



**HAL**  
open science

# STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN

Hassimiou Diallo

► **To cite this version:**

| Hassimiou Diallo. STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN. 2006. hal-00018748v1

**HAL Id: hal-00018748**

**<https://hal.science/hal-00018748v1>**

Preprint submitted on 8 Feb 2006 (v1), last revised 14 Dec 2006 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# STRUCTURE D'UN DRAPEAU RIEMANNIEN

Hassimiou DIALLO

Ecole Normale Supérieure, Département des Sciences,

08 BP.10 , Abidjan, CÔTE D'IVOIRE.

Email:diallomh@yahoo.fr

February 8, 2006

**RÉSUMÉ :** le but de ce papier est de montrer qu'un drapeau riemannien complet stable d'une variété compacte connexe est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes (cf. Définitions).

**ABSTRACT.** The aim of this paper is to show that any closed complete Riemannian flag on a compact and connected manifold is conjugated to a flag of homogenous foliations ( see Définitions).

Dans tout ce qui suit les objets sont  $C^\infty$ , la variété  $M$  est connexe et orientable, et les feuilletages considérés sont supposés orientables.

## 1 Généralités sur les drapeaux riemanniens

1) Un *drapeau de feuilletages* (ou tout simplement un *drapeau*) sur une variété  $M$  est la donnée sur cette variété d'une suite croissante de feuilletages  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  telle que  $\dim \mathcal{F}_i = i$ . L'entier  $p$  est la longueur du drapeau. Le drapeau est dit *complet* si le feuilletage  $\mathcal{F}_p$  est de codimension un. Un drapeau de longueur un est réduit à son flot.

2) Un drapeau est dit *riemannien* ( *de Lie, minimal, parallélisable*) si chacun de ses feuilletages est riemannien (de Lie, minimal, transversalement parallélisable).

3) Un drapeau sur  $M = \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{T}^n$  est dit *linéaire* si chacun de ses feuilletages est linéaire.

4) Etant donné un drapeau  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  sur une variété  $M$  et une submersion  $\pi$  d'une variété  $M^\#$  sur  $M$ , un *relèvement du drapeau*  $\mathcal{D}$  sur  $M^\#$  est, s'il existe, un drapeau  $\mathcal{D}^\# = (\mathcal{F}_1^\#, \dots, \mathcal{F}_p^\#)$  sur  $M^\#$ , tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_i^\#$  se projette sur le feuilletage  $\mathcal{F}_i$  par  $\pi$ .

5) Un drapeau  $\mathcal{D} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p\}$  sur une variété  $M$  et un drapeau  $\mathcal{D}' = \{\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_p\}$  sur une variété  $M'$  sont dits *conjugués* s'il existe un difféomorphisme de  $M$  sur  $M'$  échangeant  $\mathcal{F}_i$  et  $\mathcal{F}'_i$ .

**Proposition 1.1** *Etant donné un drapeau riemannien , il existe une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages.*

**Preuve.** Il suffit de prouver que si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont deux feuilletages riemanniens d'une variété  $M$  tels que  $\mathcal{F}'$  soit une extension de  $\mathcal{F}$ , alors , il existe sur  $M$  une métrique riemannienne quasi-fibrée à la fois pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ . Et on achève par récurrence.

Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $M$  formé d'ouverts distingués à la fois pour  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  de sorte que les feuilletages riemanniens soient définis respectivement par les cocycles  $(U_i, T, f_i, g_{ij})_{i \in I}$  et  $(U_i, T', f'_i, g'_{ij})_{i \in I}$ . Pour chaque  $i \in I$ , il existe une submersion locale  $\theta_i$  de  $f_i(U_i)$  dans  $T'$  telle  $f'_i = \theta_i \circ f_i$ . Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_i} & T & \xrightarrow{\theta_i} & T' \\ Id_{U_i \cap U_j} \downarrow & & \downarrow g_{ji} & & \downarrow g'_{ji} \\ U_i \cap U_j & \xrightarrow{f_j} & T & \xrightarrow{\theta_j} & T' \end{array}$$

Et si  $h$  et  $h'$  sont les métriques riemanniennes respectives de  $T$  et  $T'$  définissant les feuilletages riemanniens  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$ , comme  $g'_{ji} \circ \theta_i = \theta_j \circ g_{ji}$ , et que  $g_{ji}$  est une isométrie locale, alors

$$Tg_{ji}(KerT\theta_i) = KerT\theta_j \quad \text{et} \quad Tg_{ji}((KerT\theta_i)^\perp) = (KerT\theta_j)^\perp$$

Sur chaque ouvert  $f_i(U_i)$  modifions la métrique induite par  $h$  de la façon suivante: tout en la préservant sur  $KerT\theta_i$  et en gardant l'orthogonalité des sous-fibrés  $KerT\theta_i$  et  $(KerT\theta_j)^\perp$ , on la substitue sur  $(KerT\theta_i)^\perp$  par l'image réciproque par  $\theta_i$  de la métrique riemannienne  $h'$  de  $T'$ . Avec ces nouvelles métriques sur les  $f_i(U_i)$ , les  $\theta_i$  deviennent par construction des submersions riemanniennes, et les  $g_{ij}$  restent encore des isométries. Comme la variété transverse modèle  $T$  du feuilletage riemannien  $\mathcal{F}$ , est par construction, la somme disjointe des  $f_i(U_i)$ , alors la somme disjointe de ces nouvelles métriques sur les  $f_i(U_i)$  définissent sur  $T$  une métrique  $\tilde{h}$ . A cette nouvelle métrique de  $T$ , il est loisible d'y associer des métriques  $\mathcal{F}$ -quasi-fibrées. Et chacune de ces métriques est aussi quasi-fibrée pour  $\mathcal{F}'$ . ■

Ainsi, étant donné un drapeau riemannien, il existe toujours une métrique quasi-fibrée commune à tous les feuilletages. On dira d'une telle métrique qu'elle est *quasi-fibrée pour le drapeau*.

Le résultat qui va suivre est une généralisation du théorème de Y.Carrière sur les flots riemanniens minimaux d'une variété compacte [3], qui montre la rigidité des drapeaux à flot riemannien minimal

**Théorème 1.2** *Tout drapeau d'une  $n$ -variété compacte et connexe dont le flot est riemannien minimal est conjugué à un drapeau linéaire du tore  $\mathbb{T}^n$ .*

**Preuve.** Puisque, d'après le théorème de Y. Carrière sur les flots riemanniens un tel flot est conjugué à un flot linéaire du tore  $\mathbb{T}^n$ [3], il suffit de montrer que sur le tore  $\mathbb{T}^n$ , tout drapeau dont le flot est linéaire minimal est un drapeau linéaire.

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  un drapeau de  $\mathbb{T}^n$  de flot linéaire et minimal, et  $Y_1, \dots, Y_n$  un parallélisme linéaire de  $\mathbb{T}^n$  tel que  $Y_1$  engendre le flot  $\mathcal{F}_1$  et  $Y_2, \dots, Y_n$  un parallélisme du fibré normal de  $\mathcal{F}_1$  qu'on identifiera à  $(T\mathcal{F}_1)^\perp$  si on munit  $\mathbb{T}^n$  de la métrique riemannienne dont une base orthonormée en chaque point  $a$  de  $\mathbb{T}^n$  est  $(Y_1(a), \dots, Y_n(a))$ .

$T\mathcal{F}_2 \setminus T\mathcal{F}_1$  étant un sous-fibré de rang  $n$  de  $T\mathbb{T}^n$  est trivialisable et est donc défini par un champ de vecteurs complet  $Z = \sum_{i=2}^n b_i Y_i$  avec des  $b_i$  dans l'anneau  $A$  des  $\mathcal{C}^\infty$ -fonctions numériques sur  $\mathbb{T}^n$ .  $(Y_1, Z)$  réalise un parallélisme de  $T\mathcal{F}_2$  et puisque les feuilletages sont supposés orientables, on peut toujours prendre  $Z$  comme un champ unitaire orienté. Comme le crochet  $[Y_1, Z]$  est tangent à  $\mathcal{F}_2$ , il vient que  $[Y_1, Z] = \sum_{i=2}^n (Y_1 b_i) Y_i = k Z_2 = k \sum_{i=2}^n b_i Y_i$  où  $k \in A$  est évidemment fonction de  $Z$ , donc des  $b_i$ . D'où l'on tire que pour tout  $i = 2, \dots, n$ ,

$$(E_i) : Y_1 b_i = k b_i$$

L'existence et de l'unicité de  $Z$  assurent aussi l'existence et l'unicité des solutions globales de ce système suivant les conditions initiales imposées par le champ unitaire orienté  $Z$ . Ensuite puisque le champ  $Z$  est supposé unitaire, si  $a \in \mathbb{T}^n$ , l'un des  $b_j$ , qu'on notera  $b$ , est nécessairement non nul en  $a$ . Mais, comme la fonction nulle est une solution de  $Y_1 b = k b$ , pour des raisons d'unicité évidentes, cette solution  $b$  ne s'annulera en aucun point de  $\mathbb{T}^n$ .

En posant alors  $\alpha_i = b_i b^{-1}$ , on a :  $b_i = \alpha_i b$

$$\begin{aligned} k b_i &= Y_1 b_i = Y_1(\alpha_i b) = \alpha_i Y_1 b + (Y_1 \alpha_i).b = \\ &= \alpha_i k b + (Y_1 \alpha_i).b = k b_i + (Y_1 \alpha_i).b \end{aligned}$$

D'où l'on tire, puisque  $b$  ne s'annule nulle part sur  $\mathbb{T}^n$ , que pour tout  $i$ ,  $Y_1 \alpha_i = 0$ ; i.e les fonctions  $\alpha_i$  sont des fonctions  $\mathcal{F}_1$ -basiques. Le flot  $\mathcal{F}_1$  étant à feuilles denses, alors les  $\alpha_i$  sont toutes des constantes réelles.

Soit  $\widetilde{Z}_2 = \sum_{i=2}^n \alpha_i Y_i$ , on a  $\widetilde{Z}_2 = b^{-1} Z$ ; ce qui montre que le champ linéaire  $\widetilde{Z}_2$  est tangent à  $\mathcal{F}_2$ . En posant  $\widetilde{Z}_1 = Y_1$ , alors  $(\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2)$  est un parallélisme linéaire de  $T\mathcal{F}_2$  et par suite le feuilletage  $\mathcal{F}_2$  est linéaire.

Ensuite si pour  $2 < i < n$ , le feuilletage  $\mathcal{F}_i$  est supposé linéaire et si  $(\widetilde{Z}_1 = Y_1, \dots, \widetilde{Z}_i)$  est un parallélisme linéaire de  $T\mathcal{F}_i$  et  $(\widetilde{Z}_{i+1}, \dots, \widetilde{Z}_n)$  un parallélisme linéaire de son fibré normal, en utilisant encore le fait que le flot est à orbites denses, on trouve comme précédemment un champ linéaire

$\widetilde{Z}_{i+1} = \sum_{k=i+1}^n \alpha_k \widetilde{Y}_k$  de sorte que  $(\widetilde{Z}_1 = Y_1, \dots, \widetilde{Z}_{k+1})$  soit un parallélisme linéaire du fibré tangent de  $\mathcal{F}_{i+1}$ . D'où le résultat par récurrence. ■

Ce théorème généralise aussi le résultat établi dans [2] où l'on trouvera des exemples qui montrent que l'hypothèse sur la *minimalité* du flot est essentielle même dans le cas d'un drapeau de Lie sur un tore.

**Corollaire 1.3** *Les drapeaux minimaux complets de même flot riemannien d'une  $n+1$ -variété compacte connexe sont conjugués à un même drapeau linéaire du tore  $\mathbb{T}^{n+1}$ .*

**Preuve.** D'après le théorème précédent, on peut supposer que les deux drapeaux sont des drapeaux linéaires d'un tore  $\mathbb{T}^{n+1}$ . Il suffira de montrer que ces drapeaux sont conjugués à un même modèle. Soit  $\mathcal{D}_n = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  un drapeau minimal linéaire de  $\mathbb{T}^{n+1}$ , de flot dirigé par un vecteur  $v_1$ , et soit  $A$  la matrice carrée d'ordre  $k+1$ , de déterminant  $un$ , à coefficients entiers, diagonalisable et à valeurs propres toutes positives, associée au flot  $\mathcal{F}_{v_1}$  [1].

Soit  $(u_1 = v_1, u_2, \dots, u_{n+1})$  une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  adaptée à  $\mathcal{D}_n$  i.e telle que pour tout  $i, 1 \leq i \leq n$ ,  $\overline{\langle u_1 = v_1, \dots, u_i \rangle}$  soit une direction du feuilletage linéaire  $\mathcal{F}_i$ . Soit  $(u_1 = v_1, v_2, \dots, v_{n+1})$  une base de  $\mathbb{R}^{n+1}$  formée de vecteurs propres de  $A$ , soit  $\mathcal{F}'_i$  le feuilletage linéaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de direction  $\overline{\langle u_1 = v_1, \dots, v_i \rangle}$ , soit  $L$  l'isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par  $L(v_i) = u_i$  et  $\bar{L}$  l'isomorphisme de variétés de  $\mathbb{T}^{n+1}$  sur  $N = \mathbb{R}^{n+1} \setminus L(\mathbb{Z}^{n+1})$  rendant commutatif le diagramme des projections

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}^{n+1} & \xrightarrow{\bar{L}} & N \end{array}$$

Alors si  $\mathcal{F}_i^\diamond$  est le projeté de  $\mathcal{F}'_i$  sur  $N \cong \mathbb{T}^{n+1}$ ,  $\bar{L}$  conjugue les drapeaux  $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$  et  $(\mathcal{F}_1^\diamond, \dots, \mathcal{F}_n^\diamond)$ . ■

On peut noter pour la suite que si  $\mathcal{D}_n$  est le drapeau linéaire adapté à la base  $(v_1, \dots, v_{n+1})$ , la projection linéaire  $\sigma_i$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sur le sous-espace  $\overline{\langle v_{i+1}, \dots, v_{n+1} \rangle} \cong \mathbb{R}^{n-i+1}$  suivant la direction  $\overline{\langle v_1, \dots, v_i \rangle}$  est une développante de  $\mathcal{F}_i$  et qu'ensuite, puisque  $A$  laisse invariant le feuilletage relevé de  $\mathcal{F}_i$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  et le sous-espace  $\overline{\langle v_{i+1}, \dots, v_{n+1} \rangle}$ , il existe une matrice carrée  $A_i$  d'ordre  $n-i+1$ , dont l'application linéaire  $\rho_{A_i}$  associée est telle qu'on ait  $\rho_{A_i} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \rho_A$ . Il en résulte que cette matrice  $A_i$  est diagonalisable, à valeurs propres positives et de vecteurs propres  $v_{i+1}, \dots, v_n$ , de sorte que pour  $t \in \mathbb{R}$ , la matrice  $A_i^t$  est définie et

$$\rho_{A_i^t} \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \rho_{A^t} \quad (\star)$$

## 2 Structure d'un drapeau riemannien complet

Une obstruction à l'existence d'un drapeau riemannien complet sur une variété (non nécessairement compacte) est donnée par:

**Théorème 2.1** Soit  $M$  une variété supportant un drapeau riemannien complet. Alors le drapeau est parallélisable et la variété  $M$  complètement parallélisable.

**Preuve.** Pour un feuilletage  $\mathcal{F}$  de  $M$ , on désigne :

- $\Xi\mathcal{F}$  le module des champs de vecteurs tangents à  $\mathcal{F}$ ,
- $\nu(\mathcal{F})$  le fibré normal de  $\mathcal{F}$ ,
- $l(M, \mathcal{F})$ , l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés transverses,
- $(T\mathcal{F})^\perp$  le fibré orthogonal de  $T\mathcal{F}$  relativement à une métrique riemannienne  $g$  sur  $M$ ,

- si  $X \in \Xi\mathcal{F}$ ,  $\overline{\langle X \rangle}$  le sous- fibré de rang  $un$  qu'il engendre,

Soit  $\mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$  un drapeau riemannien sur une  $n$ -variété  $M$  et  $\mathcal{F}$  un feuilletage quelconque de  $\mathcal{D}$ . Soient  $m = \dim\mathcal{F}$  (i.e.  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_m$ ) et  $g$  une métrique quasi-fibrée du drapeau (prop. 1.1). Alors pour tout  $i, m \leq i \leq n-2$ , les sous-fibrés  $(T\mathcal{F}_i)^\perp \cap T\mathcal{F}_{i+1}$  et  $(T\mathcal{F}_{n-1})^\perp$  sont de rang  $un$ . Soient respectivement  $Y_{i+1}$  et  $Y_n$  les champs de vecteurs *unitaires* qui les engendrent. D'après ce qui précède, et puisque  $g$  est quasi-fibrée pour  $\mathcal{F}$ , il est clair que:

- 1)  $Y_{m+1}, \dots, Y_n$  sont  $(n-m)$  champs globaux linéairement indépendants en chaque point de  $M$ , formant une base de  $\nu(\mathcal{F}) \cong (T\mathcal{F})^\perp$ .
- 2) Pour tout  $k, 0 \leq k \leq n-m-1$

$$T\mathcal{F}_{m+k+1} = T\mathcal{F}_{m+k} \oplus \overline{\langle Y_{m+k+1} \rangle} = T\mathcal{F}_m \oplus \left( \bigoplus_{m+1 \leq j \leq m+k+1} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$$

- 3) Pour tout  $i \geq m+1$  et pour tout  $X \in \Xi\mathcal{F}$ ,  $Y_i$  étant unitaire alors on a:

$$0 = Xg(Y_i, Y_i) = 2g([X, Y_i], Y_i).$$

Il résulte de 2) et 3) que pour tout  $i \geq m+1$ ,  $[X, Y_i] \in \Xi\mathcal{F}_i$  et est orthogonal à  $Y_i$ ; ce qui implique que  $[X, Y_i]$  est tangent à  $\mathcal{F}_{i-1}$  puisque  $T\mathcal{F}_i = T\mathcal{F}_{i-1} \oplus \overline{\langle Y_i \rangle}$ . Ensuite pour tous  $i, j, m+1 \leq i < j \leq n$ , on a

$$0 = Xg(Y_i, Y_j) = g([X, Y_i], Y_j) + g(Y_i, [X, Y_j]) = g([X, Y_i], Y_j)$$

car  $[X, Y_i] \in \Xi\mathcal{F}_{i-1}$  est orthogonal à  $Y_j$  puisque  $Y_j \perp T\mathcal{F}_{j-1}$  et  $T\mathcal{F}_{i-1} \subset T\mathcal{F}_{j-1}$ .

Ceci montre que  $[X, Y_i]$  est tangent à  $\mathcal{F}_{i-1}$  et est orthogonal à  $Y_{m+1}, \dots, Y_n$ . Comme  $T\mathcal{F}_{i-1} = T\mathcal{F}_m \oplus \left( \bigoplus_{m+1 \leq j \leq i-1} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$  alors  $[X, Y_i]$  est tangent à  $\mathcal{F}_m$ ,

i.e. pour tout  $i \geq m+1$ ,  $Y_j \in l(M, \mathcal{F})$ . Ce qui assure que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage transversalement parallélisable; par suite le drapeau est parallélisable.

Pour  $m=1$ , soit  $Y_1$  un champ unitaire complet tangent au flot  $\mathcal{F}_1$ ,  $(Y_2, \dots, Y_n)$  le parallélisme transverse de  $\mathcal{F}_1$ , alors par construction,  $(Y_1, \dots, Y_n)$  est un parallélisme de  $TM = T\mathcal{F}_1 \oplus \left( \bigoplus_{2 \leq j \leq n} \overline{\langle Y_j \rangle} \right) = \left( \bigoplus_{1 \leq j \leq n} \overline{\langle Y_j \rangle} \right)$  et  $(Y_{i+1}, \dots, Y_n)$  un parallélisme de  $\mathcal{F}_i$ . Ce parallélisme est alors tel que :

pour tous  $i, j, 1 \leq i < j \leq n$ ,  $[Y_i, Y_j] \in \Xi\mathcal{F}_i$  et pour tout  $k < i$ ,

$$g([Y_i, Y_j], Y_k) = Y_j g(Y_k, Y_i) - g([Y_k, Y_j], Y_i) = 0$$

Il en résulte que  $[Y_i, Y_j] \in \overline{\langle Y_1, \dots, Y_{i-1} \rangle}^\perp \cap \Xi\mathcal{F}_i = \overline{\langle Y_i \rangle}$ , donc pour tous  $i, j, 1 \leq i < j \leq n$  on a  $[Y_i, Y_j] = k_{ij} Y_i$  et alors la variété  $M$  est complètement parallélisable. ■

Un tel parallélisme est dit *compatible* avec le drapeau.

### 3 Structure d'un drapeau riemannien complet stable

**Proposition 3.1** *Soit  $(M, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1})$  un drapeau d'une  $n + 1$ -variété compacte connexe tel que:*

- i) le flot est un feuilletage transversalement parallélisable,*
- ii) la variété basique de ce flot admet pour revêtement universel un groupe de Lie résoluble,*
- iii) le feuilletage  $\mathcal{F}_{k+1}$  coïncide avec le feuilletage basique du flot.*

*Alors la variété  $M$  est difféomorphe à une variété homogène d'un groupe de Lie résoluble et le drapeau est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.*

**Preuve.** L'entier  $k$  étant la dimension de l'algèbre de Lie structurale du flot

$(M, \mathcal{F})$ , si  $\mathbb{T}^{k+1} \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi_k} W$  est sa fibration basique, alors, on sait qu'il existe une matrice  $A \in \mathbb{S}\mathbb{L}(k+1; \mathbb{Z})$  diagonalisable ayant toutes ses valeurs propres positives telle que la restriction du flot à chaque fibre soit conjuguée à un même flot modèle linéaire du tore  $\mathbb{T}^{k+1}$  de direction  $v_1$  un des vecteurs propres de  $A$ ; en plus la matrice  $A$  est la matrice unité si et seulement si le flot est isométrique[1]. Des exemples de telles matrices peuvent être trouvés dans[6].

Soit  $G_W$  le groupe de Lie connexe résoluble (donc simplement connexe [4]) revêtement universel de  $W$  et  $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  la structure de groupe de Lie de  $\mathbb{R}^{k+1} \times G_W$  définie par la loi :

$$(x, g) \cdot (x', g') = (A^{\rho(g)} x' + x, gg')$$

où  $\rho$  est le prolongement linéaire d'une représentation non nulle de  $\pi_1(W)$  sur  $\mathbb{Z}[11]$ . On notera que  $G$  est le groupe produit  $\mathbb{R}^{k+1} \times G_W$  si et seulement si le flot est isométrique.

Ensuite, puisque la variété  $W = \frac{G_W}{\pi_1(W)}$  est compacte, et  $\pi_1(W)$  s'identifiant à un sous-groupe discret uniforme de  $G_W$ ; alors, il est clair que  $\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)$  est aussi un sous-groupe discret uniforme de  $G$  et par suite  $P = \frac{G}{\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)}$  est une  $n + 1$ - variété compacte.

Par ailleurs, comme le groupe produit semi-direct de deux groupes résolubles est résoluble, alors  $G$  est résoluble. Ensuite, le groupe résoluble  $G_W$ , étant isomorphe à un  $\mathbb{R}^m$ [4], est donc contractile; et alors le fibré réciproque du revêtement universel de  $W$  par la projection basique  $\pi_k$  est triviale.

Ceci étant, considérons la submersion  $\Phi$  de  $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  sur  $\pi_k^*(G_W)$  définie par  $\Phi(t, g) = \psi^{-1}(\theta(t), g)$  où  $\theta$  est la projection canonique de  $\mathbb{R}^{k+1}$  sur  $\mathbb{T}^{k+1}$  et  $\psi : \pi_k^*(G_W) \rightarrow \mathbb{T}^{k+1} \times G_W$  une trivialisatation de  $\pi_k^*(G_W)$ . Pour tous  $s \in \pi_1(W)$  et  $(t, g) \in \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  on a

$$\Phi(s \bullet (t, g)) = s \cdot \Phi(t, g)$$

où la seconde action est l'action canonique de  $\pi_1(W)$  sur  $\pi_k^*(G_W)$ ;  $\Phi$  passe au quotient et définit une submersion surjective  $\varphi$  de  $P = G / \mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)$  sur

$M$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & \pi_k^*(G_W) \\ p \downarrow & & \downarrow pr_1 \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

où  $pr_1$  est la première projection de  $\pi_k^*(G_W) = M \times_W G_W$  et  $p$  la projection canonique de  $G$  sur  $P$ . En s'aidant du diagramme commutatif suivant ,

$$\begin{array}{ccccccc} G & \xrightarrow{\theta \times Id_{G_W}} & \mathbb{T}^{k+1} \times G_W & \xrightarrow{pr_2} & G_W \\ Id_G \downarrow & & \downarrow \psi^{-1} & & \downarrow Id_{G_W} \\ G & \xrightarrow{\Phi} & \pi_k^*(G_W) & \xrightarrow{pr_2} & G_W \\ p \downarrow & & \downarrow pr_1 & & \downarrow p_W \\ P & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\pi_k} & W \end{array}$$

on a , pour tout  $m \in M$  ,

$$\begin{aligned} & ((\theta \times Id_{G_W})^{-1} \circ \psi)pr_1^{-1}(m) = \\ & (\theta \times Id_{G_W})^{-1}\{(z_0, sg_0) \in \mathbb{T}^{k+1} \times G_W / p_W(g_0) = \pi_k(m) \text{ et } s \in \pi_1(W)\} = \\ & (\theta \times Id_{G_W})^{-1}(\pi_1(W).(z_0, g_0)) = (\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)).(t_0, g_0) = p^{-1}(\varphi^{-1}(m)) , \end{aligned}$$

où

$$\theta(t_0) = z_0 = (pr_1 \circ \psi)(m, g_0);$$

alors

$$\varphi^{-1}(m) = p((\mathbb{Z}^{k+1} \times_A \pi_1(W)).(t_0, g_0))$$

est un singleton et il en résulte que  $\varphi$  est une submersion bijective, *i.e* un isomorphisme de variétés.

La restriction du drapeau à l'adhérence de chaque feuille du flot , est un drapeau minimal de même flot riemannien modèle . D'après le théorème 1.2 et le corollaire 1.3, on peut supposer que cette restriction est conjuguée au drapeau modèle  $\mathcal{D}'_k = (\mathcal{F}'_1, \dots, \mathcal{F}'_k)$  du corollaire 1.3 . Le relevé horizontal du drapeau  $\mathcal{D}'_k$  sur  $G = \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W$  est le relevé par  $p$  du drapeau  $\varphi^* \mathcal{D}_k = (\varphi^* \mathcal{F}_1, \dots, \varphi^* \mathcal{F}_k)$ . Ensuite en s'aidant de la formule  $(\star)$  , il est facile de voir que les feuilletages  $\varphi^* \mathcal{F}_i$  ,  $1 \leq i \leq k$ , sont des feuilletages de Lie dont les développantes respectives sont les morphismes de groupes  $D_i : \mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W \rightarrow \mathbb{R}^k \times_{A_i} G_W$  définis par

$$D_i(t, g) = (\sigma_i(t), g) ,$$

et que le feuilletage  $\varphi^* \mathcal{F}_{k+1}$  correspond au feuilletage défini par la projection  $\mathbb{R}^{k+1} \times_A G_W \rightarrow G_W$ ; et qu'au total le drapeau considéré  $(M, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1})$  est conjugué, au moyen de  $\varphi$ , à un drapeau de feuilletages homogènes ([7], [8]). ■

**Définition 3.2** *Un drapeau de feuilletages riemanniens  $\mathcal{D}$  est dit **stable** si tout feuilletage est soit minimal, soit régulier et d'adhérence dans  $\mathcal{D}$  .*

Cela signifie que chaque feuilletage à feuilles non fermées est dense dans les feuilletages suivants ([10]) jusqu'au prochain feuilletage à feuilles fermées s'il en existe.

**Théorème 3.3** *Tout drapeau riemannien complet stable  $(M, \mathcal{D})$  d'une  $n+1$ -variété compacte connexe est conjugué à un drapeau de feuilletages homogènes.*

*De façon plus précise:*

- *La variété  $M$  est difféomorphe à un espace homogène quotient d'un groupe de Lie résoluble  $G$  par un sous-groupe discret uniforme  $\Gamma$ , et*

- *il existe une suite strictement décroissante de sous-groupes distingués dont les orbites déterminent le drapeau.*

**Preuve.** On pose  $\dim M = n + 1$  et on va raisonner par récurrence sur le nombre  $l$  de feuilletages à feuilles fermées du drapeau.

- Si  $l = 0$ , le flot est minimal, le résultat est évident (théo.1.2).

Sinon, soit  $M_{n+1}$  une variété compacte connexe supportant un drapeau riemannien complet stable  $\mathcal{D}_n = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ . On sait que les feuilletages du drapeau sont tous transversalement parallélisables (théo.2.1). Soit  $k$  la dimension de l'algèbre de Lie structurale du flot de  $(M_{n+1}, \mathcal{D}_n)$ ;  $k \leq n - 1$ .

Soit  $\mathbb{T}^{k+1} \hookrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{\pi_k} W_{n-k}$  sa fibration basique. Comme le drapeau est stable et  $l \neq 0$ ,  $\overline{\mathcal{F}_1}$ , le feuilletage par les adhérences du flot, coïncide avec le feuilletage  $\mathcal{F}_{k+1}$ ; leurs fibrations basiques sont alors identiques. Dans la suite exacte d'Atiyah de  $C^0(W_{n-k})$ -modules et d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow \Gamma g_{W_{n-k+1}} \rightarrow l(M, \mathcal{F}_{k+1}) \xrightarrow{\pi_k} \Xi(W_{n-k}) \rightarrow 0$$

associée au feuilletage à feuilles fermées  $\mathcal{F}_{k+1}$  [9], le  $C^0(W_{n-k})$ -module  $\Gamma g_{W_{n-k}}$  est alors nul;  $\pi_k$  est donc un isomorphisme d'algèbres. Ensuite la variété  $M_{n+1}$  étant complètement parallélisable (théo.2.1), soit  $(Y_1, \dots, Y_{n+1})$  un parallélisme de  $M_{n+1}$  compatible avec le drapeau qu'il supporte. Les champs de vecteurs  $\mathcal{F}_{k+1}$ -basiques  $Y_{k+2}, \dots, Y_{n+1}$  se projettent par  $\pi_k$  en  $n - k$  champs complets de  $\Xi(W_{n-k})$  qui montrent que la variété basique  $W_{n-k}$  des feuilletages  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k+1}$  est complètement parallélisable et supporte un drapeau riemannien complet stable  $\mathcal{D}_{n-k-1}^b = (\mathcal{F}_1^b, \dots, \mathcal{F}_{n-k-1}^b)$  où pour tout  $s$ ,  $1 \leq s \leq n - k - 1$ ,  $\mathcal{F}_s^b = \pi_k(\mathcal{F}_{k+1+s})$ . Comme précédemment  $\mathcal{D}_{n-k-1}^b$  va se projeter sur la variété basique de  $\mathcal{F}_1^b$  en drapeau riemannien complet stable qui est aussi le projeté de  $\mathcal{D}_n$  sur la variété basique du second feuilletage à feuilles fermées de  $\mathcal{D}_n$ . Soit  $W'_1 = W_{n-k}, \dots, W'_l$ , la suite des variétés basiques ainsi obtenue par projections successives. La projection de  $\mathcal{D}_n$  sur  $W'_l$  est un drapeau riemannien dont aucun feuilletage n'est à feuilles fermées car sinon  $\mathcal{D}_n$  contiendrait, contrairement à l'hypothèse, plus de  $l$  feuilletages à feuilles fermées. Ensuite puisque ce drapeau sur  $W'_l$  est stable, ses feuilletages sont nécessairement minimaux; par suite on peut considérer que  $W'_l = \mathbb{T}^q$  et que le drapeau qu'il supporte est linéaire (théo.1.2). Comme le revêtement universel  $\widetilde{W}'_l = \mathbb{R}^q$  est un groupe de Lie résoluble, alors par la proposition 3.1, la projection de  $\mathcal{D}_n$  sur  $W'_{l-1}$  est un drapeau de feuilletages homogènes et le revêtement universel  $\widetilde{W}'_{l-1}$  est un

groupe de Lie résoluble. Par récurrence , toutes les variétés basiques considérées sont des variétés homogènes provenant de groupes de Lie résolubles. Il vient donc avec la même proposition 3.1, que la variété  $M_{n+1}$  est difféomorphe à une variété homogène provenant d'un groupe résoluble . En clair , il existe une suite d'entiers strictement positifs  $k_1, \dots, k_{l-1}$  , des groupes de Lie résolubles  $G_1, \dots, G_l$  , et des matrices carrées  $A_1, \dots, A_{l-1}$  tels que:

$$M \cong \frac{G}{\pi_1(M)}; G = \mathbb{R}^{k_1} \times_{A_1} G_1 = \mathbb{R}^{k_1} \times_{A_1} (\mathbb{R}^{k_2} \times_{A_2} G_2) = \dots,$$

$$G_i = \mathbb{R}^{k_i} \times_{A_i} G_{i+1}, G_{l-1} = \mathbb{R}^{k_{l-1}} \times_{A_{l-1}} \mathbb{R}^s, G_l = \mathbb{R}^q,$$

et il est facile de voir que le relévé de chaque feuilletage du drapeau  $\mathcal{D}_n$  sur  $G$  est soit le relévé d'un feuilletage homogène , soit le produit du relévé d'un feuilletage basique et du relévé d'un feuilletage homogène. Mais comme les feuilletages basiques des feuilletages du drapeau sont aussi des feuilletages homogènes, alors le drapeau  $\mathcal{D}_n$  est à une conjugaison près, un drapeau de feuilletages homogènes.

Enfin, la considération de la suite  $(H_i)_{1 \leq i \leq n}$ , où  $H_i = Ker D_i$  et les  $D_i$  des développantes de ces feuilletages homogènes, permet de conclure. ■

1) Le revêtement universel d'une variété compacte connexe supportant un drapeau riemannien complet stable (donc un drapeau de Lie) est un groupe de Lie finement résoluble et le groupe d'holonomie de chacun des feuilletages est finement polycyclique [5].

2) La preuve du théorème 3.3 montre que si le flot du drapeau et les différents flots induits par les feuilletages sur les variétés basiques sont isométriques alors  $G = \mathbb{R}^{n+1}$ , et le drapeau est linéaire.

En particulier un drapeau riemannien complet dont les feuilletages sont à feuilles fermées est un drapeau linéaire du tore.

3) La preuve de la proposition 3.1, le théorème 3.3 et [5] permettent de voir que tout drapeau riemannien complet d'une 3-variété compacte connexe est , à une conjugaison près, un drapeau de Lie du tore hyperbolique  $\mathbb{T}_A^3 (tr A \geq 2)$ ; ce drapeau est un drapeau de feuilletages homogènes , sauf peut-être lorsque le flot est à feuilles fermées et le second feuilletage minimal.

Il en résulte qu'un flot riemannien sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  ou sur un espace lentillaire de dimension 3 n'admet aucune extension riemannienne propre.

**Définition 3.4** Si  $F$  est l'adhérence d'une feuille d'un feuilletage  $\mathcal{F}_r$  d'un drapeau stable  $(M, \mathcal{D} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p))$ , les restrictions des feuilletages  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s$  à  $F$ , où  $r \leq s < \min(p, \dim F)$ , forment un drapeau qu'on appellera **trace** de  $\mathcal{D}$  sur  $F$  .

On peut alors avec cette définition décrire les adhérences des feuilles d'un feuilletage d'un drapeau riemannien complet stable comme suit:

**Corollaire 3.5** Soit  $(M, \mathcal{D})$  un drapeau riemannien complet stable d'une variété compacte et connexe, et  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $\mathcal{D}$  . Alors:

1) les adhérences des feuilles de  $\mathcal{F}$  sont isomorphes à une variété homogène d'un groupe de Lie finement résoluble,

2) la trace de  $\mathcal{D}$  sur chacune de ces adhérences est un drapeau de feuilletages homogènes.

On rappelle qu'une algèbre de Lie de dimension  $n$  est dite finement résoluble si elle contient une suite strictement croissante d'idéaux  $(I_k)_{0 \leq k \leq n+1}$  commençant par l'idéal nul et se terminant par  $g$ . Alors si  $\overline{F}$  est l'adhérence d'une feuille  $F$  d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'un drapeau riemannien stable d'une variété compacte et connexe, et si l'algèbre de Lie structurale  $l(\overline{F}, \mathcal{F})$  est finement résoluble, il existe une base de champs de Killing transverses de cette algèbre, permettant de construire une suite croissante d'idéaux telle que les orbites de chacun de ces idéaux forment un feuilletage riemannien contenant le feuilletage  $(\overline{F}, \mathcal{F})$  et qu'on puisse, de cette suite de feuilletages ainsi construite, extraire une sous-suite pour compléter la trace du drapeau sur  $\overline{F}$  en un drapeau riemannien complet stable. Ainsi pour de tels drapeaux, on a aussi les mêmes conclusions qu'au corollaire 3.5.

## References

- [1] **R. Almeida and P.Molino,1986.** Flots riemanniens sur les 4- variétés compactes, Tôhoku Mathematical Journal, 2,313-326.
- [2] **B.Bossoto and H.Diallo, 2002.** Sur les drapeaux de feuilletages riemanniens, JP Journal of Geometry and Topology, 2, 3, 281-288.
- [3] **Y.Carrière,1984 .** Flots riemanniens, in " Structures transverses des feuilletages, Astérisque, 116 31-52.
- [4] **J.Dieudonné,1971.** Eléments d'analyse, Gauthier -Villars, Paris, tome 4,192.
- [5] **H.Diallo, 2002 .**Sur les drapeaux de Lie.Afrika Mathematika,3, 13 ,75-86.
- [6] **A. El Kacimi Alaoui and M.Nicolau,1993.**A class of  $C^\infty$  stable foliations, Ergod.Th.and Dynam.Sys, 13, 667-704.
- [7] **E.Fédida, 1973 .**Feuilletages du plan. Feuilletages de Lie, thèse d'Etat , Strasbourg.
- [8] **E. Ghys, 1984.** Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, Anna . Inst. Fourier , Grenoble, 34, 4, 203-223.
- [9] **P.Molino, 1977.** Etude des feuilletages transversalement complets et applications, Anna.Scient. E.N.S., 289-307.
- [10] **P.Molino, 1982.** Géométrie des feuilletages riemanniens, Proc. Kon. Akad., A 85(1).
- [11] **Ragunatan, M.S., 1968.** Discrete subgroups of Lie groups, Springer.