffit de prouver que si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux feuilletages riemanniens d'une variété  $M$  tels que  $\mathcal{F}'$  soit une extension de  $\mathcal{F}$ , alors , il existe sur  $M$  une métrique riemannienne quasi-fibrée à la fois pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Et on achève par récurrence.

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $M$  formé d'ouverts distingués à la fois pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  de sorte que les feuilletages riemanniens soient définis respectivement par les cocycles  $(U_i, T, f_i, g_{ij})_{i \in I}$  et  $(U_i, T', f'_i, g'_{ij})_{i \in I}$ . Pour chaque  $i \in I$ , il existe une submersion locale  $\theta_i$  de  $f_i(U_i)$  dans  $T'$  telle  $f'_i = \theta_i \circ f_i$ . Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & T & \xrightarrow{\theta_i} & T' \\ Id_{U_i \cap U_j} \downarrow & & \downarrow g_{ji} & & \downarrow g'_{ji} \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_j} & T & \xrightarrow{\theta_j} & T' \end{array}$$

Et si  $h$  et  $h'$  sont les métriques riemanniennes respectives de  $T$  et  $T'$  définissant les feuilletages riemanniens  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ , comme  $g'_{ji} \circ \theta_i = \theta_j \circ g_{ji}$ , et que  $g_{ji}$  est une isométrie locale, alors

$$Tg_{ji}(KerT\theta_i) = KerT\theta_j \quad \text{et} \quad Tg_{ji}((KerT\theta_i)^\perp) = (KerT\theta_j)^\perp$$

Sur chaque ouvert  $f_i(U_i)$  modifions la métrique induite par  $h$  de la façon suivante: tout en la préservant sur  $KerT\theta_i$  et en gardant l'orthogonalité des sous-fibrés  $KerT\theta_i$  et  $(KerT\theta_j)^\perp$ , on la substitue sur  $(KerT\theta_i)^\perp$  par l'image réciproque par  $\theta_i$  de la métrique riemannienne  $h'$  de  $T'$ . Avec ces nouvelles métriques sur les  $f_i(U_i)$ , les  $\theta_i$  deviennent par construction des submersions riemanniennes, et les  $g_{ij}$  restent encore des isométries. Comme la variété transverse modèle  $T$  du feuilletage riemannien  $\mathcal{F}$ , est par construction, la somme disjointe des  $f_i(U_i)$ , alors la somme disjointe de ces nouvelles métriques sur les  $f_i(U_i)$  définissent sur  $T$  une métrique  $\tilde{h}$ . A cette nouvelle métrique de  $T$ , il est loisible d'y associer des métriques  $\mathcal{F}$ -quasi-fibrées. Et chacune de ces métriques est aussi quasi-fibrée pour  $\mathcal{F}'$ . ■

Ainsi, étant donné un drapeau riemannien, il existe toujours une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages. On dira d'une telle métrique qu'elle est *quasi-fibrée pour le drapeau*.

Une obstruction à l'existence d'un drapeau riemannien complet sur une variété (non nécessairement compacte) est donnée par:

**Théorème 2.2** Soit  $M$  une variété supportant un drapeau riemannien complet. Alors le drapeau est parallélisable et la variété  $M$  complètement parallélisable.

**Preuve.** Pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M$ , on désigne :

- $\Xi\mathcal{F}$  le module des champs de vecteurs tangents à  $\mathcal{F}$ ,
- $\nu(\mathcal{F})$  le fibré normal de  $\mathcal{F}$ ,
- $l(M, \mathcal{F})$ , l'algèbre de Lie des champs de vecteurs globaux feuilletés transverses,
- $(T\mathcal{F})^\perp$  le fibré orthogonal de  $T\mathcal{F}$  relativement à une métrique riemannienne  $g$  sur  $M$ ,
- si  $X \in \Xi\mathcal{F}$ ,  $\overline{\langle X \rangle}$  le sous- fibré de rang  $un$  qu'il engendre,

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  un drapeau riemannien sur une  $n$ -variété  $M$  et  $\mathcal{F}$  un feuilletage quelconque de  $\mathcal{D}$ . Soient  $m = \dim\mathcal{F}$  ( i.e.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$  ) et  $g$  une métrique quasi-fibrée du drapeau ( prop. 2.1 ). Alors pour tout  $i, m \leq i \leq n-2$ , les sous-fibrés  $(T\mathcal{F}_i)^\perp \cap T\mathcal{F}_{i+1}$  et  $(T\mathcal{F}_{n-1})^\perp$  sont de rang  $un$ . Soient respectivement  $Y_{i+1}$  et  $Y_n$  les champs de vecteurs *unitaires* qui les engendrent. D'après ce qui précède, et puisque  $g$  est quasi-fibrée pour  $\mathcal{F}$ , il est clair que:

- 1)  $Y_{m+1}, \dots, Y_n$  sont  $(n-m)$  champs globaux linéairement indépendants en chaque point de  $M$ , formant une base de  $\nu(\mathcal{F}) \cong (T\mathcal{F})^\perp$ .
- 2) Pour tout  $k, 0 \leq k \leq n-m-1$

$$T\mathcal{F}_{m+k+1} = T\mathcal{F}_{m+k} \oplus \overline{\langle Y_{m+k+1} \rangle} = T\mathcal{F}_m \oplus \left( \bigoplus_{m+1 \leq j \leq m+k+1} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$$

- 3) Pour tout  $i \geq m+1$  et pour tout  $X \in \Xi\mathcal{F}$ ,  $Y_i$  étant unitaire alors on a:

$$0 = Xg(Y_i, Y_i) = 2g([X, Y_i], Y_i).$$

Il résulte de 2) et 3) que pour tout  $i \geq m+1$ ,  $[X, Y_i] \in \Xi\mathcal{F}_i$  et est orthogonal à  $Y_i$ ; ce qui implique que  $[X, Y_i]$  est tangent à  $\mathcal{F}_{i-1}$  puisque  $T\mathcal{F}_i = T\mathcal{F}_{i-1} \oplus \overline{\langle Y_i \rangle}$ . Ensuite pour tous  $i, j, m+1 \leq i < j \leq n$ , on a

$$0 = Xg(Y_i, Y_j) = g([X, Y_i], Y_j) + g(Y_i, [X, Y_j]) = g([X, Y_i], Y_i)$$

car  $[X, Y_i] \in \Xi\mathcal{F}_{i-1}$  est orthogonal à  $Y_j$  puisque  $Y_j \perp T\mathcal{F}_{j-1}$  et  $T\mathcal{F}_{i-1} \subset T\mathcal{F}_{j-1}$ .

Ceci montre que  $[X, Y_i]$  est tangent à  $\mathcal{F}_{i-1}$  et est orthogonal à  $Y_{m+1}, \dots, Y_n$ . Comme  $T\mathcal{F}_{i-1} = T\mathcal{F}_m \oplus \left( \bigoplus_{m+1 \leq j \leq i-1} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$  alors  $[X, Y_i]$  est tangent à  $\mathcal{F}_m$ , i.e. pour tout  $i \geq m+1$ ,  $Y_j \in l(M, \mathcal{F})$ . Ce qui assure que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage transversalement parallélisable; par suite le drapeau est parallélisable.

Pour  $m=1$ , soit  $Y_1$  un champ unitaire complet tangent au flot  $\mathcal{F}_1$ ,  $(Y_2, \dots, Y_n)$  le parallélisme transverse de  $\mathcal{F}_1$ , alors par construction,  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est un parallélisme de  $TM = T\mathcal{F}_1 \oplus \left( \bigoplus_{2 \leq j \leq n} \overline{\langle Y_j \rangle} \right) = \left( \bigoplus_{1 \leq j \leq n} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$  et  $(Y_{i+1}, \dots, Y_n)$  un parallélisme de  $\mathcal{F}_i$ . Ce parallélisme est alors tel que :

pour tous  $i, j, 1 \leq i \leq j \leq n, [Y_i, Y_j] \in \Xi\mathcal{F}_i$  et pour tout  $k < i$ ,

$$g([Y_i, Y_j], Y_k) = Y_j g(Y_k, Y_i) - g([Y_k, Y_j], Y_i) = 0$$

Il en résulte que  $[Y_i, Y_j] \in \overline{\langle Y_1, \dots, Y_{i-1} \rangle}^\perp \cap \Xi \mathcal{F}_i = \overline{\langle Y_i \rangle}$ , donc pour tous  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  on a  $[Y_i, Y_j] = k_{ij} Y_i$  et alors la variété  $M$  est complètement parallélisable. ■

Un tel parallélisme est dit *compatible* avec le drapeau.

On notera que ce résultat a été déjà établi dans [6], dans le cas particulier où la variété est compacte.

### 3 Structure d'un drapeau riemannien complet stable

Le résultat essentiel de ce travail porte sur la structure d'un drapeau riemannien complet stable et il constitue une étape vers la classification des drapeaux riemanniens.

Nous rappelons qu'un drapeau de feuilletages riemanniens  $\mathcal{D}$  est dit *stable* si tout feuilletage du drapeau est soit minimal, soit régulier et d'adhérence dans  $\mathcal{D}$ . Cela signifie que chaque feuilletage à feuilles non fermées est dense dans les feuilletages suivants ([11]) jusqu'au prochain feuilletage à feuilles fermées s'il en existe.

Avant de donner le théorème de structure d'un drapeau riemannien complet stable, nous établirons les propositions préliminaires suivantes:

Le premier résultat qui nous sera utile plus d'une fois pour la suite, est une généralisation du théorème de Y.Carrière sur les flots riemanniens minimaux d'une variété compacte [3]; il montre la rigidité des drapeaux à flot riemannien minimal.

**Proposition 3.1** *Tout drapeau d'une  $n$ -variété compacte et connexe dont le flot est riemannien minimal est conjugué à un drapeau linéaire du tore  $\mathbb{T}^n$*

**Preuve.** Puisque, d'après le théorème de Y.Carrière sur les flots riemanniens un tel flot est conjugué à un flot linéaire du tore  $\mathbb{T}^n$ [3], il suffit de montrer que sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , tout drapeau dont le flot est linéaire minimal est un drapeau linéaire.

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  un drapeau de  $\mathbb{T}^n$  de flot linéaire et minimal, le champ de  $i$ -plans de  $\mathcal{F}_i$  est invariant par ce flot, donc constant le long de chaque orbite. Celles-ci étant denses,  $\mathcal{F}_i$  est constant, i.e.  $\mathcal{F}_i$  est linéaire. ■

On notera que cette proposition est en fait équivalente au résultat établi dans [2], et on trouvera dans la même référence des exemples qui montrent que l'hypothèse sur la *minimalité* du flot est essentielle même dans le cas d'un drapeau de Lie d'un tore.

**Proposition 3.2** *Soit  $(M, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1})$  un drapeau d'une  $n + 1$ -variété compacte connexe tel que:*

- i) le flot est un feuilletage transversalement parallélisable,*
- ii) la variété basique de ce flot admet pour revêtement universel un groupe de Lie résoluble,*

iii) le feuilletage  $\mathcal{F}_{k+1}$  coïncide avec le feuilletage basique du flot.

Alors la variété  $M$  est difféomorphe à une variété homogène d'un groupe de Lie résoluble et le drapeau est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.

**Preuve.** L'entier  $k$  étant la dimension de l'algèbre de Lie structurale du flot

$(M, \mathcal{F})$ , si  $\mathbb{T}^{k+1} \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_k} W$  est sa fibration basique, alors, on sait qu'il existe une matrice  $A \in \mathbb{S}\mathbb{L}(k+1; \mathbb{Z})$  diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres positives telle que la restriction du flot à chaque fibre soit conjuguée à un même flot modèle linéaire du tore  $\mathbb{T}^{k+1}$  de direction  $v_1$  un des vecteurs propres de  $A$ [1]. Des exemples de telles matrices peuvent être trouvés dans[7].

Puisque chacun des feuilletages contient le flot, alors il laisse invariant les feuilletages et ensuite comme l'action de ce flot est transitive, le drapeau induit sur chacune des adhérences du flot– le tore  $\mathbb{T}^{k+1}$ –, le même drapeau linéaire  $\mathcal{D}'_k = (\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_k)$ (prop.3.1).

On peut préciser que, si  $v_1, \dots, v_{k+1}$  sont les  $(k+1)$ – vecteurs propres associés aux  $(k+1)$ – valeurs propres non nécessairement distinctes de  $A$ , le drapeau modèle  $\mathcal{D}'_k$  induit sur chaque adhérence est tel que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle$  soit une direction du feuilletage linéaire  $\mathcal{F}'_i$ .

On peut noter pour la suite que la projection linéaire  $\sigma_i$  de  $\mathbb{R}^{k+1}$  sur le sous-espace  $\langle v_{i+1}, \dots, v_{k+1} \rangle \cong \mathbb{R}^{k-i+1}$  suivant la direction  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle$  est une développante de  $\mathcal{F}'_i$  et qu'ensuite, puisque  $A$  laisse invariant le feuilletage relevé de  $\mathcal{F}'_i$  sur  $\mathbb{R}^{k+1}$  et le sous-espace  $\langle v_{i+1}, \dots, v_{k+1} \rangle$ , il existe une matrice carrée  $A_i$  d'ordre  $k-i+1$ , dont l'application linéaire  $\rho_{A_i}$  associée est telle qu'on ait  $\rho_{A_i} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \rho_A$ . Il en résulte que cette matrice  $A_i$  est diagonalisable, à valeurs propres positives et de vecteurs propres  $v_{i+1}, \dots, v_k$ , de sorte que pour  $t \in \mathbb{R}$ , la matrice  $A_i^t$  est définie et l'on a :

$$\rho_{A_i^t} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \rho_{A^t} \quad (\star)$$

Ceci dit, soit  $G_W$  le groupe de Lie connexe résoluble (donc simplement connexe [4]) revêtement universel de  $W$  et  $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  la structure de groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^{k+1} \times G_W$  définie par la loi :

$$(x, g) \cdot (x', g') = (A^{\rho(g)} x' + x, gg')$$

où  $\rho$  est le prolongement linéaire d'une représentation non nulle de  $\pi_1(W)$  sur  $\mathbb{Z}[12]$ .

Ensuite, puisque la variété  $W = \frac{G_W}{\pi_1(W)}$  est compacte, et  $\pi_1(W)$  s'identifiant à un sous-groupe discret uniforme de  $G_W$ ; alors, il est clair que  $\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)$  est aussi un sous-groupe discret uniforme de  $G$  et par suite  $P = \frac{G}{\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)}$  est une  $n+1$ – variété compacte.

Par ailleurs, comme le groupe produit semi-direct de deux groupes résolubles est résoluble, alors  $G$  est résoluble. Ensuite, le groupe résoluble  $G_W$ , étant isomorphe à un  $\mathbb{R}^m$ [4], est alors contractile. Il en résulte que le fibré réciproque du revêtement universel de  $W$  par la projection basique  $\pi_k$  est triviale.

Ceci étant, considérons la submersion  $\Phi$  de  $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  sur  $\pi_k^*(G_W)$  définie par  $\Phi(t, g) = \psi^{-1}(\theta(t), g)$  où  $\theta$  est la projection canonique de  $\mathbb{R}^{k+1}$  sur  $\mathbb{T}^{k+1}$  et  $\psi : \pi_k^*(G_W) \rightarrow \mathbb{T}^{k+1} \times G_W$  une trivialisatoin de  $\pi_k^*(G_W)$ . Pour tous  $s \in \pi_1(W)$  et  $(t, g) \in \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  on a

$$\Phi(s \bullet (t, g)) = s \cdot \Phi(t, g)$$

où la seconde action est l'action canonique de  $\pi_1(W)$  sur  $\pi_k^*(G_W)$ ;  $\Phi$  passe au quotient et définit une submersion surjective  $\varphi$  de  $P = G/\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)$  sur  $M$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & \pi_k^*(G_W) \\ p \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

où  $pr_1$  est la première projection de  $\pi_k^*(G_W) = M \times_W G_W$  et  $p$  la projection canonique de  $G$  sur  $P$ . En s'aidant du diagramme commutatif suivant ,

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{\theta \times Id_{G_W}} & \mathbb{T}^{k+1} \times G_W & \xrightarrow{pr_2} & G_W \\ Id_G \downarrow & & \downarrow \psi^{-1} & & \downarrow Id_{G_W} \\ G & \xrightarrow{\Phi} & \pi_k^*(G_W) & \xrightarrow{pr_2} & G_W \\ p \downarrow & & \downarrow pr_1 & & \downarrow p_W \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\pi_k} & W \end{array}$$

on a , pour tout  $m \in M$  ,

$$((\theta \times Id_{G_W})^{-1} \circ \psi)pr_1^{-1}(m) =$$

$$\begin{aligned} & (\theta \times Id_{G_W})^{-1} \{(z_0, sg_0) \in \mathbb{T}^{k+1} \times G_W / p_W(g_0) = \pi_k(m) \text{ et } s \in \pi_1(W)\} = \\ & (\theta \times Id_{G_W})^{-1}(\pi_1(W).(z_0, g_0)) = (\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)).(t_0, g_0) = p^{-1}(\varphi^{-1}(m)) , \end{aligned}$$

où

$$\theta(t_0) = z_0 = (pr_1 \circ \psi)(m, g_0);$$

alors

$$\varphi^{-1}(m) = p((\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)).(t_0, g_0))$$

est un singleton et il en résulte que  $\varphi$  est une submersion bijective, *i.e* un isomorphisme de variétés.

Le relevé horizontal du drapeau  $\mathcal{D}'_k$  sur  $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  est le relevé par  $p$  du drapeau  $\varphi^* \mathcal{D}_k = (\varphi^* \mathcal{F}_1, \dots, \varphi^* \mathcal{F}_k)$ . Ensuite en s'aidant de la formule (\*), il est facile de voir que les feuilletages  $\varphi^* \mathcal{F}_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sont des feuilletages de Lie dont les développantes respectives sont les morphismes de groupes  $D_i : \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W \rightarrow \mathbb{R}^k \times_{A_i} G_W$  définis par

$$D_i(t, g) = (\sigma_i(t), g) ,$$

et que le feuilletage  $\varphi^* \mathcal{F}_{k+1}$  correspond au feuilletage défini par la projection  $\mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W \rightarrow G_W$ ; et qu'au total le drapeau considéré  $(M, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1})$  est conjugué, au moyen de  $\varphi$ , à un drapeau de feuilletages homogènes ([8], [9]). ■

**Théorème 3.3** *Tout drapeau riemannien complet stable  $(M, \mathcal{D})$  d'une  $n+1$ -variété compacte connexe est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.*

*De façon plus précise:*

- *La variété  $M$  est difféomorphe à un espace homogène quotient d'un groupe de Lie résoluble  $G$  par un sous-groupe discret  $\Gamma$ , et*
- *il existe une suite strictement décroissante de sous-groupes distingués dont les orbites déterminent le drapeau.*

**Preuve.** On pose  $\dim M = n + 1$  et on va raisonner par récurrence sur le nombre  $l$  de feuilletages à feuilles fermées du drapeau.

- Si  $l = 0$ , le flot est minimal, le résultat est évident (prop.3.1).

Sinon, soit  $M_{n+1}$  une variété compacte connexe supportant un drapeau riemannien complet stable  $\mathcal{D}_n = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ . On sait que les feuilletages du drapeau sont tous transversalement parallélisables (théo.2.2). Soit  $k$  la dimension de l'algèbre de Lie structurale du flot de  $(M_{n+1}, \mathcal{D}_n)$ ;  $k \leq n - 1$ .

Soit  $\mathbb{T}^{k+1} \hookrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\pi_k} W_{n-k}$  sa fibration basique. Comme le drapeau est stable et  $l \neq 0$ ,  $\overline{\mathcal{F}_1}$ , le feuilletage par les adhérences du flot, coïncide avec le feuilletage  $\mathcal{F}_{k+1}$ ; leurs fibrations basiques sont alors identiques. Dans la suite exacte d'Atiyah de  $C^0(W_{n-k})$ -modules et d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow \Gamma g_{W_{n-k+1}} \rightarrow l(M, \mathcal{F}_{k+1}) \xrightarrow{\pi_k} \Xi(W_{n-k}) \rightarrow 0$$

associée au feuilletage à feuilles fermées  $\mathcal{F}_{k+1}$  [10], le  $C^0(W_{n-k})$ -module  $\Gamma g_{W_{n-k}}$  est alors nul;  $\pi_k$  est donc un isomorphisme d'algèbres. Ensuite la variété  $M_{n+1}$  étant complètement parallélisable (théo.2.2), soit  $(Y_1, \dots, Y_{n+1})$  un parallélisme de  $M_{n+1}$  compatible avec le drapeau qu'il supporte. Les champs de vecteurs  $\mathcal{F}_{k+1}$ -basiques  $Y_{k+2}, \dots, Y_{n+1}$  se projettent par  $\pi_k$  en  $n - k$  champs complets de  $\Xi(W_{n-k})$  qui montrent que la variété basique  $W_{n-k}$  des feuilletages  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1}$  est complètement parallélisable et supporte un drapeau riemannien complet stable  $\mathcal{D}_{n-k-1}^b = (\mathcal{F}_1^b, \dots, \mathcal{F}_{n-k-1}^b)$  où pour tout  $s$ ,  $1 \leq s \leq n - k - 1$ ,  $\mathcal{F}_s^b = \pi_k(\mathcal{F}_{k+1+s})$ . Comme précédemment  $\mathcal{D}_{n-k-1}^b$  va se projeter sur la variété basique de  $\mathcal{F}_1^b$  en drapeau riemannien complet stable qui est aussi le projeté de  $\mathcal{D}_n$  sur la variété basique du second feuilletage à feuilles fermées de  $\mathcal{D}_n$ . Soit  $W'_1 = W_{n-k}, \dots, W'_l$ , la suite des variétés basiques ainsi obtenue par projections successives. La projection de  $\mathcal{D}_n$  sur  $W'_l$  est un drapeau riemannien dont aucun feuilletage n'est à feuilles fermées car sinon  $\mathcal{D}_n$  contiendrait, contrairement à l'hypothèse, plus de  $l$  feuilletages à feuilles fermées. Ensuite puisque ce drapeau sur  $W'_l$  est stable, ses feuilletages sont nécessairement minimaux; par suite on peut considérer que  $W'_l = \mathbb{T}^q$  et que le drapeau qu'il supporte est linéaire (prop.3.1). Comme le revêtement universel  $\widetilde{W}'_l = \mathbb{R}^q$  est un groupe de Lie résoluble, alors par la proposition 3.2, la projection de  $\mathcal{D}_n$  sur  $W'_{l-1}$  est un drapeau de feuilletages homogènes et le revêtement universel  $\widetilde{W}'_{l-1}$  est un groupe de Lie résoluble. Par récurrence, toutes les variétés basiques considérées sont des variétés homogènes provenant de groupes de Lie résolubles. Il vient donc avec la même proposition 3.2, que la variété  $M_{n+1}$  est difféomorphe à une variété homogène provenant d'un groupe résoluble. En clair, il existe une suite

d'entiers strictement positifs  $k_1, \dots, k_{l-1}$ , des groupes de Lie résolubles  $G_1, \dots, G_l$ , et des matrices carrées  $A_1, \dots, A_{l-1}$  tels que:

$$M \cong \frac{G}{\pi_1(M)}; G = \mathbb{R}^{k_1} \times_{A_1} G_1 = \mathbb{R}^{k_1} \times_{A_1} (\mathbb{R}^{k_2} \times_{A_2} G_2) = \dots,$$

$$G_i = \mathbb{R}^{k_i} \times_{A_i} G_{i+1}, G_{l-1} = \mathbb{R}^{k_{l-1}} \times_{A_{l-1}} \mathbb{R}^s, G_l = \mathbb{R}^q,$$

et il est facile de voir que le relevé de chaque feuilletage du drapeau  $\mathcal{D}_n$  sur  $G$  est soit le relevé d'un feuilletage homogène, soit le produit du relevé d'un feuilletage basique et du relevé d'un feuilletage homogène. Mais comme les feuilletages basiques des feuilletages du drapeau sont aussi des feuilletages homogènes, alors le drapeau  $\mathcal{D}_n$  est à une conjugaison près, un drapeau de feuilletages homogènes.

Enfin, la considération de la suite  $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ , où  $H_i = \text{Ker} D_i$  et les  $D_i$  des développantes de ces feuilletages homogènes, permet de conclure. ■

#### Remarques

1) Le revêtement universel d'une variété compacte connexe supportant un drapeau riemannien complet stable (donc un drapeau de Lie) est un groupe de Lie finement résoluble et le groupe d'holonomie de chacun des feuilletages est finement polycyclique [5].

2) La preuve du théorème 3.3 montre que si chacune des matrices  $A_i$  est réduite à la matrice identité alors  $G = \mathbb{R}^{n+1}$ , et le drapeau est linéaire.

En particulier un drapeau riemannien complet dont les feuilletages sont à feuilles fermées est un drapeau linéaire du tore.

3) La preuve de la proposition 3.2, le théorème 3.3 et [5] permettent de voir que tout drapeau riemannien complet d'une 3-variété compacte connexe est, à une conjugaison près, un drapeau de Lie du tore hyperbolique  $\mathbb{T}_A^3 (\text{tr} A \geq 2)$ ; ce drapeau est un drapeau de feuilletages homogènes, sauf peut-être lorsque le flot est à feuilles fermées et le second feuilletage minimal.

Il en résulte qu'un flot riemannien sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  ou sur un espace lentillaire de dimension 3 n'admet aucune extension riemannienne propre.

**Définition 3.4** Si  $F$  est l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage  $\mathcal{F}_r$  d'un drapeau stable  $(M, \mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p))$ , les restrictions des feuilletages  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$  à  $F$ , où  $r \leq s < \min(p, \dim F)$ , forment un drapeau qu'on appellera **trace** de  $\mathcal{D}$  sur  $F$ .

On peut alors avec cette définition décrire les adhérences des feuilles d'un feuilletage d'un drapeau riemannien complet stable comme suit:

**Corollaire 3.5** Soit  $(M, \mathcal{D})$  un drapeau riemannien complet stable d'une variété compacte et connexe, et  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $\mathcal{D}$ . Alors:

- 1) les adhérences des feuilles de  $\mathcal{F}$  sont isomorphes à une variété homogène d'un groupe de Lie finement résoluble,
- 2) la trace de  $\mathcal{D}$  sur chacune de ces adhérences est un drapeau de feuilletages homogènes.

*Remarque*

On rappelle qu'une algèbre de Lie de dimension  $n$  est dite finement résoluble si elle contient une suite strictement croissante d'idéaux  $(I_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  commençant par l'idéal nul et se terminant par  $g$ . Alors si  $\overline{F}$  est l'adhérence d'une feuille  $F$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'un drapeau riemannien stable d'une variété compacte et connexe, et si l'algèbre de Lie structurale  $l(\overline{F}, \mathcal{F})$  est finement résoluble, il existe une base de champs de Killing transverses de cette algèbre, permettant de construire une suite croissante d'idéaux telle que les orbites de chacun de ces idéaux forment un feuilletage riemannien contenant le feuilletage  $(\overline{F}, \mathcal{F})$  et qu'on puisse, de cette suite de feuilletages ainsi construite, extraire une sous-suite pour compléter la trace du drapeau sur  $\overline{F}$  en un drapeau riemannien complet stable. Ainsi pour de tels drapeaux, on a aussi les mêmes conclusions qu'au corollaire 3.5.

## References

- [1] **R. Almeida and P.Molino,1986.** Flots riemanniens sur les 4- variétés compactes, Tôhoku Mathematical Journal, 2,313-326.
- [2] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002.** Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens, JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3, 281-288.
- [3] **Y.Carrière,1984 .** Flots riemanniens, in " Structures transverses des feuilletages, Astérisque, 116 31-52.
- [4] **J.Dieudonné,1971.** Eléments d'analyse, Gauthier -Villars, Paris, tome 4,192.
- [5] **H.Diallo, 2002 .**Sur les drapeaux de Lie.Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [6] **H.Diallo, 2002 .**Relèvement d'un drapeau riemannien et drapeaux de Lie du tore hyperbolique  $n + 1$ -dimensionnel, Ann. Math. Blaise Pascal 12, 2005 no. 2, 245–258.
- [7] **A. El Kacimi Alaoui and M.Nicolau,1993.**A class of  $C^\infty$  stable foliations, Ergod.Th.and Dynam.Sys, 13, 667-704.
- [8] **E.Fédida, 1973 .**Feuilletages du plan. Feuilletages de Lie, thèse d'Etat , Strasbourg.
- [9] **E. Ghys, 1984.** Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [10] **P.Molino, 1977.** Etude des feuilletages transversalement complets et applications, Anna.Scient. E.N.S., 289-307.
- [11] **P.Molino, 1982.** Géométrie des feuilletages riemanniens, Proc. Kon. Akad., A 85(1).
- [12] **Raghunatan, M.S., 1968.** Discrete subgroups of Lie groups, Springer.